

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Сигов А.С. Главный редактор журнала, академик РАН, профессор, д.ф.-м.н., президент РТУ МИРЭА

Кудж С.А. Профессор д.т.н., ректор РТУ МИРЭА

Банис Ю.Й. Профессор, хабилитированный доктор наук, проректор Вильнюсского университета, Литва

Боков А.А. Старший научный сотрудник, химический факультет и 4D LABS, Университет Саймона Фрейзера, Ванкувер, Британская Колумбия, Канада

Буслаева Т.М. Профессор, д.х.н., РТУ МИРЭА

Буш А.А. Профессор, д.т.н., директор Института материалов твердотельной электроники РТУ МИРЭА

Вахрушев С.Б. Профессор, д.ф.-м.н., зав. лабораторией нейтронных исследований Физико-технического института им. А.Ф. Иоффе РАН, профессор кафедры Физической электроники СПбГПУ

Голованова Н.Б. Профессор, д.э.н., заместитель первого проректора РТУ МИРЭА

Гуляев Ю.В. Академик РАН, член Президиума РАН, профессор, д.ф.-м.н., научный руководитель Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН

Жуков Д.О. Профессор, д.т.н., зав. кафедрой интеллектуальных технологий и систем РТУ МИРЭА

Кимель А.В. Доцент, к.ф. -м.н., Университет Радбауд, г. Наймеген, Нидерланды

Козлов Г.В. Профессор, д.ф.-м.н., заместитель руководителя аппарата генерального директора АО «Концерн ВКО „Алмаз-Антей“»

Кондратенко В.С. Профессор, д.т.н., зав. кафедрой оптических и биотехнических систем и технологий РТУ - МИРЭА

Крамаров С.О. Профессор, д.ф.-м.н., главный научный сотрудник Сургутского государственного университета

Мишина Е.Д. Профессор, д.ф.-м.н., зав. специализированной учебно-научной лабораторией фемтосекундной оптики для нанотехнологий РТУ МИРЭА

Пасечник С.В. Профессор, д.ф.-м.н., профессор кафедры оптических и биотехнических систем и технологий РТУ МИРЭА

Перно Ф. Профессор, проректор по научной работе, Центральная Школа г. Лилль, Франция

Романов М.П. Профессор, д.т.н., директор Института кибернетики РТУ МИРЭА

Савиных В.П. Член-корреспондент РАН, д.т.н., профессор, президент Московского государственного университета геодезии и картографии (МИИГАиК)

Скотт Дж. Профессор, член Лондонского Королевского общества, Университет Кембриджа, Великобритания

Соколов В.В. Профессор, д.ф.-м.н., первый проректор РТУ МИРЭА

Тимошенко А.В. Профессор, д.т.н., заместитель первого проректора РТУ МИРЭА

Фетисов Ю.К. Профессор, д.ф.-м.н., профессор кафедры нанoeлектроники РТУ МИРЭА

Харин Ю.С. Член-корреспондент НАН Беларуси, профессор, д.ф.-м.н., директор Научно-исследовательского института прикладных проблем математики и информатики Белорусского государственного университета, Беларусь

Цветков В.Я. Профессор, д.т.н., советник ректората РТУ МИРЭА

РЕДАКЦИЯ:

Буслаева Т.М. Профессор, д.х.н.; e-mail: buslaeva@mirea.ru

Есипова О.В. Ответственный секретарь, к.х.н.; доцент, e-mail: esipova@mirea.ru

Семерня Л.Г. Технический редактор; e-mail: semernya@mirea.ru

Середина Г.Д. Зав. редакцией, к.т.н.; e-mail: seredina@mirea.ru

Адрес редакции:

Россия, 119571, Москва, пр. Вернадского, д. 86, оф. Л-119

Тел.: +7 (495) 246-05-55 (#2-88); e-mail: seredina@mirea.ru; <http://rti.mirea.ru>

EDITORIAL BOARD

Alexander S. Sigov – Editor-in-Chief of the Journal, Academician of the Russian Academy of Sciences, D.Sc. (Phys.-Math.), Professor, President of RTU MIREA

Stanislav A. Kudzh – Professor, D.Sc. (Eng.), Rector of RTU MIREA

Yuras Banis – Professor, Habilitated Doctor of Sciences, Vice-Rector of Vilnius University, Lithuania

Tatyana M. Buslaeva – Professor, D.Sc. (Chem.), RTU MIREA

Alexander A. Bush – Professor, D.Sc. (Eng.), Director of the Institute of Materials of Solid State Electronics, RTU MIREA

Sergey B. Vakhrushev – Professor, D.Sc. (Phys.-Math.), Head of the Laboratory of Neutron Research, A.F. Ioffe Physico-Technical Institute RAS, Professor of the Department of Physical Electronics of SPbSPU

Nataliya B. Golovanova – Professor, D.Sc. (Economics), Deputy First Vice-Rector of RTU MIREA

Yury V. Gulyaev – Academician of the Russian Academy of Sciences, Member of the Presidium of the Russian Academy of Sciences, Professor, D.Sc. (Phys.-Math.), Supervisor of V.A. Kotelnikov Institute of Radio Engineering and Electronics RAS

Dmitry O. Zhukov – Professor, D.Sc. (Eng.), Head of the Department of Intelligent Technologies and Systems, RTU MIREA

Alexey V. Kimel – Associate Professor, Ph.D. (Phys.-Math.), Radboud University, Nijmegen, Netherlands

Gennady V. Kozlov – Professor, D.Sc. (Phys.-Math.), Deputy Head of the Office of the General Director of JSC Concern “VKO Almaz-Antey”

Vladimir S. Kondratenko – Professor, D.Sc. (Eng.), Head of the Department of Optical and Biotechnical Systems and Technologies, RTU MIREA

Sergey O. Kramarov – Professor, D.Sc. (Phys.-Math.), Senior Researcher, Surgut State University

Elena D. Mishina – Professor, D.Sc. (Phys.-Math.), Head of the Specialized Educational and Research Laboratory of Femtosecond Optics for Nanotechnologies, RTU MIREA

Sergey V. Pasechnik – Professor, D.Sc. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Optical and Biotechnical Systems and Technologies, RTU MIREA

Philippe Pernod – Professor, Dean of Research, Ecole Centrale de Lille, France

Mikhail P. Romanov – Professor, D.Sc. (Eng.), Director of the Institute of Cybernetics, RTU MIREA

Viktor P. Savinykh – Member-Correspondent of the Russian Academy of Sciences, Professor, D.Sc. (Eng.), President of Moscow State University of Geodesy and Cartography (MIIGAiK), Twice Hero of the Soviet Union

James F. Scott – Professor, Fellow of the Royal Society of London, Cambridge University, UK

Viktor V. Sokolov – Professor, D.Sc. (Phys.-Math.), First Vice-Rector of RTU MIREA

Andrey V. Timoshenko – Professor, D.Sc. (Eng.), Deputy First Vice-Rector of RTU MIREA

Yury K. Fetisov – Professor, D.Sc. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Nanoelectronics, RTU MIREA

Yury S. Kharin – Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Belarus, Professor, D.Sc. (Phys.-Math.), Director of the Research Institute of Applied Problems of Mathematics and Informatics of the Belarusian State University, Belarus

Viktor Y. Tsvetkov – Professor, D.Sc. (Eng.), Councilor of the Administration of RTU MIREA

EDITORIAL:

Tatyana M. Buslaeva – Professor, D.Sc. (Chem.). E-mail: buslaeva@mirea.ru

Olga V. Esipova – Executive Editor, Ph.D. (Chem.), Associate Professor. E-mail: esipova@mirea.ru

Larisa G. Semernya – Technical Editor. E-mail: semernya@mirea.ru

Galina D. Seredina – Managing Editor, Ph.D. (Engineering). E-mail: seredina@mirea.ru

Address:

86, Vernadskogo Pr., Moscow 119571, Russia (office L-119)

Phone: +7(495)246-05-55 (#288); e-mail: seredina@mirea.ru; <http://rti.mirea.ru>

СОДЕРЖАНИЕ

СОВРЕМЕННЫЕ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ И ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ

- Бессонов А.С., Петрухин Е.А.*** 5
Виртуальные модели обратного рассеяния света в кольцевых лазерах

- Гудко Н.И.*** 16
Эффективные модели и схемы цифровых устройств циклического действия

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРИБОРОСТРОЕНИЕ И ТЕХНОЛОГИИ

- Крыжановский А.Д., Пастушков А.А.*** 31
Непараметрический метод восстановления плотности вероятности по наблюдениям случайной величины

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

- Бердников В.П.*** 39
Модифицированный алгоритм определения полных областей устойчивости нестационарных нелинейных систем

- Коваленко А.Н., Жуков А.Н.*** 54
Алгебраические модели полосковых линий в многослойной диэлектрической среде

CONTENTS

MODERN RADIO ENGINEERING AND TELECOMMUNICATION SYSTEMS

- Bessonov A.S., Petrukhin E.A.*** 5
Virtual models of light backscattering in ring lasers
- Gudko N.I.*** 16
Effective models and schemes of cyclic action digital devices

ANALYTICAL INSTRUMENTATION AND TECHNOLOGY

- Kryzhanovsky A.D., Pastushkov A.A.*** 31
A nonparametric method of reconstructing probability density according to the observations of a random variable

MATHEMATIC MODELING

- Berdnikov V.P.*** 39
Modified algorithm for determination of full stability areas in nonstationary nonlinear systems
- Kovalenko A.N., Zhukov A.N.*** 54
Algebraic models of strip lines in a multilayer dielectric medium

УДК 004.94; 681.787

ВИРТУАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ ОБРАТНОГО РАССЕЯНИЯ СВЕТА В КОЛЬЦЕВЫХ ЛАЗЕРАХ

**А.С. Бессонов^{1,@},
Е.А. Петрухин²**

¹*МИРЭА - Российский технологический университет, Москва 119454, Россия*

²*АО «Серпуховский завод «Металлист», Серпухов 142200, Россия*

[@]*Автор для переписки, e-mail: didugan4@mail.ru*

В статье рассмотрено моделирование обратного рассеяния света в кольцевых лазерах. Показано, что обратное рассеяние является основным источником погрешностей лазерного гироскопа. Дано математическое описание процессов обратного рассеяния, основанное на определении комплексных коэффициентов связи встречных волн в кольцевом лазере. Предлагается представление комплексных коэффициентов связи в виде векторных диаграмм. Сделан вывод, что наиболее удобными для пользователей являются виртуальные модели, которые создаются в средах графического программирования. Эти модели объединяют информацию, содержащуюся в математических моделях и в векторных диаграммах. При помощи компьютерной анимации отображено изменение фаз комплексных коэффициентов связи встречных волн во время работы кольцевого лазера. Результаты моделирования представлены в различных текстовых и графических формах. Описаны результаты моделирования обратного рассеяния при перестройке лазера на генерацию различных мод, при температурном воздействии и при противофазном ходе пьезоэлектрических корректоров. Созданные виртуальные модели предназначены для разработчиков измерительных систем, используемых на производстве кольцевых лазеров и лазерных гироскопов. Полученные результаты позволяют оценить пороги захвата и измерительные сигналы, разработать алгоритмы и программные модули обработки данных для измерительных систем.

Ключевые слова: кольцевой лазер, обратное рассеяние света, порог захвата, виртуальная модель, математическая модель, векторная диаграмма.

VIRTUAL MODELS OF LIGHT BACKSCATTERING IN RING LASERS

**A.S. Bessonov^{1,@},
E.A. Petrukhin²**

¹*MIREA - Russian Technological University, Moscow 119454, Russia*

²*JSC «Serpukhov plant «Metallist», Serpukhov 142200, Russia*

[@]*Corresponding author e-mail: didugan4@mail.ru*

The simulation of light backscattering in a ring laser is considered. It is indicated that backscattering is the main source of laser gyro errors. A mathematical description of the backscattering processes based on the determination of the complex coupling parameters of counterpropagating waves is presented. A representation of complex coupling parameters in the form of vector diagrams is proposed. It is concluded that virtual models created in graphical programming environments are most convenient for users. These models combine information contained in mathematical models and in vector diagrams. With the help of computer animation, the complex coupling parameters phase changes of counterpropagating waves during the operation of the ring laser are displayed. The simulation results are presented in various text and graphic forms. The backscattering simulation results during the laser tuning to the generation of various modes, under the influence of temperature and in the antiphase motion of piezoelectric transducers are described. The created virtual models are intended for developers of measuring systems used in the production of ring lasers and laser gyros. The obtained results allow estimating the lock.

Keywords: ring laser, light backscattering, lock-in threshold, virtual model, mathematical model, vector diagram.

Введение

Лазерные гироскопы, строящиеся на основе гелий-неоновых кольцевых лазеров (КЛ), уже в течение нескольких десятков лет применяются в составе навигационных систем самолетов, морских судов и иных подвижных объектов. Однако всем лазерным гироскопам присущ недостаток, связанный с обратным рассеянием (ОР) света на шероховатостях и неоднородностях зеркал. Это явление приводит к возникновению существенной погрешности измерений, поскольку оно вызывает синхронизацию встречных световых волн, приводящую к нелинейным искажениям частотной характеристики и появлению зоны нечувствительности гироскопа к малым частотам вращения. В этой зоне, называемой зоной захвата, частота биений встречных волн КЛ становится равной нулю, и датчик теряет работоспособность. Указанным проблемам уделяется значительное внимание в фундаментальных трудах по лазерной гироскопии [1, 2], в учебниках и учебных пособиях (например, в [3]) и в многочисленных статьях (например, в [4–6]). В литературе приводятся математическое описание ОР, методы его уменьшения.

В процессе производства КЛ величины ОР и порогов захвата, ограничивающих зону захвата, обязательно измеряют и контролируют, для чего разрабатываются новые методы и средства измерений [7–9]. Трудностью измерений ОР и порога захвата является непостоянство измеряемых величин, которые изменяются при функционировании КЛ, а также при воздействии внешних факторов. Поэтому в процессе разработки соответствующих измерительных систем (ИС) требуется проведение научных исследований и компьютерного моделирования. Необходимо создание модели объекта измерения (ОИ), удовлетворяющей определенным требованиям [10]. Модель ОИ должна достаточно полно отражать процессы ОР, а также быть понятной разработчику средств измерений. Кроме того, реализация модели на компьютере должна быть не слишком трудоемкой и не требовать значительных вычислительных ресурсов.

Использование технологии виртуальных приборов (ТВП) дает разработчику единые инструменты для компьютерного моделирования, проведения физического эксперимента, разработки прикладного программного обеспечения и его интеграции с аппаратными средствами, что значительно повышает эффективность проектирования ИС [11]. Поэтому актуальными оказываются компьютерные модели ОР, создаваемые с помощью ТВП и называемые виртуальными моделями (ВМ). Рассматриваемые в статье ВМ ОР позволяют изучить процессы, происходящие в ОИ, наглядно их представить и смоделировать измерительные сигналы, обработка которых прикладной программой приведет к определению результатов измерений.

1. Математические модели обратного рассеяния в кольцевом лазере

Разработке любой компьютерной модели предшествует создание математической модели. Описание эффектов, связанных с влиянием ОР при работе КЛ в режиме слабой связи встречных волн, осуществляется с использованием системы дифференциальных уравнений [1, 2]. В них влияние ОР описывается с помощью комплексных коэффициентов связи (ККС), определяющих, какая часть светового излучения рассеивается во встречном направлении.

При разработке математических моделей ОР исходят из предположения, что угловые и линейные перемещения оптической оси КР, ввиду их малости, не изменяют величины ККС отдельных зеркал, называемых парциальными ККС [12]. В этом случае суммарные ККС $\tilde{r}_{cw}$ и $\tilde{r}_{ccw}$ можно представить следующим соотношением:

$$\begin{aligned}\tilde{r}_{cw} &= \sum_n r_n^{cw} \exp[i(\varphi_n^{cw} + 2kl_n)] \\ \tilde{r}_{ccw} &= \sum_n r_n^{ccw} \exp[i(\varphi_n^{ccw} - 2kl_n)]\end{aligned}\quad (1)$$

где индексы cw и ccw означают направления распространения света по и против часовой стрелки, соответственно;

$k = 2\pi/\lambda$ – волновое число;

r_n и φ_n – модуль и фазовый сдвиг n -ого источника ОР;

l_n – его продольная координата относительно оптической оси резонатора.

Для наиболее распространенного четырехзеркального КР индекс n изменяется от 1 до 4.

При таком подходе процессы, происходящие в КР на стадиях контроля, испытаний или штатного функционирования, могут быть описаны с помощью достаточно простого математического аппарата, основанного на задании закона изменения координат $l_n(t)$ источников ОР в модельном времени t (1).

Значения ККС (1) определяют пороги захвата Ω_L [1]:

$$\Omega_L = \frac{c}{2\pi L} \sqrt{r_{cw}^2 + r_{ccw}^2 + 2r_{cw}r_{ccw} \cos(\varphi_{cw} + \varphi_{ccw})}, \quad (2)$$

где Ω_L – порог захвата в герцах;

c – скорость света;

L – периметр КЛ.

В соответствии с данной формулой изменения ККС приводит к изменению порога захвата.

Рассмотрим один из вариантов математической модели (1), в которой уточняется, что каждый из парциальных рассеивателей имеет консервативную $\tilde{R}_n$ и диссипативную $\tilde{r}_n$ составляющие [12, 13].

Пусть КР соответствует четырехзеркальной оптической схеме, изображенной на рис. 1. Настройка на резонанс здесь осуществляется с помощью пьезоэлектрических корректоров (ПЭК), установленных на зеркалах M_1 и M_3 . Зеркала M_2 и M_4 в резонаторе неподвижны.

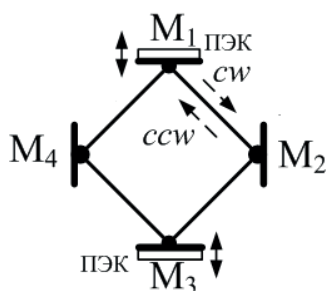


Рис. 1. Оптическая схема кольцевого резонатора:
 M_1, M_2, M_3, M_4 – зеркала, ПЭК – пьезоэлектрический корректор.

В данном варианте модели суммарные КС определяются следующим образом:

$$\tilde{r}_{cw,ccw}(t) = \sum_{n=1}^4 \left[\left(R_n \exp\left(\frac{i\pi}{2} \pm i\gamma_n\right) + r_n \exp(i\pi \pm i\zeta_n \pm i\gamma_n) \right) \exp(\pm i\Delta\phi_n(t)) \right], \quad (3)$$

где R_n и r_n – модули консервативной и диссипативной частей n -ого рассеивателя;

ζ_n – сдвиг фаз между ними;

γ_n – сдвиги фаз, определяющие положение консервативной части рассеивателя с номером n по отношению к оптической оси резонатора;

$\Delta\phi_n(t) = 2 \cdot k \cdot \Delta l_n(t)$ – изменения сдвигов фаз в плечах резонатора в модельном времени;

$\Delta l_n(t)$ – изменения продольных координат источников ОР.

Сдвиги фаз удобно представить в виде вектора следующего вида:

$$\Delta\Phi(t) = \{\Delta\phi_1(t), \Delta\phi_2(t), \Delta\phi_3(t), \Delta\phi_4(t)\}. \quad (4)$$

С помощью модели (3) можно описать процессы ОР света в КЛ, протекающие в ходе измерений. Для разработки ИС, предназначенной для контроля КЛ и измерения порога захвата, актуально моделирование переходов ОИ от генерации одной моды к другой, процессов теплового расширения резонатора и так называемый противофазный ход, когда зеркала M_1 и M_3 движутся в разных направлениях по отношению к центру резонатора так, что его периметр L остается постоянным. Противофазный ход применяется в измерениях для определения максимального и минимального порогов захвата [13].

Рассмотрим модель, отражающую перестройку зеemanовского КЛ [14] с межмодовым расстоянием $\frac{c}{2L}$ на различные моды. Задачей моделирования является оценка порогов захвата $\Omega_L^{(m)}$, где m – индекс моды, который изменяется от 1 до 4 [14].

Будем считать, что в начале моделирования КЛ генерирует моду 1, и из этого состояния происходит переход к моде с индексами 2, 3 или 4, при котором ПЭК двигают зеркала M_1 и M_3 *одновременно и в одном направлении*, то есть друг к другу или друг от друга (рис. 1). Поскольку при переходе к соседней моде периметр L зеemanовского КЛ изменяется на $\lambda/2$, то длина каждой из плеч резонатора в наиболее простом случае меняется на $\lambda/8$. Если проводить отсчет фазовых сдвигов от источника ОР, расположенного на зеркале M_1 , то переход к модам с индексами 2, 3 или 4 описывается следующим вектором сдвига фаз:

$$\Delta\vec{\varphi}^{(m)} = \left\{ 0, (m-1)\frac{\pi}{2}, (m-1)\pi, -(m-1)\frac{\pi}{2} \right\}, \quad (5)$$

где m – индекс моды.

Полученные фазовые сдвиги подставляют для расчета КС в выражение (3), а затем по формуле (2) рассчитывают искомые пороги захвата $\Omega_L^{(m)}$.

С целью упрощения рассмотренных моделей может быть введено понятие частичного вклада $\tilde{\Omega}_n^m$ в порог захвата от каждого из зеркал [12]. Тогда формула (1) переписывается так:

$$\Omega_L^{(m)} = \left| \sum_{n=1}^4 \tilde{\Omega}_n^{(m)} \right| = \left| \sum_{n=1}^4 \tilde{\Omega}_n^{(1)} \cdot \exp(i\Delta\varphi_n^{(m)}) \right|. \quad (6)$$

Вектор изменения фазовых сдвигов $\Delta\varphi(t)$ может быть представлен в виде суммы двух составляющих:

- вектора изменения фазовых сдвигов $\Delta\varphi_T$, происходящих за счет изменения температуры по сравнению с некоторым начальным ее значением;
- вектора изменения фазовых сдвигов $\Delta\varphi_{\text{ПФХ}}$, происходящих за счет изменения управляющего напряжения на ПЭК по сравнению с некоторым начальным его значением.

Изменение температуры приводит к расширению или сжатию корпуса резонатора, которое сопровождается изменением периметра ΔL_T . В случае линейного приближения можно записать:

$$\Delta L_T = k_T \cdot L \cdot \Delta T, \quad (7)$$

где k_T – коэффициент температурного расширения материала корпуса резонатора.

Равномерное изменение периметра в одинаковой мере распределяется по плечам резонатора, изменение длин которых составит величину $\frac{\Delta L_T}{4}$. Тогда благодаря автомати-

ческой регулировке периметра КЛ изменения сдвига фаз не произойдет, и порог захвата останется неизменным на всех модах световой генерации. Однако на практике такое равномерное распределение не наблюдается, поскольку реальные ПЭК перемещают зеркала неодинаково. Это можно смоделировать с помощью использования коэффициента неравномерности перемещения пьезозеркал:

$$\Delta l = p \Delta L_T / 4,$$

здесь значение $p \leq 1$.

Последнее выражение следует ввести в вектор изменения фазовых сдвигов

$$\Delta\vec{\Phi}_T(t) = \left\{ 0, \frac{p\pi\Delta L_T(t)}{\lambda}, 0, -\frac{p\pi\Delta L_T(t)}{\lambda} \right\}. \quad (8)$$

В соответствии с (6) и (8) порог захвата изменяется периодически. Кроме того, из приведенных выражений видно, что при реализации модели в виде компьютерной программы изменение периметра ΔL удобно выражать в единицах длины волны λ .

Выражение для изменения фазовых сдвигов при моделировании противофазного хода оказывается схожим с (8), а именно:

$$\Delta\vec{\Phi}_{\text{пфх}}(t) = \left\{ 0, \frac{4\pi\Delta l(t)}{\lambda}, 0, -\frac{4\pi\Delta l(t)}{\lambda} \right\}, \quad (9)$$

где Δl – изменение длины в плече резонатора.

Таким образом, в данном разделе статьи нами описаны достаточно простые математические модели ОИ, позволяющие оценивать изменения порогов захвата при переходе на другую моду (3) и (5), изменении температуры (6) и (8) и противофазном ходе на выбранной моде световой генерации (6) и (9). Задача проектируемой измерительной системы будет заключаться в выделении максимального Ω_{Lmax} и минимального порогов захвата Ω_{Lmin} .

Следует также заметить, что при расположении ПЭК на соседних зеркалах математическое описание процессов ОР будет иметь отличия. Например, в этом случае вектор $\Delta\vec{\Phi}_T(t)$ имеет ненулевые компоненты без введения коэффициента неравномерности:

$$\Delta\vec{\Phi}_T(t) = \left\{ 0, -\frac{\pi\Delta L_T(t)}{\lambda}, -\frac{\pi\Delta L_T(t)}{\lambda}, 0 \right\}.$$

2. Векторные диаграммы

Применение векторных диаграмм позволяет более наглядно, чем в математических моделях, отобразить процессы ОР света в КЛ, что и способствует более глубокому их пониманию разработчиками ИС [1, 2, 12, 13]. ККС удобно представляется в виде вектора на комплексной плоскости, длина которого соответствует модулю коэффициента связи, а угол поворота вектора по отношению к положительному направлению горизонтальной оси – сдвигу фаз. Происходящие во время математического моделирования изменения углов векторов легко анимируются с помощью компьютерных технологий. Рассмотрим примеры векторных диаграмм, соответствующих выше описанным математическим моделям, при этом вектор ККС или парциального порога захвата, соответствующий зеркалу M_1 , будем считать неподвижным, чтобы от него отсчитывать положения других векторов

Перестройку КЛ с генерации первой моды на генерацию второй моды иллюстрирует векторная диаграмма (рис. 2). На рис. 2а показано исходное расположение векторов парциального порога захвата. При перестройке на вторую моду вектор ОР $\vec{r}_1$ (см. выше)

фиксируется неподвижным, вектор $\vec{r}_2$ поворачивается на угол $\pi/2$, вектор $\vec{r}_3$ – на угол π , вектор $\vec{r}_4$ – на угол $-\pi/2$ ((3) и (5)). В результате видно, что вторая мода характеризуется другим порогом захвата: $\Omega_L^{(2)} > \Omega_L^{(1)}$.

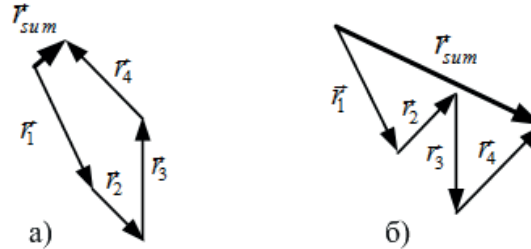


Рис. 2. Векторные диаграммы при генерации первой (а) и второй (б) мод.

