



R U S S I A N T E C H N O L O G I C A L J O U R N A L

**РОССИЙСКИЙ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ**

*Информационные системы.
Информатика.
Проблемы информационной безопасности*

*Роботизированные комплексы и системы.
Технологии дистанционного зондирования и неразрушающего контроля*

Современные радиотехнические и телекоммуникационные системы

*Микро- и нанoeлектроника.
Физика конденсированного состояния*

Аналитическое приборостроение и технологии

Математическое моделирование

*Экономика наукоемких и высокотехнологичных
предприятий и производств. Управление в организационных системах*

Управление качеством продукции. Стандартизация

Мировоззренческие основы технологии и общества



RUSSIAN TECHNOLOGICAL JOURNAL

РОССИЙСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

- Информационные системы. Информатика. Проблемы информационной безопасности
 - Роботизированные комплексы и системы. Технологии дистанционного зондирования и неразрушающего контроля
 - Современные радиотехнические и телекоммуникационные системы
 - Микро- и нанoeлектроника. Физика конденсированного состояния
 - Аналитическое приборостроение и технологии
 - Математическое моделирование
 - Экономика наукоемких и высокотехнологичных предприятий и производств. Управление в организационных системах
 - Управление качеством продукции. Стандартизация
 - Мировоззренческие основы технологии и общества
- Information systems. Computer sciences. Issues of information security
 - Multiple robots (robotic centers) and systems. Remote sensing and nondestructive testing
 - Modern radio engineering and telecommunication systems
 - Micro- and nanoelectronics. Condensed matter physics
 - Analytical instrument engineering and technology
 - Mathematical modeling
 - Economics of knowledge-intensive and high-tech enterprises and industries. Management in organizational systems
 - Product quality management. Standardization
 - Philosophical foundations of technology and society

Russian Technological Journal
2026, том 14, № 1

Russian Technological Journal
2026, Vol. 14, No. 1

Russian Technological Journal 2026, том 14, № 1

Дата опубликования 30 января 2026 г.

Научно-технический рецензируемый журнал освещает вопросы комплексного развития радиотехнических, телекоммуникационных и информационных систем, электроники и информатики, а также результаты фундаментальных и прикладных междисциплинарных исследований, технологических и организационно-экономических разработок, направленных на развитие и совершенствование современной технологической базы.

Периодичность: 6 раз в год.

Журнал основан в декабре 2013 года. До 2016 г. издавался под названием «Вестник МГТУ МИРЭА» (ISSN 2313-5026), а с января 2016 г. по июль 2021 г. под названием «Российский технологический журнал» (ISSN 2500-316X).

Учредитель и издатель:

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «МИРЭА – Российский технологический университет» 119454, РФ, г. Москва, пр-т Вернадского, д. 78.

Журнал входит в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов ВАК РФ, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук и доктора наук, входит в RSCI, РГБ, РИНЦ, eLibrary, Directory of Open Access Journals (DOAJ), Directory of Open Access Scholarly Resources (ROAD), Google Scholar, Ulrich's International Periodicals Directory.

Главный редактор:

Сигов Александр Сергеевич, академик РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор, президент ФГБОУ ВО МИРЭА – Российский технологический университет (РТУ МИРЭА), Москва, Россия.
Scopus Author ID 35557510600, ResearcherID L-4103-2017, sigov@mirea.ru.

Редакция:

Зав. редакцией	к.т.н. Г.Д. Середина
Научный редактор	д.т.н., проф. Г.В. Куликов
Выпускающий редактор	А.С. Алексеенко
Технический редактор	Д.В. Трофимова

119571, г. Москва, пр-т Вернадского, 86, оф. Р-108.
Тел.: +7 (499) 600-80-80 (#31288).
E-mail: seredina@mirea.ru.

Регистрационный номер и дата принятия решения о регистрации СМИ ПИ № ФС 77 - 81733 от 19.08.2021 г. СМИ зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).

Индекс по объединенному каталогу «Пресса России» 79641.

<https://www.rtlj-mirea.ru>

Russian Technological Journal 2026, Vol. 14, No. 1

Publication date January 30, 2026.

The peer-reviewed scientific and technical journal highlights the issues of complex development of radio engineering, telecommunication and information systems, electronics and informatics, as well as the results of fundamental and applied interdisciplinary researches, technological and economical developments aimed at the development and improvement of the modern technological base.

Periodicity: six times a year.

The journal was founded in December 2013. The titles were «Herald of MSTU MIREA» until 2016 (ISSN 2313-5026) and «Rossiiskii tekhnologicheskii zhurnal» from January 2016 until July 2021 (ISSN 2500-316X).

Founder and Publisher:

Federal State Budget
Educational Institution of Higher Education
«MIREA – Russian Technological University»
78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia.

The journal is included into the List of peer-reviewed science press of the State Commission for Academic Degrees and Titles of Russian Federation. The Journal is included in Russian Science Citation Index (RSCI), Russian State Library (RSL), Science Index, eLibrary, Directory of Open Access Journals (DOAJ), Directory of Open Access Scholarly Resources (ROAD), Google Scholar, Ulrich's International Periodicals Directory.

Editor-in-Chief:

Alexander S. Sigov, Academician at the Russian Academy of Sciences, Dr. Sci. (Phys.–Math.), Professor, President of MIREA – Russian Technological University (RTU MIREA), Moscow, Russia.
Scopus Author ID 35557510600, ResearcherID L-4103-2017, sigov@mirea.ru.

Editorial staff:

Managing Editor	Cand. Sci. (Eng.) Galina D. Seredina
Scientific Editor	Dr. Sci. (Eng.), Prof. Gennady V. Kulikov
Executive Editor	Anna S. Alekseenko
Technical Editor	Darya V. Trofimova

86, Vernadskogo pr., Moscow, 119571 Russia.
Phone: +7 (499) 600-80-80 (#31288).
E-mail: seredina@mirea.ru.

The registration number ПИ № ФС 77 - 81733 was issued in August 19, 2021 by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology, and Mass Media of Russia.

The subscription index of *Pressa Rossii*: 79641.

Редакционная коллегия

- Кудж
Станислав Алексеевич** д.т.н., профессор, ректор РТУ МИРЭА, Москва, Россия. Scopus Author ID 56521711400, ResearcherID AAG-1319-2019, <https://orcid.org/0000-0003-1407-2788>, rector@mirea.ru
- Банис
Юрас Йонович** хабилитированный доктор наук, профессор, проректор Вильнюсского университета, Вильнюс, Литва. Scopus Author ID 7003687871, juras.banys@ff.vu.lt
- Бетелин
Владимир Борисович** академик Российской академии наук (РАН), д.ф.-м.н., профессор, научный руководитель Федерального научного центра «Научно-исследовательский институт системных исследований» РАН, Москва, Россия. Scopus Author ID 6504159562, ResearcherID J-7375-2017, betelin@niisi.msk.ru
- Боков
Алексей Алексеевич** д.ф.-м.н., старший научный сотрудник, химический факультет и 4D LABS, Университет Саймона Фрейзера, Ванкувер, Британская Колумбия, Канада. Scopus Author ID 35564490800, ResearcherID C-6924-2008, <http://orcid.org/0000-0003-1126-3378>, abokov@sfu.ca
- Вахрушев
Сергей Борисович** д.ф.-м.н., профессор, заведующий лабораторией нейтронных исследований Физико-технического института им. А.Ф. Иоффе РАН, профессор кафедры Физической электроники СПбГПУ, Санкт-Петербург, Россия. Scopus Author ID 7004228594, ResearcherID A-9855-2011, <http://orcid.org/0000-0003-4867-1404>, s.vakhrushev@mail.ioffe.ru
- Гуляев
Юрий Васильевич** академик РАН, д.ф.-м.н., профессор, научный руководитель Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Москва, Россия. Scopus Author ID 35562581800, gulyaev@cplire.ru
- Жуков
Дмитрий Олегович** д.т.н., профессор кафедры телекоммуникаций Института радиоэлектроники и информатики РТУ МИРЭА, Москва, Россия. Scopus Author ID 57189660218, zhukov_do@mirea.ru
- Кимель
Алексей Вольдемарович** к.ф.-м.н., профессор, Университет Радбауд, г. Наймеген, Нидерланды. Scopus Author ID 6602091848, ResearcherID D-5112-2012, a.kimel@science.ru.nl
- Крамаров
Сергей Олегович** д.ф.-м.н., профессор, Сургутский государственный университет, Сургут, Россия. Scopus Author ID 56638328000, ResearcherID E-9333-2016, <https://orcid.org/0000-0003-3743-6513>, mavoo@yandex.ru
- Новиков
Дмитрий Александрович** академик РАН, д.т.н., директор Института проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия. Scopus Author ID 7102213403, ResearcherID Q-9677-2019, <https://orcid.org/0000-0002-9314-3304>, novikov@ipu.ru
- Перно Филипп** Dr. Sci. (Electronics), профессор, Центральная Школа г. Лилль, Франция. Scopus Author ID 7003429648, philippe.pernod@ec-lille.fr
- Романов
Михаил Петрович** д.т.н., профессор, научный руководитель Института искусственного интеллекта РТУ МИРЭА, Москва, Россия. Scopus Author ID 14046079000, <https://orcid.org/0000-0003-3353-9945>, m_romanov@mirea.ru
- Савиных
Виктор Петрович** академик РАН, Дважды Герой Советского Союза, д.т.н., профессор, президент Московского государственного университета геодезии и картографии, Москва, Россия. Scopus Author ID 56412838700, vp@miigaik.ru
- Соболевский
Андрей Николаевич** д.ф.-м.н., директор Института проблем передачи информации им. А.А. Харкевича, Москва, Россия. Scopus Author ID 7004013625, ResearcherID D-9361-2012, <http://orcid.org/0000-0002-3082-5113>, sobolevski@iitp.ru
- Сюй
Ли Да** академик Европейской академии наук, Российской инженерной академии и Инженерной академии Армении, Dr. Sci. (Systems Science), профессор, Университет Олд Доминион, Норфолк, Соединенные Штаты Америки. Scopus Author ID 13408889400, <https://orcid.org/0000-0002-5954-5115>, lxu@odu.edu
- Харин
Юрий Семенович** академик Национальной академии наук Беларуси, д.ф.-м.н., профессор, директор НИИ прикладных проблем математики и информатики Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь. Scopus Author ID 6603832008, <http://orcid.org/0000-0003-4226-2546>, kharin@bsu.by
- Чаплыгин
Юрий Александрович** академик РАН, д.т.н., профессор, член Отделения нанотехнологий и информационных технологий РАН, президент Института микроприборов и систем управления им. Л.Н. Преснухина НИУ «МИЭТ», Москва, Россия. Scopus Author ID 6603797878, ResearcherID B-3188-2016, president@miet.ru
- Шпак
Василий Викторович** к.э.н., зам. министра промышленности и торговли Российской Федерации, Министерство промышленности и торговли РФ, Москва, Россия; доцент, Институт микроприборов и систем управления им. Л.Н. Преснухина НИУ «МИЭТ», Москва, Россия, mishinevaiv@minprom.gov.ru

Editorial Board

- Stanislav A. Kudzh** Dr. Sci. (Eng.), Professor, Rector of RTU MIREA, Moscow, Russia. Scopus Author ID 56521711400, ResearcherID AAG-1319-2019, <https://orcid.org/0000-0003-1407-2788>, rector@mirea.ru
- Juras Banys** Habilitated Doctor of Sciences, Professor, Vice-Rector of Vilnius University, Vilnius, Lithuania. Scopus Author ID 7003687871, juras.banys@ff.vu.lt
- Vladimir B. Betelin** Academician at the Russian Academy of Sciences (RAS), Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Supervisor of Scientific Research Institute for System Analysis, RAS, Moscow, Russia. Scopus Author ID 6504159562, ResearcherID J-7375-2017, betelin@niisi.msk.ru
- Alexei A. Bokov** Dr. Sci. (Phys.-Math.), Senior Research Fellow, Department of Chemistry and 4D LABS, Simon Fraser University, Vancouver, British Columbia, Canada. Scopus Author ID 35564490800, ResearcherID C-6924-2008, <http://orcid.org/0000-0003-1126-3378>, abokov@sfu.ca
- Sergey B. Vakhrushev** Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Head of the Laboratory of Neutron Research, A.F. Ioffe Physico-Technical Institute of the RAS, Department of Physical Electronics of St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia. Scopus Author ID 7004228594, ResearcherID A-9855-2011, <http://orcid.org/0000-0003-4867-1404>, s.vakhrushev@mail.ioffe.ru
- Yury V. Gulyaev** Academician at the RAS, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Academic Supervisor of V.A. Kotelnikov Institute of Radio Engineering and Electronics of the RAS, Moscow, Russia. Scopus Author ID 35562581800, gulyaev@cplire.ru
- Dmitry O. Zhukov** Dr. Sci. (Eng.), Professor of the Department of Telecommunications, Institute of Radio Electronics and Informatics, RTU MIREA, Moscow, Russia. Scopus Author ID 57189660218, zhukov_do@mirea.ru
- Alexey V. Kimel** PhD (Phys.-Math.), Professor, Radboud University, Nijmegen, Netherlands, Scopus Author ID 6602091848, ResearcherID D-5112-2012, a.kimel@science.ru.nl
- Sergey O. Kramarov** Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Surgut State University, Surgut, Russia. Scopus Author ID 56638328000, ResearcherID E-9333-2016, <https://orcid.org/0000-0003-3743-6513>, mavoo@yandex.ru
- Dmitry A. Novikov** Academician at the RAS, Dr. Sci. (Eng.), Director of V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences, Moscow, Russia. Scopus Author ID 7102213403, ResearcherID Q-9677-2019, <https://orcid.org/0000-0002-9314-3304>, novikov@ipu.ru
- Philippe Pernod** Dr. Sci. (Electronics), Professor, Dean of Research of Centrale Lille, Villeneuve-d'Ascq, France. Scopus Author ID 7003429648, philippe.pernod@ec-lille.fr
- Mikhail P. Romanov** Dr. Sci. (Eng.), Professor, Academic Supervisor of the Institute of Artificial Intelligence, RTU MIREA, Moscow, Russia. Scopus Author ID 14046079000, <https://orcid.org/0000-0003-3353-9945>, m_romanov@mirea.ru
- Viktor P. Savinykh** Academician at the RAS, Dr. Sci. (Eng.), Professor, President of Moscow State University of Geodesy and Cartography, Moscow, Russia. Scopus Author ID 56412838700, vp@miigaik.ru
- Andrei N. Sobolevski** Professor, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Director of Institute for Information Transmission Problems (Kharkevich Institute), Moscow, Russia. Scopus Author ID 7004013625, ResearcherID D-9361-2012, <http://orcid.org/0000-0002-3082-5113>, sobolevski@iitp.ru
- Li Da Xu** Academician at the European Academy of Sciences, Russian Academy of Engineering (formerly, USSR Academy of Engineering), and Armenian Academy of Engineering, Dr. Sci. (Systems Science), Professor and Eminent Scholar in Information Technology and Decision Sciences, Old Dominion University, Norfolk, VA, the United States of America. Scopus Author ID 13408889400, <https://orcid.org/0000-0002-5954-5115>, lxu@odu.edu
- Yury S. Kharin** Academician at the National Academy of Sciences of Belarus, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Director of the Institute of Applied Problems of Mathematics and Informatics of the Belarusian State University, Minsk, Belarus. Scopus Author ID 6603832008, <http://orcid.org/0000-0003-4226-2546>, kharin@bsu.by
- Yuri A. Chaplygin** Academician at the RAS, Dr. Sci. (Eng.), Professor, Member of the Departments of Nanotechnology and Information Technology of the RAS, President of the National Research University of Electronic Technology (MIET), Moscow, Russia. Scopus Author ID 6603797878, ResearcherID B-3188-2016, president@miet.ru
- Vasily V. Shpak** Cand. Sci. (Econ.), Deputy Minister of Industry and Trade of the Russian Federation, Ministry of Industry and Trade of the Russian Federation, Moscow, Russia; Associate Professor, National Research University of Electronic Technology (MIET), Moscow, Russia, mishinevaiv@minprom.gov.ru

Содержание

Информационные системы. Информатика. Проблемы информационной безопасности

7 *Д.А. Пушкарев, В.А. Богатырев*
Методы приоритизации процессов переноса данных в центральное хранилище

19 *М.О. Таныгин, И.О. Мишин, Е.А. Кулешова, А.В. Киселев*
Выделение потока сообщений между двумя абонентами в многоагентных системах на основе анализа его контекстуальных характеристик

Современные радиотехнические и телекоммуникационные системы

31 *Ю.А. Полевода, Г.В. Куликов*
Исследование эффективности компенсации многолучевости в каналах связи при использовании фильтров с инверсной импульсной характеристикой

Микро- и нанoeлектроника. Физика конденсированного состояния

43 *Е.И. Жемеров, А.А. Гуськов, Е.А. Булавинцева, Д.С. Серегин, С.Д. Лавров*
Создание двумерных полупроводников на поверхности сегнетоэлектрических пленок методом механической эксфолиации при помощи золота

55 *Т.Н. Бахвалова, А.Н. Юрасов, М.М. Яшин, В.А. Бессонова*
Особенности температурных зависимостей колоссального и туннельного магнитосопротивления в пленках манганитов

Математическое моделирование

64 *О.В. Мешкова, А.В. Шатина*
Математическое моделирование орбитального движения искусственного спутника Луны с использованием переменных Делоне

82 *А.В. Федоров, Д.В. Парфенов*
Трансформация пространства признаков в методе опорных векторов

91 *С.Е. Савотченко*
Моделирование поверхностных волн в фотонных кристаллических структурах с профилем показателя преломления, убывающим с расстоянием от поверхности

103 *А.В. Смирнов*
Экспериментальное исследование характеристик сходимости квазиньютоновского алгоритма на негладких и невыпуклых функциях

Мировоззренческие основы технологии и общества

113 *Е.Н. Тарасова, Ж.О. Москвина*
Коммуникативно-эстетический принцип в обучении иностранных студентов технических специальностей русскому языку

Contents

Information systems. Computer sciences. Issues of information security

- 7** *Daniil A. Pushkarev, Vladimir A. Bogatyrev*
Methods for prioritizing the processes of transferring data to central storage
- 19** *Maxim O. Tanygin, Ilya O. Mishin, Elena A. Kuleshova, Alexey V. Kiselev*
Identification of the message flow between two subscribers in multi-agent systems based on the analysis of its contextual characteristics

Modern radio engineering and telecommunication systems

- 31** *Yuriy A. Polevoda, Gennady V. Kulikov*
Investigation of multipath compensation efficiency in communication channels using filters with inverse impulse response

Micro- and nanoelectronics. Condensed matter physics

- 43** *Evgeny I. Zhemerov, Andrey A. Guskov, Elizaveta A. Bulavintseva, Dmitry S. Seregin, Sergei D. Lavrov*
Fabrication of two-dimensional semiconductors on the surface of ferroelectric films by means of gold-assisted mechanical exfoliation
- 55** *Tatiana N. Bakhvalova, Alexey N. Yurasov, Maxim M. Yashin, Valentina A. Bessonova*
Specific features of temperature dependence of colossal and tunneling magnetoresistance in manganite films

Mathematical modeling

- 64** *Olga V. Meshkova, Albina V. Shatina*
Mathematical modeling of the orbital motion of an artificial satellite of the Moon using Delaunay variables
- 82** *Aleksey V. Fedorov, Denis V. Parfenov*
Feature space transformation in the support vector method
- 91** *Sergey E. Savotchenko*
Modeling of surface waves in photonic crystal structures with a refractive index profile decreasing with distance from the surface
- 103** *Alexander V. Smirnov*
Experimental investigation of convergence characteristics of quasi-Newton algorithm on nonsmooth and nonconvex functions

Philosophical foundations of technology and society

- 113** *Elena N. Tarasova, Zhanna O. Moskvina*
The communicative and aesthetic principle in teaching Russian as a foreign language to international students of technical specialties

УДК 004.042

<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2026-14-1-7-18>

EDN TAUPKU



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Методы приоритизации процессов переноса данных в центральное хранилище

Д.А. Пушкарев ^{1, @},
В.А. Богатырев ^{1, 2}

¹ Национальный исследовательский университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101 Россия

² Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения,
Санкт-Петербург, 190000 Россия

@ Автор для переписки, e-mail: dpushkarev@itmo.ru

• Поступила: 10.06.2025 • Доработана: 28.07.2025 • Принята к опубликованию: 12.11.2025

Резюме

Цели. Эффективное управление параллельным выполнением ETL¹-процессов в центральных хранилищах данных критически влияет на общее время обработки. Существующие инструменты оркестрации Apache Airflow, NiFi, Luigi используют упрощенные алгоритмы приоритизации, игнорирующие топологию графов зависимостей и динамику ресурсов, что приводит к субоптимальному планированию. Целью данной работы являются разработка и валидация нового метода приоритизации задач в рамках ETL-конвейеров, направленного на минимизацию их общей длительности за счет глубокого анализа структурных особенностей направленных ациклических графов и использования имитационного моделирования для оценки различных стратегий планирования в условиях конкуренции за ограниченные слоты параллелизма.

Методы. Предложена имитационная модель на языке Python, воспроизводящая выполнение ETL-процессов в среде с ограниченными слотами параллелизма. Модель генерирует направленный ациклический граф, отражающий структуру связей процессов для формирования центрального хранилища данных, и сравнивает 9 алгоритмов приоритизации, включая базовые (приоритизация минимального/максимального среднего времени выполнения), топологические (приоритизация минимального/максимального уровня слоя, максимизация числа зависимостей) и гибридные (разделение слотов на очереди для минимального и максимального времени выполнения). Эксперименты проведены на графах различных топологий на основе полученной имитационной модели.

Результаты. Гибридный алгоритм (разделение слотов: 50% для задач с максимальным временем выполнения, 50% – с минимальным) показал наилучшую эффективность: снижение общего времени выполнения на 15–17% по сравнению с базовыми алгоритмами, минимизацию времени простоя задач на 20–25% и устойчивость к вариациям топологии графов. Линейная комбинация с оптимизированными коэффициентами (время выполнения – наиболее значимый фактор) заняла второе место по эффективности.

¹ Извлечение (extract), преобразование (transform) и загрузка (load) данных.

Выводы. Приоритизация на основе анализа DAG²-топологии и гибридных стратегий существенно сокращает время выполнения ETL-конвейеров. Гибридный алгоритм рекомендуется для внедрения в оркестраторы как балансирующий минимизацию длительности конвейера и времени простоя задач. Перспективное направление – адаптивные алгоритмы, учитывающие динамическую загрузку ресурсов в реальном времени.

Ключевые слова: оркестрация ETL-процессов, имитационное моделирование, графы зависимостей, хранилище данных, ациклический направленный граф

Для цитирования: Пушкарев Д.А., Богатырев В.А. Методы приоритизации процессов переноса данных в центральное хранилище. *Russian Technological Journal*. 2026;14(1):7–18. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2026-14-1-7-18>, <https://www.elibrary.ru/TAUPKU>

Прозрачность финансовой деятельности: Авторы не имеют финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

RESEARCH ARTICLE

Methods for prioritizing the processes of transferring data to central storage

Daniil A. Pushkarev ^{1, @},
Vladimir A. Bogatyrev ^{1, 2}

¹ ITMO University, Saint Petersburg, 197101 Russia

² Saint Petersburg State University of Aerospace Instrumentation (SUAI), Saint Petersburg, 190000 Russia

@ Corresponding author, e-mail: dpushkarev@itmo.ru

• Submitted: 10.06.2025 • Revised: 28.07.2025 • Accepted: 12.11.2025

Abstract

Objectives. The efficient management of parallel ETL (Extract, Transform, Load) process execution in central data warehouses critically impacts overall processing time. Existing orchestration tools such as Apache Airflow, NiFi, Luigi employ simplified prioritization algorithms which ignore dependency graph topology and resource dynamics, leading to suboptimal scheduling. The objective of this work is to develop and validate a novel task prioritization method for ETL pipelines, aimed at minimizing their total duration through deep analysis of structural features of Directed Acyclic Graphs (DAGs), as well as the use of simulation modeling to evaluate various scheduling strategies under conditions of competition for limited concurrency slots.

Methods. The study proposed a Python simulation model, replicating ETL process execution in an environment with limited concurrency slots. The model generates a DAG which reflects the dependency structure of processes for building a central data warehouse and compares 9 prioritization algorithms. These include basic algorithms (prioritization by minimum/maximum average execution time), topological algorithms (prioritization by minimum/maximum layer level, maximization of dependency count), and hybrid algorithms (splitting slots into queues for minimum and maximum execution time). Experiments were conducted on graphs of a variety of topologies using the developed simulation model.

Results. The hybrid algorithm (slot allocation: 50% for tasks with maximum execution time, 50% for tasks with minimum execution time) demonstrated the highest level of efficiency. It reduced total execution time by 15–17%, when compared to basic algorithms, minimized task idle time by 20–25%, and showed resilience to graph topology variations. A linear combination of optimized coefficients (execution time being the most significant factor) ranked second in terms of efficiency.