Векторная диаграмма на рис. 3 поясняет процессы ОР, происходящие при противофазном ходе ПЭК (8). Векторы ОР $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_3$, соответствующие подвижным зеркалам с ПЭК, не изменяются, а векторы, $\vec{r}_2$ и $\vec{r}_4$, соответствующие неподвижным зеркалам – вращаются, описывая своими концами окружности. Суммарный вектор ОР $\vec{r}_{sum}$ определяет порог захвата (2), из чего можно утверждать, что порог захвата будет периодически изменяться в диапазоне от Ω_{Lmin} до Ω_{Lmax} .

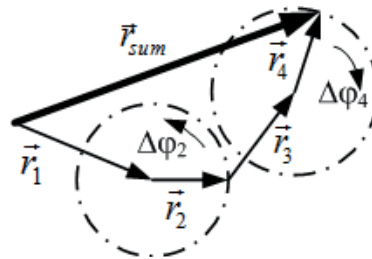


Рис. 3. Векторная диаграмма противофазного хода пьезоэлектрических корректоров.

Аналогичная векторная диаграмма может быть построена и при моделировании температурных воздействий (8).

3. Виртуальные модели

Технология виртуальных приборов (ТВП) и среда графического программирования LabVIEW предоставляет разработчикам эффективные инструменты компьютерного моделирования, автоматизации научных исследований и эксперимента и создания прикладного программного обеспечения различного рода измерительных, управляющих и информационных систем [11, 15]. Высокая эффективность ТВП известна и общепризнанна [11, 15], поэтому ниже рассматриваются только наиболее актуальные особенности виртуальных моделей, используемых при создании ИС и, в частности, систем контроля КЛ.

Как было показано в первом разделе статьи, моделирование ОР связано с созданием математических, графических и алгоритмических моделей, отражающих происходящие в ОИ процессы. ВМ здесь может и должна играть интегрирующую роль, собирая информацию от других моделей и сохраняя их преимущества (рис. 4). Математическая часть ВМ реализуется с помощью обширных библиотек готовых функций,

имеющихся в составе LabVIEW, алгоритмическая часть – соответствующими структурами графического программирования, графическая часть – за счет разнообразных средств отображения текстовой и графической информации на лицевой панели, в том числе с анимационными эффектами. Отметим, что процесс создания ВМ технологичен и отличается сравнительно низкой трудоемкостью.

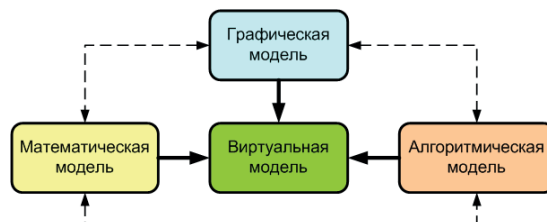


Рис. 4. Интегрирующая роль виртуальной модели.

При разработке виртуальной модели ОР КЛ с неплоским контуром использовались сменные экранные страницы (рис. 5). Первая экранная страница (рис. 5а) предназначена для ввода исходных данных и расчета на основе выражений (3), (2) и (5) суммарных ККС и порогов захвата при генерации различных мод. На второй экранной странице (рис. 5б) отображаются разноцветные векторные диаграммы, для чего используются графические экраны *Graph XY*. Рядом указывается соответствующий порог захвата $\Omega_L^{(m)}$. Следует указать, что на рис. 5 векторные диаграммы приведены в разном масштабе.

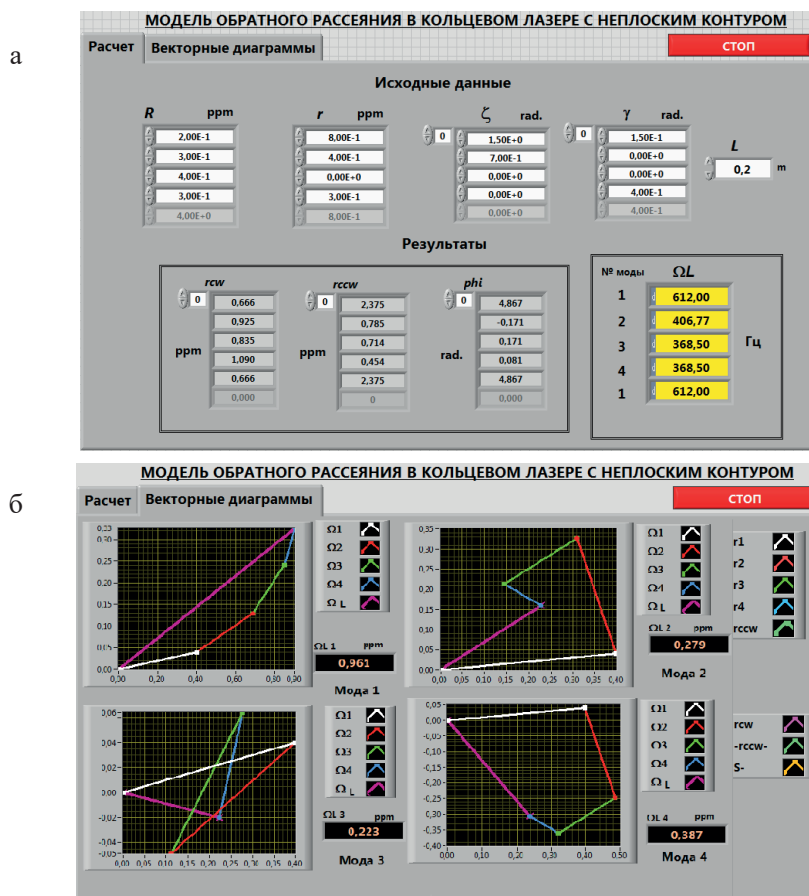


Рис. 5. Лицевая панель виртуальной модели обратного рассеяния кольцевого лазера:
а) экранная страница ввода исходных данных и расчета ККС и порогов захвата;
б) экранная страница векторных диаграмм.

Другие разработанные нами ВМ предназначены для изучения температурного воздействия на резонатор и противофазного хода пьезозеркал в соответствии с выражениями (9) и (8). Моделирование происходит с анимацией движения векторов ОР, вызванного изменением периметра фазовых сдвигов в плечах резонаторов. Перемещения векторов можно наблюдать и изучать на графических экранах, аналогичных приведенным на рис. 5б. В результате такого моделирования формируются измерительные сигналы, отличающиеся друг от друга при работе КЛ на различных модах.

По измерительным сигналам рассчитывают пороги захвата $\Omega_L^{(m)}(t)$ и находят их искомые максимальное и минимальное значения. Из рис. 6 следует, что зависимости $\Omega_L^{(m)}(t)$ имеют периодический вид. При некоторых значениях исходных данных можно наблюдать дополнительные точки перегиба или локальные максимумы и минимумы. Эти факты в дальнейшем учитываются в процессе разработки программных модулей обработки данных, входящих в состав программного обеспечения ИС.

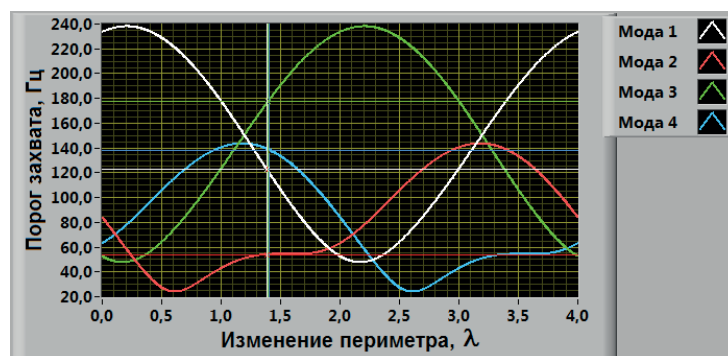


Рис. 6. Результаты моделирования зависимости порога захвата кольцевого лазера от изменения периметра вследствие влияния температуры (коэффициент неравномерности $p = 0.5$).

Сходные зависимости получаются и при моделировании противофазного хода ПЭК, что позволяет оценить максимальный и минимальный пороги захвата при генерации лазером различных мод.

Описанные в статье модели опробованы в эксперименте. В наших публикациях [12, 13] приведены сведения об используемых аппаратных средствах ИС, методиках обработки измерительных сигналов, процедурах параметрической идентификации моделей, а также проанализированы полученные экспериментальные результаты.

Заключение

Измерение комплексных коэффициентов связи и оценка порогов захвата позволяет отбраковывать резонаторы на ранних этапах производства кольцевых лазеров, за счет чего снижается себестоимость и повышается процент выхода годных изделий. Решающие эти задачи измерительные системы разрабатываются в настоящее время с помощью методов модельного проектирования и с использованием технологий виртуальных приборов. Значительную роль здесь играют частные модели объектов измерений, отражающие лишь изучаемые свойства КЛ.

В статье рассмотрены наиболее простые модели обратного рассеяния света в КЛ. Однако они могут быть усложнены. Так, например, ОР вызывают не только зеркала, но и

другие элементы резонатора КЛ, а также внешний фотоприемник. Если их вклад значителен, то они также должны быть представлены в моделях.

Разработанные измерительные системы прошли апробацию и могут быть внедрены в производстве.

Литература:

1. Aronowitz F. Fundamentals of the Ring Laser Gyro. Optical Gyros and their Application. RTO AGARDograph 339, 1999. P. 3-1 to 3-45.
2. Wilkinson J. R. Ring Lasers // Progress Quantum Electronics. 1987. № 11. P. 1–103.
3. Панов М.Ф., Соломонов А.В., Филатов Ю.В. Физические основы интегральной оптики. М.: Издательский центр «Академия», 2010. 432 с.
4. Krenz G., Bux S. I., Slama S., Zimmerman C., Courteille P.W. Controlling mode locking in optical ring cavities // Appl. Phys. B. 2007. V. 87. P. 643–647.
5. Судаков В.Ф. Асимптотический метод построения динамической частотной характеристики лазерного гироскопа // Квантовая электроника. 2016. Т. 46(10). С. 675–682.
6. Федоров А.Е., Зборовский В.А., Рекунов Д.А., Курылев А.Н. Цифровой лазерный гироскоп с системой минимизации зоны захвата // Материалы XXIV Санкт-Петербургской междунар. конф. по интегрированным навигационным системам. СПб.: ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2017. С. 349–355.
7. Zhenfang Fan, Hui Luo, Guangfeng Lu, Shaomin Hu. Online effective backscattering estimation for ring laser gyro // Chinese Optics Lett. 2012. № 10(5). P. 051404-1–051404-3.
8. Nasibov H., Mamedbeili I., Riza D., Balaban E., Hacizade F. High-precision measurements of reflectance, transmittance, and scattering at 632.8 nm // Proc. of SPIE. 2016. V. 8433. P. 843313-1–843313-8.
9. Mazule L., Liukaityte S., Eckardt R. C., Melninkaitis A., Balachninaite O., Sirutkaitis V. A system for measuring surface roughness by total integrated scattering // J. Phys. D: Appl. Phys. 2011. V. 44. P. 1–9.
10. Ефремов А.А., Сорокин С.С., Зенков С.М. Модельно-ориентированное проектирование – международный стандарт инженерных разработок [Электронный ресурс]. URL: <https://matlab.ru/upload/resources/EDU%20Conf/pp%2040-43%20Sorokin.pdf> (дата обращения: 04.05.2018).
11. Conway J., Watts St. A Software Engineering Approach to LabVIEW. Prentice Hall PTR, 2003. 222 p.
12. Бессонов А.С., Макеев А.П., Петрухин Е.А. Измерения комплексных коэффициентов связи в кольцевом резонаторе лазерного гироскопа // Квантовая электроника. 2017. Т. 47(7). С. 675–682.
13. Петрухин Е.А. Прогнозирование порога захвата в кольцевом резонаторе лазерного гироскопа // Материалы XXIII Санкт-Петербургской междунар. конф. по интегрированным навигационным системам. СПб.: ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2016. С. 83–88.
14. Азарова В.В., Голяев Ю.Д., Савельев И.И. Зеемановские лазерные гироскопы // Квантовая электроника. 2015. Т. 45 (2). С. 171–179.
15. Баран Е.Д. LabVIEW FPGA. Реконфигурируемые, измерительные и управляющие системы. М.: ДМК Пресс, 2009. 448 с.

References:

1. Aronowitz F. Fundamentals of the Ring Laser Gyro. Optical Gyros and their Application. RTO AGARDograph 339, 1999. P. 3-1 to 3-45.
2. Wilkinson J. R. Ring Lasers // Progress Quantum Electronics. 1987. № 11. P. 1–103.
3. Panov M.F., Solomonov A.V., Filatov Yu.V. Physical fundamentals of integrated optics. Moscow: Publishing Center «Academy», 2010. 432 p. (in Russ.).
4. Krenz G., Bux S. I., Slama S., Zimmerman C., Courteille P.W. Controlling mode locking in optical ring cavities // Appl. Phys. B. 2007. V. 87. P. 643–647.
5. Sudakov V.F. Asymptotic method for constructing a dynamic frequency response of a laser gyro // Quantum Electronics. 2016. V. 46(10). P. 961–965.
6. Fedorov A.E., Zborovsky V.A., Rekunov D.A., Kurylev A.N. Digital laser gyroscope with lock-in minimisation system// Proceedings of 23th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems. St. Petersburg, CSRI Elektropribor, 2017. P. 463–468.
7. Zhenfang Fan, Hui Luo, Guangfeng Lu, Shaomin Hu. Online effective backscattering estimation for ring laser gyro // Chinese Optics Lett. 2012. № 10(5). P. 051404-1–051404-3.
8. Nasibov H., Mamedbeili I., Riza D., Balaban E., Hacizade F. High-precision measurements of reflectance, transmittance, and scattering at 632.8 nm // Proc. of SPIE. 2016. V. 8433. P. 843313-1–843313-8.
9. Mazule L., Liukaityte S., Eckardt R. C., Melninkaitis A., Balachninaite O., Sirutkaitis V. A system for measuring surface roughness by total integrated scattering // J. Phys. D: Appl. Phys. 2011. V. 44. P. 1–9.
10. Efremov A.A., Sorokin S.S., Zenkov S.M. Model-based design – the international standard of engineering developments [Electronic resource]. URL: <https://matlab.ru/upload/resources/EDU%20Conf/pp%2040-43%20Sorokin.pdf>. (in Russ).
11. Conway J., Watts St. A Software Engineering Approach to LabVIEW. Prentice Hall PTR, 2003. 222 p.
12. Bessonov A.S., Makeev A.P., Petrukhin E.A. Measurements of complex coupling coefficients in a ring resonator of a laser gyroscope // Quantum Electronics. 2017. V. 47(7). P. 675–682.
13. Petrukhin E.A. Prediction of the lock-in threshold value in a ring cavity of a laser gyro // Proceed. of 23th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems. St. Petersburg, CSRI Elektropribor, 2016. P. 103-107.
14. Azarova V.V., Golyaev Yu.D., Savelyev I.I. Zeeman laser gyroscopes // Quantum Electronics. 2015. V. 45(2). P. 171–179.
15. Baran E.D., LabVIEW FPGA. Reconfigurable, measuring and control systems, Moscow: DMK Press, 2009. 448 p. (in Russ).

Об авторах:

Бессонов Алексей Станиславович, доцент, кандидат технических наук, доцент кафедры информационных систем Института кибернетики ФГБОУ ВО «МИРЭА - Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78).

Петрухин Евгений Александрович, кандидат физико-математических наук, ведущий инженер АО «Серпуховский завод «Металлист» (142200, Россия, Московская обл., г. Серпухов, ул. Луначарского, д. 32).

About the authors:

Alexey S. Bessonov, Ph.D. (Eng.), Associate Professor of the Chair of Information System, Institute of Cybernetics, MIREA - Russian Technological University (78, Vernadskogo Pr., Moscow, 119454, Russia).

Eugene A. Petrukhin, Ph.D. (Phys.-Math.), Lead Engineer, JSC «Serpukhov plant «Metallist» (32, Lunacharskogo street, Serpukhov, Moscow region 142200, Russia).

УДК 621.38

ЭФФЕКТИВНЫЕ МОДЕЛИ И СХЕМЫ ЦИФРОВЫХ УСТРОЙСТВ ЦИКЛИЧЕСКОГО ДЕЙСТВИЯ

Н.И. Гудко

*АО Александровский научно-исследовательский институт телевизионной техники «Рекорд» (АО АНИИТТ «Рекорд»), г. Александров, Владимирская обл. 601655, Россия
@Автор для переписки, e-mail: gudkonikolai@mail.ru*

В работе рассмотрены эффективные модели и схемы широко распространенных цифровых устройств циклического действия. К ним относятся кодирующие и декодирующие устройства систем передачи информации, устройства управления процессоров, генераторы кодов, счетчики, распределители импульсов и т.п. Предложены и обоснованы три модели устройств, соответствующие последовательному, параллельному и сквозному переносу информации. Структура моделей представлена совокупностью блоков с оригинальными алгоритмами функционирования и связями между блоками. Блоки реализуются в виде автоматов Мура (при последовательном переносе) и автоматов Мили (при параллельном и сквозном переносе). Предложена методика синтеза устройств на основе этих моделей с использованием методов канонического синтеза и модифицированных автором таблиц переходов Хаффмена, позволяющих компактно реализовать устройства практически любой сложности. Описаны алгоритмы перехода от моделей со сквозным переносом к моделям с параллельным и последовательным переносом. Рассмотрены примеры реализации моделей в виде конкретных схем, подтверждающие их эффективность.

Ключевые слова: цифровое устройство циклического действия, модель, блоки, таблицы переходов, перенос информации, счетчики, быстроедействие, экономия числа вентилей.

EFFECTIVE MODELS AND SCHEMES OF CYCLIC ACTION DIGITAL DEVICES

N.I. Gudko

*JSC Aleksandrov Research Institute of Television Equipment "Rekord" (JSC ANIITT "Rekord"), Aleksandrov, Vladimir region 601655, Russia
@Corresponding author e-mail: gudkonikolai@mail.ru*

The work considers models and schemes of widespread digital devices of cyclic action. They include decoders and encoders of information transfer system, control units of processors, generators of codes, counters, distributors of impulses etc. Three models of devices for consecutive, parallel and ripple through information transfer are suggested and proved. The structure of the models is presented by a set of blocks with original operation algorithms and connections between their blocks. The blocks are implemented in the form of Moore machines (in case of consecutive transfer) and Mealy machines (in case of parallel and ripple through transfer). A technique for synthesizing devices based on these models with the use of canonic synthesis methods and of Huffman transition tables modified by the author is suggested. This allows implementing compactly devices of practically any complexity. Algorithms for transition from models with ripple through transfer to models with parallel and consecutive transfer are described. Examples of implementing models in the form of concrete schemes confirming their efficiency are considered.

Keywords: digital device of cyclic action, model, blocks, transition tables, information transfer, counters, processing speed, economy of the number of gates.

Каноническая схема цифрового устройства (конечного автомата), называемая также обобщенной схемой, структурной схемой, моделью Хаффмена, и метод канонического синтеза цифровых устройств широко известны [1–11]. Однако при их использовании не всегда удается синтезировать устройства достаточно высокой сложности с желаемыми параметрами (например, по быстродействию), даже на уровне функциональных узлов и блоков. Несмотря на это, **принципы цифровой электроники**, состоящие в рассмотрении логических схем и конечных автоматов, не утратили своей актуальности в связи с прогрессом микроэлектроники и развитием автоматизированных систем разработки. Это подчеркивается, в частности, в предисловии к фундаментальной работе известного американского специалиста Дж.Ф. Уэйкерли [11]. В значительной степени такой подход выглядит обоснованным, поскольку учет специфики алгоритма функционирования частных видов устройств и создание формальных моделей дают возможность получать более эффективные конкретные схемы и методы синтеза, чем общие методы, использующие канонический синтез и модель Хаффмена [1, 2, 12, 13]. Особенно важен указанный подход для устройств циклического действия, которые принимают при изменении состояний входов одну заданную последовательность внутренних состояний, то есть состояний элементов памяти, которая может циклически повторяться. К ним относятся устройства управления процессоров, генераторы кодов, кодирующие и декодирующие устройства систем передачи информации, счетчики, распределители импульсов и другие устройства. Повышение быстродействия и уменьшение числа вентилей при их реализации являются актуальными задачами.

В настоящей работе предлагаются эффективные модели (структуры) **цифровых устройств**, защищенные патентами на изобретения [14–16], и методы синтеза устройств на их основе, в рамках которых могут быть реализованы различные частные решения, имеющие существенные преимущества перед известными устройствами. Они требуют на $\approx 30\%$ меньшее количество оборудования, имеют большее в ≈ 1.5 –2 раза быстродействие, обеспечивают однородность структуры. **При разработке схем цифровых устройств ис-**

пользуется разбиение их на блоки [2, 9]. Эффективность предлагаемых моделей достигается использованием многовходных и многовыходных последовательно соединенных блоков с оригинальными алгоритмами функционирования и связями между входами и выходами блоков. В результате, в отличие от широко известных структур, обеспечивается фиксация циклов предыдущего блока последующим с использованием одного состояния последующего блока вместо двух и применение в блоках асинхронных RS-триггеров вместо сложных триггеров (типа Т-, JK-триггеров и др., являющихся блоками в широко известных схемах), что и определяет указанную эффективность.

Предлагаемая модель устройства циклического действия приведена на рис. 1 [16].

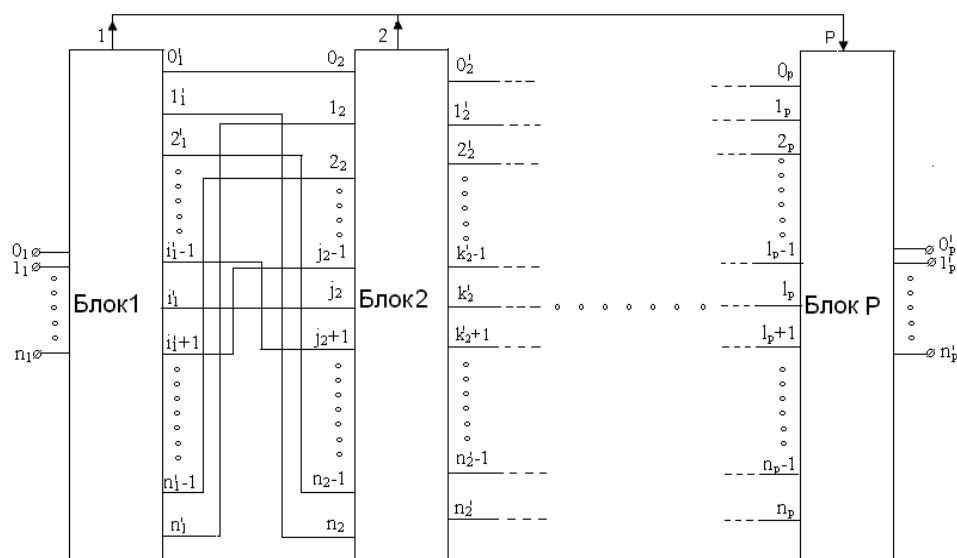


Рис. 1. Модель устройства циклического действия [16].

Она содержит последовательно соединенные блоки **1**, **2**, **Р** со входами $0_i, 1_i, 2_i, \dots, n_i$ и выходами $0'_i, 1'_i, 2'_i, \dots, n'_i$ (где i – номер блока). Каждому внутреннему состоянию блока соответствует свой выход. Блоки **2**.....**Р** меняют внутренние состояния только в одной заданной очередности при воздействии активного уровня на один из очередных входов, соответствующий одному очередному состоянию, и не меняют его при переходе активного уровня в пассивный, что уменьшает необходимое количество состояний блоков и количество оборудования. Выходы и входы соединены следующим образом. После сигнала на очередном входе последующего блока, переключающего этот блок в очередное внутреннее состояние (j) в данном цикле предыдущего блока, следующим сигналом, переключающим последующий блок в следующее внутреннее состояние ($j+1$) в следующем цикле предыдущего блока, является сигнал, предшествующий по циклу сигналу предыдущего блока, переключающему последующий блок во внутреннее состояние (j). Блок **1** отличается от других тем, что меняет внутренние состояния под действием входных (тактовых) сигналов при каждом их изменении. Каждый блок, кроме блока **Р**, имеет некоторую комбинацию выходов логических элементов и элементов памяти, входящих в его состав, с номером, соответствующим номеру блока **1**, **2**,...,**(Р-1)**, которая подается на вход блока **Р** и используется для формирования управляющих сигналов на его выходах $0'_P, 1'_P, \dots, n'_P$.

Из описания алгоритма функционирования структуры на рис. 1 следует, что при фиксации последующим блоком очередного цикла предыдущего блока используется одно состояние последующего блока. При одном канале связи между блоками для фиксации циклов предыдущего блока требуется два состояния последующего, так как последующий блок должен реагировать на появление сигнала в канале и на его исчезновение, что потребует примерно в два раза больше состояний в последующем блоке. Именно такая ситуация имеет место в широко распространенных схемах [4–6, 13, 17–20].

Экономия состояний обеспечивает экономию вентилях. Очевидно, что, с точки зрения максимальной экономии числа состояний блоков для фиксации поступивших на вход импульсов, необходимо, чтобы очередной сигнал, переключающий блок в очередное состояние, непосредственно предшествовал по циклу предыдущему сигналу, который в предыдущем цикле переключил блок в предыдущее состояние. Для построения конкретных схем, реализующих описанные в работе модели, предлагается использовать канонический метод синтеза блоков на основе таблиц переходов Хаффмена. При этом общепринятая структура таблиц модифицирована с учетом специфики решаемой задачи, что позволяет компактно отображать алгоритм функционирования устройств на этапе абстрактного синтеза и синтезировать вручную разнообразные устройства подобного рода фактически любой сложности. Сделанный вывод продемонстрирован нижеприведенными примерами.

Наиболее простым примером реализации предложенной модели является счетчик импульсов, состоящий из 3-х блоков, принимающих $M=4$ состояния, имеющих выходы. Они обозначены буквой **I** с цифрами, первая из которых – номер выхода, а вторая – номер блока. Счетчик синтезировали с помощью таблиц переходов 1–3 (для блоков **Б1**, **Б2**, **Б3**, соответственно). В клетках таблицы указаны порядковые номера символов на входе схемы **T** (нулей и единиц) от начала цикла, вызывающих соответствующее состояние, если это одна цифра. Если это дробь, то в числителе указаны номера символов (нулей и единиц), вызывающих соответствующее состояние, в знаменателе – номер последнего символа на входе **T** перед появлением очередного входного сигнала данного блока. Рядом с таблицами приведены логические выражения, описывающие входные цепи триггеров, обеспечивающие их переключения (функции переходов). Эти же логические выражения описывают выходы блока (функции выходов). Схема приведена на рис. 2.

Таблица переходов 1

Вх. (Вход T)		Выход триггеров T1 и T2	
0	1	Q1	Q2
(1) ^{I11}	2 ^{I21}	0	0
3 ^{I31}	(2) ^{I21}	1	0
(3) ^{I31}	4 ^{I41}	1	1
1 ^{I11}	(4) ^{I41}	0	0

$$I11 = F(R2) = \overline{TQ1}$$

$$I21 = F(S1) = T\overline{Q2}$$

$$I31 = F(S2) = \overline{TQ1}$$

$$I41 = F(R1) = TQ2$$

Таблица переходов 2

I11	I21	I31	I41	Q3Q4
(1)	(2)	(3)	4	0 0
(5)	(6)	7	(4)	1 0
(9)	10	(7)	(8)	1 1
1	(10)	(11)	(12)	0 1

$$I12 = F(R4) = I11\bar{Q}3$$

$$I22 = F(S3) = I41\bar{Q}4$$

$$I32 = F(S4) = I31Q3$$

$$I42 = F(R3) = I21Q4$$

Таблица переходов 3

I12	I22	I32	I42	Q5Q6
(1/3)	(4/6)	(7/9)	10/12	0 0
(13/15)	(16/18)	19/21	(10/12)	1 0
(25/27)	28/30	(19/21)	(22/24)	1 1
1/3	28/30	(31/33)	(34/36)	0 1

$$F(R6) = I12\bar{Q}5$$

$$F(S5) = I42\bar{Q}6$$

$$F(S6) = I32Q5$$

$$F(R5) = I22Q6$$

Счетчик за полный цикл фиксирует $K_s = 36$ символов (коэффициент счета $K = K_s/2 = 18$).

Проанализируем результаты формального синтеза. При синтезе конкретного устройства по рис.2 (на основе модели, приведенной на рис. 1) принято, что каждому внутреннему состоянию блока соответствует выход, который формируется в момент поступления входного сигнала и предшествует переключению устройства именно в это состояние. Такое устройство в теории автоматов называют автоматом Мили [1, 2].

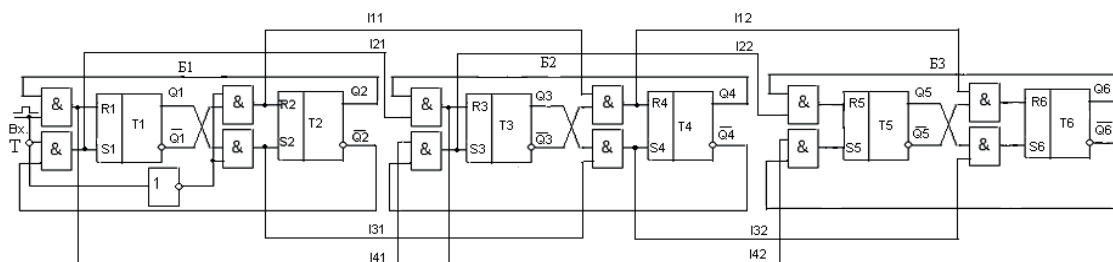


Рис. 2. Схема счетчика импульсов со сквозным переносом с коэффициентом счета $K = 18$.

Каждый выход физически представлен одним проводом. Он является выходом конъюнктора, на входы которого подается входной сигнал блока и сигналы с выходов триггеров. Последние не меняют своего состояния при переходе к данному внутреннему состоянию блока. Тот же выход конъюнктора переключает триггер, изменение состояния которого при неизменном состоянии других триггеров¹ приводит к данному внутреннему состоянию. Входной сигнал блока является соответствующим выходом предыдущего блока, то есть таким же выходом конъюнктора предыдущего блока. Таким образом, формируются многочисленные цепи сквозного переноса информации через последовательно включенные конъюнкторы, обеспечивающие переключение триггеров, но для реализации этих цепей не требуется вентилях, так как цепи образуются из конъюнкторов на входах асинхронных **RS**-триггеров.

На рис. 3 для сравнения представлена широко используемая (традиционная) схема со сквозным переносом информации на **T**-триггерах [4–6, 17–20], которые можно считать практически аналогами блоков в схеме на рис. 2 по назначению и по количеству вентилях (в **T**-триггере используется дополнительно вентиль **НЕ**). Информация в традиционной

¹Для кодирования внутренних состояний блока используется код Грея.

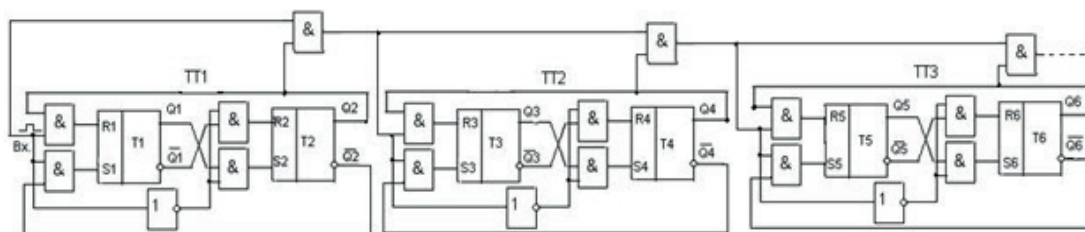


Рис. 3. Традиционная схема счетчика импульсов со сквозным переносом с коэффициентом счета $K = 8$ [6].

схеме распространяется по специально предназначенной для этого цепи последовательно включенных двухвходовых конъюнкторов, в отличие от схемы на рис. 2, где конъюнкторы, переключающие триггеры, используются одновременно и для организации цепей переноса, что уменьшает количество используемых вентилях. Основная же экономия вентилей, как отмечалось выше, обусловлена использованием одного состояния последующего блока для фиксации цикла предыдущего блока, а не двух.

Быстродействие повышается за счет того, что при переходе устройства из одного состояния в другое в момент поступления фронта синхросигнала в схеме на рис. 2 переключается конъюнктор и RS-триггер, а в схеме на рис. 3 – конъюнктор цепи переноса, конъюнктор RS-триггера, инвертор (если он имеется в составе используемого Т-триггера) и RS-триггер в составе Т-триггера. Таким образом, время переключения схемы на рис. 2 в 1.5–2 раза меньше, чем на рис. 3.

Чтобы оценить количество используемых вентилей в предлагаемых структурах относительно повсеместно применяемых, сопоставим синтезированную схему с широко известной. На рис. 4 приведена известная простейшая (традиционная) схема счетчика импульсов с последовательным переносом информации [4–6, 17–20], состоящая также из 3-х блоков с тем же составом вентилей, что и на рис. 2, за исключением дополнительного инвертора в блоках ТТ2 и ТТ3), являющихся Т-триггерами. Она фиксирует только $K_s = 16$ символов ($K = 2^3 = 8$).

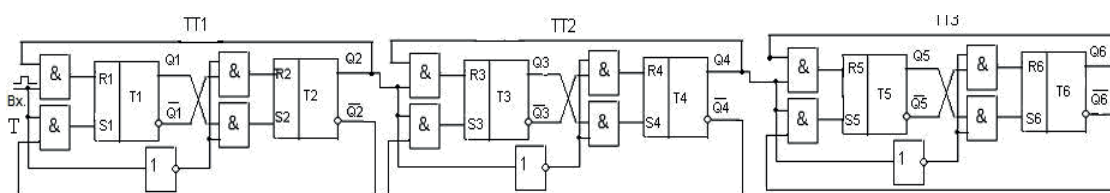


Рис. 4. Традиционная схема счетчика импульсов с последовательным переносом и коэффициентом счета $K = 8$ [6].

Для получения даже $K = 16$, что меньше $K = 18$, требуется добавить один блок, то есть экономия 25% (нижняя оценка), для получения же $K = 32$, большего 18, необходимо добавить два блока, экономия 40% (верхняя оценка). Коэффициент счета для устройства на рис. 2 при «n» блоках $K = K_s/2 = 2 \cdot 3^{n-1}$ (каждый блок, кроме первого, считает до трех), по схеме на рис. 3 – $K = K_s/2 = 2^n$.

В общем случае в соответствии с предлагаемой моделью счетчик будет иметь:

$$K = \frac{K_s}{2} = \frac{M(M-1)^{n-1}}{2}.$$

При общепринятой связи блоков $K = \frac{K_s}{2} = \left(\frac{M}{2}\right)^n$.

Традиционно применяется и параллельный перенос информации. Все три вида переноса связывают обычно со счетчиками импульсов, хотя эти виды переноса информации целесообразно рассматривать и при построении гораздо более сложных устройств на основе счетчиков импульсов. Устройства со сквозным переносом обладают тем недостатком, что их быстродействие в значительной степени определяется временем (задержкой) распространения сигнала по цепи переноса. Для исключения этой задержки традиционно используют схемы параллельного переноса, когда информация на каждый триггер о состоянии других триггеров передается с помощью конъюнктора, входы которого соединяются с единичными выходами предыдущих триггеров и входом синхронизации [4–6, 17–20] (рис. 5).

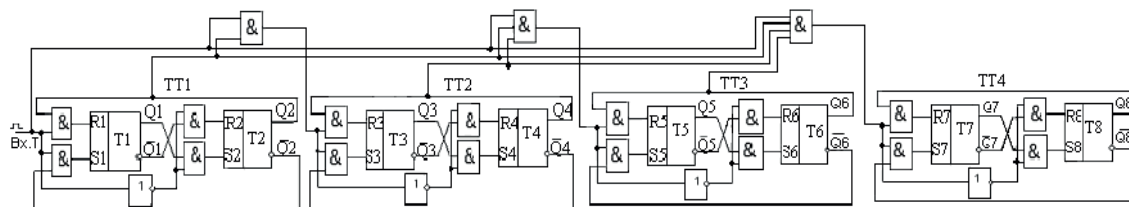


Рис. 5. Традиционная схема счетчика импульсов с параллельным переносом [6].

Все триггеры, изменяющие свое состояние при переходе устройства в новое состояние, переключаются одновременно. Устройства, представленные на рис. 3–5, используют нормальный двоичный код. Устройства с параллельным переносом содержат конъюнкторы с разным количеством входов, число которых равно номеру переключаемого разряда, что существенно ограничивает реализацию устройств с большой разрядностью. Все виды переноса имеют свои преимущества и недостатки.

Возникает естественный вопрос о возможности реализации параллельного и последовательного переноса информации с использованием тех же принципов, что и при реализации сквозного переноса, чтобы получить те же преимущества в быстродействии и экономии вентилях в рамках первых двух видов переноса. Чтобы исключить в схеме со сквозным переносом (рис. 2) цепь последовательно включенных конъюнкторов, необходимо подавать на выход каждого блока не выходы конъюнкторов, а цепи, подключенные ко входам этих конъюнкторов. Формально это объясняется тем, что скобочная форма функции конъюнкции нескольких переменных равна конъюнкции тех же переменных без скобок: $a(b(c(de) = abcde$. Левая часть реализуется цепочкой четырех двухвходовых конъюнкторов, а правая – одним пятивходовым конъюнктором, заменяющим эту цепочку. Следовательно, левая часть в рассматриваемых устройствах подобна элементу цепи сквозного переноса, а правая – параллельного переноса. Отсюда вытекает простой алгоритм преобразования структуры со сквозным переносом в структуру с параллельным переносом. Необходимо в функциях переходов триггеров блоков по рис. 2 заменить последовательно от младшего блока к старшему входящие в них функции выходов предыдущего блока, на их выражения, представляющие собой конъюнкции переменных, соответствующих входу синхроимпульса и выходам триггеров предыдущих блоков. Кроме того, следует выходы блоков (однопроводные) заменить на многопроводные

шины, каждый провод которых соответствует одной из переменных, входящих в соответствующие вновь сформированные конъюнкции. Применяв это правило, получим логические выражения входов триггеров (функции переходов), приведенные ниже, по которым построена схема на рис. 6:

$$F(R2) = \overline{TQ1}$$

$$F(S1) = T\overline{Q2}$$

$$F(S2) = \overline{TQ1}$$

$$F(R1) = TQ2$$

$$F(R4) = \overline{TQ1} \overline{Q3}$$

$$F(S3) = TQ2\overline{Q4}$$

$$F(S4) = \overline{TQ1} Q3$$

$$F(R3) = T\overline{Q2} Q4$$

$$F(R6) = \overline{TQ1} \overline{Q3} \overline{Q5}$$

$$F(S5) = T\overline{Q2} Q4 \overline{Q6}$$

$$F(S6) = \overline{TQ1} Q3 Q5$$

$$F(R5) = TQ2 \overline{Q4} Q6$$

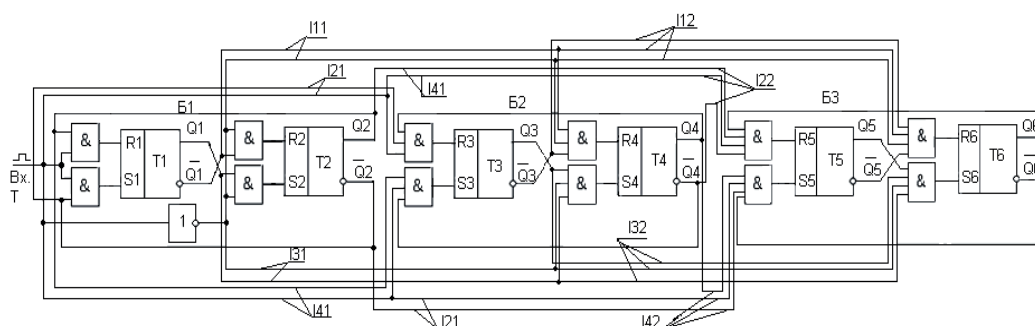


Рис. 6. Схема счетчика импульсов с параллельным переносом, полученная после преобразования схемы на рис. 2.

Многопроводные шины на схеме (рис. 6) обозначены теми же буквами, что и выходы блоков в схеме на рис. 2.

Учитывая вышеизложенное, представим устройство с параллельным переносом в виде обобщенной схемы (модели), отображающей разные частные формы его реализации (рис. 7) [15].

Обобщенная модель отличается от схемы со сквозным переносом (рис. 1) организацией выходов и входов блоков, исключая входы блока 1, выходы блока Р и цепи 1, 2, ..., Р. Каждый выход (шина) блока 1 $0'_{1c}, 1'_{1c}, 2'_{1c}, \dots, i'_{1c}-1, i'_{1c}, i'_{1c}+1, \dots, n'_{1c}-1, n'_{1c}$ представляет собой

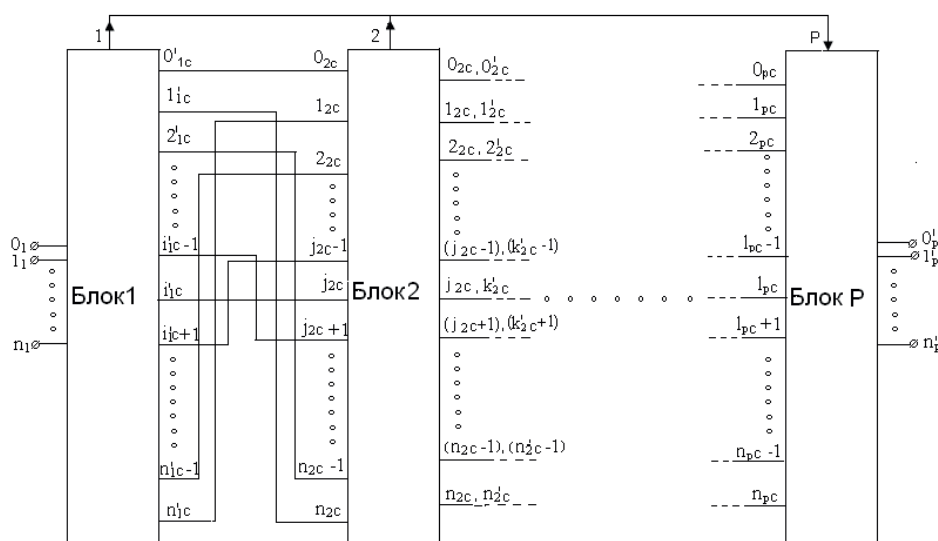


Рис. 7. Модель цифрового устройства циклического действия с параллельным переносом информации.

комбинацию выходов синхроимпульса и триггеров (в нижнем индексе 1 – номер блока, с – означает комбинацию). Комбинации выходов других блоков состоят из комбинации, которая подана на соответствующий вход с тем же номером, и комбинации выходов триггеров данного блока, определяющих вместе с комбинацией на входе переход к состоянию, соответствующему данному выходу. Например, комбинация выходов $0_{2c}, 0'_{2c}$ блока 2 состоит из комбинации входа 0_{2c} , которая подается с блока 1 (с выхода $0'_{1c}$), и комбинации триггеров блока 2 – $0'_{2c}$, которая вместе с комбинацией 0_{2c} определяет переход к состоянию 0. Или комбинация выходов $1_{2c}, 1'_{2c}$ блока 2 состоит из комбинации входа 1_{2c} , которая подается с блока 1 (с выхода $1'_{1c}$), и комбинации триггеров блока 2 $1'_{2c}$, которая вместе с комбинацией 1_{2c} определяет переход к состоянию 1. Комбинации выходов и входов соединяются в том же порядке, что и соответствующие им единичные выходы и входы в схеме на рис. 1.

При параллельном переносе состояния выходов представляются комбинациями входов и элементов памяти, которые появляются сразу после изменения состояния входов до изменения состояния элементов памяти. Отсюда можно заключить, что, как и в случае сквозного переноса, блоки являются автоматами Мили [1, 2].

Вполне естественно высказать предположение, что в случае реализации блоков в виде автоматов Мура [1, 2] устройство со сквозным переносом преобразуется в устройство с последовательным переносом. Для этого однопроводные выходы блоков, соответствующие их состояниям, необходимо заменить на комбинации выходов триггеров, также однозначно определяющие состояние блока. Разница состоит в том, что информация с блока на блок будет передаваться после переключения соответствующих триггеров, то есть последовательно.

В случае реализации конкретного устройства необходимо заменить в логических выражениях, описывающих входные цепи триггеров (в функциях переходов) в схеме на рис. 2, буквы I, обозначающие функции выходов блоков, на комбинации переменных, соответствующих состояниям триггеров, определяющих данное состояние блока. Такое преобразование приводит к логическим выражениям, приведенным перед схемой на рис. 8, построенной в соответствии с этими выражениями.

$$\begin{array}{lll}
 F(R2) = \overline{T}Q1 & F(R4) = \overline{Q1}\overline{Q2}\overline{Q3} & F(R6) = \overline{Q3}\overline{Q4}\overline{Q5} \\
 F(S1) = T\overline{Q2} & F(S3) = \overline{Q1}Q2\overline{Q4} & F(S5) = \overline{Q3}Q4\overline{Q6} \\
 F(S2) = \overline{T}Q1 & F(S4) = Q1Q2Q3 & F(S6) = Q3Q4Q5 \\
 F(R1) = TQ2 & F(R3) = Q1\overline{Q2}Q4 & F(R5) = Q3\overline{Q4}Q6
 \end{array}$$

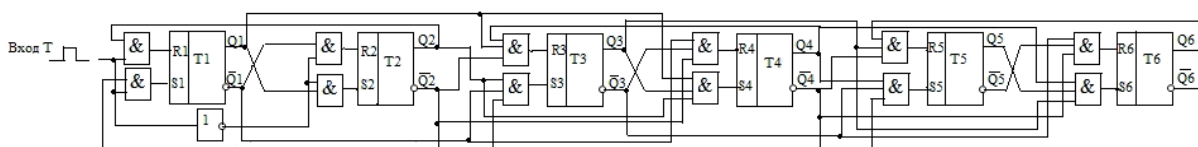


Рис. 8. Схема счетчика импульсов с последовательным переносом после преобразования схемы на рис. 2.

Устройство с последовательным переносом может быть представлено в виде обобщенной схемы (модели), отображающей различные частные формы его реализации [14] (рис. 9).

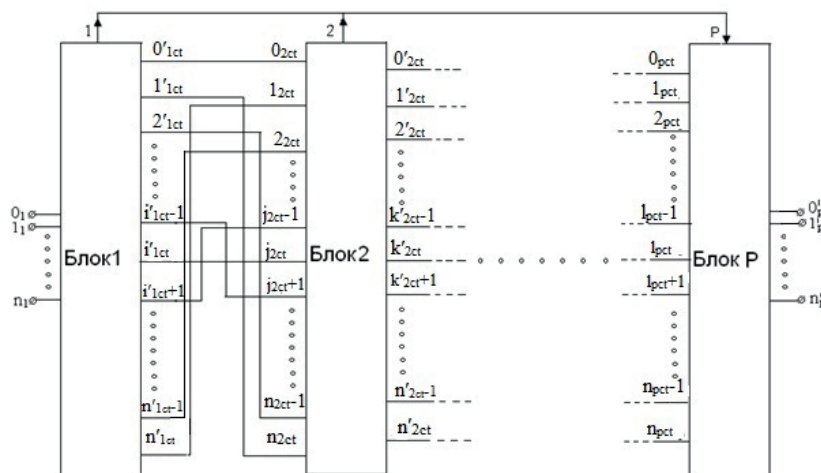


Рис. 9. Модель цифрового устройства циклического действия с последовательным переносом информации.

Входы и выходы блоков здесь не однопроводные, как в рис. 1, а являются комбинациями определенных выходов триггеров, которые однозначно определяют устойчивое состояние предыдущего блока, соответствующее единичной шине в базовой схеме.

Порядок соединения комбинации входов и выходов такой же, как и единичных (рис. 1). Блок 1 имеет комбинации выходов: $0'_{1ct}$, $1'_{1ct}$, $2'_{1ct}$, ..., $i'_{1ct}-1$, i'_{1ct} , $i'_{1ct}+1$, ..., $n'_{1ct}-1$, n'_{1ct} (в нижнем индексе 1 – номер блока, "ct" – означает комбинацию триггеров). Выходы других блоков, кроме последнего, организованы аналогично, связаны с последующим блоком подобным образом, выполняют по отношению к нему такую же функцию, но в обозначении в нижнем индексе вместо единицы указан свой номер блока.

Широко применяемые схемы, типичные версии которых приведены на рис. 3–5, представляют собой устройства, состоящие из блоков. Роль блоков выполняют сложные триггеры **Т**, **JK**, **D** (в нашем случае приведены схемы, использующие **Т**-триггеры), состоящие из двух **RS**-триггеров, принимающих 4 состояния, логических элементов, имеющие специально организованные цепи переноса (в устройствах со сквозным и параллельным переносом). Схемы на основе предлагаемых моделей состоят из блоков, включающих 2 и более асинхронных **RS**-триггеров, принимающих 4 и более состояний, и не имеют отдельно организованных цепей переноса. Преимущества предложенных моделей в части быстродействия и количества используемых вентилях показаны выше [21, 22], хотя более детальное сравнение этих схемотехник по многим другим параметрам еще необходимо произвести. Предложенные модели используют многоканальные связи между блоками, построенными на асинхронных **RS**-триггерах.

Возникает естественный вопрос: как будут выглядеть схемы, реализованные в соответствии с предложенными моделями, при одном канале связи между блоками из двух асинхронных **RS**-триггеров, состоящем из одного проводника (сквозной перенос) или многопроводной шины (параллельный и последовательный перенос)?

Проведем синтез таких устройств по предложенной методике при условии, что блоков – 3, между блоками один канал и блоки состоят из двух **RS**-триггеров, как и в схемах на рис. 3–5. В соответствии с описанной выше методикой вначале синтезируем схему со

примеры сравнения устройств, реализованных по разным моделям. Показано, что широко распространенные структуры являются по существу частным случаем предлагаемых моделей при одноканальной связи между блоками. Сделан вывод, что путем изменения количества каналов связи между блоками и изменения кодирования состояний блоков возможно получить большое количество разнообразных схем. Предложенный подход позволяет строить устройства любой практической сложности с использованием при этом для реализации блоков методов канонического синтеза и предлагаемой модификации таблиц переходов Хаффмена.

Необходимо отметить, что функционирование всех приведенных в работе оригинальных схем было проверено путем виртуального моделирования в среде Multisim 12 и Multisim 14 [23]. Большое количество схем, реализующих предложенные модели, с разными кодированиями состояний блоков, в том числе кодом Грея и кодом Джонсона, приведено в описаниях патентов на изобретения и в монографиях [21, 22] и проверено путем моделирования в среде Multisim.

Литература:

1. Глушков В.М. Синтез цифровых автоматов. М.: Физматгиз, 1962. 476 с.
2. Лазарев В.Г., Пийль Е.И. Синтез управляющих автоматов. М.: Энергоатомиздат, 1989. 328 с.
3. Алексенко А.Г. Основы микросхемотехники. Издание третье. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2010. 448 с.
4. Попов Л.Н. Схемотехника цифровых вычислительных устройств. М.: Вузовская книга, 2015. 116 с.
5. Кистрин А.В., Костров Б.В., Никифоров М.Б., Устюков Д.И. Проектирование цифровых устройств. М.: КУРС ИНФРА-М, 2017. 352 с.
6. Опадчин Ю.Ф., Глудкин О.П., Гуров А.И. Аналоговая и цифровая электроника (Полный курс). М.: «Горячая Линия - Телеком», 2007. 768 с.
7. Наваби З. Проектирование встраиваемых систем на ПЛИС: Пер. с англ. Соловьева В.В. Москва: ДМК Пресс, 2016. 464 с.
8. Киносита К., Асада К., Карацу О. Логическое проектирование СБИС: Пер. с японского. М.: Мир, 1988. 309 с.
9. Фридман А., Менон П. Теория и проектирование переключательных схем: Пер. с англ. Москва: Мир, 1978. 581 с.
10. Хоуп Г. Проектирование цифровых вычислительных устройств на интегральных схемах: Пер. с англ. М.: Мир, 1984. 400 с.
11. Уэйкерли Д.Ф. Проектирование цифровых устройств: в 2-х т.: Пер. с англ. М.: Постмаркет, 2002. 1087 с.
12. Баранов С.Н. Синтез микропрограммных автоматов. Л.: Энергия, 1974. 216 с.
13. Бабич Н.П., Жуков И.А. Основы цифровой схемотехники. Москва: Додэка – XXI, Киев: МК-Пресс, 2007. 480 с.
14. Гудко Н.И., Головицына М.В. Цифровое устройство для формирования последовательностей управляющих сигналов с последовательным переносом информации: пат. 2642395. Рос. Федерация. № 2016123588; заявл. 15.06.2016; опубл. 20.12.2017. Бюл. № 35. 10 с.