² Directed acyclic graph – ориентированный ациклический граф.

Conclusions. Prioritization based on DAG topology analysis and hybrid strategies significantly reduces ETL pipeline execution time. The hybrid algorithm is recommended for implementation in orchestrators, since it balances minimizing pipeline duration and task idle time. A promising area for further study is the development of adaptive algorithms that account for real-time dynamic resource load.

Keywords: ETL orchestration, simulation modeling, dependency graphs, data warehouse, directed acyclic graph

For citation: Pushkarev D.A., Bogatyrev V.A. Methods for prioritizing the processes of transferring data to central storage. *Russian Technological Journal*. 2026;14(1):7–18. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2026-14-1-7-18>, <https://www.elibrary.ru/TAUPKU>

Financial disclosure: The authors have no financial or proprietary interest in any material or method mentioned.

The authors declare no conflicts of interest.

ВВЕДЕНИЕ

С каждым годом количество данных, проходящих через различные приложения, растет. Сбор и хранение этих данных стали одной из главных задач, стоящих перед разработчиками хранилищ данных. Для решения подобной задачи были предложены центральные хранилища данных (ЦХД) [1, 2], представляющие собой распределенные хранилища, куда попадают данные из всех сервисов с целью дальнейшего анализа и получения дополнительной информации, из которой бизнес может извлечь выгоду. Таким образом ЦХД становятся центром принятия всех бизнес-решений [3].

Наполнение хранилища осуществляется посредством процессов извлечения (extract), преобразования (transform) и загрузки (load) данных – ETL [2, 4–7]. Эти процессы представляют собой комплексные операции, направленные на интеграцию данных из разнообразных источников, включая реляционные базы данных, файловые системы и веб-серверы. На первом этапе происходит извлечение данных, что подразумевает сбор информации из указанных источников. Далее данные подвергаются процессу преобразования, в ходе которого осуществляется их структуризация, нормализация и очистка с целью повышения качества и согласованности информации. Завершающим этапом является загрузка подготовленных данных в целевое хранилище, что обеспечивает их доступность для последующего анализа и использования.

В современных системах обработки данных ETL-процессы играют ключевую роль в подготовке информации. Однако при масштабировании инфраструктуры и увеличении числа таких процессов возникает проблема эффективного управления их выполнением. Когда десятки или сотни ETL-задач взаимодействуют в рамках сложной архитектуры, ручное определение порядка их запуска становится не только трудоемким, но и рискует привести к субоптимальным результатам. Последовательность

выполнения процессов напрямую влияет на общее время обработки данных: конкуренция за вычислительные ресурсы, каскадные задержки из-за зависимостей между задачами и неоптимальное распределение нагрузки могут многократно увеличить длительность выполнения всего конвейера процессов. Например, задержка в процессе, предоставляющем данные для нескольких последующих этапов, способна вызвать цепную реакцию простоев. Для решения этой задачи необходимо не только внедрение методов приоритизации, но и четкое моделирование архитектуры ETL-системы.

Сложные взаимосвязи между процессами, включающие как явные зависимости данных, когда выход одного задания служит входом другого, так и скрытые ограничения (ресурсы памяти, пропускная способность сети), могут быть визуализированы через направленные ациклические графы (directed acyclic graphs, DAG) [8].

Направленные ациклические графы зарекомендовали себя в качестве стандартного инструмента для моделирования процессов извлечения, преобразования и загрузки данных благодаря своим ключевым свойствам, обеспечивающим надежность, эффективность и прозрачность обработки данных [2, 7, 8]. Ациклическость структуры гарантирует отсутствие бесконечных циклов, что является критически важным для обеспечения завершенности задач в конвейерах обработки данных, особенно при работе с большими объемами информации. Структура данных графов позволяет контролировать выполнение зависимых друг от друга задач, что важно при построении процессов наполнения хранилища данных (например, извлечение данных всегда предшествует их преобразованию). Кроме того, направленный ациклический граф помогает эффективно работать с параллельными задачами благодаря своей структуре, которая позволяет визуализировать зависимости между различными этапами обработки данных. Таким образом, представленные в графе задачи независимы и могут выполняться одновременно.

Инструменты оркестрации, такие как Apache Airflow [9–11], предоставляют базовые механизмы для определения зависимостей, однако эффективная приоритизация требует более детального анализа – учета динамически меняющейся нагрузки, критичности бизнес-метрик и предсказания узких мест. Без системного подхода к описанию архитектуры и формализации правил упорядочивания процессы рискуют выполняться в последовательности, далекой от оптимальной, что особенно критично в условиях аналитики, приближенной к реальному времени.

Несмотря на значительную практическую важность оптимизации ETL-конвейеров, количество специализированных исследований по приоритизации задач в этой области остается ограниченным. Большинство существующих оркестраторов^{3, 4} (Apache Airflow, NiFi, Luigi) [6, 10–12] используют упрощенные стратегии, такие как first-in-first-out (первым пришел – первым ушел) или статические приоритеты, предоставленные пользователем, основанные исключительно на его эмпирическом опыте. Значительные достижения существуют в смежной сфере систем реального времени, где модель DAG также широко используется [13]. Данные исследования решают задачу гарантированного соблюдения жестких дедлайнов для параллельных задач на многопроцессорных системах, используя концепцию параллельного прогрессирования выбранных путей в графе с приоритизацией подзадач и сложным анализом наихудшего времени отклика.

Несмотря на общую основу – направленные ациклические графы, цели и условия ETL-оптимизации принципиально отличаются от планирования в реальном времени. Во-первых, ETL фокусируется на минимизации среднего времени выполнения конвейера и простоев задач при гибкой параллельности, тогда как системы реального времени требуют гарантий соблюдения дедлайнов при жестком выделении ресурсов. В качестве метрики для систем реального времени могут использоваться вероятность выполнения запросов за заданное время и коэффициент готовности к выполнению запросов за заданное время [14, 15]. Во-вторых, метрики эффективности различаются: для ETL критичны общая длительность и утилизация ресурсов, а не анализ наихудшего случая.

Прямое применение методов повышения эффективности систем реального времени (включая алгоритмы выбора путей) в ETL-контексте неоптимально. Их избыточная сложность и требование

резервирования ведут к недоиспользованию ресурсов, игнорируя специфику слоев хранилищ данных и динамические ограничения оркестраторов. Статические подходы обеспечения реального времени плохо адаптируются к изменениям нагрузки, где гибридные стратегии показывают лучшую эффективность. Таким образом, несмотря на формальную общность моделей, различие операционных требований и метрик делает необходимым разработку специализированных методов приоритизации для ETL, что и обосновывает данное исследование.

Анализ существующих методов ETL-приоритизации [16, 17] показывает значительные ограничения современных подходов:

- предлагаемые алгоритмы не учитывают топологические характеристики графов процессов, что негативно сказывается на эффективности планирования в распределенных системах;
- преобладающим остается статический метод приоритизации, основанный на пользовательских метках для отдельных задач, который не принимает во внимание динамику выполнения и взаимное влияние процессов в конвейере.

Целью данной работы являются разработка и обоснование метода приоритизации ETL-процессов, обеспечивающего минимизацию времени выполнения всего конвейера данных за счет методов системного анализа и имитационного моделирования.

В рамках данного исследования предлагается имитационная модель, позволяющая анализировать управление ETL-процессами в условиях сложной архитектуры. Модель воссоздает среду, в которой генерируется направленный ациклический граф, отражающий цепочки выполнения ETL-задач, формирующий теоретическое хранилище данных. Каждый направленный ациклический граф моделирует зависимости между процессами и временные ограничения. Ключевая особенность подхода – возможность сравнивать различные алгоритмы приоритизации в идентичных условиях, что обеспечивает объективную оценку их эффективности. Это позволяет не только визуализировать выполнение процессов в рамках централизованного хранилища данных, но и количественно оценивать влияние выбранного алгоритма на общую длительность конвейера. Например, варьируя количество узлов, глубину зависимостей или длительность выполнения отдельной задачи, можно определить, при каких сценариях какой алгоритм демонстрирует лучший результат. Результаты работы модели формируют метрики для сравнения – среднее время выполнения, процент простоев ресурсов, что формирует основу для обоснованного выбора метода оптимизации в реальных условиях. Таким образом, имитационная модель

³ <https://nifi.apache.org/>. Apache NiFi. Apache Software Foundation. Дата обращения 10.01.2025. / Accessed January 10, 2025.

⁴ <https://www.informatica.com/>. Informatica. Informatica LLC. Дата обращения 12.01.2025. / Accessed January 12, 2025.

выступает инструментом для системного анализа ETL-оркестрации, минимизируя риски внедрения неэффективных решений в промышленные системы.

1. ФОРМАЛИЗАЦИЯ ПРОБЛЕМЫ

В рамках данной работы формализуем задачу оркестрации ETL-процессов и установим ряд ограничений, необходимых для ее решения. Задача оркестрации включает в себя несколько ключевых этапов: определение приоритетов для задач, контроль за количеством одновременно выполняемых процессов, а также управление изменением статусов задач в соответствии с их текущим состоянием.

Следует подчеркнуть, что в исследовании не будет проводиться анализ загрузки целевой вычислительной системы. Вместо этого для регулирования нагрузки на систему будет введена переменная, определяющая максимальное количество одновременно активных задач – слотов. Данный подход является распространенным в аналогичных инструментах; например, в Apache Airflow существует параметр количества доступных вычислительных слотов⁵, который отвечает за общее количество задач, способных выполняться одновременно в рамках всех процессов. Кроме того, будет установлено дополнительное ограничение: при запуске конкретного процесса его выполнение не может быть приостановлено до момента завершения данного процесса. Ресурсы станут доступны только по завершении его работы.

Сформулируем задачу оптимизации для процесса оркестрации. Пусть $\mathbf{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ представляет собой ориентированный ациклический граф, где \mathbf{V} – множество процессов, а \mathbf{E} – множество зависимостей между ними. В случае, когда максимальное количество одновременно выполняемых процессов ограничено единицей, задача может быть решена с использованием классического метода – топологической сортировки. Топологическая сортировка является линейным упорядочением вершин ориентированного ациклического графа, при котором для каждого направленного ребра от вершины A к вершине B выполняется условие, что A предшествует B в данном упорядочении. Применение топологической сортировки к графу \mathbf{G} позволяет получить последовательность выполнения процессов, которая удовлетворяет всем установленным зависимостям.

Для данной задачи мы можем использовать следующие обозначения: $\mathbf{P} = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ – множество процессов; $\mathbf{D}(p_i)$ – множество процессов, от которых зависит процесс p_i ; t_i – время выполнения каждого процесса.

Цель состоит в минимизации общего времени выполнения всех процессов с учетом их зависимостей. Эту задачу оптимизации можно записать следующим образом:

$$\text{minimize } T_{\text{total}} = \sum_{i=1}^n t_i, \quad (1)$$

при условии, что для каждого процесса p_i справедливо условие: p_j выполняется перед p_i , если $p_j \in \mathbf{D}(p_i)$.

Но при такой постановке задачи, где одновременно может быть запущен только один процесс, получаем единственное решение, представляющее собой сумму времен выполнения всех процессов:

$$T_{\text{total}} = \sum_{i=1}^n t_i.$$

В случае, если может быть запущено одновременно (параллельно) N процессов, такое решение может быть не единственным. При такой постановке новую задачу оптимизации можно описать следующим образом:

1. Определим множество активных процессов $A(t)$, которые могут быть запущены в момент времени t .
2. Пусть $C(t) \leq N$ – количество процессов, которые могут быть запущены в момент времени t .
3. Время выполнения всех процессов теперь будет зависеть от параллельности их выполнения.

Общая цель остается прежней – минимизация общего времени выполнения (1).

2. ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОРКЕСТРИРОВАНИЯ

Сравнение различных алгоритмов приоритизации на реальных данных в условиях вычислительного кластера может представлять собой значительные трудности по нескольким причинам. Во-первых, продолжительность отдельных экспериментов может достигать нескольких часов. Во-вторых, для запуска множества параллельных процессов требуется значительная вычислительная мощность кластера. В связи с вышеизложенным, целесообразно рассмотреть имитационную модель, которая бы воспроизводила поведение аналогичной системы, минимизируя затраты времени и вычислительных ресурсов.

Моделирование параллельного выполнения задач с ограниченным числом слотов реализовано с использованием подхода дискретно-событийного моделирования с собственным планировщиком событий на базе приоритетной очереди, реализованной на языке Python. Выбор языка Python для реализации

⁵ <https://airflow.apache.org/docs/apache-airflow/stable/configurations-ref.html>. Airflow Configuration Reference. Дата обращения 20.01.2025. / Accessed January 20, 2025.

имитационной модели обусловлен совокупностью его преимуществ, отвечающих специфике поставленной исследовательской задачи. Данный язык программирования предоставляет развитую экосистему научных библиотек, которые значительно упрощают реализацию модели. Кроме того, интеграционные возможности Python с инструментами визуализации и средствами обработки данных упрощают валидацию модели и интерпретацию экспериментальных метрик.

Алгоритм работы включает четыре ключевых этапа. Во-первых, формируется список запущенных задач: на этом этапе программа анализирует направленный ациклический граф и добавляет в очередь процессы, зависимости которых уже выполнены (например, родительские узлы в графе завершены или отсутствуют), а их текущий приоритет максимален среди доступных задач. Это реализуется через проверку статуса узлов в направленном ациклическом графе и сортировку по заданным правилам приоритизации (например, на основе значения слоя, на котором выполняется процесс). Во-вторых, определяется минимальное время выполнения среди всех активных задач в списке – это время, за которое хотя бы одна из задач завершится. В-третьих, это значение прибавляется к общему времени выполнения конвейера, таким образом двигая систему на это значение вперед по времени. Наконец, для всех запущенных задач время их оставшейся работы уменьшается на вычисленное минимальное значение, а завершившиеся процессы помечаются как выполненные, обновляя граф зависимостей для следующих итераций. Такой подход эффективно эмулирует конкурентное выполнение задач, учитывая как логические зависимости между ними, так и динамику распределения ресурсов, что обеспечивает гибкость тестирования различных алгоритмов приоритизации в рамках единой модели.

Рассмотрим данные, на которых будут проведены эксперименты. Классическое хранилище данных имеет структуру слоев [1, 7, 18, 19].

Операционное хранилище данных. Хранит операционные, часто текущие детальные данные, которые еще не агрегированы. Этот слой служит источником оперативной информации для создания отчетов и может напрямую использоваться для построения более высокоуровневых слоев.

Слой детализированных данных. Централизованное хранилище интегрированных данных, собранных из одного или нескольких разрозненных источников. Данные структурированы специально для выполнения запросов и анализа.

Витрины данных. Подмножество хранилища данных, сосредоточенное на конкретной области деятельности или команде. Карты данных

разрабатываются с учетом специфических потребностей или анализа.

Существуют ситуации, в которых количество слоев может превышать три; данный параметр определяется конкретными условиями применения. Однако наиболее распространенным вариантом реализации является трехслойная архитектура: архитектура, предложенная Ральфом Кимбаллом [1], и архитектура медальона [13, 20].

В рамках данного исследования для обеспечения максимального охвата разнообразных сценариев были сгенерированы направленные ациклические графы. Генерация выполнялась по следующей методике:

- Количество слоев – 3. Такое количество наиболее распространено при формировании хранилища данных.
- Общее число узлов (процессов) для каждого графа генерировалось в соответствии с равномерным распределением в диапазоне от 250 до 400.
- Узлы распределялись по слоям в соответствии с табл. 1.
- Дополнительно внутри слоев детального слоя и витрин данных добавлялись связи, моделирующие сложные преобразования: каждый узел имел до двух случайных предшественников внутри своего слоя (вероятность установления связи равна 0.1, распределение Парето для числа связей). После генерации связей осуществлялась проверка на наличие циклов с целью исключить связи, из-за которых данный цикл возникает. Общее число связей на узел не превышает 10.
- Время выполнения каждого узла назначалось независимо, равномерно распределенным в диапазоне от 100 до 5000 с. Связи между временем выполнения, слоем или степенью узла не устанавливались.

Таблица 1. Доля таблиц относительно слоя

Слой	Доля таблиц
Хранение исходных данных	30–40%
Интегрированное хранилище структурированных данных, готовых для анализа	30–40%
Специализированное подмножество, ориентированное на конкретную предметную область	20–30%

Для оценки эффективности девяти алгоритмов приоритизации каждый алгоритм был запущен на каждом сгенерированном направленном ациклическом графе. Эксперименты проводились для различного количества слотов параллелизма с целью оценки влияния увеличения данного параметра на эффективность алгоритма.

3. АЛГОРИТМЫ ПРИОРИТИЗАЦИИ

Приоритизация задач представляет собой процесс, в рамках которого уровень приоритета каждой отдельной задачи определяется на основе ее характеристик и взаимосвязей с другими задачами. Этот уровень может быть случайным или же формироваться на основании параметров конкретной задачи, ее положения и связей с другими элементами. Рассмотрим несколько возможных алгоритмов приоритизации.

Случайный выбор. Данный алгоритм функционирует по принципу равного приоритета. Это означает, что любой процесс, который может быть запущен в данный момент, будет активирован с равной вероятностью. Такое решение не является оптимальным и скорее представляет собой базовое решение, используемое для сравнения с альтернативными подходами.

Минимальное время выполнения. Сначала выполняются процессы с наименьшим временем выполнения.

Максимальное время выполнения. Сначала выполняются процессы с наибольшим временем выполнения.

Максимизация числа зависимостей. Алгоритм основывается на количестве зависимых от каждого процесса других процессов.

Гибридный алгоритм по времени. Данный подход разделяет доступные вычислительные слоты ETL-системы на две части: первая часть выделяется для выполнения задач с наивысшим приоритетом по стратегии максимального времени выполнения, вторая – с наивысшим приоритетом по стратегии минимального времени выполнения.

Рекурсивная максимизация числа зависимостей. Алгоритм, учитывающий количество зависимых задач не только текущего процесса, но и всех нижестоящих процессов, которые зависят от данного.

Минимальный уровень слоя. Алгоритм, который основывается на уровне слоя, в рамках которого выполняется данный ETL-процесс. Оперативный слой соответствует уровню 0, детальный – уровню 1, а слой витрин данных – уровню 2. При наличии большего количества слоев они классифицируются аналогично в соответствии с топологией графа.

Максимальный уровень слоя. Алгоритм, приоритизирующий процессы с более высоким уровнем слоя.

Линейная комбинация. Данный подход обобщает все параметры в рамках одной модели. Для приоритизации строится линейная комбинация признаков и соответствующих им коэффициентов. В качестве параметров выбираются следующие критерии: время выполнения, количество зависимых

процессов и уровень слоя. Полученная линейная комбинация имеет вид:

$$l_i x_1 + p_i x_2 + l_i x_3,$$

где x_1, x_2, x_3 – константы, l_i – уровень слоя i -го процесса.

При использовании данной комбинации необходимо подобрать соответствующие коэффициенты. Для этого были использованы алгоритмы оптимизации, где каждая итерация запускает имитационную модель с новым вектором параметров X , получая в результате работы модели общее время выполнения. Данное время необходимо минимизировать.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

На основе требований, описанных выше, было сгенерировано 50 графов, которые представляют различные архитектуры ETL-процессов, наполняющие хранилище данными.

Рассмотрим процесс подбора коэффициентов для алгоритма, основанного на линейной комбинации. Для определения оптимальных значений этих коэффициентов было выбрано N графов, которые запускаются с заранее установленными коэффициентами x_i . Задача оптимизационной модели заключается в минимизации общего времени выполнения всех N графов. Таким образом, коэффициенты подбираются не для конкретной модели, а обобщаются для различных топологий графов. Этот подход является необходимым, поскольку в условиях реального применения алгоритма подбор таких параметров может быть невозможным.

В качестве оптимизационных алгоритмов для решения данной задачи были выбраны следующие методы: алгоритм Пауэлла (Powell), метод COBYLA (от англ. Constrained Optimization BY Linear Approximations – ограниченная оптимизация с линейной аппроксимацией), алгоритм Нелдера – Мида (Nelder–Mead) и метод сопряженного градиента (conjugate gradient, CG). Реализация этих алгоритмов взята из библиотеки `scipy`, модуля `optimize`⁶. Результаты работы оптимизационных алгоритмов представлены в табл. 2.

Наилучший результат получен с использованием алгоритма Нелдера – Мида (Nelder–Mead). Исходя из полученных коэффициентов, можно сделать вывод, что данный алгоритм выделил время выполнения как наиболее влиятельный параметр для приоритизации процессов.

⁶ <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.optimize.minimize.html>. Дата обращения 27.01.2025. / Accessed January 27, 2025.

Таблица 2. Результаты решения оптимизационной задачи для линейной комбинации

Модель	Число итераций	Время выполнения	Коэффициенты
Powell	193	32282	2.58792896, 2.66311897, -1.85081307
CG	43	32385	$2.10667215 \cdot 10^{-5}$, $4.67212040 \cdot 10^{-5}$, 0
COBYLA	26	32274	1.1580144, 0.80662082, 1.44364821
Nelder–Mead	109	30193	-3.68735705, 0.75631002, 0.5

Алгоритм был применен к набору графов, не входивших в обучающую выборку. В результате получена общая длительность обработки всех процессов в этих графах при различных значениях параметра числа доступных слотов (рис. 1).

Для оценки оперативности обслуживания задач в очереди введем дополнительную метрику – время простоя задачи. Она вычисляется как суммарное время, проведенное в очереди, готовых к запуску задач. Результаты полученной метрики представлены на рис. 2.

Результаты исследования демонстрируют, что алгоритм приоритизации задач с максимальной длительностью выполнения обеспечивает наилучшее общее время выполнения ETL-процессов

только в условиях ограниченного параллелизма, когда число одновременно выполняемых задач (слотов) не больше двух. В таких условиях данный алгоритм минимизирует влияние длительных задач как узких мест, предотвращая их блокирующее воздействие на завершение всей очереди.

Однако при увеличении степени параллелизма гибридный алгоритм, разделяющий очередь на две равные части – для задач с минимальным и максимальным временем выполнения, – превосходит алгоритм, максимизирующий время выполнения по общей длительности выполнения. Это происходит благодаря способности гибридного подхода эффективно распределять ресурсы: выделенные слоты для коротких задач позволяют быстро очищать очередь от мелких операций, в то время как слоты для длительных задач обеспечивают их непрерывное выполнение без простоев. Кроме того, гибридный алгоритм значительно сокращает время простоя задач в очереди по сравнению с максимизацией времени, хотя и уступает в этом показателе алгоритму, приоритизирующему минимальные по времени выполнения задачи.

Что касается противоречия относительно времени простоя, при котором минимизация времени демонстрирует наименьшие значения, а максимизация – наибольшие, это объясняется принципиальным различием в их оптимизационных целях. Алгоритм, ставящий в приоритет задачи с минимальным временем выполнения, обеспечивает их быстрое выполнение, что резко сокращает время ожидания для большинства задач в очереди. Алгоритм, ставящий в приоритет максимальные по времени выполнения

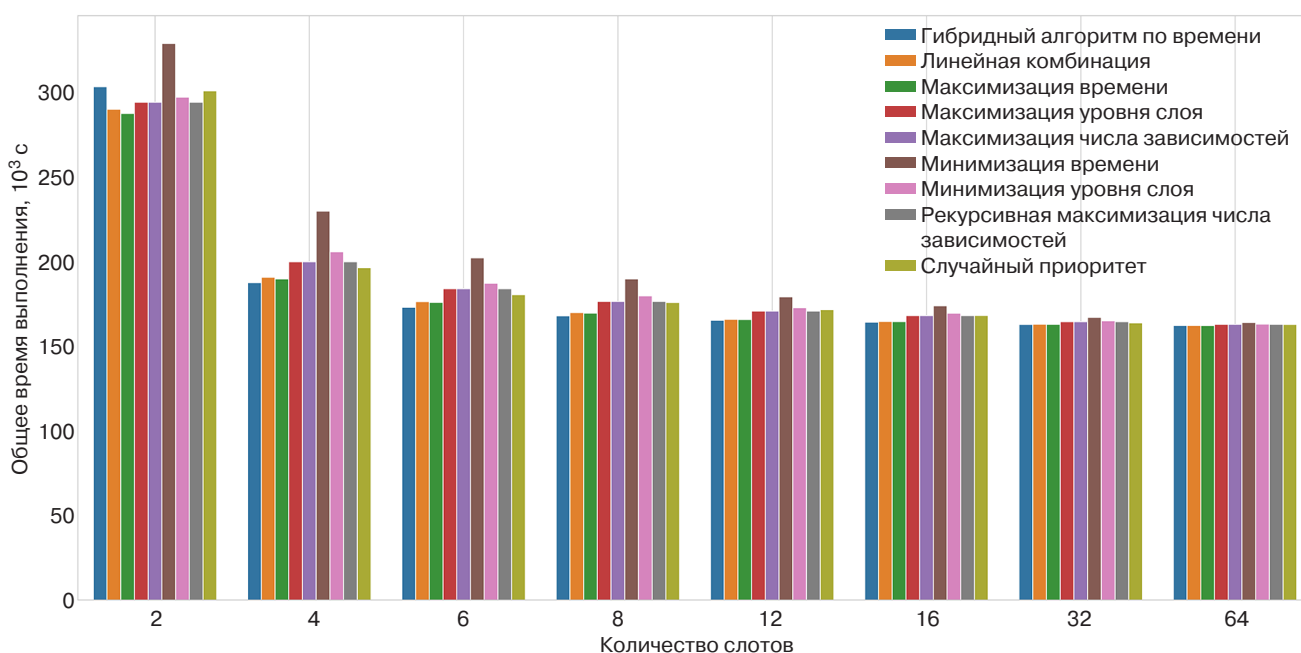


Рис. 1. Результаты оркестрации представленных алгоритмов (цвета указаны в порядке справа направо)

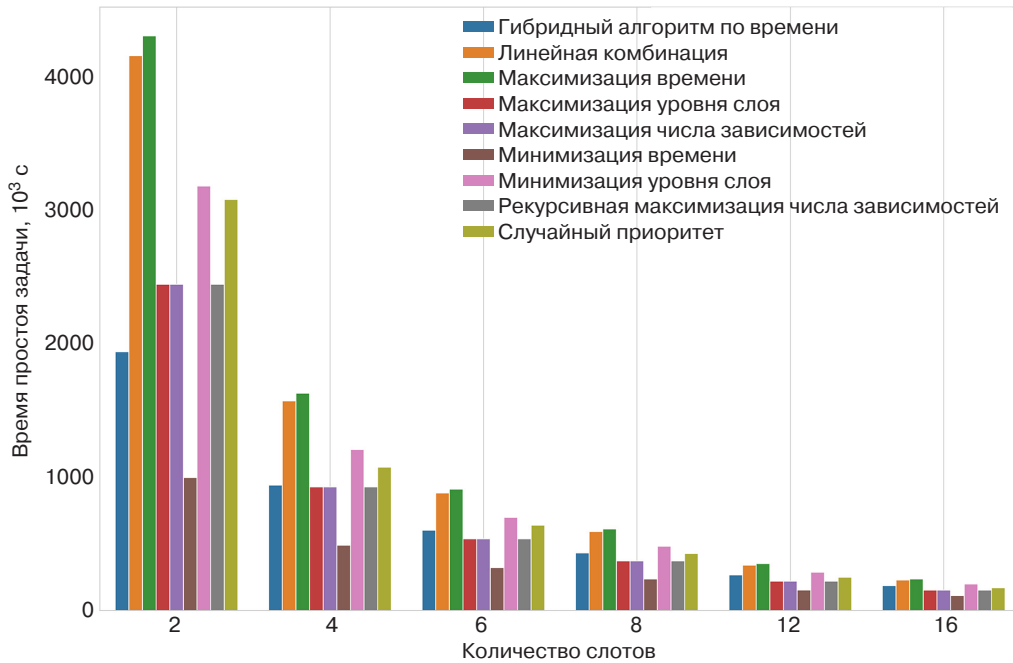


Рис. 2. Время простоя задач для различных алгоритмов

задачи, начинает обработку с самых длительных задач, вынуждая короткие операции накапливаться и простаивать в течение всего времени выполнения длительных процессов. Например, если в очереди присутствует одна 10-часовая задача и двадцать 1-минутных, при приоритизации длительных процессов все короткие задачи будут ожидать всю длительность 10-часовой операции, создавая колоссальный совокупный простой.

Таким образом, алгоритм, приоритизирующий длительные процессы, оптимизирует общее время завершения всей очереди за счет концентрации ресурсов на долгих операциях, а алгоритм, приоритизирующий минимальные по времени выполнения задачи, жертвует скоростью обработки длительных задач ради минимизации времени ожидания для большинства операций, гибридный алгоритм смягчает этот компромисс, достигая баланса между двумя метриками и при этом демонстрируя наилучший результат по длительности выполнения всего конвейера задач.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложена комбинация методологического подхода и инструментальных решений для оптимизации ETL-конвейеров, адаптированных к динамическим условиям выполнения. В отличие от классических исследований, фокусирующих внимание на статической приоритизации или изолированном анализе алгоритмов, предлагаемая модель интегрирует имитацию выполнения задач с учетом ресурсных ограничений и топологических

характеристик цепочки процессов, формирующих наполнение хранилища данных.

Исследование продемонстрировало, что приоритизация на основе топологии связей процессов возможна и позволяет уменьшить общее время выполнения конвейера данных. Таким образом, оптимальный выбор алгоритма приоритизации может значительно снизить общее время простоя, что повлияет на общую длительность процессов, как это продемонстрировал гибридный алгоритм, делящий очередь на очередь минимальных по времени выполнения задач и наиболее длительных.

Результаты исследования обладают значительной практической ценностью для оптимизации проектирования и эксплуатации ETL-процессов в современных хранилищах данных и озерах данных. Разработанный гибридный алгоритм приоритизации продемонстрировал в экспериментах снижение общей длительности выполнения конвейеров данных на 15–17% по сравнению с альтернативными алгоритмами. Ключевым преимуществом для его практического внедрения является архитектурная гибкость алгоритма: он может быть реализован в виде кастомного компонента для популярных систем оркестрации с открытым исходным кодом, например, Apache Airflow. Подобная интеграция позволяет повысить эффективность использования вычислительных ресурсов кластера при минимальных затратах на модификацию существующей инфраструктуры.

Перспективным направлением дальнейших исследований является разработка и оценка адаптивных алгоритмов приоритизации, способных динамически учитывать текущую загрузку вычислительных

ресурсов ЦХД в реальном времени. Учитывая, что стратегия, основанная на максимальной длительности задачи, показала свою эффективность в статических условиях, производительность ETL-конвейера в значительной степени зависит от фактической доступности таких ресурсов, как вычислительные ядра, память, пропускная способность дисковой подсистемы и сети, которые могут существенно флуктуировать в процессе выполнения. Интеграция систем мониторинга ресурсов и использование этих динамических метрик в качестве дополнительных входных параметров для алгоритма приоритизации открывает путь к созданию более гибких и отзывчивых систем. Такой подход потенциально позволит оптимизировать распределение задач не только на этапе планирования, но и в ходе исполнения, оперативно повышая приоритет задач, чье выполнение может быть ускорено при временном избытке определенного ресурса, или с помощью понижения ресурсоемких задач в периоды пиковой нагрузки, тем самым минимизируется общее время выполнения

и снижая риск простоев из-за нехватки ресурсов. Исследование эффективности различных стратегий комбинирования прогнозируемой длительности задач с актуальными метриками ресурсов представляет значительный научный и практический интерес.

Вклад авторов

Д.А. Пушкарев – концептуализация исследования, разработка методологии, программное обеспечение, валидация результатов, подготовка первоначального варианта рукописи, визуализация.

В.Б. Богатырев – концептуализация исследования, разработка методологии, рецензирование и редактирование текста статьи, научное руководство.

Все авторы прочитали и одобрили опубликованную версию рукописи.

Authors' contributions

D.A. Pushkarev – conceptualization, methodology, software, validation, writing – original draft preparation, visualization.

V.B. Bogatyrev – conceptualization, methodology, writing – review and editing, supervision.

All authors have read and approved the published version of the manuscript.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kimball R., Ross M. *The Data Warehouse Toolkit: The Definitive Guide to Dimensional Modeling*. 3rd ed. Kimball group. Wiley; 2013, 608 p.
2. Simitsis A., Skiadopoulos S., Vassiliadis P. The History, Present, and Future of ETL Technology. In: *DOLAP, CEUR Workshop Proceedings*. 2023;3369:3–12.
3. Tian W. Enhancing Financial Decision-Making Through Automated Business Intelligence Systems. *Int. J. e-Collaboration (IJeC)*. 2025;21(1):1–20. URL: <https://www.igi-global.com/article/enhancing-financial-decision-making-through-automated-business-intelligence-systems/367575>. Дата обращения 20.01.2025. / Accessed January 20, 2025.
4. El-Sappagh S.H.A., Hendawi A.M.A., El Bastawissy A.H. A proposed model for data warehouse ETL processes. *Journal of King Saud University – Computer and Information Sciences (J. King Saud Univ.)*. 2011;23(2):91–104. <https://doi.org/10.1016/j.jksuci.2011.05.005>
5. Wijaya R., Pudjoatmodjo B. An overview and implementation of extraction-transformation-loading (ETL) process in data warehouse. In: *2015 3rd International Conference on Information and Communication Technology (ICoICT)*. 2015. P. 70–74. <https://doi.org/10.1109/ICoICT.2015.7231399>
6. Кузьмина Ю.В., Кубанских О.В. Краткое описание процесса ETL. *Ученые записки Брянского государственного университета*. 2017;1(5):33–36. <https://www.elibrary.ru/zmwlez>
7. Dhaouadi A., Bouselmi K., Gammoudi M.M., Monnet S., Hammoudi S. Data Warehousing Process Modeling from Classical Approaches to New Trends: Main Features and Comparisons. *Data*. 2022;7(8):113. <https://doi.org/10.3390/data7080113>
8. Vassiliadis P., Simitsis A., Skiadopoulos S. Graph-Based Modeling of ETL Activities with Multi-level Transformations and Updates. In: Tjoa A.M., Trujillo J. (Eds.). *Data Warehousing and Knowledge Discovery. Part of the book series: DaWaK 2005. Lecture Notes in Computer Science*. 2005. V. 3589. P. 43–52. https://doi.org/10.1007/11546849_5
9. Yasmin J., Wang J.A., Tian Y., Adams B. An empirical study of developers' challenges in implementing Workflows as Code: A case study on Apache Airflow. *J. Syst. Software*. 2024;219(5):112248. <https://doi.org/10.1016/j.jss.2024.112248>
10. Михайлов А.Н. Использование Apache Airflow для оркестрации процессов обработки данных. *Вестник науки*. 2024;10(79):783–787. <https://www.elibrary.ru/ijihms>
11. Громов Н.Д., Платошин А.И., Панов А.В. Сравнительный анализ средств и платформ для автоматизации ETL процессов в современных хранилищах данных. *Международный журнал гуманитарных и естественных наук*. 2023;11-4(86):46–48. <https://doi.org/10.24412/2500-1000-2023-11-4-46-48>
12. Жданов Д.Е. Построение ETL процессов на базе Cron и оркестратора задач Luigi. *Актуальные исследования*. 2023;46-1(176):63–68. <https://www.elibrary.ru/nenikj>
13. Ueter N., Günzel M., Brügggen G., Chen J. Parallel Path Progression DAG Scheduling. *IEEE Transactions on Computers*. 2023;72(10):3002–3016. <https://doi.org/10.1109/TC.2023.3280137>

14. Богатырев В.А., Богатырев С.В., Богатырев А.В. Оценка готовности компьютерной системы к своевременному обслуживанию запросов при его совмещении с информационным восстановлением памяти после отказов. *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*. 2023;23(3):608–617. <https://doi.org/10.17586/2226-1494-2023-23-3-608-617>
15. Bogatyrev V.A., Bogatyrev S.V., Bogatyrev A.V. Recovery of Real-Time Clusters with the Division of Computing Resources into the Execution of Functional Queries and the Restoration of Data Generated Since the Last Backup. In: Vishnevskiy V.M., Samouylov K.E., Kozyrev D.V. (Eds.). *Distributed Computer and Communication Networks: Control, Computation, Communications*. Book series: *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*. 2024. V. 14123. P. 236–250. https://doi.org/10.1007/978-3-031-50482-2_19
16. Karagiannis A., Vassiliadis P., Simitsis A. Scheduling strategies for efficient ETL execution. *Inform. Syst.* 2013;38(6): 927–945. <https://doi.org/10.1016/j.is.2012.12.001>
17. Topcuoglu H., Hariri S., Min-You Wu. Performance-Effective and Low-Complexity Task Scheduling for Heterogeneous Computing. *IEEE Trans. Parallel Distrib. Syst.* 2007;13(3):260–274. <https://doi.org/10.1109/71.993206>
18. Strengholt P. *Building Medallion Architectures*. 1st ed. Sebastopol (CA): O'Reilly Media; 2024, 209 p.
19. Serra J. *Deciphering Data Architectures*. 1st ed. Sebastopol (CA): O'Reilly Media; 2024, 146 p.
20. Blažić G., Pošćić P., Jakšić D. Data warehouse architecture classification. In: *2017 40th International Convention on Information and Communication Technology, Electronics and Microelectronics (MIPRO)*. 2017. P. 1491–1495. <https://doi.org/10.23919/MIPRO.2017.7973657>

REFERENCES

1. Kimball R., Ross M. *The Data Warehouse Toolkit: The Definitive Guide to Dimensional Modeling*. 3rd ed. Kimball group. Wiley; 2013, 608 p.
2. Simitsis A., Skiadopoulou S., Vassiliadis P. The History, Present, and Future of ETL Technology. In: *DOLAP, CEUR Workshop Proceedings*. 2023;3369:3–12.
3. Tian W. Enhancing Financial Decision-Making Through Automated Business Intelligence Systems. *Int. J. e-Collaboration (IJeC)*. 2025;21(1):1–20. Available from URL: <https://www.igi-global.com/article/enhancing-financial-decision-making-through-automated-business-intelligence-systems/367575>. Accessed January 20, 2025.
4. El-Sappagh S.H.A., Hendawi A.M.A., El Bastawissy A.H. A proposed model for data warehouse ETL processes. *Journal of King Saud University – Computer and Information Sciences (J. King Saud Univ.)*. 2011;23(2):91–104. <https://doi.org/10.1016/j.jksuci.2011.05.005>
5. Wijaya R., Pudjoatmodjo B. An overview and implementation of extraction-transformation-loading (ETL) process in data warehouse. In: *2015 3rd International Conference on Information and Communication Technology (ICoICT)*. 2015. P. 70–74. <https://doi.org/10.1109/ICoICT.2015.7231399>
6. Kuzmina Yu.V., Kubanskikh O.V. Brief description of the ETL process. *Uchenye Zapiski Bryanskogo Gosudarstvennogo Universiteta = Scientific Notes of the Bryansk State University*. 2017;1(5):33–36 (in Russ.). <https://www.elibrary.ru/zmwlez>
7. Dhaouadi A., Boussemli K., Gammoudi M.M., Monnet S., Hammoudi S. Data Warehousing Process Modeling from Classical Approaches to New Trends: Main Features and Comparisons. *Data*. 2022;7(8):113. <https://doi.org/10.3390/data7080113>
8. Vassiliadis P., Simitsis A., Skiadopoulou S. Graph-Based Modeling of ETL Activities with Multi-level Transformations and Updates. In: Tjoa A.M., Trujillo J. (Eds.). *Data Warehousing and Knowledge Discovery. Part of the book series: DaWaK 2005. Lecture Notes in Computer Science*. 2005. V. 3589. P. 43–52. https://doi.org/10.1007/11546849_5
9. Yasmin J., Wang J.A., Tian Y., Adams B. An empirical study of developers' challenges in implementing Workflows as Code: A case study on Apache Airflow. *J. Syst. Software*. 2024;219(5):112248. <https://doi.org/10.1016/j.jss.2024.112248>
10. Mikhailov A.N. Using Apache Airflow for Data Processing Orchestration. *Vestnik Nauki*. 2024;10(79):783–787 (in Russ.). <https://www.elibrary.ru/ijihms>
11. Gromov N.D., Platoshin A.I., Panov A.V. Comparative analysis of tools and platforms for automation of ETL processes in modern data warehouses. *Mezhdunarodnyi zhurnal gumanitarnykh i estestvennykh nauk = International Journal of Humanities and Natural Sciences*. 2023;11-4(86):46–48 (in Russ.). <https://doi.org/10.24412/2500-1000-2023-11-4-46-48>
12. Zhdanov D.E. Building ETL Processes Based on Cron and Luigi Task Orchestrator. *Aktual'nye issledovaniya = Current Research*. 2023;46-1(176):63–68 (in Russ.). <https://www.elibrary.ru/nenikj>
13. Ueter N., Günzel M., Brügggen G., Chen J. Parallel Path Progression DAG Scheduling. *IEEE Transactions on Computers*. 2023;72(10):3002–3016. <https://doi.org/10.1109/TC.2023.3280137>
14. Bogatyrev V.A., Bogatyrev S.V., Bogatyrev A.V. Assessment of the readiness of a computer system for timely servicing of requests when combined with informational recovery of memory after failures. *Nauchno-tekhnicheskii vestnik informatsionnykh tekhnologii, mekhaniki i optiki = Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*. 2023;23(3):608–617 (in Russ.). <https://doi.org/10.17586/2226-1494-2023-23-3-608-617>
15. Bogatyrev V.A., Bogatyrev S.V., Bogatyrev A.V. Recovery of Real-Time Clusters with the Division of Computing Resources into the Execution of Functional Queries and the Restoration of Data Generated Since the Last Backup. In: Vishnevskiy V.M., Samouylov K.E., Kozyrev D.V. (Eds.). *Distributed Computer and Communication Networks: Control, Computation, Communications*. Book series: *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*. 2024. V. 14123. P. 236–250. https://doi.org/10.1007/978-3-031-50482-2_19

16. Karagiannis A., Vassiliadis P., Simitsis A. Scheduling strategies for efficient ETL execution. *Inform. Syst.* 2013;38(6): 927–945. <https://doi.org/10.1016/j.is.2012.12.001>
17. Topcuoglu H., Hariri S., Min-You Wu. Performance-Effective and Low-Complexity Task Scheduling for Heterogeneous Computing. *IEEE Trans. Parallel Distrib. Syst.* 2007;13(3):260–274. <https://doi.org/10.1109/71.993206>
18. Strengholt P. *Building Medallion Architectures*. 1st ed. Sebastopol (CA): O'Reilly Media; 2024, 209 p.
19. Serra J. *Deciphering Data Architectures*. 1st ed. Sebastopol (CA): O'Reilly Media; 2024, 146 p.
20. Blažić G., Pošćić P., Jakšić D. Data warehouse architecture classification. In: *2017 40th International Convention on Information and Communication Technology, Electronics and Microelectronics (MIPRO)*. 2017. P. 1491–1495. <https://doi.org/10.23919/MIPRO.2017.7973657>

Об авторах

Пушкарёв Даниил Александрович, аспирант, преподаватель, факультет программной инженерии и компьютерной техники, ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет ИТМО» (Университет ИТМО) (197101, Россия, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., д. 49, лит. А). E-mail: dpushkarev@itmo.ru. SPIN-код РИНЦ 5781-0210, <https://orcid.org/0009-0003-2688-0093>

Богатырев Владимир Анатольевич, д.т.н., профессор факультета, факультет программной инженерии и компьютерной техники, ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет ИТМО» (Университет ИТМО) (197101, Россия, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., д. 49, лит. А); профессор кафедры информационной безопасности, ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения» (ГУАП) (190000, Россия, Санкт-Петербург, ул. Большая Морская, д. 67, лит. А). E-mail: vabogatyrev@itmo.ru. Scopus Author ID 7006571069, SPIN-код РИНЦ 3310-8044, <https://orcid.org/0000-0003-0213-0223>

About the Authors

Daniil A. Pushkarev, Postgraduate Student, Lecturer, Faculty of Software Engineering and Computer Systems, ITMO University (49, bldg. A, Kronverkskii pr., St. Petersburg, 197101 Russia). E-mail: dpushkarev@itmo.ru. RSCI SPIN-code 5781-0210, <https://orcid.org/0009-0003-2688-0093>

Vladimir A. Bogatyrev, Dr. Sci. (Eng.), Professor, Faculty of Software Engineering and Computer Systems, ITMO University (49, bldg. A, Kronverkskii pr., St. Petersburg, 197101 Russia); Professor, Department of Information Security, Saint Petersburg State University of Aerospace Instrumentation (SUAI) (67, bldg. A, Bolshaya Morskaya ul., St. Petersburg, 190000 Russia). E-mail: vabogatyrev@itmo.ru. Scopus Author ID 7006571069, RSCI SPIN-code 3310-8044, <https://orcid.org/0000-0003-0213-0223>

УДК 004.056.53
<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2026-14-1-19-30>
EDN TXHMHW



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Выделение потока сообщений между двумя абонентами в многоагентных системах на основе анализа его контекстуальных характеристик

М.О. Таныгин,
И.О. Мишин[@],
Е.А. Кулешова,
А.В. Киселев

Юго-Западный государственный университет, Курск, 305040 Россия
[@] Автор для переписки, e-mail: mishin.ilya46@yandex.ru

• Поступила: 28.04.2025 • Доработана: 01.07.2025 • Принята к опубликованию: 17.11.2025

Резюме

Цели. В статье исследуется задача повышения точности выделения потока сообщений между двумя абонентами в многоагентных системах на основе анализа контекстуальных характеристик общего потока сообщений в канале связи. При проведении процедур определения источника и установления его подлинности могут возникать коллизии кодов аутентификации двух и более сообщений. Одним из способов разрешения подобных ситуаций является выделение потока сообщений между двумя абонентами на основе его статистических характеристик, отличающихся от характеристик общего потока сообщений в системе. Цель работы – разработка метода, позволяющего надежно идентифицировать целевой поток в случае возникновения коллизий кодов аутентификации.

Методы. Для анализа и выделения паттернов активности агентов в потоке сообщений использованы контекстуальные характеристики сообщений: частота отправки, размер, временные метки и исторические данные взаимодействий. Метод включает формирование статистических характеристик потока сообщений между двумя агентами многоагентной системы (коэффициенты асимметрии и эксцесса, параметры распределения количества сообщений между событиями целевого источника) и их классификацию с помощью логистической регрессии.

Результаты. В ходе проведенных экспериментов было установлено, что разработанный метод демонстрирует значения метрики Precision (полнота) в диапазоне 0.81–0.85 (от 81% до 85% сообщений, классифицированных как принадлежащие целевому источнику, действительно являются таковыми), что на 40–50% превышает показатели существующих методов, основанных на анализе межпакетных интервалов времени. ROC¹-анализ подтвердил высокую эффективность модели и приемлемое качество классификации.

¹ Receiver operating characteristic – рабочая характеристика приемника.

Выводы. Результаты исследования показали, что использование контекстуальных характеристик и статистического анализа позволяет точно выделять целевые потоки при общем числе агентов в многоагентных системах от 70 до 110. Метод может применяться в каналах связи с низкой пропускной способностью, где необходимо минимизировать размер заголовочных частей передаваемых пакетов данных и вычислительные затраты на выполнение процедур аутентификации.

Ключевые слова: многоагентные системы, контекстуальные характеристики, бинарная классификация, логистическая регрессия, асимметрия, эксцесс, ROC-анализ

Для цитирования: Таныгин М.О., Мишин И.О., Кулешова Е.А., Киселев А.В. Выделение потока сообщений между двумя абонентами в многоагентных системах на основе анализа его контекстуальных характеристик. *Russian Technological Journal*. 2026;14(1):19–30. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2026-14-1-19-30>, <https://www.elibrary.ru/ТХНМНВ>

Прозрачность финансовой деятельности: Авторы не имеют финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

RESEARCH ARTICLE

Identification of the message flow between two subscribers in multi-agent systems based on the analysis of its contextual characteristics

Maxim O. Tanygin,
Ilya O. Mishin[@],
Elena A. Kuleshova,
Alexey V. Kiselev

Southwest State University, Kursk, 305040 Russia
[@] Corresponding author, e-mail: mishin.ilya46@yandex.ru

• Submitted: 28.04.2025 • Revised: 01.07.2025 • Accepted: 17.11.2025

Abstract

Objectives. The paper examines the problem of improving the accuracy of identifying the message flow between two subscribers in multi-agent systems. This is done by analyzing the contextual characteristics of the overall message flow in the communication channel. Situations may arise during the process of source identification and verification of authenticity in which authentication codes for two or more messages collide. One way to resolve such conflicts is to isolate the message flow between two subscribers by leveraging its unique statistical characteristics which differ from the characteristics of the general message flow within the system. The aim of the paper is to develop a method which reliably identifies the target message flow even in cases of authentication code collisions.

Methods. The contextual characteristics of messages are used, in order to analyze and highlight patterns of agent behavior in the message flow. These characteristics include frequency of sending, message size, timestamps, and historical interaction data. The method involves the formation of statistical characteristics of the message flow between two agents in a multi-agent system, such as skewness and kurtosis, as well as distribution parameters for the number of messages sent between events from the target source along with their classification by means of logistic regression.

Results. During experiments, the method developed has been found to demonstrate a Precision metric value in the range of 0.81–0.85. This is 40–50% higher than existing methods based on the analysis of inter-packet time intervals, indicating that 81–85% of the messages classified as belonging to the target source are actually such. ROC² analysis confirmed the high efficiency of the model and acceptable classification quality.

Conclusions. The results of the study show that the use of contextual characteristics and statistical analysis enables the accurate identification of target flows in multi-agent systems with a total number of agents ranging from 70 to 110. This method can be used in low-bandwidth communication channels where it is essential to minimize the size of the transmitted batch header and computational costs associated with authentication procedures.