15. Гудко Н.И., Смышляев Е.И. Цифровое устройство для формирования последовательностей управляющих сигналов с параллельным переносом: пат. 2475954. Рос. Федерация. № 2011110562/08; заявл. 23.03.2011; опубл. 27.09.2012. Бюл. № 5. 11 с.
16. Гудко Н.И., Литвинов В.П. Цифровое устройство для формирования последовательностей управляющих сигналов: пат. 2397610. Рос. Федерация. № 2008124113/09; заявл. 19.06.2008; опубл. 20.08.2010. Бюл. № 23. 19 с.
17. Гуменюк А.Д., Журавлев В.И., Мартюшев Ю.Ю., Струков А.З., Цветков С.И. Основы электроники, радиотехники и связи / Под ред. Г.Д. Петрухина. М.: Горячая линия-Телеком, 2015. 480 с.
18. Шестеркин А.Н. Введение в электротехнику. Элементы и устройства вычислительной техники. М.: Горячая линия-Телеком, 2015. 252 с.
19. Потемкин И.С. Функциональные узлы цифровой автоматики. М.: Энергоатомиздат, 1988. 320 с.
20. Букреев И.Н., Горячев В.И., Мансуров Б.М. Микроэлектронные схемы цифровых устройств. М.: Техносфера, 2009. 712 с.
21. Гудко Н. Эффективные модели цифровых устройств циклического действия. LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016. 136 с.
22. Гудко Н.И. Синтез цифровых устройств циклического действия. М.: Горячая линия-Телеком, 2014. 96 с.
23. Иванов В.Н. Применение компьютерных технологий при проектировании электрических схем. М.: Солон-Пресс, 2017. 226 с.

References:

1. Glushkov V.M. Synthesis of digital automata. Moscow: Fismatgis Publ., 1962. 476 p. (in Russ.).
2. Lazarev V.G., Piyil' E.I. Synthesis of control automata. Moscow: Energoatomizdat Publ., 1989. 328 p. (in Russ.).
3. Aleksenko A.G. Fundamentals of microcircuitry. The third edition. Moscow: Binom. Laboratory of Knowledge Publ., 2010. 448 p. (in Russ.).
4. Popov L.N. Circuitry of digital computing devices. Moscow: Vuzovskaya kniga Publ., 2015. 116 p. (in Russ.).
5. Kistrin A.V., Kostrov B.V., Nikiforov M.B., Ustyukov D.I. Designing of digital devices. Moscow: KURS INFRA-M Publ., 2017. 352 p. (in Russ.).
6. Opadchin Yu.F., Gludkin O.P., Gurov A.I. Analog and digital electronics (Full course). Moscow: "Goryachaya liniya-Telekom" Publ., 2007. 768 p. (in Russ.).
7. Nawabi Z. Designing Embedded Systems on FPGA: Transl. from Engl. Solovyev V.V. Moscow: DMK Press Publ., 2016. 464 p. (in Russ.).
8. Kinoshita K., Asada K., Karatsu O. Logical design of VLSI: Transl. from Jap. Moscow: Mir Publ., 1988. 309 p. (in Russ.).
9. Friedman A., Menon P. Theory and design of switching circuits: Transl. from Engl. Moscow: Mir Publ., 1978. 581 p. (in Russ.).
10. Hope G. Designing digital computing devices on integrated circuits: Transl. from Engl. Moscow: Mir Publ., 1984. 400 p. (in Russ.).

11. Waykery D.F. Design of digital devices: in 2 vol.: Transl. from Engl. Moscow: Postmarket Publ., 2002. 1087 p. (in Russ.).
12. Baranov S.N. Synthesis of microprogram automata. Leningrad: Energiya Publ., 1974. 216 p. (in Russ.).
13. Babich N.P., Zhukov I.A. Fundamentals of digital circuitry. Moscow: Dodeka – XXI Publ., Kiev: MK-Press Publ., 2007. 480 p. (in Russ.).
14. Gudko N.I., Golovitsyna M.V. Digital device for the generation of sequences of control signals with sequential information transfer: pat. 2642395 Russian Federation. № 2016123588; filled 15.06.2016; publ. 20.12.2017. (in Russ.).
15. Gudko N.I., Smyshlyaev E.I. Digital device for generating sequences of control signals with parallel transfer: pat. 2475954 Russian Federation. № 2011110562/08; filled 23.03.2011; publ. 27.09.2012. (in Russ.).
16. Gudko N.I., Litvinov V.P. A digital device for generating sequences of control signals: pat. 2397610 Russian Federation. № 2008124113/09; filled 19.06.2008; publ. 20.08.2010. (in Russ.).
17. Gumenyuk A.D., Zhuravlev V.I., Martyshev Yu.Yu., Strukov A.Z., Tsvetkov S.I. Fundamentals of electronics, radio engineering and communications / Ed. G.D. Petrukhin. Moscow: "Goryachaya liniya-Telekom" Publ., 2015. 480 p. (in Russ.).
18. Shesterkin A.N. Introduction to electro-technology. Elements and devices of computer technology. Moscow: "Goryachaya liniya-Telekom" Publ., 2015. 252 p. (in Russ.).
19. Potemkin I.S. Functional nodes of digital automation. Moscow: Energoatomizdat Publ., 1988. 320 p. (in Russ.).
20. Bukreev I.N., Goryachev V.I., Mansurov B.M. Microelectronic circuits of digital devices. Moscow: Tekhnosfera Publ., 2009. 712 p. (in Russ.).
21. Gudko N. Effective models of digital devices of cyclic action. LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016. 136 p. (in Russ.).
22. Gudko N.I. Synthesis of digital devices of cyclic action. Moscow: "Goryachaya liniya-Telekom" Publ., 2014. 96 p. (in Russ.).
23. Ivanov V.N. Application of computer technology in the design of electrical circuits. Moscow: Solon-Press, 2017. 226 p. (in Russ.).

Об авторе:

Гудко Николай Иванович, кандидат технических наук, ведущий инженер АО Александровский научно-исследовательский институт телевизионной техники «Рекорд» (АО АНИИТТ «Рекорд») (601655, Россия, Владимирская обл., г. Александров, ул. Ленина, д. 13).

About the author:

Nikolay I. Gudko, Ph.D. (Eng.), Lead Engineer, JSC Aleksandrov Research Institute of Television Equipment "Rekord" (JSC ANIITT "Rekord") (13, Lenina St., Aleksandrov, Vladimir region, 601655, Russia).

УДК 519.25

НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ ПО НАБЛЮДЕНИЯМ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

**А.Д. Крыжановский
А.А. Пастушков[@]**

*МИРЭА - Российский технологический университет, Москва 119454, Россия
[@]Автор для переписки, e-mail: Pastushkov.A@mail.ru*

В ходе исследования статистических характеристик поля, образованного локально неоднородными областями, возникает задача восстановления по результатам экспериментальных наблюдений функции плотности вероятности с несколькими вершинами. Применять в этом случае параметрические методы восстановления плотности вероятности, как правило, крайне затруднительно. Поэтому для восстановления плотности вероятности имеет смысл применять непараметрические методы. Обычно используемый для этих целей метод Розенблатта-Парзена обладает невысокой точностью и скоростью сходимости. Метод, предложенный в работе Ченцова Н.Н., обладает более высокой точностью и скоростью сходимости, однако для многовершинных распределений его скорость сходимости также невелика. Аналогичные выводы можно сделать относительно метода, предложенного в работе Вапника В.Н. Поэтому проблема разработки методики восстановления многовершинной плотности вероятности по результатам экспериментальных наблюдений становится весьма актуальной. В работе предложен непараметрический метод восстановления многовершинной плотности вероятности случайного процесса по наблюдениям случайной величины. Метод является регулярным в смысле регуляризации Тихонова и, как показывает анализ и решение тестовых задач, обладает достаточно высокой точностью и скоростью сходимости.

Ключевые слова: непараметрические методы, функция распределения, плотность вероятности, функции отсчетов, ряд Уиттекера, квазирешение.

A NONPARAMETRIC METHOD OF RECONSTRUCTING PROBABILITY DENSITY ACCORDING TO THE OBSERVATIONS OF A RANDOM VARIABLE

**A.D. Kryzhanovsky,
A.A. Pastushkov[@]**

*MIREA – Russian Technological University, Moscow 119454, Russia
[@]Corresponding author e-mail: Pastushkov.A@mail.ru*

When investigating the statistical characteristics of a field formed by locally inhomogeneous regions, the problem of reconstructing the probability density function with several vertices on the basis of the results of experimental observations arises. In this case, it is very difficult to apply parametric methods for reconstructing the probability density. Therefore, to restore the probability density, it makes sense to use non-parametric methods of recovery. The Rosenblatt-Parzen method usually used for these purposes has low accuracy and convergence rate. The method proposed in the work of Chentsov N.N. has higher accuracy and convergence rate. However, for multi-vertex distributions its convergence rate is also low. Similar conclusions can be drawn regarding the method proposed in the work of Vapnik V.N. Thus, the problem of developing a technique for reconstructing the multi-vertex probability density on the basis of the results of experimental observations becomes very urgent. The article suggests a nonparametric method of reconstructing probability density according to the observations of a random variable. The method is regular in the sense of Tikhonov regularization and, as the analysis and solution of test problems show, it has sufficiently high accuracy and convergence rate.

Keywords: nonparametric methods, distribution function, probability density, sampling function, Whittaker series, quasisolution.

Введение

При исследовании статистических характеристик поля излучения рассеянного и/или излученного поверхностью, образованной локально неоднородными областями, возникает задача восстановления функции плотности вероятности с несколькими вершинами. В этом случае для восстановления плотности вероятности целесообразно применять непараметрические методы восстановления. Однако известные приемы обладают малой скоростью сходимости [1]. Согласно литературным данным, скорость сходимости в зависимости от применяемого метода, имеет оценку $O\left(n^{-\frac{1}{3}}\right)$ [2–5] или $O\left(n^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{4k}}\right)$ [6], где n – число независимых наблюдений случайной величины, а k связано с числом интервалов гистограммы m соотношением $k = \ln(n)/(2\ln(m))$.

В [2] описан метод, имеющий более высокую скорость сходимости, однако, как показывает тестирование данного метода, он не всегда имеет высокую точность.

Уравнения для определения плотности вероятности по результатам наблюдения случайной величины

В соответствии с определением, функция плотности вероятности случайного процесса $\omega(x)$ является абсолютно интегрируемой функцией, удовлетворяющей условиям

$$\omega(x) \geq 0, \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x) dx = 1.$$

Рассмотрим без ограничения общности случай, когда плотность вероятности $\omega(x)$ задана на конечном интервале $[0, \pi]$, равна нулю на границах интервала, непрерывна и имеет непрерывную производную на этом интервале. Отсюда следует, что она принадлежит множеству функций с ограниченной вариацией V_C , удовлетворяющих на отрезке $[0, \pi]$ условиям $\max(\omega(x)) \leq M$, $V_a^b \omega \leq K$, (M и K – постоянные, одни и те же для всех $\omega \in V_C$). Так как $\omega(x)$ интегрируема на $[0, \pi]$, то функция распределения $F(x) = \int_0^x \omega(t) dt$ является

абсолютно непрерывной [7], ограниченной и имеет непрерывную производную $\omega(x)$, то есть $F(x) \in V_C$. Поскольку функции $F(x)$ и $\omega(x)$ интегрируемы, то, следовательно, интегрируемы в квадрате на интервале $[0, \pi]$, т.е. принадлежат одновременно множествам V_C и $L_2[a, b]$ [8].

Предположим далее, что функция $F(x)$, а, следовательно, и функция $\omega(x)$ [9] являются функциями с финитным спектром $F(x), \omega(x) \in B$. Тогда функции $F(x)$ и $\omega(x)$ можно представить в виде разложений в ряд Уиттекера:

$$L_n(F, x) = \sum_{k=0}^n F\left(\frac{\pi k}{n}\right) \cdot \text{sinc}\left(n\left(x - \frac{\pi k}{n}\right)\right) \quad (1)$$

$$L_n(\omega, x) = \sum_{k=0}^n \omega\left(\frac{\pi k}{n}\right) \cdot \text{sinc}\left(n\left(x - \frac{\pi k}{n}\right)\right)$$

где $\text{sinc}\left(n\left(x - \frac{\pi k}{n}\right)\right) = \frac{\sin\left(n\left(x - \frac{\pi k}{n}\right)\right)}{n\left(x - \frac{\pi k}{n}\right)}$ – система функций отсчетов ортогональная и полная на множестве $B \subset L_2[a, b]$.

Поскольку ранее было принято, что функции $F(x)$ и $\omega(x)$ имеет ограниченную вариацию, то на любом подынтервале интервала $[0, \pi]$ её можно представить в виде абсолютно сходящихся последовательностей [10] $\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(F, x) - F(x)\| \rightarrow 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(\omega, x) - \omega(x)\| \rightarrow 0$.

Представим $F\left(\frac{\pi k}{n}\right)$ в виде

$$F\left(\frac{\pi k}{n}\right) = \int_0^{\frac{\pi k}{n}} \omega(t) dt \cong \frac{\pi}{n} \sum_{i=0}^k \omega\left(\frac{\pi i}{n}\right) \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получим:

$$F(x) = \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k \omega\left(\frac{\pi i}{n}\right) \text{sinc}\left(n\left(x - \frac{\pi k}{n}\right)\right) = \frac{\pi}{n} \sum_{i=0}^{\infty} \omega\left(\frac{\pi i}{n}\right) \sum_{k=i}^{\infty} \text{sinc}\left(n\left(x - \frac{\pi k}{n}\right)\right)$$

Полагая далее, что x принимает дискретные значения $x_j = \frac{\pi}{n} j, j = 0 \dots \infty$, перепишем последнее выражение в виде операторного уравнения

$$\mathbf{F} = \mathbf{A}_{\infty, \infty} \boldsymbol{\omega},$$

где $\mathbf{A}_{\infty, \infty}$ – линейный оператор.

Пусть j принимает конечное число значений, $j = 1 \dots n$, тогда выражение для $\mathbf{F}$ можно записать в следующем виде

$$F_j = \frac{\pi}{n} \sum_{i=0}^n \omega_i \sum_{k=i}^n \text{sinc}(\pi(j-k)) = A_{n,n} \omega, x_j = \frac{\pi j}{n}, j = 0 \dots n$$

где $A_{n,n}$ – матрица с общим элементом вида $a_{i,j} = \sum_{k=i}^n \text{sinc}(\pi(j-k)) = \begin{cases} 1, j \geq i \\ 0, j < i \end{cases}$, т.е. матрица $A_{n,n}$

– верхняя треугольная, составленная из единиц. Обратная матрица от матрицы $A_{n,n}, A_{n,n}^{-1}$

является двухдиагональной матрицей, по главной диагонали которой стоят единицы. Вторая диагональ, расположенная над главной, состоит из отрицательных единиц.

Норма матрицы $\mathbf{A}_{n,n}$ ограничена при любых конечных n , и последовательность матриц $\mathbf{A}_{n,n}$ сходится по норме к оператору $\mathbf{A}_{\infty,\infty}$, действительно, как следует из [10]:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{A}_{\infty,\infty} \mathbf{x} - \mathbf{A}_{n,n} \mathbf{x}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|F(x) - \mathbf{A}_{n,n} \mathbf{x}\| \rightarrow 0,$$

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \|\mathbf{A}_{m,m} \mathbf{x} - \mathbf{A}_{n,n} \mathbf{x}\| &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \|(F(x) - \mathbf{A}_{m,m} \mathbf{x}) - (F(x) - \mathbf{A}_{n,n} \mathbf{x})\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|F(x) - \mathbf{A}_{m,m} \mathbf{x}\| + \\ &+ \lim_{m \rightarrow \infty} \|F(x) - \mathbf{A}_{n,n} \mathbf{x}\| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Следовательно, оператор $\mathbf{A}_{\infty,\infty}$ является ограниченным оператором [11].

Линейный ограниченный оператор $\mathbf{A}_{\infty,\infty}$ взаимно однозначно отображает $\frac{\pi}{n} \omega$, принадлежащее пространству Банаха l_2 в $\frac{\pi}{n} \mathbf{F}$, принадлежащее тому же пространству, следовательно, оператор $\mathbf{A}_{\infty,\infty}$ имеет ограниченный обратный оператор [7].

Рассмотрим операторное уравнение с приближенно заданной левой частью $\mathbf{F}_\varepsilon = \mathbf{A}_{\infty,\infty} \omega$, где $F_\varepsilon(x) = F(x) + \varepsilon(x)$ – эмпирическая функция распределения;

ε – погрешность, относительно которой будем полагать, что она является отрезком центрированной случайной функции с финитным спектром, непрерывной и имеющей ограниченную вариацию.

В силу линейности пространства $B \subset L_2[a,b]$ функция $F_\varepsilon(x)$ так же, как и функция $F(x)$, будет принадлежать пространству $B \subset L_2[a,b]$.

Следовательно, мы получили операторное уравнение, связывающее эмпирическую функцию распределения $\mathbf{F}_\varepsilon$ с плотностью вероятности случайного процесса ω :

$$\mathbf{F}_\varepsilon = \mathbf{A}_{\infty,\infty} \omega \quad (3)$$

Алгоритм восстановления плотности вероятности по результатам наблюдения случайной величины

Поскольку пространство l_2 , которому принадлежат $\frac{\pi}{n} F_\varepsilon\left(\frac{\pi i}{n}\right), \frac{\pi}{n} \omega\left(\frac{\pi i}{n}\right)$, строго выпукло и компактно, и операторы $\mathbf{A}_{\infty,\infty}$, $\mathbf{A}_{\infty,\infty}^{-1}$, $\mathbf{A}_{n,n}$ и $\mathbf{A}_{n,n}^{-1}$ ограничены, то в соответствии с [12] для уравнения (3) можно построить квазирешение. Это решение единственно и является регулярным в смысле регуляризации Тихонова.

Решение уравнения будем искать методом конечномерной аппроксимации [13], заменив исходное уравнение уравнением

$$\mathbf{F}_\varepsilon = \mathbf{A}_{n,m} \omega_{m,1} = \mathbf{A}_{n,n} \mathbf{S}_{n,m} \mathbf{a}_{m,1} = \mathbf{U}_{n,m} \mathbf{a}_{m,1}$$

где $\mathbf{A}_{n,n}$ – матрица с общим элементом $a_{i,j} = \sum_{k=j}^n \text{sinc}(\pi(i-k))$, $i, j = 0 \dots n$;

$\mathbf{S}_{n,m}$ – матрица с общим элементом $s_{i,j} = \sqrt{\frac{4}{\pi}} \cos\left((2j-1)\frac{\pi i}{2n}\right)$, $i = 0 \dots n, j = 0 \dots m$,

откуда получим:

$$\mathbf{a} = (\mathbf{U}^T \mathbf{U})^{-1} \mathbf{U}^T \tilde{\mathbf{F}}.$$

Соответственно, для плотности вероятности найдем выражение, которое представлено ниже:

$$\omega(x) = \sum_{j=0}^m a_j \sqrt{\frac{4}{\pi}} \cos\left((2j-1)\frac{\pi}{2}x\right).$$

В связи с тем, что решение, найденное методом конечномерной аппроксимации, в общем случае единственным не является [13], то дополнительно потребуем, чтобы m выбиралось из условия m равно минимальному значению, при котором выполняется равенство

$$\mathbf{p}_{n,1}^T \mathbf{S}_{n,m} \mathbf{a}_{n,1} \frac{\pi}{n} = 1,$$

где $\mathbf{p}$ – единичный вектор.

Результаты восстановления плотности вероятности по предложенной в работе методике и методике работы [2] приведены ниже на рис. 1 и 2. Пунктиром на рисунках обозначено точное значение функции плотности вероятности.

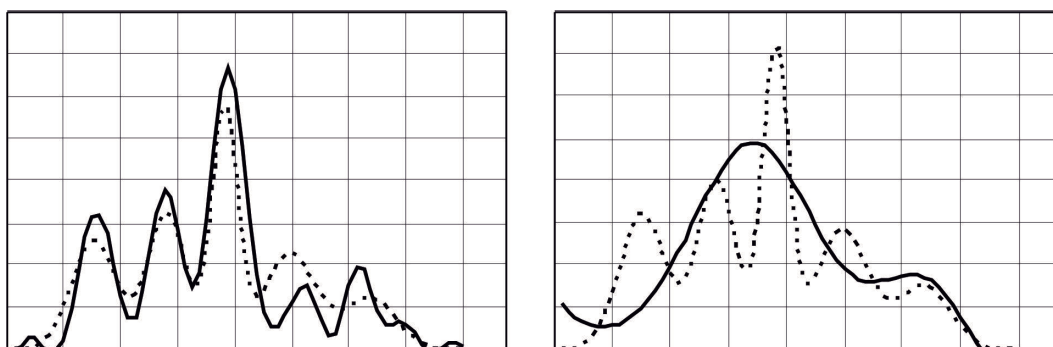


Рис. 1. Графики плотности вероятности, восстановленные по результатам измерения случайной величины, согласно предложенной методике (слева) и методике [2] (справа): объем выборки $n = 64$; относительная среднеквадратическая погрешность для найденного нами решения – 0.29, для решения, найденного по методике [2] – 0.45.

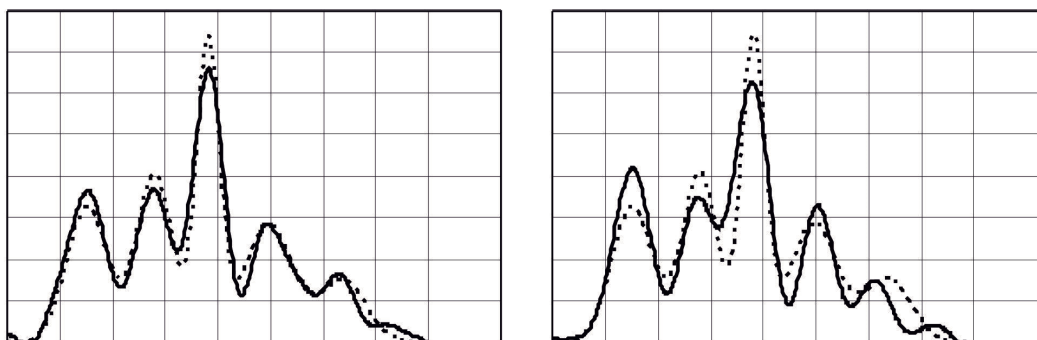


Рис. 2. Графики плотности вероятности, восстановленные по результатам измерения случайной величины, согласно предложенной методике (слева) и методике [2] (справа): объем выборки $n = 512$; относительная среднеквадратическая погрешность для предложенного нами решения – 0.11 (слева), для решения, найденного по методике [2] – 0.22.

Следует отметить, что алгоритм непараметрического восстановления плотности вероятности, предложенный нами, практически совпадает с алгоритмом, полученным ранее [14], однако предложенный в данной работе алгоритм обладает тем существенным преимуществом, что он не требует определения коэффициента регуляризации.

Полученные результаты можно обобщить на многомерный случай.

Пусть $f(x, y)$ является функцией с ограниченной плоской вариацией Тонелли, тогда при каждом фиксированном x_0 (y_0) функция $f(x, y_0)$, $f(x_0, y)$ будет иметь конечную вариацию $V(x, y_0)$ ($V(x_0, y)$). Таким образом, задачу восстановления плотности вероятности в двухмерном (многомерном¹) случае можно свести к последовательному решению одномерных задач по сечениям y_i или x_i .

Анализ разработанного алгоритма

При решении тестовых задач последовательность случайных чисел с заданным законом распределения задавали следующим образом. Генерировали последовательность чисел $x_i = F(i/N)$, $i = 1 \dots N$, здесь $F(x)$ – функция распределения, а N должно удовлетворять условию $N \gg n$, где n – объем выборки, по которой находится эмпирическая функция распределения. Тестирование методики проводили для функций плотности вероятности с числом вершин от 2 до 7.

Установлено, что для всех видов функции плотности вероятности разработанная методика дает по величине относительной среднеквадратической погрешности выигрыш, в среднем, в два раза по сравнению с методикой работы [2].

Оценим скорость сходимости предложенного метода. Если n выбраны таким образом, что для погрешностей правой части уравнения (3) и оператора δA_n выполняется неравенство $\delta \tilde{F} \gg \delta A_n$, то для оценки погрешности восстановленной плотности вероятности $\omega(x)$ получим соотношение $\delta \omega \sim \delta \tilde{F}$ [13]. Взяв в качестве оценки погрешности $\delta \tilde{F}$ величину модуля отклонения между теоретической и эмпирической функциями распределения $\delta \tilde{F} \sim n^{-1/2}$ [10], получим оценку для скорости сходимости метода $O(n^{-1/2})$, что лучше, чем оценка скорости сходимости метода, предложенного в [1].

На основании проведенных исследований предложена методика решения задач восстановления многовершинных функций плотности вероятности и показана ее более эффективность (по скорости сходимости), чем методика работы [1], так как при большом числе вершин число интервалов группировки m гистограммы должно быть достаточно большим.

Литература:

1. Вапник В.Н., Стефанюк А.Р. Непараметрические методы восстановления плотности вероятности // Автоматика и телемеханика. 1978. № 8. С. 38–52.
2. Вапник В.Н., Глазкова Т.Г., Кощеев В.А. Алгоритмы и программы восстановления зависимостей / под ред. В.Н. Вапника. М.: Наука, 1984. 815 с.
3. Кропотов Ю.А. Методы оценивания моделей плотности вероятностей акустических сигналов в телекоммуникациях аудиообмена // Системы управления, связи и безопасности. 2017. № 1. С. 26–39.

¹При размерности $n > 2$ функции $F(x)$, $\omega(x)$ должна быть функцией с существенно ограниченной вариацией [14].

4. Куликов В.Б. Восстановление полимодальных плотностей вероятности по экспериментальным данным в структурах со стохастическими свойствами // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Математическое моделирование. Оптимальное управление. 2014. № 1 (1). С. 248–256.
5. Лапко А.В., Лапко В.А. Анализ эффективности методов дискретизации интервала измерений случайной величины при оценивании плотности вероятности // Информатика и системы управления. 2015. № 3(45). С. 84–88
6. Ченцов Н.Н. Оценка неизвестной плотности распределения по наблюдениям // Докл. АН СССР. 1962. Т. 147. № 1. С. 45–48.
7. Колмогоров А.Н., Фомин С.И. Элементы теории функций и функционального анализа. М: Наука, 1976. 542 с.
8. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. Начальный курс. М.: Изд-во МГУ, 1985. 662 с.
9. Хургин Я.И., Яковлев В.П. Фinitные функции в физике и технике. М.: Наука, 1971. 408 с.
10. Трынин А.Ю. Необходимые и достаточные условия равномерной на отрезке синк-аппроксимации функций ограниченной вариации // Изв. Саратов. ун-та. Нов. серия. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16. Вып. 3. С. 288–298.
11. Смирнов В.И. Курс высшей математики: в 5-ти т. Т. 5. М.: Наука, 1974. 600 с.
12. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.
13. Танана В.П. Методы решения операторных уравнений. М.: Наука, 1981. 156 с.
14. Пастушков А.А. Непараметрический метод восстановления плотности вероятности по наблюдениям случайной величины // Научный вестник МИРЭА. 2009. № 1(6). С. 57–61.
15. Вольпе А.И., Худяев С.И. Анализ в классах разрывных функций и уравнения математической физики. М.: Наука, 1975. 395 с.