Keywords: multi-agent systems, contextual characteristics, binary classification, logistic regression, skewness, kurtosis, ROC analysis

For citation: Tanygin M.O., Mishin I.O., Kuleshova E.A., Kiselev A.V. Identification of the message flow between two subscribers in multi-agent systems based on the analysis of its contextual characteristics. *Russian Technological Journal*. 2026;14(1):19–30. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2026-14-1-19-30>, <https://www.elibrary.ru/ТХНМНН>

Financial disclosure: The authors have no financial or proprietary interest in any material or method mentioned.

The authors declare no conflicts of interest.

ВВЕДЕНИЕ

Многоагентные системы (МАС) представляют собой сложные распределенные вычислительные системы, состоящие из множества взаимодействующих агентов, каждый из которых обладает определенной степенью автономии и способностью к адаптации. Эти системы находят широкое применение в различных областях, включая робототехнику, управление ресурсами, интеллектуальные транспортные системы и электронную коммерцию. Эффективность функционирования МАС во многом зависит от надежности и безопасности взаимодействий между агентами, что делает вопрос аутентификации особенно актуальным [1].

Аутентификация в контексте МАС представляет собой процесс проверки подлинности источников данных (агентов сети), что критически важно для обеспечения целостности и конфиденциальности передаваемой информации. Необходимость разработки адаптивных и устойчивых к атакам механизмов аутентификации становится очевидной, особенно в свете растущих угроз кибербезопасности.

Существует множество методов аутентификации, применяемых в МАС, каждый из которых оказывает влияние на безопасность и производительность системы.

Криптография является одним из наиболее распространенных подходов к аутентификации в МАС. Использование симметричных и асимметричных криптографических алгоритмов позволяет обеспечить надежную защиту данных и идентификацию агентов [2]. Симметричные методы, такие как симметричный алгоритм блочного шифрования (advanced encryption standard, AES), обеспечивают высокую скорость обработки, однако требуют безопасного

обмена ключами. Асимметричные методы, такие как шифрование Ривеста – Шамира – Адлемана (Rivest – Shamir – Adleman, RSA) и шифрование на основе эллиптических кривых (elliptic-curve cryptography), позволяют избежать проблемы распределения ключей, но могут быть менее эффективными в условиях ограниченных ресурсов [3].

Существуют различные протоколы аутентификации, разработанные специально для МАС. Например, протоколы на основе challenge-response (вызов-ответ) позволяют агентам подтверждать свою идентичность, не раскрывая при этом свои секретные ключи. Эти протоколы могут быть дополнены механизмами временных меток для защиты от атак повторного воспроизведения [4, 5].

Многофакторная аутентификация (МФА), также применяющаяся в МАС, представляет собой подход, при котором для подтверждения идентичности агента требуется проверка нескольких параметров. Использование МФА в МАС обеспечивает высокий уровень безопасности, однако ее применение приводит к усложнению процесса аутентификации и увеличению времени отклика системы. Стоит отметить, что уязвимости и проблемы производительности могут возникнуть из-за недостатков проектирования или реализации протоколов. В работе [6] поднимается проблема поиска уязвимостей в протоколах МФА с применением систематического анализа. Авторы сформировали набор критериев для оценки безопасности, который включает как существующие, так и новые параметры. Также рассмотрена возможность применения МФА в различных сферах и выявлены потенциальные уязвимости. В результате исследования были обнаружены критические уязвимости в десяти основных протоколах МФА и предложены стратегии их устранения.

² Receiver operating characteristic.

Также стоит отметить применение динамической аутентификации в МАС, что предполагает использование изменяющихся параметров для подтверждения идентичности агентов. Например, агенты могут использовать временные пароли или одноразовые коды, генерируемые на основе определенных алгоритмов. Этот подход позволяет минимизировать риски, связанные с компрометацией статических учетных данных. Например, в статье [7] автор рассматривает пароль как метод аутентификации. Стоит отметить, что данный способ по-прежнему используется в качестве единственного метода аутентификации во многих системах. Если для конкретного сценария предъявляются более высокие требования к безопасности, он используется в сочетании с некоторыми другими методами аутентификации и формирует двухфакторную или многофакторную аутентификацию. В работе указаны недостатки данного метода аутентификации и предложен альтернативный метод – одноразовый пароль на основе времени (time-based one-time password, TOTP), который генерирует различные коды доступа, действительные в течение заранее установленного временного периода. Использование динамически созданных паролей и применение системы аутентификации, основанной на сочетании одноразовых паролей и классических паролей, может использоваться как для аутентификации пользователей, так и для аутентификации P2P (peer-to-peer, от хоста к хосту).

В МАС, где агенты могут взаимодействовать друг с другом в условиях неопределенности, важным инструментом является аутентификация на основе репутации. При этом агенты могут оценивать надежность и добросовестность других агентов на основе их предыдущих взаимодействий. Этот метод позволяет не только аутентифицировать агентов, но и формировать доверительные отношения в системе. В работе [8] авторами предложен метод аутентификации сообщений с помощью технологии блокчейн, основанный на механизме оценки репутации. В контексте данной работы блокчейн используется для управления идентификационными данными и сертификатами, а управление отзывом сертификатов и аутентификация личности реализованы с помощью смарт-контрактов. Для оценки надежности сообщений авторы предложили механизм оценки репутации, который можно интегрировать в аутентификацию сообщений для эффективной проверки их надежности. Проведенный в работе анализ производительности показал, что предложенная схема более эффективна в сравнении с традиционным протоколом аутентификации на основе подписей. Сравнение проводилось по таким характеристикам, как затраты вычислительных мощностей, время задержки сообщений и частота потери данных.

Полученные авторами результаты показывают, что предложенная схема обеспечивает приемлемый уровень безопасности при воздействии различных известных типов кибератак.

С развитием блокчейн-технологий возникает возможность применения децентрализованных методов аутентификации в МАС. Блокчейн обеспечивает прозрачность и неизменность записей, что позволяет агентам безопасно обмениваться конфиденциальной информацией. Этот подход может значительно повысить уровень безопасности и снизить риски, связанные с централизованным управлением. В работе [9] предложена адаптивная модель стратегии МФА для обеспечения надежной аутентификации в динамических сценариях на основе технологии блокчейн и разработана модель консенсуса на основе алгоритма Raft для выбора авторитетного ведущего узла, обеспечивающая необходимую скорость аутентификации. Проведенный в работе анализ показал, что предложенная схема эффективна при противодействии кибератакам, нацеленным на системы аутентификации.

На основе проведенного анализа можно сделать вывод о том, что выбор метода аутентификации в МАС зависит от конкретных требований к безопасности, производительности и масштабируемости. Комбинирование различных подходов может привести к созданию более устойчивых и безопасных систем, способных эффективно функционировать в условиях динамичной среды, подверженной атакам.

ОБЗОР МЕТОДОВ ЗАЩИТЫ ОТ КОЛЛИЗИЙ ПРИ АУТЕНТИФИКАЦИИ В МАС

Каждое сообщение в МАС может быть снабжено уникальным идентификатором, который позволяет однозначно идентифицировать его среди других сообщений и предотвратить дублирование сообщений. Одной из проблем, возникающих при проведении процедур определения источника и установления его подлинности в МАС, являются коллизии таких идентификаторов. В рамках настоящей работы под коллизией понимается совпадение проверочных последовательностей у двух и более различных сообщений [10]. Существует множество методов защиты от коллизий. Рассмотрим основные из них.

Использование уникальных идентификаторов сообщений в качестве проверочных последовательностей позволяет избежать коллизий в процессе их аутентификации. Такие проверочные последовательности могут быть сгенерированы на основе временных меток, случайных чисел или комбинации этих факторов [11].

Одним из основных способов защиты от коллизий является использование криптографических стойких

хеш-функций, которые обладают свойствами, предотвращающими возможность нахождения двух или более различных сообщений, дающих одинаковый хеш-выход [12]. Примерами таких хеш-функций являются SHA-256 и SHA-3 (secure hash algorithm – безопасный алгоритм хеширования) [13]. К этому же классу систем относится использование алгоритмов цифровой подписи в различных областях для определения взаимосвязи между алгоритмами и их сценариями [14]. Авторы провели сравнительный анализ наиболее часто используемых алгоритмов цифровой подписи, в т.ч. алгоритмов RSA, алгоритмов Лэмпорта, алгоритма цифровой подписи на эллиптических кривых (elliptic curve digital signature algorithm) и алгоритма цифровой подписи на основе кривой Эдвардса (Edwards-curve digital signature algorithm), с точки зрения их производительности. В работе [15] проведен анализ существующих методов шифрования и предложена многоуровневая стратегия шифрования, в которой используются возможности AES для эффективного шифрования данных, RSA – для безопасной защиты ключей с помощью криптографии с открытым ключом и ролевое шифрование – для детального контроля доступа. Многоуровневый подход значительно увеличивает вычислительную сложность при попытках несанкционированного доступа. Интеграция этих алгоритмов позволила снизить риск компрометации ключей на 50% и повысить целостность данных за счет проверки MAC.

В то же время, если рассматривать класс MAC, где взаимодействие происходит по каналам связи с низкой пропускной способностью, примером которых могут быть сенсорные сети, сети промышленного интернета, интернета вещей, то для них использование описанных выше алгоритмов не представляется возможным, т.к. при ограниченном размере заголовка передаваемого пакета данных вероятность коллизии будет уже определяться не столько свойствами криптографических функций, сколько размером самого идентификатора. Это обеспечивает защиту от подмены и коллизий, т.к. изменение сообщения приведет к несоответствию хешей [16]. В работе рассмотрена конфиденциальность содержимого сообщения, а цифровая подпись подтверждает его подлинность и целостность. Эти методы позволяют не только защитить сообщение от несанкционированного доступа, но и гарантировать, что оно было отправлено именно тем агентом, который указан в подписи.

Соответственно, повысить достоверность разделения потоков (определения источника, сформировавшего каждое сообщение в потоке) можно за счет использования контекстуальных характеристик сообщений (информация о времени отправки,

местоположении агента, типе сообщения и его содержании) в процессе аутентификации. Включение контекстуальной информации в процесс аутентификации позволяет более точно оценивать риски и принимать соответствующие меры. Например, в работе [17] поднимается проблема взаимодействия в MAC, связанная с коммуникацией, координацией и динамическими средами. Авторы описывают ключевые стратегии улучшения взаимодействия в MAC, уделяя особое внимание протоколам коммуникации, структурам вознаграждения, алгоритмам обучения и механизмам доверия. Внедрение стандартизированных форматов сообщений и разработка контекстно-зависимых коммуникационных стратегий могут значительно повысить ясность и актуальность совместно используемой информации. В свою очередь, алгоритмы обучения с подкреплением или глубоким обучением позволяют агентам адаптироваться к динамичным средам и со временем учиться кооперативному поведению. Интеграция таких стратегий при взаимодействии в MAC позволяет повысить эффективность и надежность решений в сложных динамичных средах.

В условиях динамичной среды MAC также целесообразно использовать адаптивные механизмы аутентификации, позволяющие изменять параметры в зависимости от характеристик сообщений и контекста взаимодействия. Например, в случае подозрительных сообщений система может запросить дополнительную аутентификацию или проверку. В работе [18] предложено решение, где используется оценка рисков в сочетании с системой МФА на базе платформы, которую можно интегрировать в приложения, что позволяет передать процесс аутентификации на внешний ресурс, сохраняя при этом внутреннюю защиту системы.

Использование комбинаций различных методов позволяет повысить точность выделения потока, например, применение статистического анализа – для предварительной фильтрации данных [19] и последующее применение алгоритмов машинного обучения – для увеличения точности классификации [20].

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Для решения задачи выделения из общего потока сообщений в канале связи потока сообщений между двумя абонентами предлагается метод, основанный на анализе контекстуальных характеристик общего потока сообщений в канале связи.

Если рассматривать в качестве примера MAC упомянутую ранее сенсорную сеть, то для разделения потоков сообщений от множества сенсоров в шлюзе в качестве контекстуальных характеристик можно рассматривать следующие [21]:

- частота отправки сообщений – это количественная характеристика, определяющая интенсивность передачи данных от отдельного агента – сенсора. Она рассчитывается как отношение количества сообщений, отправленных сенсором, к заданному временному интервалу;
- размер сообщений – это характеристика, отражающая объем данных, передаваемых сенсором. Она включает средний и максимальный размеры сообщений, отправляемых источником. Поскольку размер сообщений часто совпадает у сенсоров одного типа, этот параметр может быть использован для идентификации и классификации устройств в сети;
- типы сообщений – это параметр, который классифицирует сообщения по их содержанию или назначению (например, запросы, ответы, уведомления). Поскольку сенсоры одного типа часто отправляют сообщения схожего назначения, этот параметр может быть использован для выделения потоков данных от конкретных источников и анализа их активности;
- время отправки – это временная характеристика, определяющая момент передачи сообщений с использованием временных меток. Данный параметр позволяет анализировать паттерны активности сенсоров, однако потери пакетов, вызванные помехами, могут исказить данные, что необходимо учитывать при интерпретации результатов;
- исторические данные – информация о предыдущих взаимодействиях источника, включая успешные и неуспешные попытки аутентификации.

Предлагается способ разрешения ситуаций, связанных с коллизией идентификаторов сообщений, основанный на определении источника по числу сообщений, прошедших по каналу связи между двумя сообщениями, для которых проверяется гипотеза о том, что они сформированы данным источником. В основе рассматриваемого подхода лежит предположение о том, что контекстуальные характеристики агентов остаются относительно неизменными в течение времени, что позволяет использовать исторические данные для анализа и выделения потоков сообщений. Предполагается, что агент-источник может формировать свои сообщения для рассматриваемого приемника в зависимости от действий других агентов, например, формировать сообщения через фиксированное или вычисляемое число сообщений, переданных другими агентами МАС. Это значит, что агент может активным образом влиять на неизменность контекстуальных характеристик своего потока сообщений. Преимуществами такого решения являются простота реализации (что актуально для устройств с низкой производительностью,

работающих от автономных источников питания), возможность реализации такого подсчета независимо как на стороне отправителя, так и на стороне получателя (не требуется передача такой метainформации в служебных сообщениях).

Для анализа статистических характеристик потока сообщений в приемнике при проведении аутентификации и разделении потоков данных существует ряд механизмов:

1. Применение методов статистического анализа, таких как кластеризация и регрессионный анализ, позволяет выявить закономерности в данных и выделить целевой поток. Кластеризация может быть использована для группировки сообщений по схожим характеристикам, что позволяет выделить группы сообщений, относящихся к одному абоненту [22].
2. Алгоритмы машинного обучения (деревья решений, нейронные сети и методы опорных векторов) могут быть обучены на исторических данных для классификации сообщений и выделения интересующего потока. В качестве обучающего набора данных можно использовать формализованные данные об абонентах, между которыми происходило взаимодействие [23].
3. Анализ временных рядов позволяет учитывать временные зависимости в данных и выявлять аномалии, которые могут указывать на начало или окончание потока сообщений. Авторегрессионные модели и модели скользящего среднего, могут быть использованы для прогнозирования будущих сообщений на основе исторических данных [24].

Поскольку используется только одна контекстуальная характеристика, то кластеризация плохо подходит для принятия решения, потому что в таком случае она может давать большое количество ошибок первого и второго рода при схожести характеристик у разных потоков. Данные, полученные в результате анализа временных рядов, будут сильно искажаться в зависимости от используемых протоколов связи. Собственно, это вынудило авторов отказаться от модели с непрерывным временем [19], перейдя фактически к дискретному времени – подсчету переданных в МАС сообщений. Соответственно, целесообразным подходом к анализу получаемых выборок является машинное обучение и логистическая регрессия как способ, позволяющий минимизировать вычисления при принятии решений (что актуально для высокоавтономных устройств-сенсоров в рассматриваемом классе МАС).

Рассмотрим модель формирования анализируемых выборок, состоящих из количества переданных в МАС сообщений между сообщениями потока данных от одного источника в один приемник (рис. 1).

Имеем некоторую последовательность сообщений $S_{i-1}, S_i, S_{i+1}, S_{i+l-1}, \dots, S_{i+l}, S_{i+l+1}, S_{i+l+2}$, отправляемых целевым агентом сети, и множества сообщений от других агентов сети $D_{i-1}, D_i, D_{i+1}, \dots, D_{i+k-1}, D_{i+k}$, передаваемых соответственно. Между парами S_{i-1} и S_i , S_i и S_{i+1} , \dots, S_{i+l-1} и S_{i+l} подсчитывается количество сообщений других агентов, которые были переданы в системе. Обозначим как $n_{i-1}, n_i, n_{i+1}, \dots, n_{i+k-1}, n_{i+k}$ мощности соответствующих множеств, на основании которых формируется последовательность значений, отражающих количество сообщений между предыдущим, текущим и следующим сообщениями целевого агента.

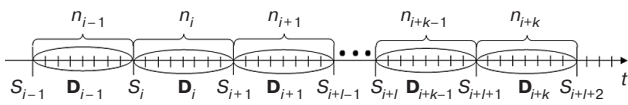


Рис. 1. Схема формирования выборки статистических характеристик потока сообщений в зависимости от времени поступления сообщений

Формирование сообщений через фиксированное или вычисляемое значение сообщений в МАС имеет существенный недостаток с точки зрения информационной безопасности, т.к. для стороннего наблюдателя сравнительно легко выделить такие потоки. Таким образом, структура МАС становится изучаемой для злоумышленника даже без анализа непосредственно содержимого передаваемых данных. Если же использовать в качестве размеров множеств $D_{i-1}, D_i, D_{i+1}, \dots, D_{i+k-1}, D_{i+k}$ случайные числа, при условии известности для приемника и отправителя закона распределения и параметров распределения как секретного идентификатора потока сообщений между ними, то для злоумышленника выделить сообщение анализируемого источника в общем потоке сообщений МАС становится трудноразрешимой задачей, требующей продолжительного времени наблюдения за системой.

Процесс формирования потока сообщений выглядит следующим образом. После отправки сообщения источником происходит ожидание отправки случайного числа сообщений другими агентами МАС. При этом само число, как было сказано выше, может быть постоянным или исчисляемым. В настоящей работе использован источник, который формировал свои сообщения через число сообщений, подчиненное распределению Пуассона. Случайность интервала позволяет маскировать сообщения каждого конкретного источника, скрывая структуру МАС и контекстуальные характеристики информационных потоков отдельных источников.

Рассмотрим ситуацию возникновения коллизии используемых в качестве проверочных последовательностей уникальных идентификаторов сообщений

от одного конкретного агента (рис. 2). Имеем последовательность сообщений $S_{i-1}, S_i, S_{i+1}, S_{i+l-1}, \dots, S_{i+l}, S_{i+l+1}, S_{i+l+2}$, сформированных целевым агентом с интервалами $n_{i-1}, n_i, n_{i+1}, \dots, n_{i+k-1}, n_{i+k}$ – случайными числами, распределенными в рассматриваемом случае по закону Пуассона. В промежутке между сообщениями S_{i-1} и S_{i+1} получено сообщение S_{ab} , такое, что проверка его идентификатора позволяет определить его как сообщение целевого агента, сформированное между указанными двумя аутентичными сообщениями. Если исходить из предположения, что параметры формирования уникальных проверочных последовательностей неизвестны злоумышленнику, и совпадение таких последовательностей у S_{ab} и S_i произошло случайно, то случайным является номер такого сообщения в последовательности $n_{i-1} + n_i$ сообщений в МАС. Следовательно, n_{ab} равномерно распределено в интервале $n_{i-1} + n_i$.

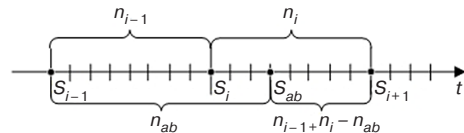


Рис. 2. Модель формирования интервалов в случае коллизии уникальных проверочных последовательностей двух различных сообщений

Перед приемником стоит задача на основе анализа двух пар значений (n_{i-1}, n_i) и $(n_{ab}, n_{i-1} + n_i - n_{ab})$ определения вероятности того, что пара 1 распределена по закону Пуассона, что соответствует формированию соответствующих сообщений целевым агентом, а пара 2, соответственно, нет, что позволяет проигнорировать сообщение S_i . При этом данные пары чисел могут быть дополнены некоторым количеством случайных чисел, распределенных по закону Пуассона (числом сообщений в МАС, переданным между несколькими сообщениями целевого источника, предшествующими или следующим после коллизии). Это соответствует рассмотрению не только последовательности из трех сообщений, где произошла коллизия, но и более объемной выборке сообщений данного агента. Но размер такой выборки априори не может быть большим, т.к. в противном случае решение о выборе одного из двух сообщений, вызвавших коллизия, происходило бы с существенной задержкой или требовало бы хранения большой истории сообщений, что снижало бы такие показатели агентов, как их автономность.

Как показано в работе [25], использование коэффициентов эксцесса и асимметрии позволяет идентифицировать тип распределения. Поскольку данные коэффициенты отражают различия в паттернах активности агентов, они могут применяться как признаки для классификации потоков сообщений.

Для анализа выборок небольшого размера использование коэффициентов эксцесса и асимметрии обосновано тем, что данные коэффициенты сильно зависят от крайних значений, что делает их ненадежными при малом размере выборки ($n < 50$), а стандартные ошибки коэффициентов растут при уменьшении n , что снижает мощность тестов на нормальность [26].

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

В работе исследовалось разделение потоков сообщений в МАС при следующих параметрах формирования сообщения источником и анализа сообщений приемником:

- $M_chain = 11$ – число анализируемых сообщений целевого агента, среди которых для одного сообщения произошла коллизия идентификатора;
- $K = 70-110$ – параметр распределения Пуассона (известный приемнику), используемый источником для формирования интервалов между соседними сообщениями (применительно к МАС – отношение числа сообщений всех агентов МАС к числу сообщений, формируемых источником в единицу времени), также может трактоваться как число агентов в МАС в случае равенства интенсивностей формирования сообщений различными агентами.

Для оценки качества классификации с помощью метода выделения потоков сообщений, основанного на индивидуальных статистических характеристиках каждого абонента, использовалась бинарная классификация.

Каждый цикл моделирования тестового набора данных состоял из следующих этапов:

1. Создание пустых массивов для хранения данных о сообщениях и их характеристиках.
2. Цикл для генерации данных:
 - а) генерация временных интервалов для последовательности сообщений с использованием распределения Пуассона (последовательность $A_1: n_1, \dots, n_9, n_{10}$).
 - б) генерация временных интервалов для последовательности сообщений с одним посторонним сообщением (последовательность $A_2: n_1, \dots, n_{ab}, n_9 + n_{10} - n_{ab}$, где n_{ab} – равномерно распределенное число в интервале $n_9 + n_{10}$).
 - в) вычисление асимметрии a и эксцесса e для двух наборов данных A_1 и A_2 .
 - г) присвоение меток из диапазона $\{0; 1\}$ входным наборам данных: $f(e_1, a_1, e_2, a_2) = 1$, $f(e_2, a_2, e_1, a_1) = 0$.

Далее на сформированном наборе данных были синтезированы обучающие и тестовые наборы данных, которые использовались для обучения модели

логистической регрессии. Проведена оценка качества классификации модели на тестовом наборе данных. На основе полученных значений ошибок первого и второго рода построена матрица классификации и проведен ROC³-анализ для оценки качества модели.

Для бинарной классификации использовалась логистическая регрессия. Вероятность того, что событие Y произойдет при заданных значениях X описывается следующим образом:

$$P(Y = 1 | X) = \frac{1}{1 + e^{-(\beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_n X_n)}}, \quad (1)$$

где $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$ – коэффициенты модели.

Для оценки качества бинарной классификации использовались следующие метрики:

1. Специфичность (True Negative Rate), которая описывается формулой:

$$TNR = \frac{TN}{TN + FP}, \quad (2)$$

где TN (True Negatives) – количество истинно отрицательных результатов, FP (False Positives) – количество ложно положительных результатов.

2. Меткость (Accuracy) – метрика точности, которая показывает степень близости результатов измерений к принятому опорному значению, описывается формулой:

$$Accuracy = \frac{TP + TN}{TP + TN + FP + FN}, \quad (3)$$

где TP (True Positives) – количество истинно положительных результатов, FN (False Negatives) – количество ложно отрицательных результатов.

3. Точность (Precision), описывается формулой:

$$Precision = \frac{TP}{TP + FP}. \quad (4)$$

4. Полнота (Recall), описывается формулой:

$$Recall = \frac{TP}{TP + FN}. \quad (5)$$

5. F1-мера – гармоническое среднее между величинами Precision и Recall:

$$F1 = 2 \cdot \frac{Precision \times Recall}{Precision + Recall}. \quad (6)$$

Значение F1-меры варьируется от 0 до 1, где 1 указывает на идеальную точность и полноту, а 0 – на полное отсутствие правильных предсказаний.

³ Receiver operating characteristic – рабочая характеристика приемника.

Для агрегирования таких метрик, как Precision, Recall и $F1$ -меры, в многоклассовых задачах классификации использовались следующие способы:

1. Macro average (макроусреднение – среднее значение, которое связано с агрегированием или общими показателями) используется для оценки производительности модели по всем классам одинаково, независимо от их размера:

$$\text{Macro avg} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N M_i, \quad (7)$$

где N – количество классов, M_i – значение метрики для класса i .

2. Weighted average (взвешенное среднее) – рассчитывает среднее значение метрики для каждого класса, но при этом учитывает количество экземпляров в каждом классе:

$$\text{Weight avg} = \frac{\sum_{i=1}^N M_i \omega_i}{\sum_{i=1}^N \omega_i}, \quad (8)$$

где ω_i – количество экземпляров (или вес) в классе i .

РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

В результате проведенных исследований установлено, что значения метрик (Precision, Recall, $F1$) для каждого из двух классов (0; 1) при $K = 70$ –110, полученные при использовании метода выделения потоков сообщений на основе контекстуальных характеристик информационных потоков отдельных источников, находятся в диапазоне от 0.81 до 0.85. Значения метрик Precision означают, что от 81% до 85% сообщений, классифицированных как принадлежащие целевому источнику, действительно являются таковыми. Значение метрики Recall показывает, что от 81% до 85% всех сообщений целевого источника были идентифицированы корректно. Значение $F1$ -меры указывает на сбалансированность модели, т.е. способность минимизировать как ложноположительные, так и ложноотрицательные ошибки.

Метрика Accuracy отражает общую долю верно классифицированных сообщений, это означает, что от 81% до 85% всех сообщений в системе (как целевых, так и посторонних) были корректно отнесены к своим классам. Совпадение значений Macro avg и Weighted avg указывает на отсутствие дисбаланса между классами, что является важным, т.к. в реальных условиях равномерное распределение целевых и посторонних сообщений упрощает анализ и повышает надежность метода.

Идентичные значения для классов 0 и 1 объясняются сбалансированностью данных и оптимизированным выбором признаков (статистических характеристики потока сообщений).

На рис. 3 изображена ROC-кривая для модели логистической регрессии при $K = 90$. Ось x отражает

долю ложноположительных срабатываний (False Positive Rate), а ось y – долю истинно положительных срабатываний (True Positive Rate). Площадь под кривой AUC (Area Under Curve) составляет 0.83, что может свидетельствовать о высокой чувствительности модели и о ее способности к различению целевых и посторонних сообщений с приемлемым результатом.

Анализ результатов экспериментов показал, что модель демонстрирует стабильную работу даже при большой величине K – отношении общего числа сообщений в MAC в единицу времени к числу сообщений целевого агента за такой же временной интервал.

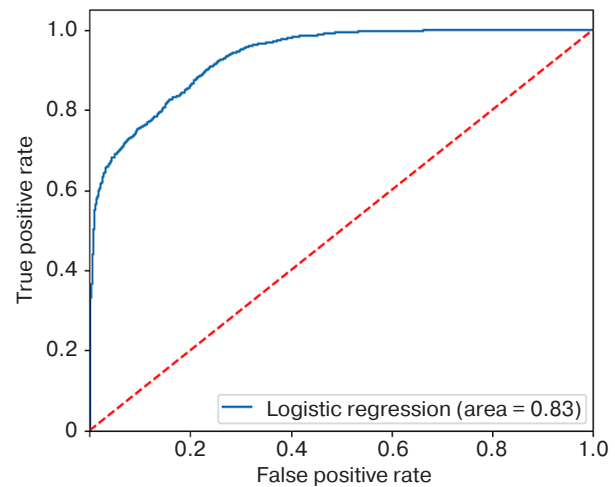


Рис. 3. ROC-кривая для модели логистической регрессии (Logistic Regression) при $K = 90$ (синяя сплошная линия), красная пунктирная линия – случайный классификатор (AUC = 0.5)

В рассматриваемой ранее работе [19] предложен метод определения источника сообщений на основе статистического анализа времени межпакетных интервалов. Также использован анализ коэффициентов эксцесса и асимметрии, но решающие правила сформулированы в виде линейных зависимостей между данными параметрами. В работе не учитывалось влияние помех на канал связи и время доставки, т.к. отказ от времени межпакетного интервала в нашем случае позволил обоснованно не учитывать такие помехи.

Использование же комплексного анализа статистических характеристик по сравнению с анализом алгебраического сравнения коэффициентов эксцесса и асимметрии позволило получить более высокие значения метрики Precision, чем в работе [19]. Так, при аналогичной заданной длине последовательности сообщений источника $M_chain = 11$ авторам [19] удалось достигнуть значения метрики Precision, равной 0.3–0.4.

Сравнив полученный в данном исследовании показатель с описанным выше методом, можно сделать вывод, что при аналогичных параметрах системы связи значение метрики Precision увеличилось на 0.4–0.5.

ВЫВОДЫ

Выполненная в настоящей работе проверка гипотезы о возможности использования коэффициентов эксцесса и асимметрии для идентификации типа распределения случайных величин показала ее применимость для выделения различий в паттернах активности агентов на основе их контекстуальных характеристик.

В результате имитационного моделирования работы подсистемы разделения потоков сообщений в случае коллизии уникальных идентификаторов сообщений получены приемлемые значения метрик качества бинарной классификации при использовании метода выделения потоков сообщений на основе характеристик информационных потоков отдельных источников.

Описанный подход, заключающийся в подсчете общего числа переданных всеми элементами МАС сообщений между сообщениями целевого агента, отличается простотой реализации (что актуально для устройств с низкой производительностью, работающих от автономных источников питания) и возможностью реализации такого подсчета независимо как на стороне отправителя, так и на стороне получателя. При этом достигаемая точность классификации равна 0.81–0.85.

Результаты исследования показали, что использование контекстуальных характеристик и статистического анализа позволяет точно выделять целевые

потоки при общем числе агентов в МАС от 70 до 110. Метод может применяться в каналах связи с низкой пропускной способностью, где необходимо минимизировать размер заголовочных частей передаваемых пакетов данных и вычислительные затраты на выполнение процедур аутентификации. Перспективным направлением является интеграция адаптивных механизмов для работы в условиях динамически изменяемой загрузки каналов связи, когда эффективное число агентов в МАС может варьироваться в широких диапазонах.

Вклад авторов

М.О. Таныгин – разработка концепции, разработка методологии, утверждение окончательного варианта.

И.О. Мишин – проведение исследования, написание черновика, подготовка и редактирование текста.

Е.А. Кулешова – проведение исследования, проведение анализа данных, подготовка и редактирование текста.

А.В. Киселев – проведение исследования, проведение анализа данных.

Authors' contributions

M.O. Tanygin – concept development, methodology development, approval of the final version.

I.O. Mishin – conducting research, writing the draft, preparing and editing the text.

E.A. Kuleshova – conducting research, analyzing data, preparing and editing the text.

A.V. Kiselev – conducting research, analyzing data.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Öztürk G., Saran N., Doğanaksoy A. Modified Attribute-Based Authentication for Multi-Agent Systems. *Int. J. Inform. Security Sci.* 2023;12(3):1–13. <https://doi.org/10.55859/ijiss.1294580>
- Кулешова Е.А., Марухленко А.Л., Добрица В.П., Таныгин М.О., Плугаторев А.В. Вариант алгоритма генерации псевдослучайных двоичных последовательностей, основанный на свойствах линейных клеточных автоматов. *Прикаспийский журнал: управление и высокие технологии.* 2021;54(2):62–70. <https://doi.org/10.21672/2074-1707.2021.53.1.062-070>
- Таныгин М.О., Кулешова Е.А., Митрофанов А.В., Гладиллина Е.Ю. Повышение скорости обнаружения ошибок при формировании цепочек блоков данных на основе анализа числа совпадений хешей. *Прикаспийский журнал: управление и высокие технологии.* 2022;1(57):85–93. https://doi.org/10.54398/2074-1707_2022_1_85
- Yuan J., Yang J., Zhou S., Wang C. Efficient Group Authentication with Multiple Authentications on Resource-Limited Devices. *J. Supercomput.* 2025;81:929. <https://doi.org/10.1007/s11227-025-07404-6>
- Gopirajan P.V., Mani K. Secure Multi-Authentication using BlockchainTechnology in Cloud based Internet of Things. *Telematique.* 2022;21(1):6640–6650.
- Wee A.K., Chekole E.G., Zhou J. Excavating Vulnerabilities Lurking in Multi-Factor Authentication Protocols: A Systematic Security Analysis. *arXiv Cornell University.* 2024;2407(20459):1–24. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2407.20459>
- Chenchev I. Framework for Multi-factor Authentication with Dynamically Generated Passwords. In: Arai K. (Ed.). *Advances in Information and Communication. FICC 2023. Lecture Notes in Networks and Systems.* Springer; 2023. V. 652. P. 563–576. https://doi.org/10.1007/978-3-031-28073-3_39
- Li H., Han D. Blockchain-assisted secure message authentication with reputation management for VANETs. *J. Supercomput.* 2023;79(17):19903–19933. <https://doi.org/10.1007/s11227-023-05394-x>
- Xu Y., Jian X., Li T., Zou S., Li B. Blockchain-Based Authentication Scheme with an Adaptive Multi-Factor Authentication Strategy. *Mobile Inform. Syst.* 2023;2023:4764135. <https://doi.org/10.1155/2023/4764135>
- Liu J., Mu Q., Che R., et al. Multi-participant quantum anonymous communication based on high-dimensional entangled states. *Physica Scripta.* 2024;99(9):095109. <https://doi.org/10.1088/1402-4896/ad69d9>
- Кулешова Е.А., Таныгин М.О. Исследование характеристик современных генераторов псевдослучайных последовательностей. *Телекоммуникации.* 2023;7:28–39. <https://doi.org/10.31044/1684-2588-2023-0-7-28-39>

12. Таныгин М.О. Восстановление порядка следования информационных пакетов на основе анализа хеш-последовательностей. *Известия Юго-Западного государственного университета*. 2020;24(1):175–188.
13. Alamgir N., Negati S., Bright C. SHA-256 Collision Attack with Programmatic SAT. *arXiv Cornell University*. 2024;2406.20072. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2406.20072>
14. Fang Y. A research on different digital signature schemes. *Appl. Comput. Eng.* 2023;16(1):27–35. <http://doi.org/10.54254/2755-2721/16/20230855>
15. Phatangare S., Jadhav S., Kawane S., Holkar P., Gaikwad P. Multi-Level Encryption System using AES and RSA Algorithms. *Int. J. Res. Appl. Sci. Eng. Technol.* 2024;15(5):4043–4051. <https://doi.org/10.22214/IJRASET.2024.62420>
16. Tanygin M.O., Alshaeaa H.Y., Kuleshova E.A. A method of the transmitted blocks information integrity control. *Radio Electronics, Computer Science, Control*. 2020;1:181–189.
17. Tao M., Li Q., Yu J. Multi-Objective Dynamic Path Planning with Multi-Agent Deep Reinforcement Learning. *J. Marin. Sci. Eng.* 2025;13(1):20. <https://doi.org/10.3390/jmse13010020>
18. Morais D., Zuquete A., Mendes A. Adaptive, Multi-Factor Authentication as a Service for Web Applications. In: *2023 7th Cyber Security in Networking Conference (CSNet)*. 2023. P. 74–80. <http://doi.org/10.1109/CSNet59123.2023.10339695>
19. Плугатарев А.В. Модель определения источника сообщений на основе статистического анализа метаданных в открытом канале связи. *Прикаспийский журнал: управление и высокие технологии*. 2022;4(60):30–37.
20. Dharrao D., Gaikwad P., Gawai S.V., Bongale A.M., Patel K., Singh A. Classifying SMS as spam or ham: Leveraging NLP and machine learning techniques. *Int. J. Saf. Secur. Eng.* 2024;14(1):289–296. <https://doi.org/10.18280/ijssse.140128>
21. Placzek B. A Multi-Agent Prediction Method for Data Sampling and Transmission Reduction in Internet of Things Sensor Networks. *Sensors*. 2023;23(20):8478. <https://doi.org/10.3390/s23208478>
22. Vedmiediev D., Shapoval N. Text Message Clustering. *Electronics and Control Systems*. 2023;4(78):16–20.
23. Katwal S., Sharma N., Kumar K. A Deep Learning Approach for Throughput Enhanced Clustering and Spectrally Efficient Resource Allocation in Ultra-Dense Networks. *IEEE Trans. Netw. Service Manag.* 2025;22(1):582–591. <https://doi.org/10.1109/TNSM.2024.3470235>
24. Huang X., Zhou S. QMNet: Importance-Aware Message Exchange for Decentralized Multi-Agent Reinforcement Learning. *IEEE Trans. Mobile Comput.* 2023;23(5):4739–4751. <https://doi.org/10.1109/TMC.2023.3296726>
25. Головешкин В.А., Жукова Г.Н., Ульянов М.В., Фомичев М.И. Использование квантильных коэффициентов асимметрии и эксцесса для оценки сложности решения задачи коммивояжера. *Int. J. Open Inform. Technol.* 2016;4(12):7–12. <https://elibrary.ru/xetab>
26. Таныгин М.О., Добрица В.П., Митрофанов А.В., Ахмат Х.И. Математическая интерпретация результатов когнитивного анализа метаданных сетевых пакетов. *Известия Юго-Западного государственного университета*. 2023;27(3):66–78.

REFERENCES

1. Öztürk G., Saran N., Doğanaksoy A. Modified Attribute-Based Authentication for Multi-Agent Systems. *Int. J. Inform. Security Sci.* 2023;12(3):1–13. <https://doi.org/10.55859/ijiss.1294580>
2. Kuleshova E.A., Maruhlenko A.L., Dobritsa V.P., Tanygin M.O., Plugatov A.V. A variant of the algorithm for generating pseudorandom binary sequences based on the properties of linear cellular automata. *Prikaspiiskii zhurnal: upravlenie i vysokie tekhnologii = Caspian Journal: Control and High Technologies*. 2021;54(2):62–70 (in Russ.). <https://doi.org/10.21672/2074-1707.2021.53.1.062-070>
3. Tanygin M.O., Kuleshova E.A., Mitrofanov A.V., Gladilina E.U. Increasing the speed of error detection when forming data block chains based on the analysis of the number of hash matches. *Prikaspiiskii zhurnal: upravlenie i vysokie tekhnologii = Caspian Journal: Control and High Technologies*. 2022;1(57):85–93 (in Russ.). https://doi.org/10.54398/2074-1707_2022_1_85
4. Yuan J., Yang J., Zhou S., Wang C. Efficient Group Authentication with Multiple Authentications on Resource-Limited Devices. *J. Supercomput.* 2025;81:929. <https://doi.org/10.1007/s11227-025-07404-6>
5. Gopirajan P.V., Mani K. Secure Multi-Authentication using Blockchain Technology in Cloud based Internet of Things. *Telematique*. 2022;21(1):6640–6650.
6. Wee A.K., Chekole E.G., Zhou J. Excavating Vulnerabilities Lurking in Multi-Factor Authentication Protocols: A Systematic Security Analysis. *arXiv Cornell University*. 2024;2407(20459):1–24. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2407.20459>
7. Chenchev I. Framework for Multi-factor Authentication with Dynamically Generated Passwords. In: Arai K. (Ed.). *Advances in Information and Communication. FICC 2023. Lecture Notes in Networks and Systems*. Springer; 2023. V. 652. P. 563–576. https://doi.org/10.1007/978-3-031-28073-3_39
8. Li H., Han D. Blockchain-assisted secure message authentication with reputation management for VANETs. *J. Supercomput.* 2023;79(17):19903–19933. <https://doi.org/10.1007/s11227-023-05394-x>
9. Xu Y., Jian X., Li T., Zou S., Li B. Blockchain-Based Authentication Scheme with an Adaptive Multi-Factor Authentication Strategy. *Mobile Inform. Syst.* 2023;2023:4764135. <https://doi.org/10.1155/2023/4764135>
10. Liu J., Mu Q., Che R., et al. Multi-participant quantum anonymous communication based on high-dimensional entangled states. *Physica Scripta*. 2024;99(9):095109. <https://doi.org/10.1088/1402-4896/ad69d9>
11. Kuleshova E.A., Tanygin M.O. Study of characteristics of modern generators of pseudorandom sequences. *Telekommunikatsii = Telecommunications*. 2023;7:28–39 (in Russ.). <https://doi.org/10.31044/1684-2588-2023-0-7-28-39>
12. Tanygin M.O. Restoring the order of information packets based on hash sequence analysis. *Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta = Proceedings of the Southwest State University*. 2020;24(1):175–188 (in Russ.).

13. Alamgir N., Negati S., Bright C. SHA-256 Collision Attack with Programmatic SAT. *arXiv Cornell University*. 2024;2406.20072. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2406.20072>
14. Fang Y. A research on different digital signature schemes. *Appl. Comput. Eng.* 2023;16(1):27–35. <http://doi.org/10.54254/2755-2721/16/20230855>
15. Phatangare S., Jadhav S., Kawane S., Holkar P., Gaikwad P. Multi-Level Encryption System using AES and RSA Algorithms. *Int. J. Res. Appl. Sci. Eng. Technol.* 2024;15(5):4043–4051. <https://doi.org/10.22214/IJRASET.2024.62420>
16. Tanygin M.O., Alshaeaa H.Y., Kuleshova E.A. A method of the transmitted blocks information integrity control. *Radio Electronics, Computer Science, Control.* 2020;1:181–189.
17. Tao M., Li Q., Yu J. Multi-Objective Dynamic Path Planning with Multi-Agent Deep Reinforcement Learning. *J. Marin. Sci. Eng.* 2025;13(1):20. <https://doi.org/10.3390/jmse13010020>
18. Morais D., Zuquete A., Mendes A. Adaptive, Multi-Factor Authentication as a Service for Web Applications. In: *2023 7th Cyber Security in Networking Conference (CSNet)*. 2023. P. 74–80. <http://doi.org/10.1109/CSNet59123.2023.10339695>
19. Plugatarev A.V. Model for determining the message source by statistical analysis of metadata in an open communication channel. *Prikladnii zhurnal: upravlenie i vysokie tekhnologii = Caspian Journal: Control and High Technologies.* 2022;4(60):30–37 (in Russ.).
20. Dharrao D., Gaikwad P., Gawai S.V., Bongale A.M., Patel K., Singh A. Classifying SMS as spam or ham: Leveraging NLP and machine learning techniques. *Int. J. Saf. Secur. Eng.* 2024;14(1):289–296. <https://doi.org/10.18280/ijss.140128>
21. Placzek B. A Multi-Agent Prediction Method for Data Sampling and Transmission Reduction in Internet of Things Sensor Networks. *Sensors.* 2023;23(20):8478. <https://doi.org/10.3390/s23208478>
22. Vedmiediev D., Shapoval N. Text Message Clustering. *Electronics and Control Systems.* 2023;4(78):16–20.
23. Katwal S., Sharma N., Kumar K. A Deep Learning Approach for Throughput Enhanced Clustering and Spectrally Efficient Resource Allocation in Ultra-Dense Networks. *IEEE Trans. Netw. Service Manag.* 2025;22(1):582–591. <https://doi.org/10.1109/TNSM.2024.3470235>
24. Huang X., Zhou S. QMNet: Importance-Aware Message Exchange for Decentralized Multi-Agent Reinforcement Learning. *IEEE Trans. Mobile Comput.* 2023;23(5):4739–4751. <https://doi.org/10.1109/TMC.2023.3296726>
25. Goloveshkin V.A., Zhukova G.N., Ulyanov M.V., Fomichev M.I. The estimation of the complexity of solving a particular travelling salesman problem by quantile-based measures for skewness and kurtosis. *Int. J. Open Inform. Technol.* 2016;4(12):7–12 (in Russ.). <https://elibrary.ru/xetabh>
26. Tanygin M.O., Dobritsa V.P., Mitrofanov A.V., Ahmat Kh.I. Mathematical interpretation of the results of cognitive analysis of network packets metadata. *Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta = Proceedings of the Southwest State University.* 2023;27(3):66–78 (in Russ.).

Об авторах

Таныгин Максим Олегович, д.т.н., доцент, декан факультета фундаментальной и прикладной информатики, ФГБОУ ВО «Юго-Западный государственный университет» (305040, Россия, Курск, ул. 50 лет Октября, д. 94). E-mail: tanygin@yandex.ru. Scopus Author ID 19640649200, ResearcherID N-7689-2016, SPIN-код РИНЦ 2639-4800, <https://orcid.org/0000-0002-4099-1414>

Мишин Илья Олегович, аспирант, кафедра информационной безопасности, ФГБОУ ВО «Юго-Западный государственный университет» (305040, Россия, Курск, ул. 50 лет Октября, д. 94). E-mail: mishin.ilya46@yandex.ru. ResearcherID MXJ-7912-2025, SPIN-код РИНЦ 6911-3642, <https://orcid.org/0009-0006-8883-1731>

Кулешова Елена Александровна, к.т.н., доцент, кафедра информационной безопасности, ФГБОУ ВО «Юго-Западный государственный университет» (305040, Россия, Курск, ул. 50 лет Октября, д. 94). E-mail: lena.kuleshova.94@mail.ru. Scopus Author ID 57216349335, ResearcherID AAI-9214-2021, SPIN-код РИНЦ 9607-8582, <https://orcid.org/0000-0002-8270-564X>

Киселев Алексей Викторович, к.т.н., доцент, кафедра вычислительной техники, ФГБОУ ВО «Юго-Западный государственный университет» (305040, Россия, Курск, ул. 50 лет Октября, д. 94). E-mail: kisevalexey1990@gmail.com. Scopus Author ID 57337411000, ResearcherID S-9914-2018, SPIN-код РИНЦ 2016-7550, <https://orcid.org/0000-0001-7228-0281>

About the Authors

Maxim O. Tanygin, Dr. Sci. (Eng.), Associate Professor, Dean of the Faculty of Fundamental and Applied Informatics, Southwest State University (94, 50 Let Oktyabrya ul., Kursk, 305040 Russia). E-mail: tanygin@yandex.ru. Scopus Author ID 19640649200, ResearcherID N-7689-2016, RSCI SPIN-code 2639-4800, <https://orcid.org/0000-0002-4099-1414>

Ilya O. Mishin, Postgraduate Student, Department of Information Security, Southwest State University (94, 50 Let Oktyabrya ul., Kursk, 305040 Russia). E-mail: mishin.ilya46@yandex.ru. ResearcherID MXJ-7912-2025, RSCI SPIN-code 6911-3642, <https://orcid.org/0009-0006-8883-1731>

Elena A. Kuleshova, Cand. Sci. (Eng.), Associate Professor, Department of Information Security, Southwest State University (94, 50 Let Oktyabrya ul., Kursk, 305040 Russia). E-mail: lena.kuleshova.94@mail.ru. Scopus Author ID 57216349335, ResearcherID AAI-9214-2021, RSCI SPIN-code 9607-8582, <https://orcid.org/0000-0002-8270-564X>

Alexey V. Kiselev, Cand. Sci. (Eng.), Associate Professor, Computer Engineering Department, Southwest State University (94, 50 Let Oktyabrya ul., Kursk, 305040 Russia). E-mail: kisevalexey1990@gmail.com. Scopus Author ID 57337411000, ResearcherID S-9914-2018, RSCI SPIN-code 2016-7550, <https://orcid.org/0000-0001-7228-0281>

Современные радиотехнические и телекоммуникационные системы
Modern radio engineering and telecommunication systems

УДК 621.391.82
<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2026-14-1-31-42>
EDN UDTTHY



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Исследование эффективности компенсации многолучевости в каналах связи при использовании фильтров с инверсной импульсной характеристикой

Ю.А. Полевода[@],
Г.В. Куликов

МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, 119454 Россия
[@] Автор для переписки, e-mail: polevoda@mirea.ru

• Поступила: 21.04.2025 • Доработана: 19.06.2025 • Принята к опубликованию: 10.11.2025

Резюме

Цели. При передаче данных в современных системах связи одной из ключевых проблем является многолучевое распространение сигналов, вызванное отражениями от различных препятствий. Для борьбы с этим эффектом используются разные методы, такие как направленные антенны, разнесенный прием, адаптивная фильтрация и выбор эффективных методов модуляции. Одним из перспективных подходов является применение фильтров с импульсной характеристикой (ИХ), инверсной ИХ канала, которые позволяют компенсировать задержанные сигналы. Эффективность таких фильтров зависит от точности настройки их параметров. Цель работы состоит в выработке рекомендаций для обеспечения эффективной компенсации многолучевости при использовании фильтров с инверсной ИХ, оценке влияния параметров канала (временных задержек и интенсивностей отраженных сигналов) на вероятность битовой ошибки (bit error rate, BER) и определении энергетического выигрыша.

Методы. Используются методы статистической радиотехники, теории оптимального приема сигналов и математического моделирования.