References:

1. Vapnik V.N., Stefanyuk A.R. Nonparametric methods for recovering the probability density // Avtomatika i telemekhanika (Automation and Remote Control). 1978. № 8. P. 38–52. (in Russ.).
2. Vapnik V.N., Glazkova T.G., Kosheev V.A. Algorithms and programs for recovering dependencies / Ed. V.N. Vapnik. Moscow: Nauka Publ., 1984. 815 p. (in Russ.).
3. Kropotov Yu.A. Methods of estimation models of acoustic signals probability density in telecommunications audio-exchange systems // Sistemy upravleniya, svyazi i bezopasnosti (Systems of Control, Communications and Security). 2017. V. 1. P. 26–39. (in Russ.).
4. Kulikov V.B. Reconstruction of multimodal probability densities from experimental data in structures with stochastic properties // Vestnik Nizhegorodskogo universiteta imeni N.I. Lobachevskogo. Matematicheskoye modelirovaniye. Optimal'noye upravleniye (Vestnik of Lobachevsky University of Nizhny Novgorod. Mathematic Modeling. Optimal Control). 2014. V. 1 (1). P. 248–256. (in Russ.).
5. Lapko A.V., Lapko V.A. The analysis of efficiency of decomposition methods of

measurements interval of the random variable at a probability density estimation // *Informatika i sistemy upravleniya* (Information Science and Control Systems). 2015. V. 3 (45). P. 84–88. (in Russ.).

6. Chentsov N.N. Estimation of the unknown distribution density by observations // *Doklady Akademii Nauk SSSR*. 1962. V. 147. № 1. P. 45–48. (in Russ.).

7. Kolmogorov A.N., Fomin S.I. Elements of the theory of functions and functional analysis. M.: Nauka Publ., 1976. 542 p.

8. Il'yin V.A., Sadovnichii V.A., Sendov Bl.X. Mathematical analysis. The initial course. Moscow: Publishing House of Moscow State University, 1985. 662 p.

9. Khurgin Ya.I., Yakovlev V.P. Finite functions in physics and engineering. Moscow: Nauka Publ., 1971. 408 p.

10. Trynin A.Yu. Necessary and sufficient conditions for the uniform on a segment sink-approximations functions of bounded variation // *Izvestiya Saratovskogo Universiteta. Novaya Seriya. Matematika. Mekhanika. Informatika* (Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics). 2016. V. 16. № 3. P. 288–298. (in Russ.).

11. Smirnov V.I. Course of Higher Mathematics: in five vols. V. 5. Moscow: Nauka Publ., 1974. 600 p. (in Russ.).

12. Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. Theory of linear ill-posed problems and its applications. Moscow: Nauka Publ., 1978. 206 p. (in Russ.).

13. Tanana V.P. Methods for solving operator equations. Moscow: Nauka Publ., 1981. 156 p. (in Russ.).

14. Pastushkov A.A. Nonparametric method for recovering the probability density from observations of a random variable // *Nauchnyi vestnik MIREA* (Scientific Bulletin of MIREA). 2009. № 1(6). P. 50–61. (in Russ.).

15. Volper A.I., Khudyaev S.I. Analysis in classes of discontinuous functions and equations of mathematical physics. Moscow: Nauka Publ., 1975 395 p. (in Russ.).

Об авторах:

Крыжановский Александр Дмитриевич, магистрант, кафедра информационных систем, Института кибернетики ФГБОУ ВО «МИРЭА - Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского д. 78).

Пастушков Александр Анатольевич, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры информационных систем Института кибернетики ФГБОУ ВО «МИРЭА - Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского д. 78).

About the authors:

Alexander D. Kryzhanovskiy, AD, Master of Arts, Department of Information Systems, Institute of Cybernetics, MIREA – Russian Technological University (119454, Russia, Moscow, 78 Vernadsky Ave.).

Alexander A. Pastushkov, Ph. D., Associate Professor, Associate of the Department of Information Systems, Institute of Cybernetics, MIREA – Russian Technological University (119454, Russia, Moscow, 78 Vernadsky Ave.).

УДК 004.021

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛНЫХ ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

В.П. Бердников

МИРЭА - Российский технологический университет, Москва 119454, Россия

@Автор для переписки, e-mail: berdnikov_vp@mail.ru

В статье предлагается численный алгоритм построения сплайн-функций Ляпунова для исследования абсолютной устойчивости нелинейных нестационарных систем. В случае асимптотической устойчивости системы выполнение алгоритма приведет к построению поверхности уровня функции Ляпунова в виде кусочно-гладкой (гладкой, при выполнении дополнительных условий) замкнутой поверхности размерности, равной размерности исходной системы. Показано, что данный алгоритм позволяет существенно улучшить оценки границы устойчивости, получаемые с помощью частотных методов. В отличие от алгоритма построения кусочно-линейных функций Ляпунова, время работы предлагаемого алгоритма построения сплайн-функций Ляпунова не стремится к бесконечности при приближении системы к границе устойчивости. Данное обстоятельство позволяет использовать модифицированный алгоритм для определения устойчивости систем, находящихся близко к границе устойчивости. Приведены оценки точности определения области устойчивости на примере конкретной системы 3-го порядка. Даны рекомендации по выбору начальных условий работы алгоритма.

Ключевые слова: дифференциальные включения, нелинейные нестационарные системы, абсолютная устойчивость, функции Ляпунова, области устойчивости, сплайн Безье, полиномы Бернштейна.

MODIFIED ALGORITHM FOR DETERMINATION OF FULL STABILITY AREAS IN NONSTATIONARY NONLINEAR SYSTEMS

V.P. Berdnikov

MIREA - Russian Technological University, Moscow 119454, Russia

@Corresponding author e-mail: berdnikov_vp@mail.ru

The paper proposes a numerical algorithm for constructing Lyapunov spline functions for investigating the absolute stability of nonlinear nonstationary systems. In the case of asymptotic stability of the system, the implementation of the algorithm will lead to the construction of the Lyapunov function level set in the form of a piece-wise smooth (smooth, if additional conditions are met) closed surface of dimension equal to the dimension of the original system. It is shown that the modified algorithm significantly improves the stability boundary estimates obtained with frequency methods. Unlike the algorithm for constructing piecewise linear Lyapunov functions, the running time of the proposed algorithm for constructing the Lyapunov spline functions does not tend to infinity as the system approaches the stability boundary. This circumstance makes it possible to use a modified algorithm to determine the stability of systems that are close to the stability boundary. An estimate of the accuracy of determining the stability area using an example of a third-order system is shown. Specific recommendations on the algorithm initial conditions choice are given.

Keywords: differential inclusions, nonlinear nonstationary systems, absolute stability, Lyapunov functions, stability areas, Bezier splines, Bernstein polynomials.

Настоящая статья является логическим продолжением ранее опубликованной работы [1], в которой на основе теоретических исследований о функциях Ляпунова [2–4], определяющих необходимые и достаточные условия устойчивости систем с секторными нестационарными нелинейными элементами, предложен численный алгоритм построения кусочно-линейных функций Ляпунова. На конкретных примерах было показано: в общем случае при приближении к границе устойчивости системы в пространстве параметров количество граней многогранной поверхности уровня функции Ляпунова стремится к бесконечности, что, в свою очередь, влечет за собой увеличение времени численного построения функции Ляпунова. Многогранная поверхность уровня кусочно-линейной функции Ляпунова при этом становится все более «гладкой». Таким образом, результаты исследований автора [1] совпадают с литературными данными [2–4] и свидетельствуют о целесообразности построения кусочно-гладкой (гладкой) функции Ляпунова вблизи границы устойчивости системы.

Необходимо отметить, что в рамках решения задачи об абсолютной устойчивости параметрически возмущаемых систем ранее уже был разработан метод построения гладких функций Ляпунова вида форм четных степеней (однородных полиномов многих переменных четных степеней), полное описание которого, а также обширную библиографию можно найти в монографии [5]. Метод базируется на решении задачи о положительной определенности форм четных степеней. Однако формы старших степеней не имеют аналога критерия Сильвестра для квадратичных форм, и определение положительной/отрицательной определенности формы старших степеней представляет собой самостоятельную нетривиальную задачу. Именно отсюда, в частности, возникают трудности поиска функции Ляпунова непосредственно в виде полинома четной степени, большей двух.

В отличие от [5], нами предлагается ниже метод построения гладких функций Ляпунова на основе сплайн-функций. При этом особая схема построения гарантирует положительную определенность функции Ляпунова, а сама функция строится в ходе решения специальной минимаксной задачи оптимизации.

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему управления, в структуре которой есть несколько (либо один) нелинейных нестационарных элементов. Уравнение такой системы можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + \sum_{j=1}^m b^j \varphi_j(\sigma_j, t) \\ \sigma_j &= (c^j, x) = \sum_{i=1}^d c_i^j x_i \quad \varphi_j(0, t) \equiv 0 \end{aligned} \quad (1)$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)^T$ – d -мерный вектор-столбец переменных состояния;

A – постоянная $(d \times d)$ матрица;

b^j и c^j ($j = 1, \dots, m$) – постоянные d -мерные вектор-столбцы;

m – число нестационарных нелинейных элементов;

$(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение векторов.

Предполагается, что нелинейные нестационарные элементы $\varphi_j(\sigma_j, t)$ удовлетворяют секторным ограничениям

$$\begin{aligned} \delta_j^1 \leq \frac{\varphi_j(\sigma_j, t)}{\sigma_j} \leq \delta_j^2 \\ (-\infty < \delta_j^1 \leq \delta_j^2 < \infty, \quad j = 1, \dots, m) \end{aligned}$$

при всех σ_j и t .

Ранее показано [2–4], что вопрос об устойчивости системы (1) можно свести к вопросу об устойчивости эквивалентного (эквивалентность понимается в смысле совпадения множеств решений при одинаковых начальных условиях) дифференциального включения

$$\frac{dx}{dt} \in F(x), \quad F(x) = \text{conv} \bigcup_{k=1}^N A_k x, \quad (2)$$

где conv – выпуклая оболочка объединения точек (рис. 1);

$\bigcup_{k=1}^N$ – знак объединения;

A_k – квадратные матрицы размера $(d \times d)$.

Дифференциальные включения описывают класс объектов, в которых в каждый момент времени вектор направления движения в фазовом пространстве не определяется некоторым уравнением (в отличие от обычных дифференциальных уравнений), а принадлежит множеству $F(x)$, определяемому правой частью дифференциального включения.

Матрицы A_k для представления системы (1) в виде (2) формируются следующим образом:

$$A_k = A + \sum_{j=1}^m \lambda_j b^j (c^j)^T, \quad k = 1, \dots, 2^m \quad (3)$$

где числа λ_j принимают значения δ_j^1 или δ_j^2 .

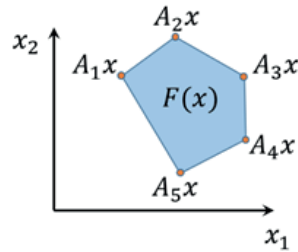


Рис. 1. Графическое представление правой части дифференциального включения (2).

Таким образом, общее количество матриц A_k равно 2^m , что соответствует количеству всех возможных комбинаций чисел λ_j .

Если существует строго выпуклая во всем пространстве $\mathbb{R}^d$ положительно однородная степени $s \geq 1$ функция $v(x)$ ($x \in \mathbb{R}^d$, $x \neq 0$, $v(0)=0$), с отрицательно определенной производной в силу дифференциального включения $dv(x)/dt$, то дифференциальное включение (2) будет асимптотически устойчиво, а вместе с ним будет устойчива и соответствующая система с нелинейными нестационарными элементами (1). В случае гладкой функции $v(x)$ производная по направлению задается следующим образом:

$$\frac{dv(x)}{dt} = \max_{y \in F(x)} (\text{grad } v(x), y), \quad (4)$$

где $\text{grad } v(x)$ – градиент функции $v(x)$ в точке x .

В силу положительной однородности функции $v(x)$ ($v(\tau x) = \tau^s v(x)$, $\tau > 0$ при любом x) поверхности уровня $v(x)$ отличаются только масштабом и не отличаются формой, представляя собой границу выпуклого тела размерности d .

Если значение (4) отрицательно для любого x , то система асимптотически устойчива [2–4]. Дифференциальное включение (2) также является однородным, так как вектора $y \in F(x)$ меняют длину, но не направление при умножении x на $\tau > 0$. Следовательно, задача определения абсолютной устойчивости систем (1) и (2) редуцируется к задаче построения поверхности уровня функции Ляпунова. Условие устойчивости в этом случае (с геометрической точки зрения) можно трактовать как наличие тупого угла между нормалью $n = \text{grad } v(x)$ и каждым из векторов $y \in F(x)$ во всех точках x поверхности уровня $v(x)$. Если для случая кусочно-линейных функций Ляпунова поверхностью уровня был, как показано в [1], выпуклый многогранник, то в данной статье предлагается алгоритм построения кусочно-гладких и гладких поверхностей уровня функций Ляпунова для дифференциальных включений (2).

По существу, главным недостатком многогранников, как поверхностей уровня функций Ляпунова дифференциальных включений (2), является неограниченное возрастание количества граней при приближении системы к границе устойчивости. При таком подходе естественной выглядит идея «сглаживания» многогранника с небольшим количеством граней.

Предлагаемая нами схема построения поверхности уровня функции Ляпунова для систем (1) и (2) состоит из следующих этапов:

- 1) построение произвольного выпуклого многогранника с непустой внутренно-

стью в пространстве размерности d ;

2) сопоставление каждой гиперграни полученного многогранника некоторой гладкой поверхности, обеспечение непрерывной стыковки соседних поверхностей, а при необходимости – и гладкой стыковки;

3) оптимизация положения вершин многогранника и параметров поверхности для достижения отрицательного значения (4) в каждой точке поверхности, если это возможно (т.е. если система (1), (2) устойчива).

Перейдем к непосредственному описанию этапов построения поверхности уровня функции Ляпунова¹.

2. Построение замкнутой поверхности

На первом этапе необходимо построить выпуклый многогранник. Условия задачи требуют рассматривать только центрально-симметричные поверхности [2–4]. Следовательно, и многогранник, на основе которого нужно строить замкнутую поверхность, должен быть центрально-симметричным. Для построения такого многогранника достаточно произвольным образом задать m точек p_i в пространстве размерности d ($m \geq d$), далее воспользоваться алгоритмом построения выпуклых оболочек множества точек (см., например, [1, 6]). При этом во множество точек, на основе которого строится выпуклая оболочка, входят как p_i , так и $-p_i$. Непустая внутренность у многогранника возможна, когда не все точки лежат в $(d-1)$ -плоскости, проходящей через начало координат.

Для формирования непрерывной замкнутой поверхности уровня поступим следующим образом. Соотнесем каждую гипергрань f_r ($(d-1)$ -симплекс) с некоторой гладкой поверхностью s_r (рис. 2). Очевидно, что для непрерывности поверхности уровня функции Ляпунова у двух смежных гиперграней f_1 и f_2 на общей подгранице e поверхности s_1 и s_2 должны совпадать (рис. 3).

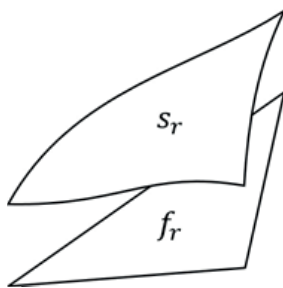


Рис. 2. Гипергрань f_r и соответствующая ей гладкая поверхность s_r в трёхмерном пространстве.

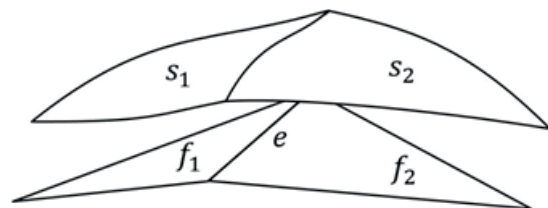


Рис. 3. Непрерывное соединение двух поверхностей s_1 и s_2 в трёхмерном пространстве.

Изложим методику построения кусочно-гладких поверхностей уровня функций Ляпунова. Для построения поверхностей s_r предлагается использовать многомерные многочлены Бернштейна-Безье (англ. *multivariate Bernstein-Bezier polynomials*) [7], в двумерном случае они полностью совпадают с обычными Безье-сплайнами [8], в трехмерном – с треугольными Безье-поверхностями (англ. *triangular Bernstein-Bézier patches*) [9]. Многомерные многочлены Бернштейна-Безье позволяют строить параметрические по-

¹В ходе описания используются свойства и определения для многогранников, приведенные в работе [1].

верхности в пространстве $\mathbb{R}^d$. Параметрами такой поверхности являются барицентрические координаты $u = (u_1, u_2, \dots, u_d) \in \mathbb{R}^d$, удовлетворяющие условиям

$$|u| = \sum_{i=1}^d u_i = 1, \quad u_i > 0.$$

Используя барицентрические координаты, по формуле (5) можно задать $(d+1)$ -симплекс в d -мерном пространстве, вершинами которого являются точки $p_i \in \mathbb{R}^d$. В двумерном случае симплекс эквивалентен отрезку, соединяющему точки p_1, p_2 , в трехмерном – треугольнику, вершинами которого являются p_1, p_2, p_3 .

$$p(u) = \sum_{i=1}^d p_i u_i \quad (5)$$

Многочлен Бернштейна порядка n определяется следующим образом:

$$B_\lambda^n(u) = \frac{n!}{\lambda!} u^\lambda, \quad |\lambda| = \sum_{i=1}^d \lambda_i = n, \quad \lambda_i \geq 0,$$

$$\lambda! = \lambda_1! \cdot \lambda_2! \cdot \dots \cdot \lambda_d!, \quad u^\lambda = u_1^{\lambda_1} \cdot u_2^{\lambda_2} \cdot \dots \cdot u_d^{\lambda_d},$$

где $\lambda_i \in \mathbb{Z}$,

тогда многомерная сплайн-поверхность определяется по формуле

$$s(u) = b_\lambda^n(u) = \sum_{|\lambda|=n} b_\lambda B_\lambda^n(u). \quad (6)$$

Для вычисления $s(u)$ на основе итерационной процедуры воспользуемся алгоритмом де Кастельжо (7):

$$b_\lambda^{r+1}(u) = \sum_{i=1}^d u_i b_{\lambda+e_i}^r(u), \quad (7)$$

$$|\lambda| = n - r, \quad r = 0, 1, \dots, n, \quad b_\lambda^0(u) = b_\lambda$$

здесь у векторов e_i все компоненты, кроме i -ой, равны нулю, а i -ая равна единице.

Преимущества использования алгоритма де Кастельжо по сравнению с прямым расчетом значений сплайн-поверхности по формуле (6) заключаются не только в вычислительной устойчивости при больших n , но и в том, что на предпоследнем шаге алгоритм дает d точек, через которые проходит плоскость, касательная к поверхности. Последнее обстоятельство крайне важно, так как условие устойчивости требует вычисления нормали к поверхности уровня функции Ляпунова, которую легко получить, имея d точек касательной гиперплоскости.

Графические интерпретации сплайн-поверхностей (6) и алгоритма де Кастельжо (7) для двумерного и трехмерного случаев приведены на рис. 4 и 5.

Чтобы построить такую поверхность, зададим в пространстве $\mathbb{R}^d$ центрально-симметричный многогранник с непустой внутренностью. Все вершины этого многогранника должны

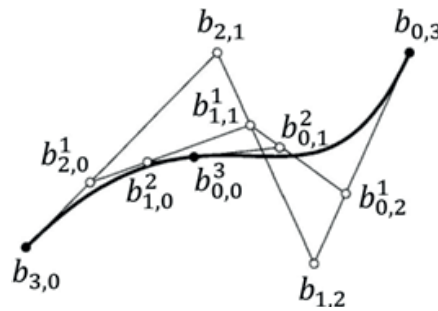


Рис. 4. Кривая Безье на плоскости, ее контрольные точки и этапы алгоритма де Кастельжо.

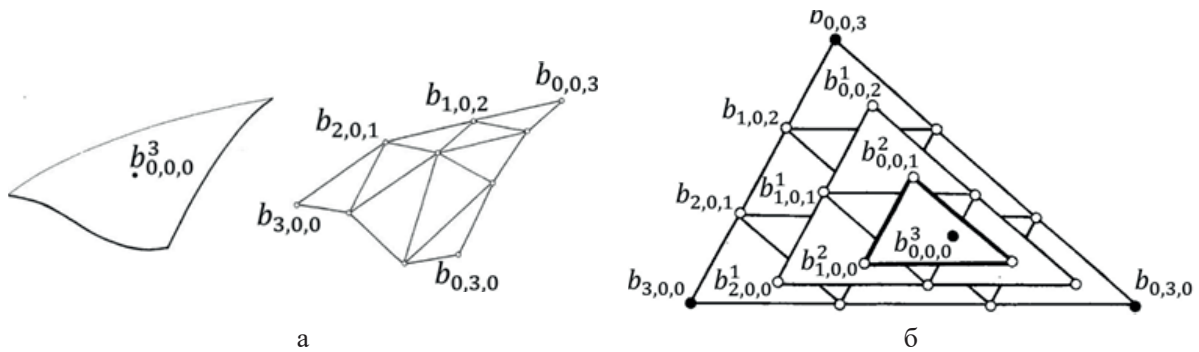


Рис. 5. Сплайн-поверхность в трехмерном пространстве и ее контрольные точки (а), алгоритм де Кастельжо итерационного вычисления значений поверхности (б).

лежать на единичной сфере. На каждой гиперграни введём сеть точек b_λ

$$b_\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^d \lambda_i p_i, \quad |\lambda| = n, \quad (8)$$

где n определяет плотность сетки.

Пример сетки для $d = 3$ и $n = 4$ представлен на рис. 6.

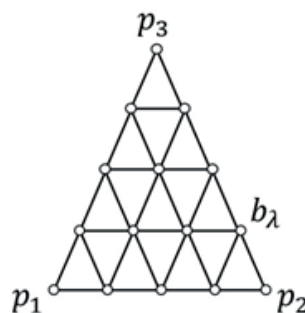


Рис. 6. Пример сетки на гиперграни в трехмерном пространстве.

Для каждой узловой точки b_λ введем некоторую величину – «высоту» $h_\lambda > 0$ и построим сплайн-поверхность s_p , используя в качестве контрольных точек $h_\lambda b_\lambda$. Вероятно, необходимо равенство высот h_λ на общем ребре двух смежных граней, тогда итоговая замкнутая поверхность будет непрерывной. На рис. 7 показана непрерывная замкнутая центрально-симметричная поверхность в трехмерном пространстве при $n = 4$, построенная на основе многогранника с восемью гранями.

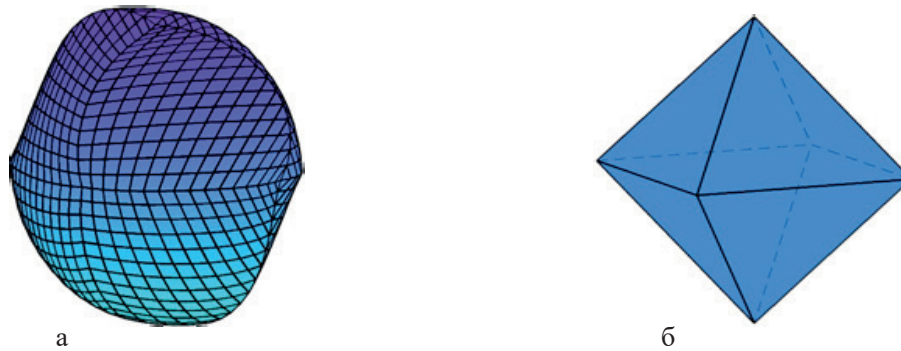


Рис. 7. Непрерывная замкнутая центрально-симметричная поверхность в трёхмерном пространстве (а), исходный многогранник (б).

Как видно, предложенная схема является гибким инструментом создания замкнутых поверхностей даже на основе очень простых многогранников. Теперь покажем, как вычислить нормаль к такой поверхности.

Выше уже отмечалось, что в процессе выполнения алгоритма де Кастельжо на предпоследнем шаге получается d точек, через которые проходит касательная плоскость. Обозначим эти точки $v_1, v_2, \dots, v_d$ тогда нормальный вектор можно получить, используя матрицу T :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & v_1^1 & v_2^1 & \dots & v_d^1 \\ 1 & v_1^2 & v_2^2 & \dots & v_d^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & v_1^d & v_2^d & \dots & v_d^d \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad v_i = \begin{pmatrix} v_i^1 \\ v_i^2 \\ \vdots \\ v_i^d \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Раскладывая определитель матрицы T по первому столбцу, получим d слагаемых, которые и являются компонентами вектора нормали. Например, для вычисления 2-ой компоненты необходимо найти

$$n^2 = (-1)^{1+2} \det \begin{pmatrix} v_1^1 & v_2^1 & \dots & v_d^1 \\ v_1^3 & v_2^3 & \dots & v_d^3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1^d & v_2^d & \dots & v_d^d \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Однако вычисленные нормали могут быть направлены как внутрь замкнутой поверхности, так и во вне ее. Чтобы нормали всегда были направлены во вне, их необходимо умножить на

$$(-1)^{d+1} \text{sign} \det \begin{pmatrix} v_1^1 & v_2^1 & \dots & v_d^1 \\ v_1^2 & v_2^2 & \dots & v_d^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1^d & v_2^d & \dots & v_d^d \end{pmatrix},$$

где $\text{sign } a$ принимает значение 1, если a положительное, и -1 , если a отрицательное.

Описанная выше процедура позволяет строить замкнутые поверхности и легко вычислять нормали к ним, что дает возможность свести задачу определения устойчивости системы (1), (2) к задаче оптимизации замкнутой сплайн-поверхности.

Перейдем к описанию последнего этапа предложенной в 1-ом разделе схемы построения поверхности уровня функции Ляпунова.