Результаты. Представлены результаты исследования эффективности компенсации многолучевости в каналах связи при использовании на приемной стороне фильтров с ИХ, инверсной ИХ канала. В программной среде *Simulink* разработана модель многолучевого канала связи, включающая шесть лучей с различными временными задержками и интенсивностями. Проведено моделирование приема дискретной информации для разных методов модуляции: 16-КАМ (квадратурной амплитудной), 8-ФМ (многопозиционной фазовой) и 8-ЧМ (многопозиционной частотной) модуляциями. Выполнена оценка вероятности битовой ошибки в зависимости от отношения сигнал/шум и параметров многолучевого канала (временных задержек, интенсивностей отраженных лучей). Показано, что применение фильтров с инверсной ИХ позволяет значительно снизить вероятность битовой ошибки и улучшить качество связи. Оценено изменение величины BER при отклонениях параметров фильтра от идеальных.

Выводы. Результаты демонстрируют, что использование компенсационных фильтров эффективно для борьбы с многолучевыми искажениями, особенно в условиях сильной интерференции. Полученные данные могут быть использованы для проектирования и оптимизации современных систем связи, работающих в сложных условиях распространения сигналов.

Ключевые слова: многолучевой канал связи, импульсная характеристика, фильтр с инверсной импульсной характеристикой, многопозиционная модуляция, вероятность битовой ошибки, отношение сигнал/шум

Для цитирования: Полевода Ю.А., Куликов Г.В. Исследование эффективности компенсации многолучевости в каналах связи при использовании фильтров с инверсной импульсной характеристикой. *Russian Technological Journal*. 2026;14(1):31–42. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2026-14-1-31-42>, <https://www.elibrary.ru/UDTTHY>

Прозрачность финансовой деятельности: Авторы не имеют финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

RESEARCH ARTICLE

Investigation of multipath compensation efficiency in communication channels using filters with inverse impulse response

Yuriy A. Polevoda[@],
Gennady V. Kulikov

MIREA – Russian Technological University, Moscow, 119454 Russia

[@] Corresponding author, e-mail: polevoda@mirea.ru

• Submitted: 21.04.2025 • Revised: 19.06.2025 • Accepted: 10.11.2025

Abstract

Objectives. A key challenge when transmitting data in modern communication systems is the multipath propagation of signals caused by reflections from various obstacles. Various methods have been developed to address this issue including: directional antennas; diversity reception; adaptive filtering; and the choice of effective modulation methods. One promising approach is the use of filters with impulse response (IR) inverse to IR channel. This allows for compensating delayed signals. The effectiveness of such filters depends on the accuracy of their parameter settings. The paper aims to develop guidelines for effectively using filters with inverse IR to compensate for multipath. Additionally, it aims to evaluate the impact of various channel parameters, such as time delays and reflected signal intensities, on the bit error rate (BER) and to determine the energy gain.

Methods. The methods of statistical radio engineering, the theory of optimal signal reception and mathematical modeling were used.

Results. The results of a study on the effectiveness of multipath compensation in communication channels when using filters with inverse IR to that of the channel at the receiving side are presented. A multipath communication channel model was developed in the *Simulink* software environment, consisting of six beams with different time delays and intensities. Discrete information reception was simulated using different modulation methods: 16-QAM (quadrature amplitude modulation), 8-PSK (phase-shift keying), and 8-FSK (frequency-shift keying). The BER value was estimated depending on the signal-to-noise ratio and multipath channel parameters, including time delays and reflected beam intensities. It was shown that the use of filters with inverse IR can significantly reduce BER and improve communication quality. The change in the BER value is estimated for deviations of filter parameters from the ideal ones.

Conclusions. The results demonstrate that the use of compensating filters is effective in combating multipath distortion, especially under strong interference conditions. The data obtained can be used for the design and optimization of modern communication systems operating in complex signal propagation conditions.

Keywords: multipath communication channel, impulse response, filter with inverse impulse response, multi-position modulation, bit error probability, signal-to-noise ratio

For citation: Polevoda Yu.A., Kulikov G.V. Investigation of multipath compensation efficiency in communication channels using filters with inverse impulse response. *Russian Technological Journal*. 2026;14(1):31–42. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2026-14-1-31-42>, <https://www.elibrary.ru/UDTTHY>

Financial disclosure: The authors have no financial or proprietary interest in any material or method mentioned.

The authors declare no conflicts of interest.

ВВЕДЕНИЕ

Современные системы связи сталкиваются с множеством проблем, среди которых одной из самых трудных является передача данных в условиях многолучевого распространения сигналов. Многолучевое распространение, вызванное отражениями сигналов от различных препятствий, приводит к интерференции и искажению принимаемого сигнала, что существенно снижает качество связи. Существуют различные методы борьбы с этим эффектом: использование направленных антенн [1, 2], разнесенный прием [3–6], адаптивная фильтрация [7, 8], выбор эффективных методов модуляции [9–12]. Одним из ключевых методов борьбы с негативным влиянием многолучевости является использование фильтров с импульсной характеристикой (ИХ), инверсной ИХ канала, которые позволяют компенсировать задержанные сигналы [13–17]. В настоящей работе представлены результаты моделирования и анализа эффективности таких фильтров в условиях многолучевого канала связи при использовании сигналов с разными методами модуляции: квадратурной амплитудной (16-КАМ, когерентный прием), многопозиционной фазовой (8-ФМ, когерентный прием) и многопозиционной частотной (8-ЧМ, некогерентный прием).

Целью исследования является оценка влияния параметров многолучевого канала (задержек, интенсивностей отраженных сигналов) и фильтра на вероятность битовой ошибки (bit error rate, BER) при приеме дискретных сигналов и определение энергетического выигрыша при использовании фильтров с инверсной ИХ. Для проведения анализа в программной среде *Simulink*¹ разработана модель многолучевого канала связи, включающая шесть лучей с различными задержками и интенсивностями (дискретная многолучевость).

МОДЕЛЬ МНОГОЛУЧЕВОГО КАНАЛА

Определение ИХ канала связи и оценка ее параметров может быть осуществлена с помощью

предварительного зондирования этого канала сигналами специальной формы [18–23], например, короткими δ -импульсами, сигналами с частотной модуляцией, сигналами, кодированными специальными псевдослучайными последовательностями. В настоящей работе этот вопрос детально не рассматривается, а полагается, что параметры ИХ канала определены идеально или с некоторой погрешностью. Такую информацию в модели можно получить с помощью короткого зондирующего импульса, длительность которого влияет на нижнюю границу диапазона возможных задержек лучей. Для примера, длительность зондирующего импульса выбрана равной 1 нс.

Модель дискретной многолучевости канала связи (6 лучей, включая прямой $s_{\text{пр}}(t)$) создана в программной среде *MATLAB/Simulink* (trial-версия) и *Scilab Xcos*² с задержками τ_k сигнала на 0 (прямой луч), 7, 14, 21, 28 и 33 нс и относительными (относительно средней амплитуды сигнала прямого луча) интенсивностями μ_k задержанных сигналов 0.09, 0.08, 0.07, 0.06 и 0.05, соответственно (рис. 1, левая сторона). Величины задержек приведены для примера и могут быть масштабированы в зависимости от задаваемых условий распространения радиоволн.

Таким образом, сигнал на выходе многолучевого канала связи имеет следующий вид:

$$s(t) = s_{\text{пр}}(t) + \sum_{k=1}^5 \mu_k s_{\text{пр}}(t - \tau_k) + n(t),$$

где $n(t)$ – белый гауссовский шум (блок AWGN³ Channel), t – время.

Схема фильтра с инверсной ИХ включает в себя 6 ветвей с коэффициентами усиления, соответствующими интенсивностям, и временными задержками (рис. 1, правая сторона). В части, соответствующей задержанным сигналам, она является зеркальным (по знаку) отображением модели канала связи.

¹ <https://www.mathworks.com/products/simulink.html>. Дата обращения 15.02.2025. / Accessed February 15, 2025.

² <https://www.scilab.org/software/xcos>. Дата обращения 05.04.2025. / Accessed April 05, 2025.

³ Additive white Gaussian noise.

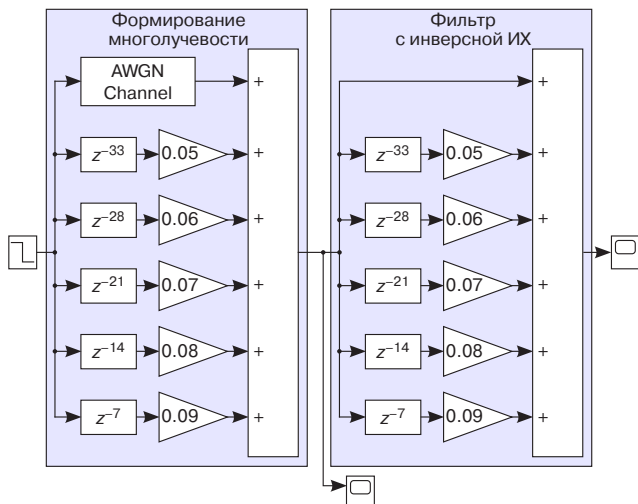


Рис. 1. Модель формирования и обработки многолучевого сигнала. z^{-1} – блок задержки, где «-1» – время задержки луча

ПРОВЕРКА РАБОТЫ ФИЛЬТРА С ИНВЕРСНОЙ ИХ

Проверка работы фильтра с инверсной ИХ хорошо иллюстрируется при прохождении через канал одиночного зондирующего импульса. На рис. 2а приведена осциллограмма сигнала на выходе канала связи, где показаны 1 прямой и 5 отраженных сигналов, что эквивалентно ИХ канала.

На рис. 2б показан сигнал на выходе фильтра с инверсной ИХ, откуда видно, что фильтр компенсировал сигналы задержанных лучей, но вместо них появились отклики на временных позициях, определяемых удвоенной временной задержкой, что легко объяснимо особенностями прохождения сигналов через фильтр [24].

МОДЕЛИРОВАНИЕ КАНАЛА СВЯЗИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МНОГОПОЗИЦИОННЫХ СИГНАЛОВ

Анализ энергетического выигрыша

В рамках исследования проведен анализ энергетического выигрыша (по отношению сигнал/шум) в зависимости от относительной интенсивности одного отраженного луча для разных методов модуляции: 16-КАМ, 8-ФМ и 8-ЧМ. Моделирование проводилось с одним прямым и одним отраженным лучом, задержанным на 7 нс. Интенсивность отраженного луча μ варьировалась в широком диапазоне, что позволило оценить влияние как слабых, так и сильных отражений на вероятность битовой ошибки. При расчетах для каждого метода модуляции построены (рис. 3) зависимости величины BER от отношения сигнал/шум E_b/N_0 (E_b – энергия, приходящаяся

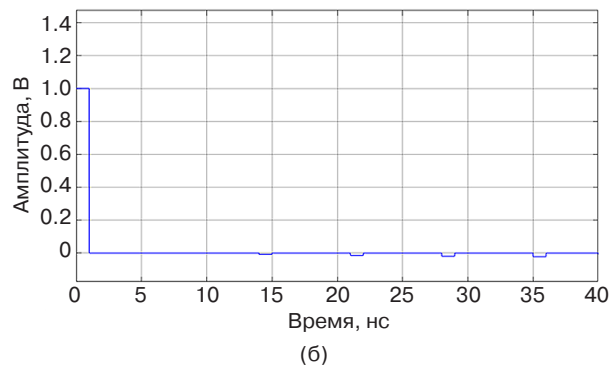
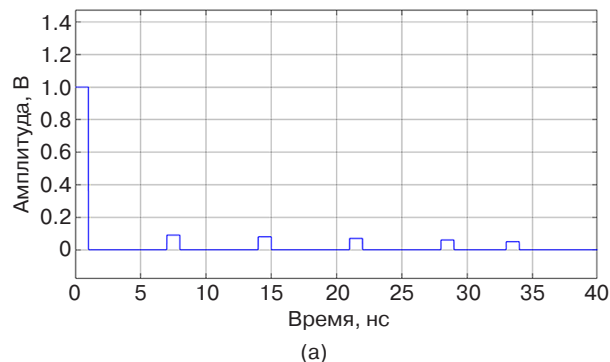


Рис. 2. Осциллограммы: (а) ИХ, (б) сигнала на выходе фильтра с инверсной ИХ

на бит информации, N_0 – спектральная плотность мощности шума) как без использования фильтра с инверсной ИХ (штриховые линии), так и с его применением (сплошные линии).

На рис. 4 приведены результаты расчета энергетического выигрыша для $BER = 10^{-3}$.

Из рис. 3 и 4 видно, что для интенсивности отраженного луча $\mu = 0.3$ при использовании фильтра с инверсной ИХ выигрыш по отношению сигнал/шум E_b/N_0 в зависимости от используемой модуляции сигналов составляет от единиц до десятка децибел, причем для сигнала 16-КАМ он в 2 раза больше по сравнению с сигналом 8-ФМ и более чем в 10 раз – с сигналом 8-ЧМ. Это связано с тем, что сигнал 8-ЧМ изначально обеспечивает наибольшую помехоустойчивость [11]: например, для него при интенсивности отраженного луча $\mu = 0.3$ для отношения сигнал/шум $E_b/N_0 = 9$ дБ вероятность битовой ошибки без фильтра составляет 10^{-3} , для сигнала 8-ФМ – более чем на порядок выше, а для 16-КАМ – на 2 порядка выше.

Зависимости вероятности битовой ошибки от отношения сигнал/шум

Следующий этап исследования – моделирование канала связи с одним прямым и пятью отраженными лучами, имеющими различные задержки (7, 14, 21, 28 и 33 нс) и интенсивности (для 16-КАМ и 8-ФМ $\mu = 0.09, 0.08, 0.07, 0.06$ и 0.05 относительно

средней амплитуды сигнала прямого луча, для 8-ЧМ $\mu = 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6$). Результатом моделирования являются зависимости BER от отношения сигнал/шум E_b/N_0 при различном количестве лучей (рис. 5–7) без фильтрации (штриховые линии) и с фильтрацией (сплошные линии).

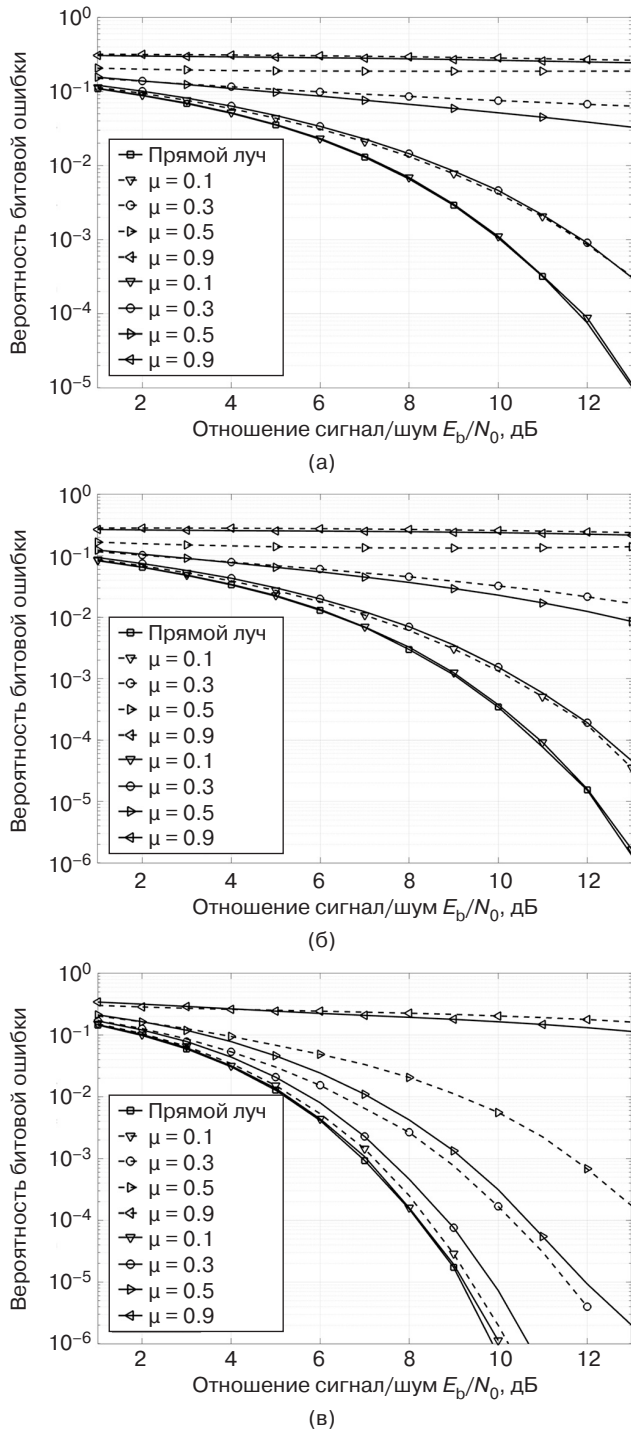


Рис. 3. Зависимости вероятности битовой ошибки от отношения сигнал/шум при приеме сигналов с одним прямым и одним отраженным лучом: (а) 16-КАМ, (б) 8-ФМ, (в) 8-ЧМ

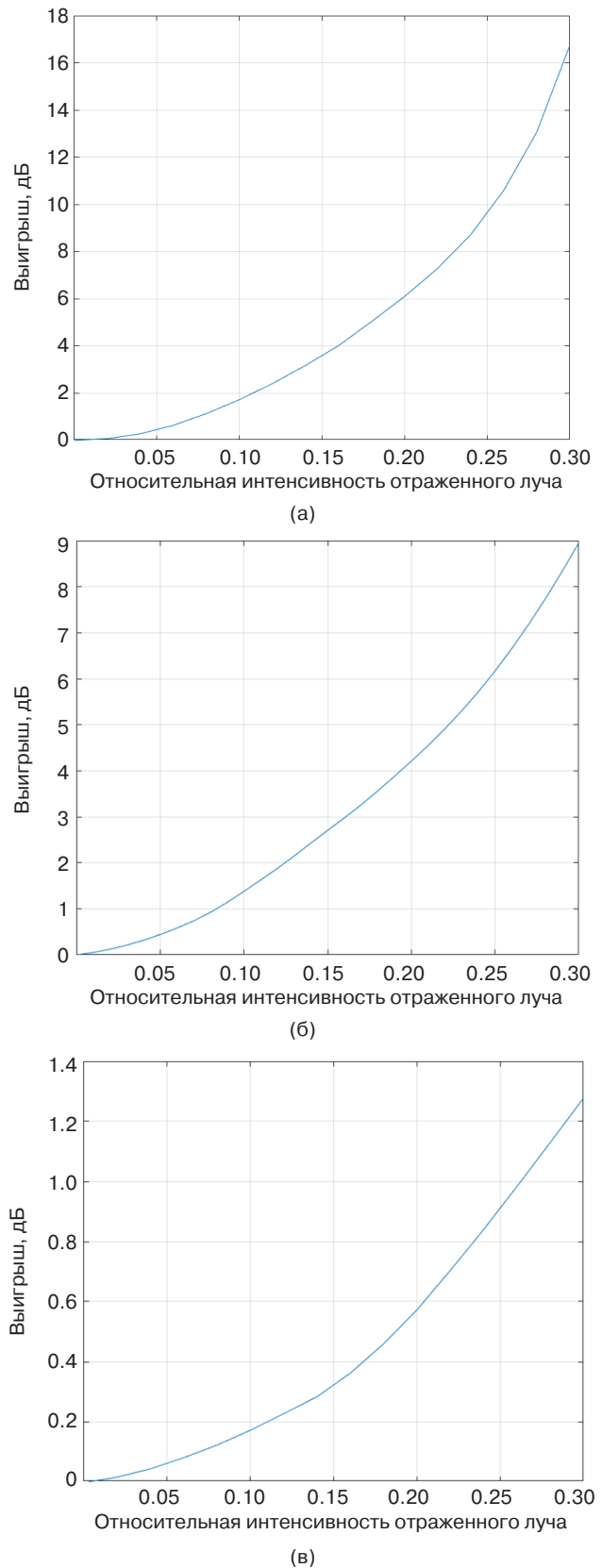


Рис. 4. Результаты расчета энергетического выигрыша для: (а) 16-КАМ, (б) 8-ФМ, (в) 8-ЧМ

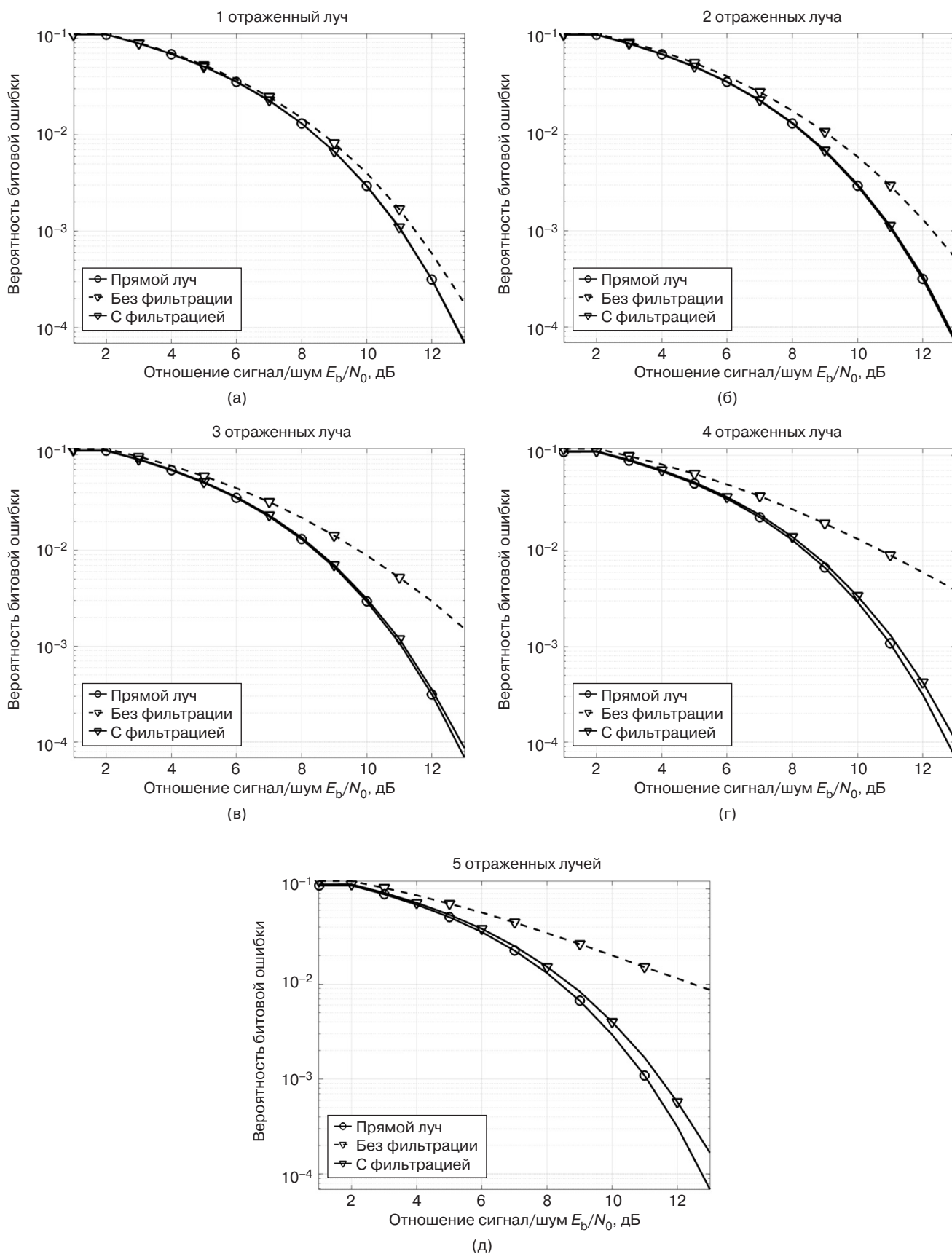


Рис. 5. Зависимости вероятности битовой ошибки от отношения сигнал/шум при различном количестве лучей для 16-QAM