3. Формирование оптимизационной задачи

Поскольку устойчивость системы требует отрицательного значения (4) для любой точки x поверхности уровня, то оптимизационную задачу можно сформулировать как поиск такой сплайн-поверхности, для которой максимальное значение (4) является минимальным среди всех других сплайн-поверхностей такой же конфигурации. Уравнение (4) в данном случае примет вид:

$$\max_{y \in F(x)} (\text{grad } v(x), y) = \max_k (A_k s(u), n), \quad (10)$$

а учитывая (9), значение (10) можно переписать так:

$$\max_{y \in F(x)} (\text{grad } v(x), y) = \max_k \left((-1)^{d+1} \text{sign det}(v_1 \dots v_d) \det \begin{pmatrix} A_k s(u) & v_1 & \dots & v_d \\ 0 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \right). \quad (11)$$

Отсюда очевидно, что сформулированная оптимизационная задача является задачей на минимакс и допускает решение с использованием численных методов [10, 11]. При этом на каждой итерации решения задачи на минимакс необходимо решать вспомогательную оптимизационную задачу поиска максимального значения $(A_k s(u), n)$ для всех поверхностей s_r . Если построенная в ходе выполнения процесса оптимизации поверхность уровня функции Ляпунова имеет в любой своей точке x отрицательное значение (4), то система асимптотически устойчива, если нет – то требуется выбрать другую конфигурацию многогранника с бóльшим количеством вершин и бóльшим значением n . Если не удастся построить поверхность уровня при большом количестве граней и высоком порядке сплайн-поверхности, то система неустойчива.

Переменными, которые должны меняться в ходе процесса решения минимаксной задачи оптимизации, являются вершины исходного многогранника p_i , а также высоты h_λ . Численные эксперименты показали, что для устойчивости оптимизационного процесса необходимо ввести в задачу следующие ограничения:

- $(p_i, p_i) = 1$: ограничение означает, что все вершины многогранника останутся на единичной сфере размерности d ;
- $(b_\lambda, b_\lambda) h_\lambda > 1$: предотвратит ситуацию бесконечного сжатия поверхности к началу координат;
- $\text{sign}(\det(p_1^n, \dots, p_d^n)) \cdot \det(p_1^0, \dots, p_d^0) > 0$, где p_i^n – вершины гиперграни до начала процесса оптимизации, а p_i^0 – вершины гиперграни в процессе оптимизации. Это ограничение сделает невозможным самопересечения многогранника.

Если в процессе оптимизации у сплайн-поверхности всюду значение (9) отрицательное, то процесс оптимизации нужно остановить, так как дальнейшая работа приведет к бесконечному «раздуванию» поверхности. Этот вывод следует из того, что при увеличении масштаба поверхности векторы $A_k s(u)$ и n из (9) сохраняют свое направление, но длина их увеличивается, т.е. отрицательные значения будут становиться еще меньше.

Учитывая все вышесказанное, сформулируем *алгоритм* построения сплайн-поверхности уровня функции Ляпунова для систем (1) и (2):

Шаг 1. По формуле (3) вычисляют матрицы A_k .

Шаг 2. На единичной сфере размерности d произвольным образом задают m точек p_i ($m \geq d$). Точки p_i не должны все лежать в $(d-1)$ -плоскости, проходящей через начало координат.

Шаг 3. Строят выпуклую оболочку множества точек, в которое входят p_i и $-p_i$, для чего можно, например, использовать алгоритм *beneath-beyond*, описанный в [1, 6].

Шаг 4. Для каждой гиперграни полученного центрально-симметричного многогранника вводят точки b_λ , вычисляемые по формуле (8). Каждой точке b_λ соответствует некоторая высота h_λ . Соответствующие высоты h_λ на общем ребре двух смежных граней должны совпадать. После этого на каждой гиперграни строят сплайн-поверхность.

Шаг 5. С помощью численных итерационных методов решается задача минимизации максимального значения $(A_k s(u), n)$, определяемого по формуле (11) при следующих ограничениях: $(p_r, p_r) = 1$, $(b_\lambda, b_\lambda) h_\lambda > 1$, $\text{sign}(\det(p_1'', \dots, p_d'')) \cdot \det(p_1^0, \dots, p_d^0) > 0$.

Шаг 6. На каждой итерации решают вспомогательную оптимизационную задачу поиска максимального значения $(A_k s(u), n)$ для всех поверхностей s_r .

Шаг 7. Если на какой-либо итерации максимальное значение $(A_k s(u), n) < 0$ для всех s_r при соблюденных ограничениях, описанных в шаге 5, то полученная сплайн-поверхность является поверхностью уровня однородной кусочно-гладкой функции Ляпунова, а системы (1), (2) устойчивы.

Шаг 8. Если после окончания итерационного процесса существуют s_r , для которых $(A_k s(u), n) > 0$, то следует увеличить количество вершин p_i или порядок сплайн-поверхности n и вернуться к шагу 2. Наличие $(A_k s(u), n) > 0$ при большом количестве вершин и высоком порядке поверхности свидетельствует о неустойчивости системы.

4. Анализ работы алгоритма

В заключение приведем результаты численных экспериментов на примерах расчета областей устойчивости системы 3-го порядка из [1]. Результаты сопоставления значений граничного коэффициента, полученного различными методами, даны в таблице.

Значения граничного² коэффициента при использовании различных методов анализа

Метод анализа	Частотный метод	Кусочно-линейная функция Ляпунова	Сплайн-функция Ляпунова
$\delta_{\text{гр}}$	2.15	3.0	4.06

²Под граничным понимается наибольший коэффициент, при котором метод дает положительное заключение об устойчивости.

Из таблицы видно, что граничный коэффициент, определяемый с помощью сплайн-функции Ляпунова, в 1.35 раза больше, чем для кусочно-линейной функции, и в 1.9 раза больше значения, полученного частотным методом. Здесь стоит пояснить, что с помощью кусочно-линейной функции Ляпунова можно получить более точную оценку граничного коэффициента $\delta_{гр}$, однако, уже при $\delta_{гр} = 3.0$ количество граней составляет около трех тысяч, а дальнейшее уточнение коэффициента потребует функций Ляпунова с десятками и сотнями тысяч граней, что резко отразится на времени расчета. Оно будет увеличиваться от нескольких минут до нескольких часов и более. Сплайн-функция Ляпунова с восемью гранями и $n = 4$ рассчитывается за 367 с, что составляет чуть более шести минут. Таким образом, вблизи границы устойчивости системы целесообразнее использовать сплайн-функции Ляпунова, а внутри области устойчивости – кусочно-линейные. Поверхность уровня сплайн-функции Ляпунова приведена на рис. 8.

Увеличение количества граней, а также порядка n сплайн-поверхности позволяет создавать поверхности все более сложной формы, что должно приводить к уточнению границы устойчивости. Однако численные эксперименты показали, что увеличение количества граней может приводить к неустойчивости процесса оптимизации. При этом приходится либо ограничивать максимальный шаг изменения переменных на каждом шаге оптимизационного процесса, либо вводить дополнительные ограничения (например, требование выпуклости многогранника на каждой итерации). В обоих случаях время расчета поверхности уровня становится неприемлемо высоким.

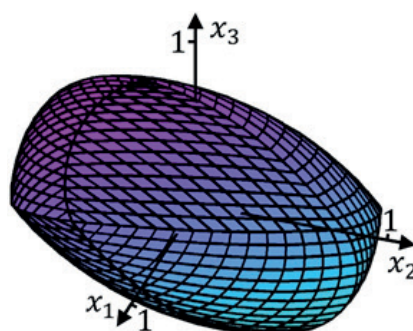


Рис. 8. Поверхность уровня сплайн-функции Ляпунова для системы третьего порядка.

Влияние увеличения порядка n сплайн-поверхности на точность определения границы устойчивости показано на рис. 9.

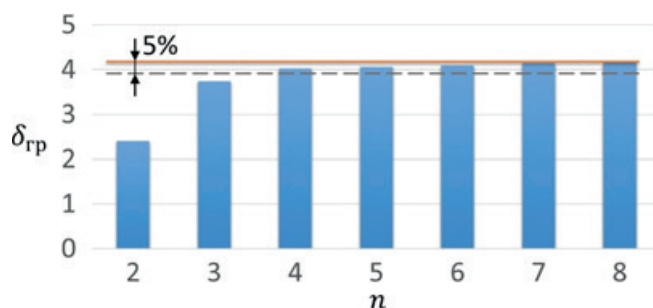


Рис. 9. Значения границы устойчивости при увеличении порядка сплайн-поверхности.

Как и следовало ожидать, наибольшее значение $\delta_{гр} = 4.152$ достигается при $n = 8$, т.е. с увеличением порядка сплайн-поверхности происходит уточнение границы устойчивости. В то же время уже при $n = 4$ погрешность определения границы устойчивости составляет менее 5% ($\delta_{гр} = 4.028$), что говорит о целесообразности использования для достаточно точной оценки областей устойчивости сплайн-поверхности невысокого порядка. Это особенно актуально при расчете областей устойчивости на плоскости (в пространстве) параметров, где необходим алгоритм построения сплайн-поверхности уровня функции Ляпунова для каждой точки плоскости (пространства), так как время работы алгоритма тем меньше, чем меньше порядок n .

При проведении исследований предполагалось, что в качестве вершин многогранника на этапе инициализации (Шаг 2 алгоритма) выбирали $p_i = e_i$, а все высоты h_λ принимали равными единице. Такие значения переменных для инициализации процесса оптимизации будем называть стандартными начальными условиями. В [1] было показано, что корректный выбор начального многогранника позволяет существенно сократить время работы алгоритма построения многогранной поверхности уровня функции Ляпунова. Аналогичное утверждение справедливо и для алгоритма построения сплайн-поверхности. Впрочем, выбор корректных начальных условий для конкретной системы (1), (2) крайне затруднителен.

При последовательном уточнении границы устойчивости возможно использование в качестве начальных условий поверхности уровня с предыдущего этапа расчета границы устойчивости. Так, в примере, рассмотренном выше, для определения максимального значения $\delta_{гр} = 4.06$ при $n = 4$ можно использовать в качестве начальной поверхность, рассчитанную для $\delta_{гр} = 3.0$. В этом случае время расчета составит 184 с, что почти в два раза меньше времени, которое затрачивается на алгоритм с использованием стандартных начальных условий (367 с). Если учесть, что время работы алгоритма для $\delta_{гр} = 3.0$ со стандартными начальными условиями составляет 32 с, то общее время расчета границы устойчивости за два этапа составит 216 с. Таким образом, вычисление поверхности уровня для $\delta_{гр} = 4.06$ в два этапа позволяет сэкономить 2.5 минуты по сравнению с одноэтапным способом.

Суммируя все вышеизложенное, можно дать следующие рекомендации по использованию предлагаемого в данной статье модифицированного алгоритма:

- количество вершин p_i задать равным d ; в качестве многогранника взять выпуклую оболочку множества точек $\{p_i, -p_i\}$;
- порядок сплайн-поверхности принять равным $n = d + 1$, имея в виду, что точность оценки границы устойчивости составит около 5%; для уточнения оценки увеличить порядок n ;
- если требуется определить устойчивость систем (1) и (2) с конкретными параметрами, то задать $p_i = e_i$, $h_\lambda = 1$;
- если требуется вычислить границу устойчивости систем (1), (2), то использовать несколько этапов, постепенно улучшая оценку границы; на каждом последующем этапе использовать поверхность с предыдущего этапа в качестве начальных условий для процесса оптимизации.

Если решение задачи требует построения полностью гладкой поверхности, то следует обеспечить дополнительные условия G' гладкости [7, 9]. Однако целесообразно принять

во внимание, что выполнение данных условий для замкнутых поверхностей возможно не для всех конфигураций многогранника, на основе которого строится сплайн-поверхность [9]. В частности, для Безье-сплайнов целесообразно говорить о G^1 -непрерывности (геометрической, визуальной гладкости) [12]. Для визуальной гладкости поверхности уровня s_1 и s_2 на ребре e должны иметь совпадающие по направлению нормали. Из рис. 8 видно, что замкнутая поверхность имеет изломы на стыке двух Безье-сплайнов. Условия G^1 -гладкости выражаются в виде равенств, куда входят опорные точки смежных сплайнов Безье, но количество этих равенств резко возрастает с увеличением порядка n . К тому же эти условия разработаны только для размерности $d = 3$.

На практике для построения гладких поверхностей в задачу оптимизации придется вводить ограничения типа равенств, что увеличит время расчета поверхности уровня функции Ляпунова. Заметим, что, кроме схемы построения поверхностей в многомерном пространстве, изложенной в [7], существуют и другие, гарантирующие гладкость соединения двух смежных граней [9]. Однако схема, основанная на полиномах Бернштейна-Безье, является наиболее простой с точки зрения построения поверхностей, вычисления нормалей к ним и, как показано в данной работе, позволяет реализовать алгоритм определения полных областей устойчивости в пространстве параметров.

Заключение

В работе получен модифицированный алгоритм, обеспечивающий необходимые и достаточные условия устойчивости нелинейных нестационарных систем. В отличие от частотных методов, он позволяет выявлять полные области устойчивости в пространстве параметров. Вблизи границы устойчивости время работы модифицированного алгоритма существенно меньше, чем у алгоритма построения кусочно-линейных функций. Даны конкретные рекомендации по выбору параметров алгоритма. Показано, что достаточно точную оценку границу устойчивости можно получить, используя поверхности невысокого порядка.

Показано, что схема построения поверхностей уровня функции Ляпунова, основанная на полиномах Бернштейна-Безье, является наиболее простой. Использование вместо сплайнов Безье других типов поверхностей позволяет гарантировать гладкость соединения смежных поверхностей, хотя и может увеличивать время работы алгоритма. Таким образом, предложенная схема построения поверхностей функции Ляпунова является достаточно гибкой и позволяет достигать быстрого действия работы алгоритма либо обеспечивать специальные свойства поверхности уровня при незначительных изменениях.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда в рамках проекта № 16-19-00052 «Синтез интеллектуальных регуляторов для систем управления мобильных объектов с высокой степенью управляемости».

Литература:

1. Бердников В.П. Алгоритм определения полных областей устойчивости нестационарных нелинейных систем // Российский технологический журнал. 2017. Т. 5. № 6. С. 55–72.
2. Молчанов А.П., Пятницкий Е.С. Функции Ляпунова, определяющие необходимые и достаточные условия абсолютной устойчивости нелинейных нестационарных систем

управления // Автоматика и телемеханика. 1986. № 3. С. 63–73.

3. Молчанов А.П., Пятницкий Е.С. Функции Ляпунова, определяющие необходимые и достаточные условия абсолютной устойчивости нелинейных нестационарных систем управления II // Автоматика и телемеханика. 1986. № 4. С. 5–15.

4. Молчанов А.П., Пятницкий Е.С. Функции Ляпунова, определяющие необходимые и достаточные условия абсолютной устойчивости нелинейных нестационарных систем управления III // Автоматика и телемеханика. 1986. № 5. С. 38–49.

5. Chesi G., Garulli A., Tesi A., Vicino A. Homogeneous polynomial forms for robustness analysis of uncertain systems. London: Springer-Verlag, 2009. 198 p.

6. Barber C.B., Dobkin D.P., Huhdanpaa H. The Quickhull algorithm for convex hulls // ACM Transactions on Mathematical Software. 1995. V. 22. Iss. 4. P. 469–483.

7. Farin G. Triangular Bernstein-Bezier patches // Computer Aided Geometric Design. 1986. V. 3. № 2. P. 83–127.

8. Prautzsch H., Boehm W., Paluszny M. Bezier and B-Spline techniques. Berlin: Springer-Verlag, 2002. 304 p.

9. Farin G. Curves and surfaces for CAD: A practical guide (5th Edition). San Francisco: Morgan Kaufmann, 2001. 520 p.

10. Sun W., Yuan Y. Optimization theory and methods: Nonlinear programming. New York: Springer, 2010. 687 p.

11. Bonnans J., Gilbert J.C., Lemarechal C., Sagastizabal C.A. Numerical optimization: Theoretical and practical aspects. Berlin: Springer, 2006. 490 p.

12. DeRose T.D. Necessary and sufficient conditions for tangent plane continuity of Bezier surfaces // Computer Aided Geometric Design. 1990. № 7. P. 165–179.

References:

1. Berdnikov V.P. Algorithm of determination of non-stationary nonlinear systems full stability areas // Rossiiskiy tekhnologicheskiiy zhurnal (Russian Technological Journal). 2017. V. 5. № 6. P. 55–72. (in Russ.).

2. Molchanov A.P., Pyatnitskiy E.S. Lyapunov functions that determine necessary and sufficient conditions for absolute stability of nonlinear time-varying control systems I // Avtomatika i telemekhanika (Automation and Remote Control). 1986. № 3. P. 63–73. (in Russ.).

3. Molchanov A.P., Pyatnitskiy E.S. Lyapunov functions that determine necessary and sufficient conditions for absolute stability of nonlinear time-varying control systems II // Avtomatika i telemekhanika (Automation and Remote Control). 1986. № 4. P. 5–15. (in Russ.).

4. Molchanov A.P., Pyatnitskiy E.S. Lyapunov functions that determine necessary and sufficient conditions for absolute stability of nonlinear time-varying control systems III // Avtomatika i telemekhanika (Automation and Remote Control). 1986. № 5. P. 38–49. (in Russ.).

5. Chesi G., Garulli A., Tesi A., Vicino A. Homogeneous polynomial forms for robustness analysis of uncertain systems. London: Springer-Verlag, 2009. 198 p.

6. Barber C. B., Dobkin D. P., Huhdanpaa H. The Quickhull algorithm for convex hulls // ACM Transactions on Mathematical Software. 1995. V. 22. Iss. 4. P. 469–483.

7. Farin G. Triangular Bernstein-Bezier patches // Computer Aided Geometric Design. 1986. V. 3. № 2. P. 83–127.

8. Prautzsch H., Boehm W., Paluszny M. Bezier and B-Spline techniques. Berlin: Springer-Verlag, 2002. 304 p.
9. Farin G. Curves and surfaces for CAGD: A practical guide (5th Edition). San Francisco: Morgan Kaufmann, 2001. 520 p.
10. Sun W., Yuan Y. Optimization theory and methods: Nonlinear programming. New York: Springer, 2010. 687 p.
11. Bonnans J., Gilbert J.C., Lemarechal C., Sagastizabal C.A. Numerical optimization: Theoretical and practical aspects. Berlin: Springer, 2006. 490 p.
12. DeRose T.D. Necessary and sufficient conditions for tangent plane continuity of Bezier surfaces // Computer Aided Geometric Design. 1990. № 7. P. 165–179.

Об авторе:

Бердников Василий Петрович, аспирант кафедры проблем управления Института кибернетики ФГБОУ ВО «МИРЭА - Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78).

About the author:

Vasily P. Berdnikov, Postgraduate Student, Chair of Control Problems, Institute of Cybernetics, MIREA - Russian Technological University (78, Vernadskogo Pr., Moscow 119454, Russia).

УДК 621.372.8

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПОЛОСКОВЫХ ЛИНИЙ В МНОГОСЛОЙНОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

А.Н. Коваленко^{1,@},

А.Н. Жуков^{1,2}

¹МИРЭА - Российский технологический университет, Москва 119454, Россия

²Научно-производственный центр «Специальные космические комплексы и системы»,
АО «Корпорация «ВНИИЭМ», Москва 107078, Россия

@Автор для переписки, e-mail: a_kovalenko@mirea.ru

Электродинамическая задача сведена к интегральному уравнению относительно плотности тока на полосковом проводнике. Оно решается проекционным методом с использованием «чебышёвского» базиса. Приведена однородная система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно коэффициентов разложения продольной и поперечной составляющих плотности тока по полиномам Чебышёва с весовыми функциями, учитывающими особенность поля на краях полосковых проводников. Из условия равенства нулю определителя этой системы численными методами определяются постоянные распространения собственных волн. Проведена процедура улучшения сходимости медленно сходящихся рядов для матричных коэффициентов СЛАУ. Решена проблема вычисления с высокой точностью функций, представленных в виде бесконечных медленно сходящихся рядов, через которые определяются матричные коэффициенты. Получена универсальная, не зависящая от числа слоев, формула для расчета волновых сопротивлений собственных волн. Использование «чебышёвского» базиса и улучшение сходимости рядов позволили разработать эффективный алгоритм расчета основных электродинамических параметров полосковых линий – постоянных распространения и волновых сопротивлений собственных волн. Построенные алгебраические модели полосковых линий позволяют путем компьютерного моделирования получить численные результаты быстро и с высокой точностью независимо от числа диэлектрических слоев и их параметров. На основе разработанного алгоритма создан комплекс компьютерных программ расчета постоянных распространения, коэффициентов разложений плотности тока по «взвешенным» полиномам Чебышёва и волновых сопротивлений экранированных полосковых линий различного типа: одиночной и связанных (с боковой и лицевой связью) микрополосковых линий; компланарной полосковой линией; щелевой линии и компланарного волновода. Эти программы позволяют определять электродинамические параметры основной волны и до 50 волн высших типов. Представлены результаты численного анализа сходимости разработанного алгоритма расчета собственных волн, подтверждающие эффективность построенных моделей. Приведены численные результаты, полученные без проведения процедуры улучшения сходимости рядов для матричных коэффициентов, и результаты, полученные проекционным методом с использованием тригонометрического базиса.

Ключевые слова: проекционный метод, «чебышёвский» базис, собственные волны, эффективный алгоритм расчета, постоянные распространения, волновые сопротивления, алгебраические модели, компьютерное моделирование.

ALGEBRAIC MODELS OF STRIP LINES IN A MULTILAYER DIELECTRIC MEDIUM

A.N. Kovalenko^{1,@},

A.N. Zhukov^{1,2}

¹*MIREA - Russian Technological University, Moscow 119454, Russia*

²*Scientific and Production Center "Special Space Complexes and Systems", JSC "VNIIEM Corporation", Moscow 107078, Russia*

@Corresponding author e-mail: a_kovalenko@mirea.ru

The electrodynamic problem is reduced to an integral equation with respect to the current density on the strip conductor. It is solved by the projection method using the Chebyshev basis. A homogeneous system of linear algebraic equations (SLAE) is described with respect to the coefficients of the expansion of the longitudinal and transverse components of the current density in terms of Chebyshev polynomials with weight functions that take into account the specificity of the field at the edges of the strip conductors. On the basis of the condition that the determinant of this system is zero the constants of the natural waves propagation are determined by numerical methods. A procedure for improving the convergence of slowly convergent series for the matrix coefficients of SLAE is carried out. The problem of high-accuracy calculation of the functions represented in the form of infinite slowly convergent series, by means of which the matrix coefficients are determined, is solved. A universal formula independent of the number of layers for calculating the wave impedances of natural waves is obtained. The use of the Chebyshev basis and the improvement of the series convergence made it possible to develop an effective algorithm for calculating the basic electrodynamic parameters of the strip lines – the propagation constants and the wave impedances of the natural waves. The constructed algebraic models of strip lines allow computer simulation to obtain numerical results quickly and with high accuracy irrespectively of the number of dielectric layers and their parameters. On the basis of the developed algorithm we created a set of computer programs for calculating the propagation constants, the coefficients of the current density decomposition in terms of Chebyshev weighted polynomials and the wave impedances of screened strip lines of various types: a single and connected microstrip lines (with side and face communication); coplanar strip line; slit line and coplanar waveguide. These programs allow determining the electrodynamic parameters of the main wave and up to 50 waves of higher types. The results of a numerical analysis of the convergence of the developed algorithm for the calculation of natural waves are presented. This confirms the effectiveness of the constructed models. Numerical results obtained without the procedure for improving the convergence of series for matrix coefficients and results obtained by the projection method using the trigonometric basis are given.

Keywords: projection method; "Chebyshev" basis; eigenwaves; effective calculation algorithm; constant propagation; wave resistance; algebraic models; computer modelling.

Введение

Основной проблемой в электродинамической теории полосковых линий является построение системы собственных волн. Ее решение дает возможность рассмотреть задачи дифракции на нерегулярностях линии и на их основе разработать методы электродинамического анализа различных элементов интегральных схем СВЧ. Современная

технология монолитных интегральных схем СВЧ включает изготовление многоуровневых планарных структур. Использование покрывающих и подстилающих слоев и слоев диэлектрика между металлическими элементами приводит к необходимости анализа элементов с учетом многослойности диэлектрической среды. Собственные волны определяются как решения однородной системы уравнений электродинамики, удовлетворяющие граничным условиям. Эти решения представляют электродинамические модели полосковых линий. Построение электродинамических моделей полосковых линий возможно лишь с использованием численных методов, на основе которых разрабатываются вычислительные алгоритмы и реализующие их компьютерные программы. Наиболее универсальными являются проекционные (вариационные) методы решения электродинамических задач [1, 2]. Проекционные методы можно применить непосредственно к уравнениям Максвелла и к интегральному или иному операторному уравнению, к которому сведена электродинамическая задача. Проекционный метод преобразует электродинамическую задачу в систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), которую называют проекционной, или алгебраической, моделью этой задачи.

Проблема эффективного нахождения собственных волн особенно актуальна при решении задач дифракции на скачкообразных нерегулярностях полосковых линий методом проекционного «сшивания» [3] и создании математических моделей нерегулярных полосковых структур, представляющих каскадное соединение отрезков регулярных линий на основе линейной декомпозиции [4]. При этом для каждой линии требуется найти не только основную волну, но и достаточно большое число высших волн. Предложен эффективный численно-аналитический метод построения системы собственных волн экранированной микрополосковой линии [5]. В основу метода положен проекционный способ решения интегральных уравнений специального вида с использованием «чебышёвского» базиса, учитывающего в явном виде краевые особенности решения. Этот метод позволяет получить численные результаты с высокой точностью при небольшом числе базисных функций. В работах [6, 7] данный метод обобщен на многослойные полосковые и щелевые направляющие структуры. Однако при численной реализации метода необходимо решить проблему вычисления с высокой точностью медленно сходящихся рядов для матричных коэффициентов СЛАУ.

Цель настоящей работы – получить расчетные соотношения для матричных коэффициентов СЛАУ и представить результаты численного исследования сходимости разработанного алгоритма.

1. Алгебраическая модель одиночной полосковой линии

Поперечное сечение линии показано на рис. 1. Область ниже полоскового проводника ($y < c$) обозначена как 1, область выше полоскового проводников – 2. В области 1 – K слоев, в области 2 – N слоев, $\epsilon_{jl,2}$ – относительная диэлектрическая проницаемость среды в j -том слое областей 1, 2.