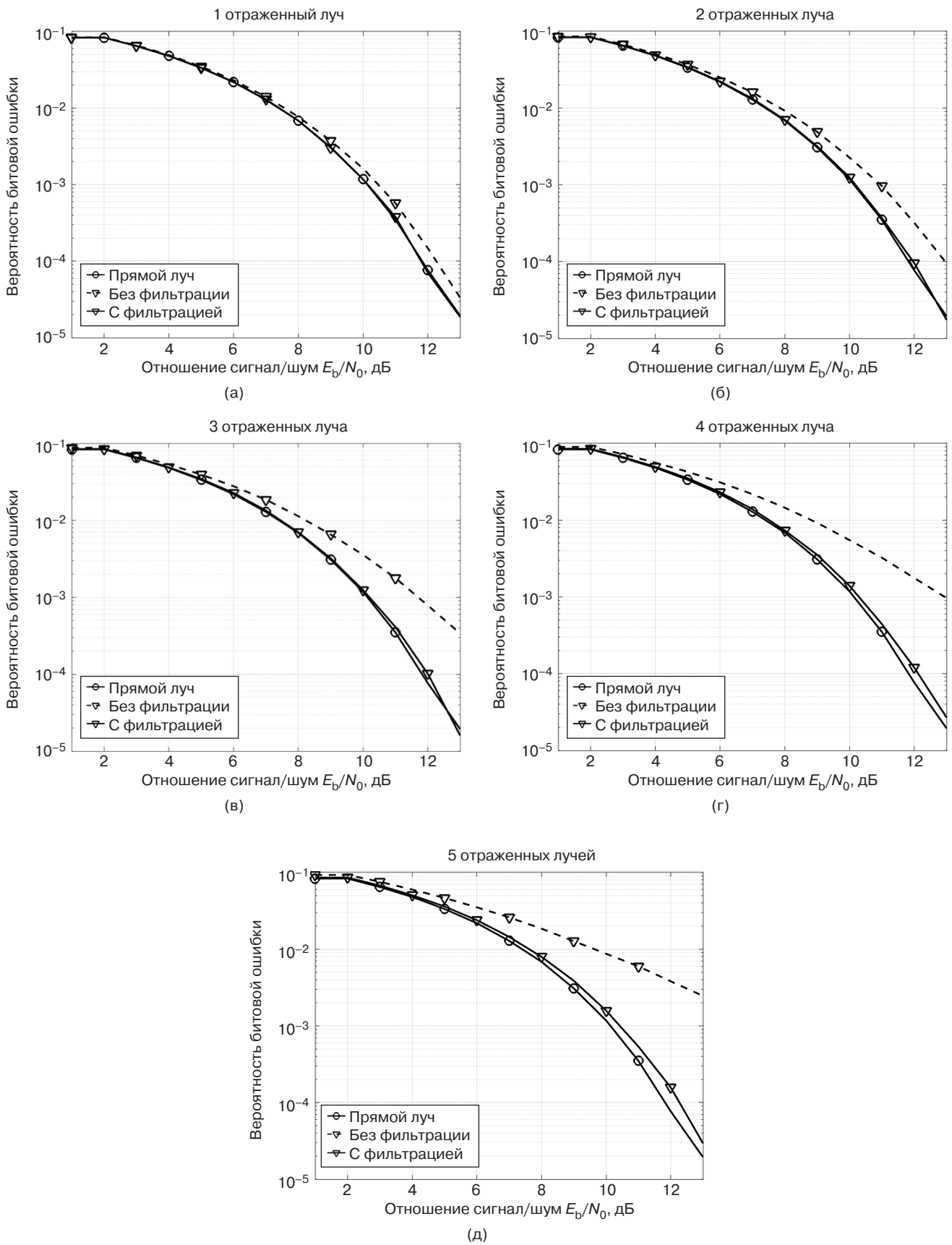


Рис. 6. Зависимости вероятности битовой ошибки от отношения сигнал/шум при различном количестве лучей для 8-ФМ

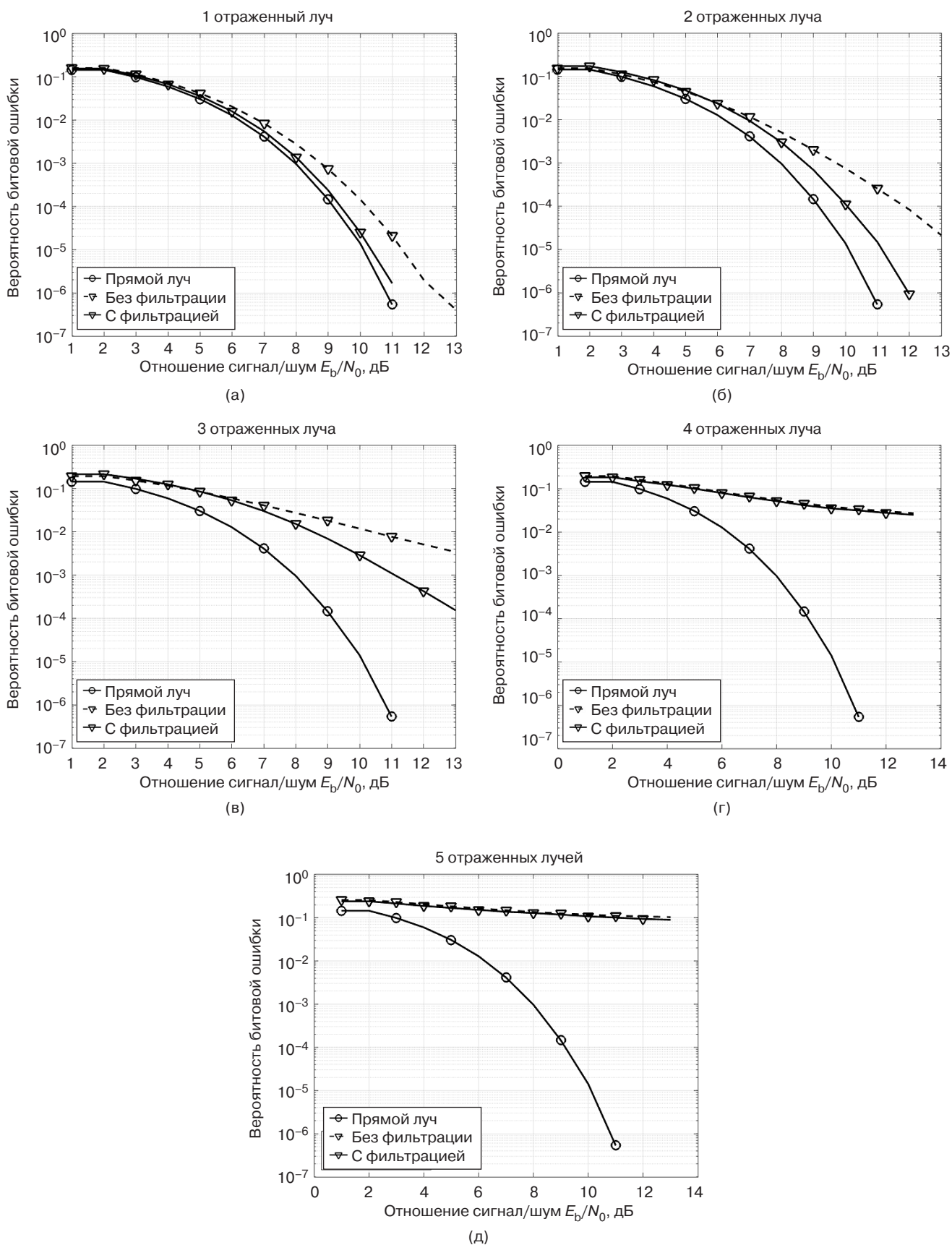


Рис. 7. Зависимости вероятности битовой ошибки от отношения сигнал/шум при различном количестве лучей для 8-ЧМ

Из рис. 5–7 видно, что при любом количестве отраженных лучей фильтр с инверсной ИХ для всех видов сигналов компенсирует влияние многолучевости, уменьшая вероятность битовой ошибки. Например, при отношении сигнал/шум $E_b/N_0 = 10$ дБ для сигналов 16-КАМ и 8-ФМ при 5 отраженных лучах на входе приемника вероятность битовой ошибки снижается в ~ 7 раз. Для сигнала 8-ЧМ, обеспечивающего более высокую помехоустойчивость, при моделировании взяты большие интенсивности отраженных лучей, поэтому выигрыш менее заметен по сравнению с 16-КАМ и 8-ФМ сигналами.

Влияние неточности установки параметров в фильтре с инверсной ИХ

Эффективность работы фильтра с инверсной ИХ зависит от точности установки его параметров, включая коэффициенты усиления и временные задержки в ветвях. В реальных условиях эти параметры могут отклоняться от расчетных значений из-за изменений в среде распространения сигналов, неточностей в оценке характеристик канала или ошибок в алгоритмах адаптации. Поэтому важно оценить, как отклонения параметров фильтра с инверсной ИХ влияют на качество связи и вероятность битовой ошибки.

Для оценки выбран случай канала с одним прямым и одним задержанным лучом с относительной интенсивностью 0.2 и задержкой 21 нс при отношении сигнал/шум 10 дБ.

На рис. 8 приведены графики зависимости вероятности битовой ошибки от отклонения коэффициента усиления в ветви фильтра, нормированного к номинальному значению 0.2, для сигналов 16-КАМ, 8-ФМ и 8-ЧМ.

Из полученных результатов видно, что правильная работа фильтра обеспечивается в достаточно широких пределах отклонения коэффициента усиления в ветви фильтра. Так, даже при отклонении этого коэффициента усиления в 1.5 раза относительно номинального значения, определяемого уровнем отраженного луча, вероятность битовой ошибки увеличивается примерно в 2 раза, а при отклонении коэффициента усиления в 2 раза вероятность битовой ошибки увеличивается на порядок для всех рассматриваемых сигналов.

На рис. 9 приведены графики зависимости вероятности битовой ошибки от отклонения величины задержки в ветви фильтра, нормированной к номинальному значению 21 нс, для сигналов 16-КАМ, 8-ФМ (при интенсивности отраженного луча $\mu = 0.2$) и 8-ЧМ (при интенсивности отраженного луча $\mu = 0.5$).

Характерный вид графиков на рис. 9а, б (16-КАМ и 8-ФМ) объясняется использованием в модели

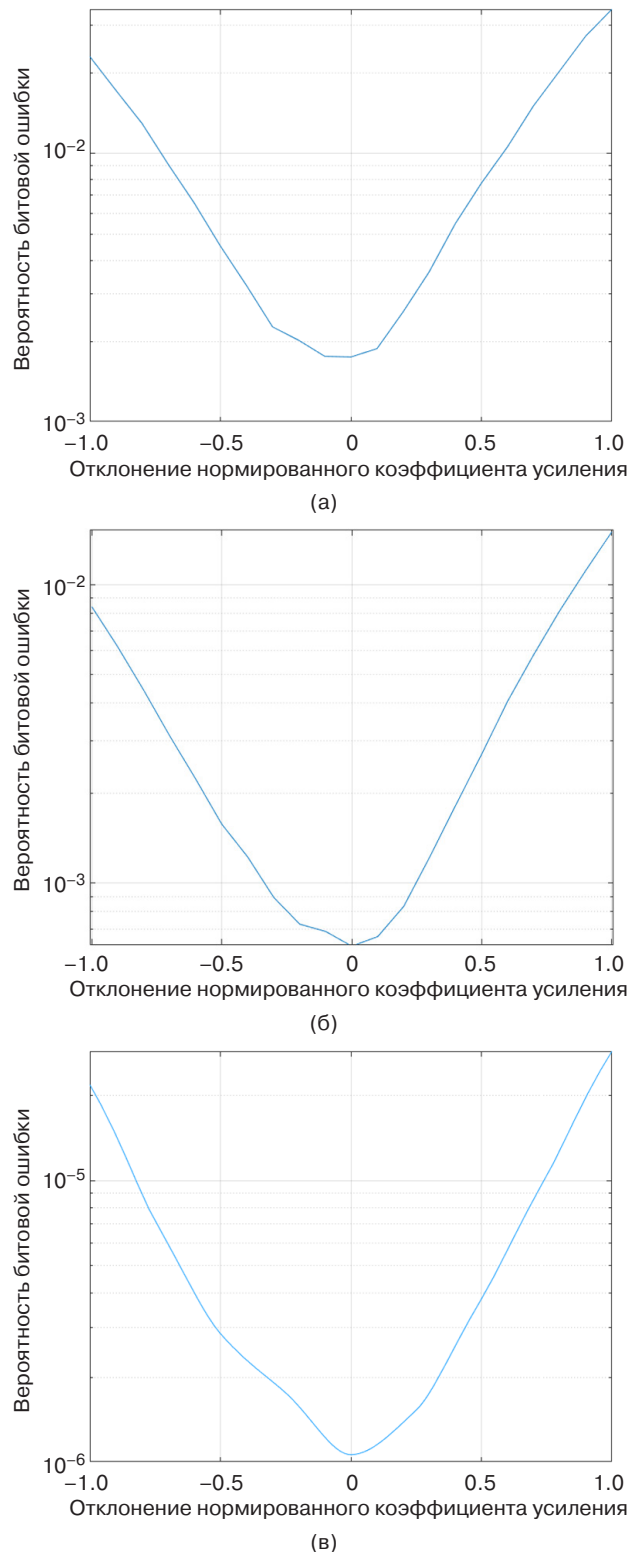


Рис. 8. Зависимости вероятности битовой ошибки от отклонения нормированного коэффициента усиления в ветви фильтра для сигналов: (а) 16-КАМ, (б) 8-ФМ, (в) 8-ЧМ

комплексной огибающей при представлении сигналов, из-за чего по временной оси нормированной задержки наблюдается нижнее «плато», длительность которого определяется длительностью канального

символа, в пределах которого информационная составляющая фазы сигналов постоянна; при выходе за границы этого «плато» вероятность ошибки резко возрастает. Для модели с 8-ЧМ в связи с некоторыми

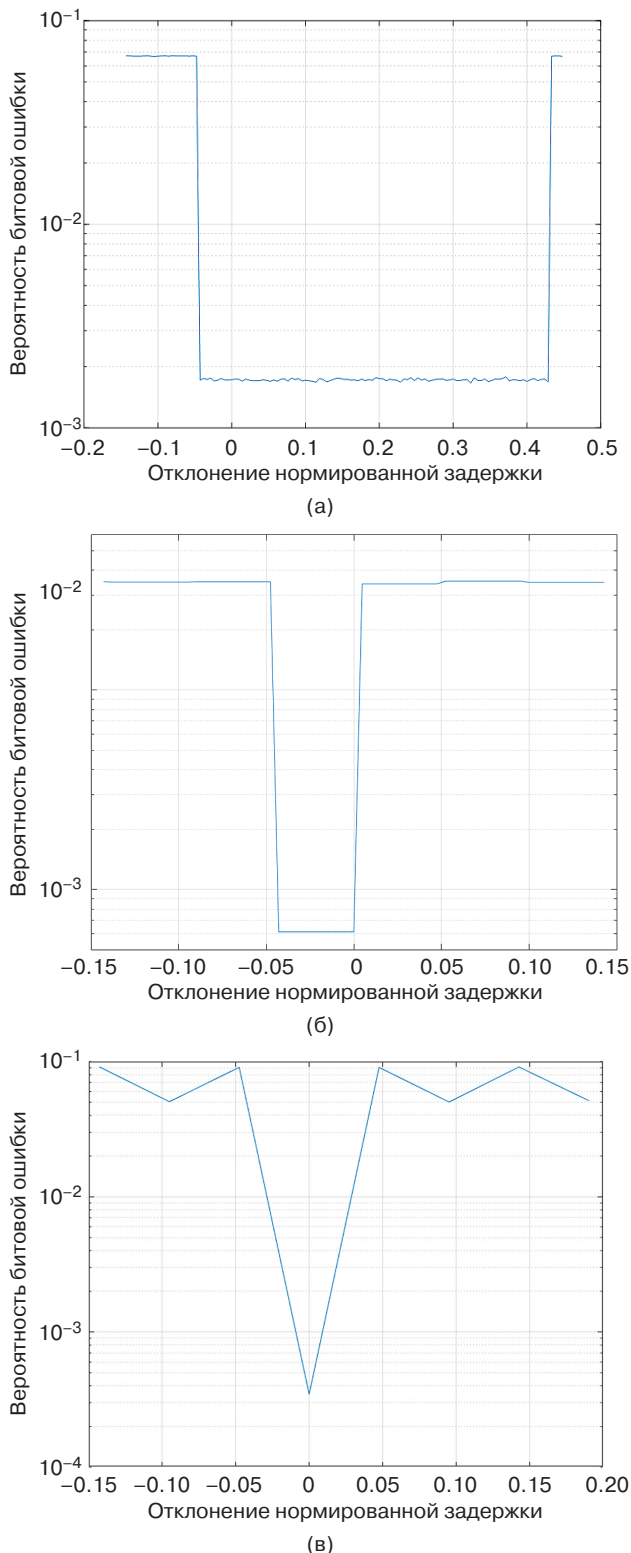


Рис. 9. Зависимости вероятности битовой ошибки от отклонения нормированной задержки в ветви фильтра для сигналов: (а) 16-КАМ, (б) 8-ФМ, (в) 8-ЧМ

программными ограничениями не предоставлялось возможным оценить вероятность битовой ошибки при отклонении задержки относительно номинального значения менее чем на 5%. Тем не менее, полученные результаты позволяют утверждать, что правильная работа фильтра обеспечивается в очень узких пределах отклонения величины задержки в ветви фильтра относительного номинального значения. Можно говорить о требуемой точности 1%.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлены результаты исследования эффективности применения фильтра с ИХ, инверсной ИХ канала связи с дискретной многолучевостью, при приеме сигналов с многопозиционными видами модуляции 16-КАМ, 8-ФМ и 8-ЧМ. На основе математического моделирования в среде *Simulink* изучено влияние параметров канала и параметров фильтра на вероятность битовой ошибки.

Использование такого рода компенсационных фильтров обеспечивает существенный энергетический выигрыш по отношению сигнал/шум, достигающий в зависимости от вида модуляции единиц и десятков децибел, что делает их применение особенно перспективным в высокоскоростных системах связи. Установлено, что фильтр сохраняет работоспособность при отклонениях коэффициента усиления в ветви фильтра до 1.5 раз от номинального значения, но весьма требователен к точности установки временных задержек – допустимое отклонение составляет 1%.

Эффективность фильтра также зависит от количества лучей и их интенсивности. Так, границей применимости сверху можно считать величину μ , немногим более 0.5. При $\mu \rightarrow 0.9$ фильтр оказывается малоэффективным, что объясняется большой величиной откликов на временных позициях с удвоенной временной задержкой (рис. 2).

Таким образом, применение фильтров с ИХ, инверсной ИХ канала связи, зачастую является эффективным методом борьбы с многолучевыми искажениями, обеспечивающим значительное улучшение качества связи и энергетический выигрыш. Полученные данные подтверждают перспективность данного подхода для повышения надежности и пропускной способности современных телекоммуникационных систем.

Направлением дальнейших исследований является разработка адаптивных алгоритмов определения ИХ канала связи и автоматического определения параметров для фильтра с инверсной ИХ.

Вклад авторов

Все авторы в равной степени внесли свой вклад в исследовательскую работу.

Authors' contribution

All authors contributed equally to the research work.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кубанов В.П., Ружников В.А., Сподобаев М.Ю., Сподобаев Ю.М. *Основы теории антенн и распространения радиоволн*. Самара: ОФОРТ; 2016, 258 с.
2. Вендик И.Б., Вендик О.Г., Козлов Д.С., Мунина И.В. *Диагностическое образование в антенных решетках*. М.: Физматлит; 2020, 112 с.
3. Proakis J. *Digital Communications*. N.Y.: McGraw-Hill Publ.; 2001, 1002 p.
4. Назаров С.Н., Шагарова А.А. Методы разнесенного приема в системах подвижной связи и широкополосного доступа. *Автоматизация процессов управления*. 2010;3:88–94. <https://elibrary.ru/muonlj>
5. Криницкий Г.В., Леонова М.Д., Юрасова Е.Н. Методы снижения влияния многолучевости на качество спутниковой навигации для обеспечения точного захода на посадку. *Научный вестник МГТУ ГА*. 2015;222:98–102.
6. Куликов Г.В., Полевода Ю.А., Костин М.С. Использование пространственно-распределенной синфазной антенны для повышения помехоустойчивости приема сигналов. *Russian Technological Journal*. 2023;11(6):39–46. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2023-11-6-39-46>
7. Widrow B., Stearns S.D. *Adaptive Signal Processing*. Prentice-Hall; 1985, 474 p.
8. Фалько А.И. *Адаптивный прием сигналов*: монография. Новосибирск: СибГУТИ; 2015, 328 с.
9. Fuqin Xiong. *Digital Modulation Techniques*. 2nd ed. Boston, London: Artech House, Inc.; 2006, 1039 p.
10. Sklar B., Harris F.J. *Digital Communications: Fundamentals and Applications*. 3rd ed. Pearson Education, Inc.; 2021, 1105 p.
11. Троицкая А.Е., Полевода Ю.А., Куликов Г.В. Помехоустойчивость приема сигналов с многопозиционной частотной манипуляцией на фоне ретранслированной помехи. *Russian Technological Journal*. 2024;12(5):33–41. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-5-33-41>
12. Ермолаев В.Т., Флакман А.Г. *Теоретические основы обработки сигналов в беспроводных системах связи*: монография. Нижний Новгород: Изд-во ННГУ им. Н.И. Лобачевского; 2011, 368 с.
13. Голубев А.Г., Молчанов П.А. Алгоритмы оценивания импульсной характеристики многолучевого канала связи с трансформацией рабочего диапазона частот. *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки*. 2024;1(189):150–156.
14. Нечаев Ю.Б., Малютин А.А. Методы оценки параметров многолучевого канала связи при итеративных алгоритмах приема. *Теория и техника радиосвязи*. 2009;2:13–25. <https://www.elibrary.ru/mwnirh>
15. Нечаев Ю.Б., Малютин А.А., Радько П.Н. Помехоустойчивость итеративных алгоритмов приема в многолучевых каналах с неточно известными параметрами. *Теория и техника радиосвязи*. 2009;4:23–28. <https://www.elibrary.ru/muukjn>
16. Коренной А.В., Межуев А.М., Ревин В.С. Адаптивный алгоритм приема многолучевых сигналов в декаметровом канале связи на основе оценки его импульсной характеристики. *Журнал Сибирского федерального университета. Серия: Техника и технологии*. 2017;10(2):200–210. <https://www.elibrary.ru/yhssll>
17. Аникин А.С. Изменчивость импульсных реакций сухопутных трасс распространения сантиметровых радиоволн в десятисекундных интервалах. *Доклады Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники (Доклады ТУСУР)*. 2017;20(2):10–14. <https://doi.org/10.21293/1818-0442-2017-20-2-10-14>, <https://www.elibrary.ru/zgqmap>
18. Kolmonen V.-M., Kivinen J., Vuokko L., Vainikainen P. 5.3-GHz MIMO Radio channel sounder. *IEEE Trans. Instrum. Meas.* 2006;55(4):1263–1269. <https://doi.org/10.1109/TIM.2006.877724>
19. Molina-Garcia-Pardo J.-M., Rodriguez J.-V., Juan-Llacer L. MIMO Channel Sounder Based on Two Network Analyzers. *IEEE Trans. Instrum. Meas.* 2008;57(9):2052–2058. <https://doi.org/10.1109/TIM.2008.922091>
20. Калачиков А.А., Щелкунов Н.С. Методы зондирования радиоканала ММО. *Вестник СибГУТИ*. 2015;3(31):66–72. <https://www.elibrary.ru/vnvxfb>
21. Farina A. Simultaneous measurement of impulse response and distortion with a swept-sine technique. *Audio Engineering Society. AES Convention Papers Forum*. February 2000. Papers Number 5093, 21 p. URL: https://www.researchgate.net/publication/2456363_Simultaneous_Measurement_of_Impulse_Response_and_Distortion_With_a_Swept-Sine_Technique. Дата обращения 15.02.2025. / Accessed February 15, 2025.
22. Халиуллин Р.Ф., Сулимов А.И. Моделирование оценки импульсной характеристики ММО-радиосистемы с многолучевым эффектом. *Радиотехника*. 2023;87(12):99–109. <https://www.elibrary.ru/pteaii>
23. Халиуллин Р.Ф., Сулимов А.И., Галиев А.А. Применение программно-определяемого радио для определения импульсной характеристики многолучевого радиоканала. В сб.: *Распространение радиоволн: сборник докладов XXVIII Всероссийской открытой научной конференции*, Йошкар-Ола, 16–19 мая 2023 г. Йошкар-Ола: Поволжский государственный технологический университет; 2023. С. 261–264. <https://www.elibrary.ru/qivpqk>
24. Полевода Ю.А., Куликов Г.В., Чистяков Е.А. Компенсация многолучевости в канале связи с КАМ сигналом. В сб.: *Космические технологии – 2024. Сборник научных статей Международной межведомственной научно-технической конференции*. М.: РТУ МИРЭА; 2024. С. 236–241. <https://www.elibrary.ru/yriksc>

REFERENCES

1. Kubanov V.P., Ruzhnikov V.A., Spodobae M.Yu., Spodobae Yu.M. *Osnovy teorii antenn i rasprostraneniya radiovoln (Fundamentals of the Theory of Antennas and Radio Wave Propagation)*. Samara: OFORT; 2016, 258 p. (In Russ.).
2. Vendik I.B., Vendik O.G., Kozlov D.S., Munina I.V. *Diagrammoobrazovanie v antenykh reshetkakh (Diagram Formation in Antenna Arrays)*. Moscow: Fizmatlit; 2020, 112 p. (In Russ.).
3. Proakis J. *Digital Communications*. N.Y.: McGraw-Hill Publ.; 2001, 1002 p.
4. Nazarov S.N., Shagarova A.A. Techniques of diversified reception in systems of mobile communication and broadband access. *Avtomatizatsiya protsessov upravleniya = Automation of Control Processes*. 2010;3:88–94 (in Russ.). <https://elibrary.ru/muonlj>
5. Krinitsky G.V., Leonova M.D., Yurasova E.N. Multipath mitigation techniques in satellite navigation for precise landing. *Nauchnyi vestnik MGTU GA = Civil Aviation High Technologies*. 2015;222:98–102 (in Russ.).
6. Kulikov G.V., Polevoda Yu.A., Kostin M.S. Use of spatially distributed in-phase antenna to increase the noise immunity of signal reception. *Russian Technological Journal*. 2023;11(6):39–46. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2023-11-6-39-46>