Собственные волны находятся из решения граничной задачи для уравнений Максвелла. Решение этой задачи представляется в виде бесконечных рядов Фурье по координате x . Коэффициенты разложений выражаются через интегралы от поверхностной плотности тока на полосковом проводнике. Граничное условие для тангенциальной составляющей напряженности электрического поля на поверхности полоскового проводника приводит

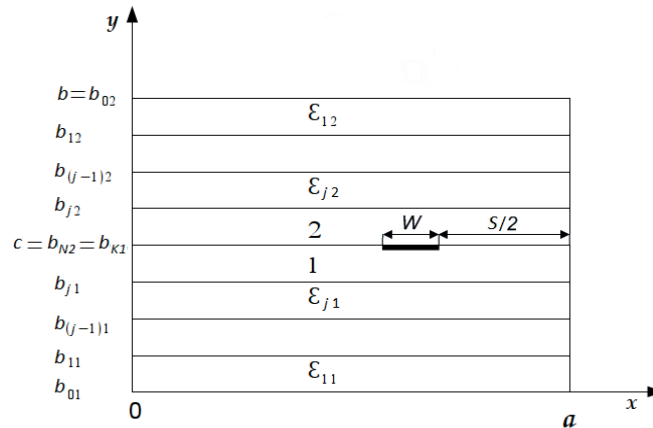


Рис. 1. Поперечное сечение линии.

к системе интегральных уравнений относительно продольной η_z и поперечной η_x составляющих плотности тока на полосковом проводнике. Решение системы представляется в виде произведения двух функций, одна из которых, весовая, учитывает краевые особенности решения, а другая, регулярная, представляется в виде разложения по полиномам Чебышёва:

$$\eta_z = \frac{1}{\sqrt{1-\tilde{x}^2}} \sum_{l=0}^{\infty} a_l T_l(\tilde{x}), \quad i\Gamma\eta_x = \frac{W}{2} \sqrt{1-\tilde{x}^2} \sum_{l=0}^{\infty} b_l U_l(\tilde{x}), \quad \tilde{x} = \frac{x-x_0}{W/2}; \quad (1)$$

где Γ – нормированная (к волновому числу $k_0 = 2\pi f \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$) постоянная распространения;

ϵ_0 – диэлектрическая постоянная;

μ_0 – магнитная постоянная;

f – частота;

x_0 – расстояние от плоскости до центра полоскового проводника;

W – ширина полоскового проводника;

$T_l(\tilde{x})$ – полиномы Чебышёва первого рода;

$U_l(\tilde{x})$ – полиномы Чебышёва второго рода.

В (1) и последующих выражениях опущен множитель $e^{-i\Gamma z}$ и используются безразмерные координаты и элементы длины, переход к которым осуществляется путем умножения их размерных аналогов на волновое число свободного пространства k_0 . Используя [6], получим следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложений a_l и b_l :

$$\begin{aligned} A_{q0}^q a_0 + \sum_{l=1}^L \left(A_{ql}^q a_{2l} + B_{ql}^{Hq} b_{2l-1} + \tilde{A}_{ql}^{Hq} a_{2l-1} + \tilde{B}_{ql}^q b_{2(l-1)} \right) &= 0, q = 0, 1, \dots, L, \\ C_{q0}^q a_0 + \sum_{l=1}^L \left(C_{ql}^q a_{2l} + D_{ql}^{Hq} b_{2l-1} + \tilde{C}_{ql}^{Hq} a_{2l-1} + \tilde{D}_{ql}^q b_{2(l-1)} \right) &= 0, q = 1, 2, \dots, L, \\ \tilde{A}_{q0}^q a_0 + \sum_{l=1}^L \left(\tilde{A}_{ql}^q a_{2l} + \tilde{B}_{ql}^{Hq} b_{2l-1} + A_{ql}^{Hq} a_{2l-1} + B_{ql}^q b_{2(l-1)} \right) &= 0, q = 1, 2, \dots, L, \\ \tilde{C}_{q0}^q a_0 + \sum_{l=1}^L \left(\tilde{C}_{ql}^q a_{2l} + \tilde{D}_{ql}^{Hq} b_{2l-1} + C_{ql}^{Hq} a_{2l-1} + D_{ql}^q b_{2(l-1)} \right) &= 0, q = 1, 2, \dots, L, \quad L \rightarrow \infty \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{ql}^{\text{ч}} &= (-1)^{q+l} \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_{(2q)(2l)}(m\alpha) \sin^2 m\beta, \\
 B_{ql}^{\text{Hч}} &= (-1)^{q+l} 2l \sum_{m=1}^{\infty} B_m J_{(2q)(2l)}(m\alpha) \sin^2 m\beta, \\
 D_{ql}^{\text{Hч}} &= (-1)^{q+l} 4ql \sum_{m=1}^{\infty} D_m J_{(2q)(2l)}(m\alpha) \sin^2 m\beta, \\
 A_{ql}^{\text{Hч}} &= (-1)^{q+l} \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_{(2q-1)(2l-1)}(m\alpha) \cos^2 m\beta, \\
 B_{ql}^{\text{ч}} &= (-1)^{q+l} (2l-1) \sum_{m=1}^{\infty} B_m J_{(2q-1)(2l-1)}(m\alpha) \cos^2 m\beta, \\
 D_{ql}^{\text{ч}} &= (-1)^{q+l} (2q-1)(2l-1) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m}{2} D_m J_{(2q-1)(2l-1)}(m\alpha) \cos^2 m\beta, \\
 \tilde{A}_{ql}^{\text{Hч}} &= -(-1)^{q+l} \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_{(2q)(2l-1)}(m\alpha) \sin m\beta \cos m\beta, \\
 \tilde{B}_{ql}^{\text{ч}} &= -(-1)^{q+l} (2l-1) \sum_{m=1}^{\infty} B_m J_{(2q)(2l-1)}(m\alpha) \sin(m\beta) \cos(m\beta), \\
 \tilde{C}_{ql}^{\text{Hч}} &= -(-1)^{q+l} 2q \sum_{m=1}^{\infty} B_m J_{(2q)(2l-1)}(m\alpha) \sin m\beta \cos m\beta \\
 \tilde{D}_{ql}^{\text{ч}} &= -(-1)^{q+l} 2q(2l-1) \sum_{m=1}^{\infty} D_m J_{(2q)(2l-1)}(m\alpha) \sin m\beta \cos m\beta \\
 C_{ql}^{\text{ч}} &= B_{lq}^{\text{Hч}}, \quad C_{ql}^{\text{Hч}} = B_{lq}^{\text{ч}}, \quad \tilde{A}_{ql}^{\text{Hч}} = \tilde{A}_{lq}^{\text{Hч}}, \quad \tilde{B}_{ql}^{\text{Hч}} = \tilde{B}_{lq}^{\text{Hч}}, \quad \tilde{C}_{ql}^{\text{ч}} = B_{lq}^{\text{Hч}}, \quad \tilde{D}_{ql}^{\text{Hч}} = \tilde{D}_{lq}^{\text{ч}},
 \end{aligned} \tag{3}$$

где

$$A_m = \frac{1}{\chi^2} (\Gamma^2 G_m^{\text{э}} + \alpha_m^2 G_m^{\text{м}}), \quad B_m = \frac{1}{\chi^2} (G_m^{\text{м}} - G_m^{\text{э}}), \quad D_m = \frac{1}{\chi^2} \left(\frac{G_m^{\text{э}}}{\Gamma^2} + \frac{G_m^{\text{м}}}{\alpha_m^2} \right), \tag{4}$$

$$\varepsilon_m = \begin{cases} 1 & \text{при } m = 0 \\ 2 & \text{при } m \neq 0 \end{cases},$$

$$J_{ql}(x) = J_q(x) J_l(x);$$

$J_\nu(x)$ – функция Бесселя;

$$\alpha = \frac{\pi W}{2a}, \quad \beta = \alpha \left(1 + \frac{S}{W} \right);$$

W – ширина полоскового проводника;

$S/2$ – расстояние от проводника до плоскости $x = a$.

$$\begin{aligned}
 G_m^{\text{э,м}} &= (1 / Z_{mK1}^{\text{э,м}} + 1 / Z_{mN2}^{\text{э,м}})^{-1}, \\
 Z_{mj1,2}^{\text{э,м}} &= \frac{Z_{m(j-1),2}^{\text{э,м}} + W_{mj1,2}^{\text{э,м}} \operatorname{tg}(\beta_{mj1,2} |b_{j1,2} - b_{(j-1),1,2}|)}{1 - (Z_{m(j-1),2}^{\text{э,м}} / W_{mj1,2}^{\text{э,м}}) \operatorname{tg}(\beta_{mj1,2} |b_{j1,2} - b_{(j-1),1,2}|)},
 \end{aligned}$$

$$W_{mj1,2}^{\mathcal{E}} = \beta_{mj1,2} / \varepsilon_{j12}, \quad W_{mj1,2}^{\mathcal{M}} = 1 / \beta_{mj1,2}, \quad Z_{m01,2}^{\mathcal{E},\mathcal{M}} = 0,$$

$$\beta_{mj1,2} = \sqrt{\varepsilon_{j1,2} - \chi_m^2}, \quad \chi_m^2 = \alpha_m^2 + \Gamma^2, \quad \alpha_m = \frac{\pi}{a} m. \quad (5)$$

Выражения (3) для матричных коэффициентов системы (2) имеют такой же вид, как и для микрополосковой линии на однослойной подложке, приведенные в [5]. Поэтому алгоритмы расчета характеристик многослойных полосковых структур такие же, как и соответствующие алгоритмы для микрополосковых линий на однослойной подложке.

Из условия равенства нулю определителя D системы (2) получим дисперсионное уравнение:

$$D(\Gamma^2) = 0. \quad (6)$$

Из этого уравнения численными методами определяются постоянные распространения собственных волн полосковых линий.

Бесконечные ряды для матричных коэффициентов системы (2), определяемых выражениями (3), сходятся медленно, и непосредственное их вычисление требует большого времени счета. Оно может приводить к неустойчивым результатам даже при учете весьма большого числа членов в этих рядах. Поэтому при численном решении дисперсионного уравнения (6) и СЛАУ (2) необходимо выполнить процедуру улучшения сходимости рядов по разработанной в [5] методике.

2. Улучшение сходимости рядов для матричных коэффициентов

Сходимость медленно сходящихся рядов можно существенно улучшить, если к коэффициентам A_m , B_m и D_m , определяемых выражениями (4), прибавить и вычесть их асимптотические выражения $A_m^\infty, B_m^\infty, D_m^\infty$. Используя (4) и (5), можно показать, что асимптотические выражения для функций $G_m^{\mathcal{E},\mathcal{M}}$ и коэффициентов A_m , B_m и D_m не зависят от числа диэлектрических слоев и представляются в виде:

$$G_m^{\mathcal{E}} \Big|_{m \rightarrow \infty} \cong -\alpha_m / (\varepsilon_{K1} + \varepsilon_{N2}), \quad G_m^{\mathcal{M}} \Big|_{m \rightarrow \infty} \cong 1 / (2\alpha_m),$$

$$A_m^\infty \cong \frac{1}{\alpha_m} \left(\frac{1}{2} - \frac{\Gamma^2}{\varepsilon_{K1} + \varepsilon_{N2}} \right), \quad B_m^\infty \cong \frac{1}{\alpha_m (\varepsilon_{K1} + \varepsilon_{N2})}, \quad D_m^\infty \cong -\frac{1}{\alpha_m \Gamma^2 (\varepsilon_{K1} + \varepsilon_{N2})}. \quad (7)$$

Таким образом, выражения для коэффициентов $A_{ql}^{\mathcal{E}}, A_{ql}^{\mathcal{H}\mathcal{E}}, \tilde{A}_{ql}^{\mathcal{H}\mathcal{E}}$ имеют вид:

$$A_{ql}^{\mathcal{E}} = (-1)^{q+l} (A_m^\infty m S_{ql}(\alpha, \beta) + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m - A_m^\infty) J_{(2q)(2l)}(m\alpha) \sin^2(m\beta)),$$

$$A_{ql}^{\mathcal{H}\mathcal{E}} = (-1)^{q+l} (A_m^\infty m P_{ql}(\alpha, \beta) + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m - A_m^\infty) J_{(2q-1)(2l-1)}(m\alpha) \cos^2(m\beta)),$$

$$\tilde{A}_{ql}^{\mathcal{H}\mathcal{E}} = (-1)^{q+l} (A_m^\infty m Q_{ql}(\alpha, \beta) + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m - A_m^\infty) J_{(2q)(2l-1)}(m\alpha) \sin(m\beta) \cos(m\beta)),$$

где

$$S_{ql}(\alpha, \beta) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \cdot J_{(2q)(2l)}(m\alpha) \cdot \sin^2 m\beta, \quad (8)$$

$$P_{ql}(\alpha, \beta) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \cdot J_{(2q-1)(2l-1)}(m\alpha) \cdot \cos^2 m\beta, \quad (9)$$

$$Q_{ql}(\alpha, \beta) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \cdot J_{(2q)(2l-1)}(m\alpha) \cdot \sin m\beta \cdot \cos m\beta. \quad (10)$$

Аналогичные выражения можно получить и для остальных матричных коэффициентов.

При численном решении дисперсионного уравнения (6) и СЛАУ (2), а также при расчете волновых сопротивлений возникает проблема вычисления функций $S_{ql}(\alpha, \beta)$, $P_{ql}(\alpha, \beta)$, $Q_{ql}(\alpha, \beta)$, определяемых медленно сходящимися рядами (7)–(9). Для достижения высокой точности расчета коэффициентов замедления и волновых сопротивлений необходимо учитывать в них до десяти тысяч членов, что обуславливает большие вычислительные затраты. Используя интегральные выражения для функций Бесселя и их производных [5], можно получить следующие представления для этих функций:

$$S_{ql}(\alpha, \beta) = R_{(2q)(2l)}(\alpha) - \frac{1}{2} R_{(2q)(2l)}(2\alpha) + F_{(2q)(2l)}(\alpha, \beta),$$

$$P_{ql}(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} R_{(2q-1)(2l-1)}(2\alpha) - F_{(2q-1)(2l-1)}(\alpha, \beta),$$

$$Q_{ql}(\alpha, \beta) = E_{2q(2l-1)}(\alpha, \beta),$$

где

$$R_{kn}(\alpha) = -\frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \cos[(k-n)\theta] \cos[(k+n)\varphi] \ln \left(2 \sin \frac{u}{2} \right) d\theta d\varphi, \quad (11)$$

$k + n$ – четное число;

$$F_{kn}(\alpha) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \cos[(k-n)\theta] \cdot \cos[(k+n)\varphi] \cdot \left[\frac{1}{2} \ln(\sin \beta) + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \ln \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{u}{2} / \operatorname{tg}^2 \beta \right) \right] d\theta d\varphi, \quad (12)$$

$k + n$ – четное число;

$$E_{kn}(\alpha, \beta) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \cos[(k-n)\theta] \sin[(k+n)\varphi] \ln \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{u}{2} / \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \frac{u}{2} / \operatorname{tg} \beta} d\theta d\varphi, \quad (13)$$

$k + n$ – нечетное число, $u = 2\alpha \cos \theta \sin \varphi$.

Разлагая логарифмическую функцию в степенной ряд и интегрируя почленно, приведем выражения для функции $R_{kn}(\alpha)$ к следующему виду:

$$R_{kn}(\alpha)|_{k \neq n} = (-1)^{\frac{k+n}{2}} \sum_{v=\frac{k+n}{2}}^{\infty} S_{2v} \frac{1}{v} \left[\frac{(2v-1)!!}{(2v)!!} \right]^2 \times$$

$$\times \frac{v(v-1) \dots \left(v+1 - \frac{k+n}{2} \right)}{(v+1)(v+2) \dots \left(v + \frac{k+n}{2} \right)} \times \frac{v(v-1) \dots \left(v+1 - \left| \frac{k-n}{2} \right| \right)}{(v+1)(v+2) \dots \left(v + \left| \frac{k-n}{2} \right| \right)} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{2v},$$

$$R_{kk}(\alpha)|_{k \neq 0} = \frac{1}{2k} + (-1)^k \sum_{v=k}^{\infty} S_{2v} \frac{1}{v} \left[\frac{(2v-1)!!}{(2v)!!} \right]^2 \times \frac{v(v-1) \dots (v+1-k)}{(v+1)(v+2) \dots (v+k)} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{2v},$$

$$R_{00}(\alpha) = \ln \frac{2}{\alpha} + \sum_{v=1}^{\infty} S_{2v} \frac{1}{v} \left[\frac{(2v-1)!!}{(2v)!!} \right]^2 \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{2v}, \quad S_{2v} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^{2v}}. \quad (11')$$

Из полученных выражений следует, что ряд быстро сходится, и при расчете функции $R_{kn}(\alpha)$ в нем достаточно учесть несколько первых членов. При больших значениях q и l этот ряд близок к нулю, и тогда для функции $R_{kn}(\alpha)$ получим следующее асимптотическое выражение: $R_{kn} \cong \frac{\delta_{kn}}{2k}$, где $\delta_{kn} = \begin{cases} 1 & \text{при } k = n \\ 0 & \text{при } k \neq n \end{cases}$.

Аналогичные представления можно получить также для функций $F_{kn}(\alpha, \beta)$ и $E_{kn}(\alpha, \beta)$, разлагая в выражениях (12), (13) тангенс и логарифм в степенные ряды и интегрируя почленно. Для широких экранов, для которых $\alpha \ll 1$, в формулах (12), (13) можно положить $\text{tg}(u/2) \approx u/2$. В таком случае:

$$F_{kn}(\alpha, \beta)|_{k \neq n} = -\frac{1}{4}(-1)^{\frac{k+n}{2}} \sum_{v=\frac{k+n}{2}}^{\infty} \frac{1}{v} \left[\frac{(2v-1)!!}{(2v)!!} \right]^2 \times$$

$$\times \frac{v(v-1) \dots \left(v+1 - \frac{k+n}{2} \right)}{(v+1)(v+2) \dots \left(v + \frac{k+n}{2} \right)} \cdot \frac{v(v-1) \dots \left(v+1 - \left| \frac{k-n}{2} \right| \right)}{(v+1)(v+2) \dots \left(v + \left| \frac{k-n}{2} \right| \right)} \cdot \left(\frac{\alpha}{\text{tg} \beta} \right)^{2v},$$

$$F_{kk}(\alpha, \beta)|_{k \neq 0} = -\frac{1}{4}(-1)^k \sum_{v=k}^{\infty} \frac{1}{v} \left[\frac{(2v-1)!!}{(2v)!!} \right]^2 \frac{v(v-1) \dots (v+1-k)}{(v+1)(v+2) \dots (v+k)} \cdot \left(\frac{\alpha}{\text{tg} \beta} \right)^{2v},$$

$$F_{00}(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \ln(\sin \beta) - \frac{1}{4} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v} \left[\frac{(2v-1)!!}{(2v)!!} \right]^2 \left(\frac{\alpha}{\text{tg} \beta} \right)^{2v}. \quad (12')$$

$$\begin{aligned}
 E_{kn}(\alpha, \beta)|_{n \neq k+1} &= (-1)^{\frac{k+n-1}{2}} \frac{1}{2} \sum_{v=\frac{k+n+1}{2}}^{\infty} \frac{1}{2v-1} \frac{\left(v - \left\lfloor \frac{k+n-1}{2} \right\rfloor\right) \left(v + \frac{k-n+1}{2}\right)}{v^2} \left[\frac{(2v-1)!!}{(2v)!!} \right]^2 \times \\
 &\times \frac{v(v-1) \dots \left(v+1 - \frac{k+n-1}{2}\right)}{(v+1)(v+2) \dots \left(v + \frac{k+n-1}{2}\right)} \frac{v(v-1) \dots \left(v+1 - \left\lfloor \frac{k-n+1}{2} \right\rfloor\right)}{(v+1)(v+2) \dots \left(v + \left\lfloor \frac{k-n+1}{2} \right\rfloor\right)} \left(\frac{\alpha}{\operatorname{tg} \beta} \right)^{2v-1}, \\
 E_{k(k+1)}(\alpha, \beta)|_{k \neq 0} &= (-1)^k \frac{1}{2} \sum_{v=k+1}^{\infty} \frac{1}{2v-1} \frac{1}{v} (v-k) \left[\frac{(2v-1)!!}{(2v)!!} \right]^2 \frac{v(v-1) \dots (v+1-k)}{(v+1)(v+2) \dots (v+k)} \left(\frac{\alpha}{\operatorname{tg} \beta} \right)^{2v-1} \\
 E_{01}(\alpha, \beta) &= \frac{1}{2} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{2v-1} \left[\frac{(2v-1)!!}{(2v)!!} \right]^2 \left(\frac{\alpha}{\operatorname{tg} \beta} \right)^{2v-1}.
 \end{aligned} \tag{13'}$$

Таким образом, используя интегральные уравнения (11)–(13), можно получить выражения для функций $S_{ql}(\alpha, \beta)$, $P_{ql}(\alpha, \beta)$, $Q_{ql}(\alpha, \beta)$ в виде быстроходящихся рядов. При больших значениях q и l указанные функции представляются в виде:

$$S_{ql} \cong \frac{1}{8q} \delta_{ql}, \quad P_{ql} \cong \frac{1}{4(2q-1)} \delta_{ql}, \quad Q_{ql} \cong 0 \tag{14}$$

Используя (14), можно получить асимптотические выражения для матричных коэффициентов системы (2), заменив в (3) A_m, D_m, D_m на $A_m^\infty, B_m^\infty, D_m^\infty$ определяемые формулами (7). Из их анализа вытекает вывод о диагональном характере матрицы коэффициентов СЛАУ (2), быстрой сходимости разложений (1) для плотности тока на полосковом проводнике и возможности решения бесконечной системы уравнений методом редукции при небольшом порядке редуцированной СЛАУ. Порядок системы $P = 4L + 1$ ($L = 0, 1, 2, \dots$). В разложениях (1) нужно учитывать $2L$ членов для поперечного тока η_x и $2L + 1$ для продольного η_z . При симметричном расположении полоскового проводника относительно боковых стенок экрана $S = a - W$, $\beta = \pi/2$, и усеченная система (2) распадается на две независимые подсистемы относительно коэффициентов $a_{2l}(l = 0, 1, \dots, L)$, $b_{2l-1}(l = 1, \dots, L)$ и относительно коэффициентов $a_{2l-1}(l = 1, \dots, L)$, $b_{2l}(l = 1, \dots, L)$. Первая подсистема порядка $2L + 1$ соответствует собственным волнам четного типа; вторая – порядка $2L$ соответствует собственным волнам нечетного типа.

Важными электродинамическими параметрами собственных волн являются коэффициенты замедления и волновые сопротивления. Коэффициенты замедления n , равные нормированным к волновому числу постоянным распространения Γ (для распространяющихся типов волн), определяются из дисперсионного уравнения (6). Волновые сопротивления Z находят через мощность и ток:

$$Z = \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b [\vec{E}, \vec{H}^*] \vec{z}^0 dx dy / \left(\int_{x_0-W/2}^{x_0+W/2} \eta_z dx \right)^2$$

Используя разложения (1) для плотности тока и выражения для поля собственных волн, приведенные в [6], можно получить следующее выражение для волнового сопротивления:

$$\begin{aligned}
 Z = \frac{W_o}{a} \Gamma \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_m}{\chi_m^2} & \left[\Gamma^2 (G_m^{\ominus})^2 \left(\frac{1}{G_m^{\ominus}} \right)' \cdot \left(\tilde{I}_{zm} - \frac{\alpha_m}{\Gamma^2} \tilde{I}_{xm} \right)^2 + \right. \\
 & + (G_m^{\text{M}})^2 \left(\frac{1}{G_m^{\text{M}}} \right)' (\alpha_m \tilde{I}_{zm} + \tilde{I}_{xm})^2 + \frac{\alpha_m}{\chi_m^2} (G_m^{\text{M}} - G_m^{\ominus}) \times \\
 & \left. \times \left(\tilde{I}_{zm} - \frac{\alpha_m}{\Gamma^2} \tilde{I}_{xm} \right) (\alpha_m \tilde{I}_{zm} + \tilde{I}_{xm}) \right], \quad (15)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \tilde{I}_{zm} &= \sin(\alpha_m x_o) \sum_{l=0}^L (-1)^l \frac{a_{2l}}{a_o} J_{2l} \left(\alpha_m \frac{W}{2} \right) + \\
 &- \cos(\alpha_m x_o) \sum_{l=1}^L (-1)^l \frac{a_{2l-1}}{a_o} J_{2l-1} \left(\alpha_m \frac{W}{2} \right), \\
 \tilde{I}_{xm} &= \sin(\alpha_m x_o) \sum_{l=1}^L (-1)^l \frac{b_{2l-1}}{a_o} 2l J_{2l} \left(\alpha_m \frac{W}{2} \right) \frac{1}{\alpha_m} - \\
 &- \cos(\alpha_m x_o) \sum_{l=1}^L (-1)^l \frac{b_{2(l-1)}}{a_o} (2l-1) \cdot J_{2l-1} \left(\alpha_m \frac{W}{2} \right) \frac{1}{\alpha_m},
 \end{aligned}$$

$(1/G_m)'$ – производная функции $1/G_m$ по Γ^2 .

Выражение для волнового сопротивления, также, как и выражения для матричных коэффициентов системы (2), не зависят от числа диэлектрических слоев. Усложнение функций $G_m^{\ominus}$ и G_m^{M} в зависимости от числа слоев не вызывает принципиальных затруднений при проведении процедуры улучшения сходимости рядов для матричных коэффициентов и волнового сопротивления, так как асимптотические выражения для этих функций не зависят от числа слоев и их параметров. Поэтому алгоритмы расчета многослойных структур, разработанные с использованием формул (5), те же что и для двухслойной структуры.

Заметим, что при улучшении сходимости ряда (15) для волнового сопротивления подобно рядам для матричных коэффициентов СЛАУ (2) необходимо решить проблему вычисления с высокой точностью медленно сходящихся рядов (8)–(10).

3. Алгебраическая модель связанных полосковых линий

Поперечное сечение экранированных связанных щелевых линий для трехслойной структуры показано на рис. 2.

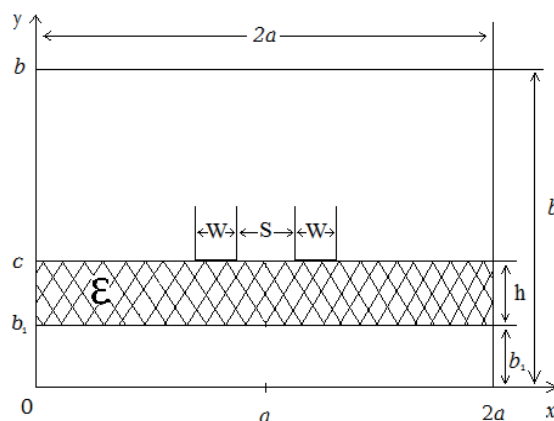


Рис. 2. Поперечное сечение связанных полосковых линий:
 W – ширина полосковых проводников; S – расстояние между ними;
 h – толщина подложки; b_1 – высота подвеса подложки;
 ε – относительная диэлектрическая проницаемость подложки;
 $2a, b$ – размеры экрана.

При одинаковой ширине полосковых проводников задача о собственных волнах связанных линий сводится к двум задачам о собственных волнах одиночной линии: 1) с электрической стенкой в плоскости симметрии $x = a$; 2) с магнитной стенкой в этой плоскости. Из первой задачи определяются собственные волны нечетного типа, из второй – четного типа. Для волн нечетного типа в плоскости симметрии тангенциальная составляющая напряженности электрического поля равна нулю. Для волн четного типа в этой плоскости равна нулю тангенциальная составляющая напряженности магнитного поля. Собственные волны нечетного типа определяются выражениями, приведенными в первом и во втором разделах. Собственные волны четного типа определяются этими же выражениями, в которых нужно заменить m на $m - \frac{1}{2}$ ($m \neq 0$), $\sin(m\beta)$ на $\cos((m - \frac{1}{2})\beta)$, $\cos(m\beta)$ на $\sin((m - \frac{1}{2})\beta)$, $S_{ql}(\alpha, \beta)$ на $S_{ql}^M(\alpha, \beta)$, $P_{ql}(\alpha, \beta)$ на $P_{ql}^M(\alpha, \beta)$, $Q_{ql}(\alpha, \beta)$ на $Q_{ql}^M(\alpha, \beta)$, где

$$\begin{aligned}
 S_{ql}^M(\alpha, \beta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m - \frac{1}{2}} J_{(2q)(2l)} \left[\left(m - \frac{1}{2} \right) \alpha \right] \cos^2 \left[\left(m - \frac{1}{2} \right) \beta \right], \\
 P_{ql}^M(\alpha, \beta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m - \frac{1}{2}} J_{(2q-1)(2l-1)} \left[\left(m - \frac{1}{2} \right) \alpha \right] \sin^2 \left[\left(m - \frac{1}{2} \right) \beta \right], \\
 Q_{ql}^M(\alpha, \beta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m - \frac{1}{2}} J_{(2q)(2l-1)} \left[\left(m - \frac{1}{2} \right) \alpha \right] \sin \left[\left(m - \frac{1}{2} \right) \beta \right] \cos \left[\left(m - \frac{1}{2} \right) \beta \right]. \quad (16)
 \end{aligned}$$

Путем математических преобразований, используя интегральные представления для функций Бесселя и их произведений [5], получаются следующие уравнения для функций, определяемых рядами (15):

$$S_{ql}^M(\alpha, \beta) = R_{(2q)(2l)}(\alpha) - 2F_{(2q)(2l)}\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right) - \left[\frac{1}{2} R_{(2q)(2l)}(2\alpha) - F_{(2q)(2l)}(\alpha, \beta) \right],$$

$$\begin{aligned}
 P_{ql}^M(\alpha, \beta) &= 2R_{(2q-1)(2l-1)}\left(\frac{\alpha}{2}\right) - R_{(2q-1)(2l-1)}(\alpha) + 2F_{(2q-1)(2l-1)}\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right) - \\
 &- R_{(2q-1)(2l-1)}(\alpha) + \frac{1}{2}R_{(2q-1)(2l-1)}(2\alpha) - F_{(2q-1)(2l-1)}(\alpha, \beta), \\
 Q_{ql}^M(\alpha, \beta) &= 2E_{2q(2l-1)}\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right) - E_{2q(2l-1)}(\alpha, \beta).
 \end{aligned} \tag{17}$$

При больших значениях q и l эти функции, как и функции $S_{ql}(\alpha, \beta)$, $P_{ql}(\alpha, \beta)$, $Q_{ql}(\alpha, \beta)$, представляются в виде (14). Из анализа асимптотических выражений для матричных коэффициентов очевидно, что матрицы коэффициентов системы (2) имеют диагональный характер. Кроме того, можно сделать вывод о быстрой сходимости разложений (1) для плотности тока собственных волн и нечетного, и четного типа.

4. Результаты численного анализа сходимости

Использование в разложениях (1) для плотности тока «взвешенных» полиномов Чебышёва, учитывающих в явном виде краевые особенности решения, приводит к быстрой сходимости этих разложений и позволяет получить решение при небольшом порядке редуцированной СЛАУ (2). Улучшение сходимости рядов для матричных коэффициентов СЛАУ обеспечивает высокую точность и устойчивость численных результатов при изменении порядка СЛАУ.

Таким образом, использование «чебышёвского» базиса и улучшение сходимости рядов позволили разработать эффективный алгоритм расчета электродинамических параметров полосковых линий – коэффициентов замедления и волновых сопротивлений. На основе разработанного алгоритма создана компьютерная программа, позволяющая с высокой точностью и скоростью определять постоянные распространения, распределение тока на полосковых проводниках и волновые сопротивления одиночной и связанных полосковых линий.

В результате расчетов, выполненных на персональном компьютере (ПК), исследована сходимость разложений (1) для плотности тока на полосковом проводнике и решен вопрос о выборе числа L , определяющего порядок СЛАУ, и числа M_y , которое нужно учитывать в рядах для матричных коэффициентов после улучшения сходимости этих рядов. При $L = 2$ и $M_y = 50$ погрешность расчета постоянных распространения и волновых сопротивлений основной волны и двух высших волн не превышает 0.1% в широком диапазоне изменения параметров. Для иллюстрации быстрой сходимости и высокой точности разработанного алгоритма расчета собственных волн полосковых линий ниже приведены результаты расчета коэффициентов замедления и волновых сопротивлений двухслойной структуры (рис. 1, $K=1$, $N=1$), моделирующей микрополосковую линию, и трехслойной структуры (рис. 1, $K=2$, $N=1$), моделирующей компланарную полосковую линию. Для трехслойной структуры (рис. 2) функции G_m^∂ и G_m^M , определяемые формулами (5), можно представить в виде:

$$G_m^{\exists} = \left[\frac{\varepsilon}{\beta_m} \operatorname{ctg}(\beta_m h) \frac{\operatorname{ctg}(\beta_{m1} b_1) / \beta_{m1} - \varepsilon \operatorname{tg}(\beta_m h) / \beta_m}{\operatorname{ctg}(\beta_{m1} b_1) / \beta_{m1} + \varepsilon \operatorname{ctg}(\beta_m h) / \beta_m} + \frac{\varepsilon_2}{\beta_{m2}} \operatorname{ctg}(\beta_{m2} b_2) \right]^{-1},$$

$$G_m^M = \left[\beta_m \operatorname{ctg}(\beta_m h) \cdot \frac{\beta_{m1} \operatorname{ctg}(\beta_{m1} b_1) - \beta_m \operatorname{tg}(b_m h)}{\beta_{m1} \operatorname{ctg}(\beta_{m1} b_1) + \beta_m \operatorname{ctg}(b_m h)} + \beta_{m2} \operatorname{ctg}(\beta_{m2} b_2) \right]^{-1},$$
(18)

где $\beta_{m1,2} = \sqrt{\varepsilon_{1,2} - \chi_m^2}$;

$$\beta_m = \sqrt{\varepsilon - \chi_m^2}, \quad \chi_m^2 = \Gamma^2 + \alpha_m^2;$$

ε_1 – диэлектрическая проницаемость первого слоя области 1;

ε – диэлектрическая проницаемость второго слоя области 1;

ε_2 – диэлектрическая проницаемость области;

$$b_2 = b - h - b_1.$$

Полагая в (18) $b_1=0$, получим выражения для функций и для двухслойной структуры:

$$G_m^{\exists} = \left[\frac{\varepsilon}{\beta_m} \operatorname{ctg}(\beta_m h) + \frac{\varepsilon_2}{\beta_{m2}} \operatorname{ctg}(\beta_{m2} b_2) \right]^{-1},$$

$$G_m^M = \left[\beta_m \operatorname{ctg}(\beta_m h) + \beta_{m2} \operatorname{ctg}(\beta_{m2} b_2) \right]^{-1}.$$
(19)

Из (18) и (19) видно, что асимптотические выражения для функций $G_m^{\exists}$ и G_m^M одинаковые. Следовательно, предлагаемый способ улучшения сходимости рядов для матричных коэффициентов СЛАУ (2) и волнового сопротивления (15) приводит к решению проблемы вычисления функций $S_{ql}(\alpha, \beta)$, $P_{ql}(\alpha, \beta)$, $Q_{ql}(\alpha, \beta)$, определяемых медленно сходящимися рядами (8)–(10), независимо от числа диэлектрических слоев и их параметров.

В табл. 1 приведены результаты расчета коэффициента замедления n и волнового сопротивления Z экранированной микрополосковой линии при различных значениях числа L и отношения W/h . Параметры линии (рис. 2): $b_1 = 0$, $S = a - W$, $a/h = 10$, $b/h = 4$, $h = 1$ мм, $\varepsilon = 9$, $f = 10$ ГГц.

Таблица 1. Результаты расчета коэффициента замедления и волнового сопротивления

W/h		0.1	1.0	2.0	5.0	9.0	9.9
$L = 0$	n	2.390	2.561	2.663	2.765	2.679	2.668
	Z	113.70	52.10	35.66	19.17	10.89	8.03
$L = 1$	n	2.390	2.562	2.668	2.814	2.813	2.760
	Z	113.70	52.08	35.53	18.68	10.94	8.92
$L = 2$	n	2.390	2.562	2.668	2.814	2.813	2.757
	Z	113.70	52.08	35.53	18.68	10.96	8.83
$L = 3$	n	2.390	2.562	2.668	2.814	2.813	2.756
	Z	113.70	52.08	35.53	18.68	10.96	8.78

При $W/h \leq 1$ малая погрешность расчета ($\sim 0.1\%$) обеспечивается уже при $L = 0$, т.е. при учете в разложениях (1) только одного члена для плотности продольного тока: $\eta_z(\tilde{x}) = a_0(1 - \tilde{x}^2)^{-1/2}$. Первое приближение ($L = 1$) дает точность до четырех значащих цифр при $W/h \leq 0.5$. С увеличением отношения W/h сходимость ухудшается. Однако

даже при значениях отношения $W/h \approx a/h$ погрешность второго приближения ($L = 2$) не превышает 0.1% при $W/a = 0.9$ и 0.6% при $W/a = 0.99$.

В табл. 2 представлены результаты расчета n и Z рассмотренной выше линии в зависимости от числа членов M , учитываемых в ряде (8), при $L = 2$, $W/h = 2$ и различных значениях a/W . В последнем столбце приведены численные результаты, полученные при использовании представления функций $R_{kn}(a)$ в виде быстро сходящихся рядов (11'). Из представленных результатов видно, что для достижения малой погрешности ($\sim 0.1\%$) расчета волнового сопротивления в (8) нужно учитывать более 1000 членов при $a/W \geq 5$ и более 10000 при $a/W \geq 100$.

Таблица 2. Результаты расчета волнового сопротивления и коэффициентов замедления в зависимости от числа членов в ряде (8)

M		500	1000	2000	5000	10000	
$a/W = 5$	n	2.669	2.668	2.668	2.668	2.668	2.668
	Z	35.48	35.50	35.52	35.52	35.52	35.53
$a/W = 100$	n	2.704	2.681	2.677	2.675	2.674	2.674
	Z	32.46	35.18	35.68	35.88	35.93	35.98

При построении проекционных моделей полосковых линий, наряду с чебышёвским базисом, широкое распространение получил также тригонометрический базис, который обеспечивает более быструю сходимость рядов для матричных коэффициентов. В то же время тригонометрический базис приводит к медленной сходимости разложений для плотности тока в силу особенности поля на краях полоскового проводника. В табл. 3 представлены результаты расчета коэффициента замедления и волнового сопротивления, иллюстрирующие сходимость проекционного метода с использованием тригонометрического базиса. В последнем столбце табл. 3 приведены результаты, полученные с использованием чебышёвского базиса (см. табл. 1). Следует отметить, что, несмотря на медленную сходимость разложений для плотности тока, погрешность расчета коэффициентов замедления достаточно мала при небольшом числе базисных функций ($L \leq 2$). Погрешность расчета волновых сопротивлений больше и составляет несколько процентов.

Таблица 3. Результаты расчета коэффициентов замедления и волновых сопротивлений с использованием тригонометрического базиса

L		0	1	2	5	10	25	
$W/h = 1$	n	2.541	2.556	2.558	2.560	2.561	2.561	2.562
	Z	54.83	53.23	52.79	52.41	52.26	52.15	52.08
$W/h = 2$	n	2.660	2.663	2.664	2.666	2.667	2.668	2.668
	Z	37.63	36.47	36.13	35.1	35.68	35.59	35.53
$W/h = 5$	n	2.823	2.814	2.813	2.813	2.813	2.814	2.814
	Z	19.61	19.22	19.04	18.86	18.78	18.72	18.68
$W/h = 9$	n	2.840	2.830	2.824	2.817	2.816	2.814	2.813
	Z	11.41	11.37	11.27	11.13	11.05	11.00	10.96

С увеличением числа L до значения $L = 5$ погрешность расчета волнового сопротивления уменьшается до 1% и при дальнейшем увеличении L медленно приближается к предельному значению. При этом с увеличением порядка СЛАУ для обеспечения устойчивости

результатов необходимо увеличивать число членов M в бесконечных рядах для матричных коэффициентов ($M \gg L a / W$).

В табл. 4 приведены результаты расчета коэффициента замедления основной волны при $a/h = 8$, $b/h = 4$, $W/h = 0.4$, $h = 0.5$ мм, $f = 20$ ГГц, полученные в настоящей работе и в [8, 9]. Во второй строке представлены результаты, полученные в [8] проекционным методом с использованием тригонометрического базиса. В последней строке представлены результаты, полученные в [9] методом сингулярного интегрального уравнения [10] в первом, во втором и в третьем приближениях.

Таблица 4. Сравнительные результаты расчетов коэффициентов замедления

L	0	1	2	3	4
n	2.5259	2.5261	2.5261	2.5261	2.5261
n , [8]	2.5358	2.5259	2.5253	2.5254	2.5255
n , [9]	2.4694	2.5168	2.5242		

Для связанных полосковых линий сходимость разложений (1) зависит, в основном, от отношения S/W . При его уменьшении сходимость ухудшается. В табл. 5 приведены результаты расчета коэффициента замедления n и волнового сопротивления Z экранированной компланарной полосковой линии при различных значениях числа L и отношения W/h . Параметры линии (рис. 2): $a/h = 50$, $b/h = 50$, $b_1/h = 50$, $S/h = 0.05$, $\epsilon = 9$, $f[\text{ГГц}] \times h[\text{мм}] = 10$.

Таблица 5. Результаты расчетов величин n и Z , полученных при использовании различных значений числа L и отношения W/h

W/S		5	10	20	30	40	50
$L = 1$	n	2.231	2.221	2.192	2.161	2.136	2.117
	Z	34.98	29.87	26.09	24.48	23.65	23.23
$L = 2$	n	2.231	2.221	2.192	2.162	2.137	2.119
	Z	34.97	29.79	25.85	24.07	23.00	22.53
$L = 3$	n	2.231	2.221	2.192	2.162	2.138	2.120
	Z	34.97	29.79	25.83	24.03	23.01	22.41
$L = 4$	n	2.231	2.221	2.192	2.162	2.138	2.120
	Z	34.97	29.79	25.83	24.02	22.99	22.37

Из данных, представленных в табл. 5, видно, что при уменьшении отношения S/W сходимость ухудшается, но уже при $L = 2$ погрешность расчета коэффициента замедления не превышает 0.05% при $S/W \geq 0.02$, а погрешность расчета волнового сопротивления не превышает 0.1% при $S/W \geq 0.05$. При $L = 4$ погрешность расчета волнового сопротивления не превышает 0.1% при $S/W \geq 0.02$.

В табл. 6 представлены результаты расчета n и Z , полученные при использовании функций $S_{ql}(\alpha, \beta)$, $P_{ql}(\alpha, \beta)$, $Q_{ql}(\alpha, \beta)$ в виде медленно сходящихся рядов (8)–(10) в зависимости от числа учитываемых членов M в этих рядах при $L = 4$ и различных значениях отношения W/S . В последнем столбце приведены результаты, полученные при использовании этих функций в виде быстро сходящихся степенных рядов.

Из представленных в табл. 6 результатов следует, что для достижения высокой точности численного решения СЛАУ (2) в рядах (8)–(10) нужно учитывать более десяти тысяч членов. Это существенно увеличивает время счета на ПК.

Таблица 6. Результаты расчета величин n и Z , полученных при использовании функций $S_{qt}(\alpha, \beta)$, $P_{qt}(\alpha, \beta)$, $Q_{qt}(\alpha, \beta)$

M		1000	2000	5000	10000	20000	
$W/S = 10$	n	2.222	2.222	2.221	2.221	2.221	2.221
	Z	27.77	28.71	29.49	29.63	29.71	29.78
$W/S = 30$	n	2.162	2.164	2.163	2.163	2.162	2.162
	Z	23.24	23.48	23.82	23.89	23.92	24.02
$W/S = 50$	n	2.123	2.122	2.121	2.120	2.120	2.120
	Z	21.84	21.99	22.24	22.29	22.32	22.37

Таким образом, использование чебышёвского базиса при построении алгебраических моделей полосковых линий обеспечивает высокую эффективность лишь в том случае, если решена проблема суммирования медленно сходящихся рядов для матричных коэффициентов СЛАУ. Без улучшения сходимости этих рядов более эффективными являются модели, полученные с использованием тригонометрического базиса на основе подхода, предложенного в работе [11]. Использование построенных в настоящей статье и в [7] алгебраических моделей полосковых и щелевых линий позволяет существенно повысить качество математических моделей нерегулярных СВЧ-элементов на полосковых линиях, рассмотренных в [12–15]. В этих работах собственные волны регулярных линий находились проекционным методом с использованием тригонометрического базиса.

Заключение

Построенные в данной статье алгебраические модели полосковых линий позволяют путем компьютерного моделирования получить численные результаты с высокой точностью и с малыми вычислительными затратами в широком диапазоне изменения геометрических и физических параметров линий, независимо от числа диэлектрических слоев и их параметров. Это позволяет эффективно использовать их как при инженерном проектировании, так и в системах анализа и оптимизации с учетом технологических особенностей изготовления интегральных схем, работающих на сверхвысоких частотах. Разработанные алгоритмы расчета коэффициента замедления, распределения тока и волнового сопротивления такие же, как и соответствующие алгоритмы для полосковых линий на однослойной подложке. Построенные модели решают задачу эффективного нахождения системы собственных волн с учетом межэлементной электромагнитной связи и многослойности диэлектрической среды. Математические модели регулярных линий представляют не только самостоятельный интерес, но и необходимы для решения задач дифракции на нерегулярностях линий и являются основой для построения математических моделей нерегулярных элементов интегральных схем СВЧ.

Литература:

1. Никольский В.В. Вариационные методы для внутренних задач электродинамики. М.: Наука, 1967. 460 с.
2. Никольский В.В. Проекционные методы в электродинамике (экранированные и открытые системы) // Прикладная электродинамика. М.: Высшая школа, 1977. Вып. 1. С. 4–50.
3. Никольский В.В. К обоснованию метода Трефтца для задач дифракции // Труды

МИРЭА. Электродинамика, антенны и техника СВЧ. 1974. Вып. 70. С. 3–59.

4. Никольский В.В., Никольская Т.И. Декомпозиционный подход к задачам электродинамики. М.: Наука, 1983. 304 с.

5. Коваленко А.Н. Собственные волны микрополосковой линии // Изв. вузов. Радиофизика. 1978. Т. 21. № 2. С. 188–194.

6. Коваленко А.Н. Собственные волны многослойных полосковых структур // Изв. вузов. Радиофизика. 2012. Т. 55. № 12. С. 759–766.

7. Коваленко А.Н. Собственные волны многослойных щелевых структур // Изв. вузов. Радиофизика. 2017. Т. 60. № 7. С. 588–599.

8. Никольский В.В., Орлов В.П., Феоктистов В.Г. [и др.] Автоматизированное проектирование устройств СВЧ. М.: Радио и связь, 1982. 272 с.

9. Неганов В.А., Нефедов Е.И., Яровой Г.П. Электродинамические методы проектирования устройств СВЧ и антенн. М.: Радио и связь, 2002. 415 с.

10. Левин Л. Теория волноводов. М.: Радио и связь, 1981. 312 с.

11. Коваленко А.Н. Теоретическое исследование собственных волн полосковых линий проекционным методом // Изв. вузов. Радиофизика. 2008. Т. 51. № 8. С. 764–768.

12. Никольский В.В., Никольская Т.И. Дифракция на полосковых структурах: анализ интегральных схем СВЧ // Изв. вузов. Сер. Радиофизика. 1981. Т. XXII. № 12. С. 1423–1458.

13. Никольский В.В., Никольская Т.И., Белова Т.Г. Многослойные планарные структуры: вопросы алгоритмизации // Межвуз. сб. науч. трудов «Автоматизированное проектирование устройств и систем СВЧ». М.: МИРЭА, 1982. С. 3–29.

14. Никольский В.В., Никольская Т.И. Дифракционные процессы в полосково-щелевых структурах и анализ «интегральных схем» СВЧ // Препринт ИРЭ АН СССР, № 19 (391). М., 1984. 71 с.

15. Никольский В.В., Никольская Т.И. Численное исследование дифракционных моделей интегральных схем СВЧ // Изв. вузов. Радиофизика. 1984. Т. 27. № 6. С. 669–674.

References:

1. Nikolsky V.V. Variational methods for internal problems of electrodynamics. Moscow: Nauka, 1967. 460 p. (in Russ.)

2. Nikolsky V.V. Projection methods in electrodynamics (screened and open systems). // Prikladnaya elektrodinamika (Applied Electrodynamics). Moscow: Vysshaya shkola Publ., 1977. Iss. 1. P. 4–50. (in Russ.)

3. Nikolsky V.V. To the justification of the Trefts method for diffraction problems // Proceed. of MIREA. Electrodynamics, Antennas and Microwave Technology. 1974, Iss. 70. P. 3–59. (in Russ.)

4. Nikolsky V.V., Nikolskaya T.I. Decomposition approach to the problems of electrodynamics. Moscow: Nauka Publ., 1983. 304 p. (in Russ.)

5. Kovalenko A.N. Natural waves of a microstrip line // Izvestiya vuzov. Radiofizika (Proceedings of High Schools. Radiophysics). 1978. V. 21. № 2. P. 188–194. (in Russ.)

6. Kovalenko A.N. Eigenwaves in multilayer strip structures // Izvestiya vuzov. Radiofizika (Proceedings of High Schools. Radiophysics). 2012. V. 55. № 12. P. 759–766. (in Russ.)

7. Kovalenko A.N. Eigenwaves in multilayer slot structures // *Izvestiya vuzov. Radiofizika* (Proceedings of High Schools. Radiophysics). 2017. V. 60. № 7. P. 588–599. (in Russ.)
8. Nikolsky V.V., Orlov V.P., Feoktistov V.G. [et al.] Automated design of microwave devices. Moscow: Radio i Svyaz' Publ., 1982. 272 p. (in Russ.)
9. Neganov V.A., Nefedov E.I., Yarovoy G.P. Electrodynamic methods for designing microwave devices and antennas. Moscow: Radio i Svyaz' Publ., 2002. 415 p. (in Russ.)
10. Levin L. The theory of waveguides. Moscow: Radio i Svyaz' Publ., 1981. 312 p. (in Russ.)
11. Kovalenko A.N. Theoretical study of eigenwaves of strip lines by the projection method, *Izvestiya vuzov. Radiofizika* (Proceedings of High Schools. Radiophysics). 2008. V. 51. № 8. P. 764–768. (in Russ.)
12. Nikolsky V.V., Nikolskaya T.I. Diffraction on strip structures: an analysis of integrated microwave circuits // *Izvestiya vuzov. Radiofizika* (Proceedings of High Schools. Radiophysics). 1981. V. XXII. № 12. P. 1423–1458. (in Russ.)
13. Nikolsky V.V., Nikolskaya T.I., Belova TG Multilayer planar structures: algorithms // Interuniversity collection of scientific works "Automated design of devices and microwave systems". Moscow: MIREA, 1982. P. 3–29. (in Russ.)
14. Nikolsky V.V., Nikolskaya T.I. Diffraction processes in strip-gap structures and analysis of "integrated circuits" of microwave // Preprint IRE of the USSR Academy of Sciences, № 19 (391). Moscow, 1984. 71 p. (in Russ.)
15. Nikolsky V.V., Nikolskaya T.I. Numerical investigation of diffraction models of microwave integrated circuits // *Izvestiya vuzov. Radiofizika* (Proceedings of High Schools. Radiophysics). 1984. V. 27. № 6. P. 669–674. (in Russ.)

Об авторах

Коваленко Александр Николаевич, профессор, д.т.н., профессор кафедры теоретической радиотехники и радиофизики Института радиотехнических и телекоммуникационных систем ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78).

Жуков Александр Николаевич, аспирант кафедры теоретической радиотехники и радиофизики Института радиотехнических и телекоммуникационных систем Института радиотехнических и телекоммуникационных систем ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва пр-т Вернадского, д.78); начальник лаборатории научно-производственного центра «Специальные космические комплексы и системы» Акционерного общества «Корпорация «ВНИИЭМ» (107078, Россия, Москва, Хоромный тупик, д. 4, стр. 1).

About the authors:

Alexander N. Kovalenko, Professor, D.Sc. (Eng.), Professor of the Chair of Theoretical Radio Engineering and Radio Physics, Institute of Radio Engineering and Telecommunications Systems, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo Pr., Moscow 119454, Russia).

Alexander N. Zhukov, Postgraduate Student of the Chair of Theoretical Radio Engineering and Radio Physics, Institute of Radio Engineering and Telecommunications Systems, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo Pr., Moscow 119454, Russia); Head of the Laboratory of the Research and Production Center "Special Space Complexes and Systems" of the Joint Stock Company "VNIIEМ Corporation" (4, bld. 1, Khoromnyi tupik, Moscow 107078, Russia).

Свидетельство о регистрации СМИ Эл № *ФС77-65315* от 12 апреля 2016 г.

Дата опубликования *30 мая 2018 г.*

МИРЭА – Российский технологический университет
119454, Москва, пр. Вернадского, 78.

<http://rtj.mirea.ru>