7. Widrow B., Stearns S.D. *Adaptive Signal Processing*. Prentice-Hall; 1985, 474 p.
8. Fal'ko A.I. *Adaptivnyi priem signalov (Adaptive Reception of Signals)*: Monograph. Novosibirsk: SibGUTI; 2015, 328 p. (In Russ.).
9. Fuqin Xiong. *Digital Modulation Techniques*. 2nd ed. Boston, London: Artech House, Inc.; 2006, 1039 p.
10. Sklar B., Harris F.J. *Digital Communications: Fundamentals and Applications*. 3rd ed. Pearson Education, Inc.; 2021, 1105 p.
11. Troitskaya A.E., Polevoda Yu.A., Kulikov G.V. Noise immunity of signal reception with multiple frequency-shift keying against retransmitted interference. *Russian Technological Journal*. 2024;12(5):33–41. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-5-33-41>
12. Ermolaev V.T., Flaksman A.G. *Teoreticheskie osnovy obrabotki signalov v besprovodnykh sistemakh svyazi (Theoretical Bases of Signal Processing in Wireless Communication Systems)*: Monograph. Nizhny Novgorod: N.I. Lobachevsky NNGU; 2011, 368 p. (In Russ.).
13. Golubev A.G., Molchanov P.A. Estimation algorithms for impulse response of multibeam communication channel with transformation of the working frequency band. *Nauchno-tekhnichestkiye vedomosti SPbGPU. Fiziko-matematicheskiye nauki = St. Petersburg Polytechnic University Journal. Physics and Mathematics*. 2014;1(189):150–156 (in Russ.).
14. Nechaev Yu.B., Malyutin A.A. Methods for estimating the multipath channel parameters using the iterative reception algorithms. *Teoriya i tekhnika radiosvyazi = Radio Communication Theory and Technology*. 2009;2:13–25 (in Russ.). <https://www.elibrary.ru/mwnirh>
15. Nechaev Yu.B., Malyutin A.A., Radko P.N. Interference immunity of iterative reception algorithms in multipath channels with not precisely defined parameters. *Teoriya i tekhnika radiosvyazi = Radio Communication Theory and Technology*. 2009;4:23–28 (in Russ.). <https://www.elibrary.ru/muukjn>
16. Korenoi A.V., Mezhuiev A.M., Revin V.S. Adaptive algorithm receiving multipath signals in the high frequency communication channel based on the estimation of its impulse response. *Zhurnal Sibirskogo federal'nogo universiteta. Seriya: Tekhnika i tekhnologii = Journal of Siberian Federal University. Engineering & Technologies*. 2017;10(2):200–210 (in Russ.). <https://www.elibrary.ru/yhssll>
17. Anikin A.S. Impulse responses variability of the terrestrial paths of propagation of centimeter radio waves in ten-second intervals. *Doklady Tomskogo gosudarstvennogo universiteta sistem upravleniya i radioelektroniki (Doklady TUSUR) = Proceedings of TUSUR University*. 2017;20(2):10–14 (in Russ.). <https://doi.org/10.21293/1818-0442-2017-20-2-10-14>, <https://www.elibrary.ru/zgqmap>
18. Kolmonen V.-M., Kivinen J., Vuokko L., Vainikainen P. 5.3-GHz MIMO Radio channel sounder. *IEEE Trans. Instrum. Meas.* 2006;55(4):1263–1269. <https://doi.org/10.1109/TIM.2006.877724>
19. Molina-Garcia-Pardo J.-M., Rodriguez J.-V., Juan-Llacer L. MIMO Channel Sounder Based on Two Network Analyzers. *IEEE Trans. Instrum. Meas.* 2008;57(9):2052–2058. <https://doi.org/10.1109/TIM.2008.922091>
20. Kalachikov A.A., Shchelkunov N.S. Methods of MIMO radio channel sounding. *Vestnik SibGUTI = The Herald of Siberian State University of Telecommunication and Information Science*. 2015;3(31):66–72 (in Russ.). <https://www.elibrary.ru/vnvxfb>
21. Farina A. Simultaneous measurement of impulse response and distortion with a swept-sine technique. *Audio Engineering Society. AES Convention Papers Forum*. February 2000. Papers Number 5093, 21 p. Available from URL: https://www.researchgate.net/publication/2456363_Simultaneous_Measurement_of_Impulse_Response_and_Distortion_With_a_Swept-Sine_Technique. Accessed February 15, 2025.
22. Khaliullin R.F., Sulimov A.I. Simulation of the impulse response estimation for a MIMO radio system with multipath effect. *Radiotekhnika = Radioengineering*. 2023;87(12):99–109 (in Russ.). <https://doi.org/10.18127/j00338486-202312-11>, <https://www.elibrary.ru/pteaii>
23. Khaliullin R.F., Sulimov A.I., Galiev A.A. Using software-defined radio for estimation of impulse response of multipath channel. In: *Radio Wave Propagation: Proceedings of the 28th All-Russian Open Scientific Conference*, Yoshkar-Ola, May 16–19, 2023. Yoshkar-Ola: Volga State Technological University; 2023. P. 261–264 (in Russ.). <https://www.elibrary.ru/qivpqk>
24. Kulikov G.V., Polevoda Yu.A., Chistyakov E.A. Methods of adaptive rejection of signal audio interference. In: *Space Technologies – 2024: Proceedings of the International Interdepartmental Scientific and Production Conference*. Moscow: RTU MIREA; 2024. P. 230–235 (in Russ.). <https://www.elibrary.ru/yriksc>

Об авторах

Полехода Юрий Александрович, аспирант, кафедра радиоэлектронных систем и комплексов, Институт радиоэлектроники и информатики, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: polevoda@mirea.ru. <https://orcid.org/0009-0007-6327-9685>

Куликов Геннадий Валентинович, д.т.н., профессор, кафедра радиоэлектронных систем и комплексов, Институт радиоэлектроники и информатики, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: kulikov@mirea.ru. Scopus Author ID 36930533000, SPIN-код РИНЦ 2844-8073, <http://orcid.org/0000-0001-7964-6653>

About the Authors

Yuriy A. Polevoda, Postgraduate Student, Department of Radio Electronic Systems and Complexes, Institute of Radio Electronics and Informatics, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: polevoda@mirea.ru. <https://orcid.org/0009-0007-6327-9685>

Gennady V. Kulikov, Dr. Sci. (Eng.), Professor, Department of Radio Electronic Systems and Complexes, Institute of Radio Electronics and Informatics, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: kulikov@mirea.ru. Scopus Author ID 36930533000, RSCI SPIN-code 2844-8073, <http://orcid.org/0000-0001-7964-6653>

Микро- и нанoeлектроника. Физика конденсированного состояния
Micro- and nanoelectronics. Condensed matter physics

УДК 539.87

<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2026-14-1-43-54>

EDN AYEFUG



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Создание двумерных полупроводников на поверхности сегнетоэлектрических пленок методом механической эксфолиации при помощи золота

Е.И. Жемеров[®], А.А. Гуськов, Е.А. Булавинцева, Д.С. Серегин, С.Д. Лавров

МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, 119454 Россия

[®] Автор для переписки, e-mail: zhemerov@mirea.ru

• Поступила: 02.06.2025 • Доработана: 10.07.2025 • Принята к опубликованию: 07.11.2025

Резюме

Цели. Цель работы заключается в разработке и демонстрации эффективного метода получения протяженных и высококачественных монослоев дисульфида молибдена (MoS_2) на поверхности сегнетоэлектрических пленок цирконата-титаната свинца (ЦТС) с выраженной зернистой и текстурированной структурой. Стандартные методы механической эксфолиации оказываются неэффективными для переноса двумерных материалов на неровные поверхности из-за локальных перепадов высоты и зернистости подложки, что приводит к невозможности формирования протяженных монослоев и высокой плотности дефектов в переносимых структурах. Особую сложность представляет перенос на функциональные подложки с рельефом поверхности, характеризующимся неоднородностью на масштабах от десятков нанометров до микрометров.

Методы. Использован метод золото-ассистированной эксфолиации (gold-assisted exfoliation, GAE), включающий магнетронное напыление золотой пленки толщиной 50 нм, механическое отделение монослоев с помощью терморасщепляемого скотча и последующее травление золота. Характеризация проведена методами рентгеновской дифракции, оптической конфокальной микроскопии, атомно-силовой микроскопии и генерации второй оптической гармоники. Сравнение эффективности переноса выполнено на подложках кремния/оксида кремния (Si/SiO_2) и ЦТС.

Результаты. Получены кристаллиты MoS_2 площадью до 3000 μm^2 на ЦТС и свыше 65000 μm^2 – на стандартных подложках Si/SiO_2 при минимальной плотности дефектов. Показано, что стандартная механическая эксфолиация не обеспечивает перенос на текстурированные поверхности, тогда как GAE сохраняет монослойность переносимых кристаллитов даже на неровных подложках.

Выводы. Впервые продемонстрирована возможность получения протяженных и высококачественных монослоев MoS_2 на подложках с выраженной зернистой и текстурированной структурой, таких как сегнетоэлектрические пленки ЦТС, с помощью метода золото-ассистированной эксфолиации. Показано, что золото-ассистированная эксфолиация представляет собой эффективный метод для создания протяженных двумерных пленок с контролируемыми морфологическими и структурными характеристиками, в т.ч. на подложках, ранее считавшихся непригодными для подобных задач.

Ключевые слова: двумерные материалы, дисульфид молибдена, золото-ассистированная эксфолиация, сегнетоэлектрические пленки, цирконат-титанат свинца, механическая эксфолиация, наноструктуры, FeFET

Для цитирования: Жемеров Е.И., Гуськов А.А., Булавинцева Е.А., Серегин Д.С., Лавров С.Д. Создание двумерных полупроводников на поверхности сегнетоэлектрических пленок методом механической эксфолиации при помощи золота. *Russian Technological Journal*. 2026;14(1):43–54. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2026-14-1-43-54>, <https://www.elibrary.ru/AYEFUG>

Прозрачность финансовой деятельности: Авторы не имеют финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

RESEARCH ARTICLE

Fabrication of two-dimensional semiconductors on the surface of ferroelectric films by means of gold-assisted mechanical exfoliation

Evgeny I. Zhemerov[®], Andrey A. Guskov, Elizaveta A. Bulavintseva,
Dmitry S. Seregin, Sergei D. Lavrov

MIREA – Russian Technological University, Moscow, 119454 Russia

[®] Corresponding author, e-mail: zhemerov@mirea.ru

• Submitted: 02.06.2025 • Revised: 10.07.2025 • Accepted: 07.11.2025

Abstract

Objectives. The aim of this study is to develop and demonstrate an effective method for obtaining large-area, high-quality monolayers of molybdenum disulfide (MoS_2) on the surface of ferroelectric lead zirconate titanate (PZT) films which exhibit pronounced granularity and texturing. Conventional mechanical exfoliation techniques are inefficient for transferring two-dimensional materials onto nonplanar surfaces. This is due to local height variations and substrate granularity which hinder the formation of continuous monolayers and high-defect-density transferred structures. A particular challenge is the transfer onto functional substrates with surface topography characterized by heterogeneities ranging from tens of nanometers to micrometers.

Methods. A gold-assisted exfoliation (GAE) method was employed, including: magnetron sputtering of a 50 nm gold film; mechanical delamination of monolayers using thermally cleavable tape; and subsequent gold etching. The characterization was performed using X-ray diffraction, optical confocal microscopy, atomic force microscopy, and second harmonic generation techniques. The efficiency of the transfer process was compared for Si/SiO_2 and PZT substrates.

Results. MoS_2 crystallites with areas up to $3000 \mu\text{m}^2$ were obtained on PZT and over $65000 \mu\text{m}^2$ on standard Si/SiO_2 substrates, both of which exhibit minimal defect densities. Conventional mechanical exfoliation is shown to be unable to ensure transfer onto textured surfaces, whereas the GAE method preserves the monolayer character of the transferred crystallites even on nonplanar substrates.

Conclusions. This work demonstrates for the first time the possibility of obtaining large-area, high-quality MoS_2 monolayers on substrates with pronounced grainy and textured structures, such as ferroelectric PZT films, using the gold-assisted exfoliation method. The work also shows that gold-assisted exfoliation is an effective technique for fabricating extended two-dimensional films with controlled morphological and structural properties, including on substrates previously considered unsuitable for such applications.

Keywords: two-dimensional materials, molybdenum disulfide, gold-assisted exfoliation, ferroelectric thin films, lead zirconate titanate, mechanical exfoliation, nanostructures, FeFET

For citation: Zhemerov E.I., Guskov A.A., Bulavintseva E.A., Seregin D.S., Lavrov S.D. Fabrication of two-dimensional semiconductors on the surface of ferroelectric films by means of gold-assisted mechanical exfoliation. *Russian Technological Journal*. 2026;14(1):43–54. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2026-14-1-43-54>, <https://www.elibrary.ru/AYEFUG>

Financial disclosure: The authors have no financial or proprietary interest in any material or method mentioned.

The authors declare no conflicts of interest.

ВВЕДЕНИЕ

За последние два десятилетия двумерные (2D) материалы, такие как графен, дисульфид молибдена и гексагональный нитрид бора, стали объектом интенсивных исследований благодаря своим уникальным физическим, оптическим и электронным свойствам, которые принципиально отличаются от характеристик объемных аналогов [1, 2]. Эти особенности обусловлены квантовым размерным эффектом, высокой анизотропией, увеличенной удельной поверхностью и изменением электронной структуры при переходе к атомарно тонким слоям. В частности, двумерные материалы демонстрируют необычные квантовые явления, такие как квантовый эффект Холла, сильная флуоресценция в монослоях MoS_2 и сверхвысокая подвижность носителей заряда, что открывает новые горизонты для фундаментальных исследований в области физики конденсированного состояния и материаловедения [3].

Благодаря этим свойствам двумерные материалы рассматриваются в качестве платформы для создания новых поколений электронных, оптоэлектронных, энергетических и сенсорных устройств. Однако практическая реализация этих перспектив тесно связана с возможностью получения высококачественных, бездефектных и протяженных по площади монослоев, а также с их интеграцией в современные микро- и нанoeлектронные технологии. До недавнего времени синтез таких слоев и их перенос на функциональные подложки оставались серьезной технологической проблемой, что существенно сдерживало как углубленные исследования фундаментальных закономерностей, так и разработку прикладных решений.

Существует несколько методов получения двумерных материалов, каждый из которых имеет свои преимущества и ограничения. Наиболее распространенные подходы включают механическую эксфолиацию, жидкостную эксфолиацию и химическое осаждение из газовой фазы (chemical vapor deposition, CVD). Механическая эксфолиация, впервые примененная для синтеза графена, остается эталонным методом для получения высококачественных образцов с низкой плотностью дефектов [4], но ее масштабируемость

ограничена малыми латеральными размерами. Жидкостная эксфолиация позволяет производить материалы массово, но приводит к фрагментации кристаллов и загрязнению. Химическое осаждение из газовой фазы обеспечивает синтез пленок большой площади, однако плотность дефектов в таких материалах часто превышает 10^{12} – 10^{13} см^{-2} [5].

Одним из возможных путей решения проблемы создания слоев с нужными характеристиками является относительно недавно разработанный метод эксфолиации с использованием золота (gold assisted exfoliation, GAE). Он сочетает преимущества механической эксфолиации и масштабируемости, позволяя получать монокристаллы размером до сантиметра [6–8], при этом плотность дефектов в получаемых слоях минимальна и может достигать $\sim 3 \cdot 10^{11}$ см^{-2} [9]. Это делает GAE предпочтительным методом для задач, где критичны высокое структурное совершенство и чистота поверхности.

Несмотря на значительный прогресс в области получения двумерных материалов, интеграция высококачественных 2D-кристаллов в реальные устройства по-прежнему сопряжена с серьезными технологическими вызовами. Одной из ключевых задач современной электроники является создание функциональных структур, в которых двумерные слои должны быть перенесены на подложки с выраженной поверхностной топографией, например, сегнетоэлектрические пленки ЦТС (цирконат-титанат свинца), используемые в архитектуре сегнетоэлектрических полевых транзисторов (ferroelectric field-effect transistor, FeFET) и других мемристорных устройствах. Однако стандартные методы механической эксфолиации оказываются неэффективными для переноса 2D-материалов на такие неровные или текстурированные поверхности: из-за локальных перепадов высоты и зернистости подложки площадь контакта между двумерным кристаллом и подложкой резко уменьшается, что приводит к невозможности формирования протяженных и непрерывных монослоев. В результате, попытки использования классических подходов приводят либо к полному отсутствию переноса, либо к образованию сильно фрагментированных и дефектных областей, непригодных для практического применения.

Для преодоления этих ограничений требуется разработка новых методов, способных обеспечить селективный и деликатный перенос двумерных материалов даже на сложные подложки с выраженной микронеровностью. Одним из наиболее перспективных решений является метод GAE, упомянутый выше. Однако применение этого метода для переноса на текстурированные сегнетоэлектрические пленки до настоящего времени практически не исследовано. Учитывая, что именно такие структуры необходимы для реализации современных FeFET- и мемристорных устройств, задача демонстрации возможности эффективного переноса 2D-материалов на ЦТС и аналогичные поверхности приобретает фундаментальное и прикладное значение.

Основная цель настоящей работы – экспериментально показать, что метод золото-ассистированной эксфолиации обеспечивает формирование протяженных и высококачественных монослоев 2D-материалов не только на стандартных плоских подложках, но и на функциональных сегнетоэлектрических пленках с выраженной топографией. В рамках исследования проводится сравнение эффективности переноса на SiO_2 и на ЦТС, а также анализируются морфология, структурное совершенство и площадь полученных кристаллитов. Особое внимание уделяется сравнению с результатами, полученными при использовании классической механической эксфолиации, которая, как показано в работе, не обеспечивает перенос 2D-материалов на неровные подложки. Таким образом, результаты работы не только расширяют фундаментальное понимание механизмов взаимодействия двумерных кристаллов с текстурированными поверхностями, но и открывают новые возможности для интеграции 2D-материалов в перспективные устройства электроники и спинтроники.

1. МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

1.1. Методика создания двумерных пленок

В качестве двумерного полупроводникового материала для создания монослоев был выбран дисульфид молибдена (MoS_2), что обусловлено двумя ключевыми факторами: его широким применением в современных исследованиях и сильным химическим взаимодействием с золотом [10]. Атомы золота, обладающие вакантными d -орбиталями, эффективно взаимодействуют с неподеленными электронными парами атомов серы, образуя прочные ковалентные связи. Данное взаимодействие обеспечивает высокую селективность метода GAE по отношению к серосодержащим соединениям, что делает MoS_2 оптимальным материалом для отработки данной методики.

Для верификации разработанного метода эксперименты проводились в два этапа. На первом этапе в качестве подложки для формирования референсных квазидвумерных кристаллитов использовалась стандартная структура кремния / оксида кремния (Si/SiO_2), традиционно применяемая при механической эксфолиации [11, 12]. На втором этапе технология золото-ассистированной эксфолиации была адаптирована для нанесения на текстурированную сегнетоэлектрическую пленку ЦТС, что позволило оценить применимость метода для создания двумерных структур на функциональных материалах с неоднородной поверхностью.

Пленки ЦТС ($\text{Pb}(\text{Zr}_{0.48}\text{Ti}_{0.52})\text{O}_3$) формировались из пленкообразующего раствора, приготовленного золь-гель методом с использованием комплекса моносольвата изопропилата циркония ($\text{Zr}[\text{OCH}(\text{CH}_3)_2]_4 \cdot (\text{CH}_3)_2\text{CHOH}$, Sigma-Aldrich, США), тетраизопророксида титана ($\text{Ti}[\text{O}(\text{CH}_3)_2\text{CH}]_4$, Sigma-Aldrich) и ацетата свинца ($\text{Pb}(\text{CH}_3\text{COO})_2$), синтезированного из оксида свинца (PbO , Sigma-Aldrich) согласно разработанной ранее методике [13]. Нанесение раствора ЦТС выполнялось послойно (6 слоев, ~ 220 нм) методом центрифугирования на платинированные кремниевые подложки со структурой: Pt (~ 150 нм)– TiO_2 (~ 10 нм)– SiO_2 (~ 300 нм)–Si (~ 800 мкм). После центрифугирования (2500 об/мин) каждый слой сушили 5 мин инфракрасной лампой в импульсном режиме при температуре $\sim 200^\circ\text{C}$ и отжигали 15 мин при температуре 400°C в муфельной печи СНОЛ 1,6,2,5.1/10-ИЗМ (Термикс, Россия). После термообработки шестого слоя образец кристаллизовали 10 мин с помощью установки быстрого отжига AS-One 150 (Annealsys, Франция) при температуре 650°C (скорость нагрева $\sim 15^\circ\text{C}/\text{c}$).

Процесс создания монокристаллических образцов включает пять ключевых этапов, которые подробно представлены на рис. 1. На первом этапе объемный кристалл дисульфида молибдена подвергается послойному разделению с помощью клейкой ленты (например, силиконового скотча). Этот этап позволяет получить многослойные фрагменты толщиной от нескольких нанометров до микронных масштабов. На втором этапе на предварительно подготовленные многослойные кристаллиты MoS_2 с помощью магнетронной установки на базе ВУП¹-5 (Россия) наносится золотая пленка толщиной 50 нм. Процесс проводится в вакуумной камере при мощности 100 Вт и давлении аргона $5 \cdot 10^{-3}$ Торр. Третий этап состоит в том, что терморасщепляемый скотч (thermal release tape, TRT) плотно прижимается к золотой поверхности. После фиксации скотч аккуратно отделяется от исходной подложки,

¹ Вакуумный универсальный пост.

захватывая верхний слой MoS_2 вместе с золотой пленкой. Сила сцепления Au-MoS_2 превышает межслойные ван-дер-ваальсовы связи в MoS_2 , обеспечивая селективное отделение монослоя. На четвертом этапе полученная структура TRT– Au-MoS_2 переносится на подложку Si/SiO_2 таким образом, чтобы слой MoS_2 оказался в контакте с подложкой, после чего она нагревается на горячей плите при температуре $130\text{--}150^\circ\text{C}$ в течение 1–2 мин. Это ослабляет адгезию TRT-скотча, позволяя его бесследно удалить. На заключительном этапе золотая пленка удаляется путем погружения в травильный раствор ($4\text{ г KI} + 1\text{ г I}_2$ в $40\text{ мл H}_2\text{O}$) на 3–5 мин при комнатной температуре. MoS_2 демонстрирует химическую инертность к этому реагенту благодаря ковалентной S–Mo–S-структуре. После завершения травления поверхность подвергается 10-минутной очистке с использованием ацетона для удаления остатков травильного раствора, после чего осуществляется промывка изопропиловым спиртом. Такая процедура обеспечивает полное устранение загрязнений и остатков реактивов, что способствует формированию чистых и высококачественных монослоев двумерных полупроводников с большими латеральными размерами.

1.2. Методики исследования

Для анализа кристаллической структуры использовался метод рентгеновской дифракции, который позволяет определить межплоскостные расстояния и симметрию структуры. Это необходимо для проверки фазовой чистоты объемного дисульфида молибдена и оценки качества пленок ЦТС, которые служили основой для создания двумерных пленок.

Такой подход позволяет подтвердить соответствие материалов заданным характеристикам и их пригодность для дальнейших исследований.

Дифрактограммы были получены с использованием дифрактометра ДРОН-8Т (Буревестник, Россия) при напряжении 40 кВ и токе 20 мА . Ввиду ограничений метода исследованию подвергались только объемные образцы MoS_2 и поликристаллические пленки ЦТС, поскольку малая толщина двумерных пленок существенно затрудняет выделение дифракционного сигнала на фоне подложки.

После проведения эксфолиации методом GAE для поиска монослойных кристаллитов MoS_2 на поверхности подложки применялась стандартная методика оптической конфокальной микроскопии. Этот подход оптимален для быстрого предварительного анализа: он позволяет определить толщину, размеры и наличие дефектов в кристаллитах [8]. Для этого был использован оптический микроскоп Alpha 300s+ (WITec, Германия) с высокоапертурными объективами и цветными фильтрами, которые обеспечивают повышение контрастности изображения монослойных кристаллитов, что критически важно при работе с атомарно тонкими материалами. Такой метод позволяет эффективно выделять перспективные области для последующего детального изучения другими аналитическими методами.

Для точной оценки топографии двумерных материалов использовалась атомно-силовая микроскопия (АСМ), которая дополняет данные оптических исследований. Атомно-силовая микроскопия обеспечивает получение трехмерного изображения поверхности с разрешением до нанометров, что позволяет выявлять дефекты, такие как трещины, дислокации и шероховатость. Это особенно важно для контроля

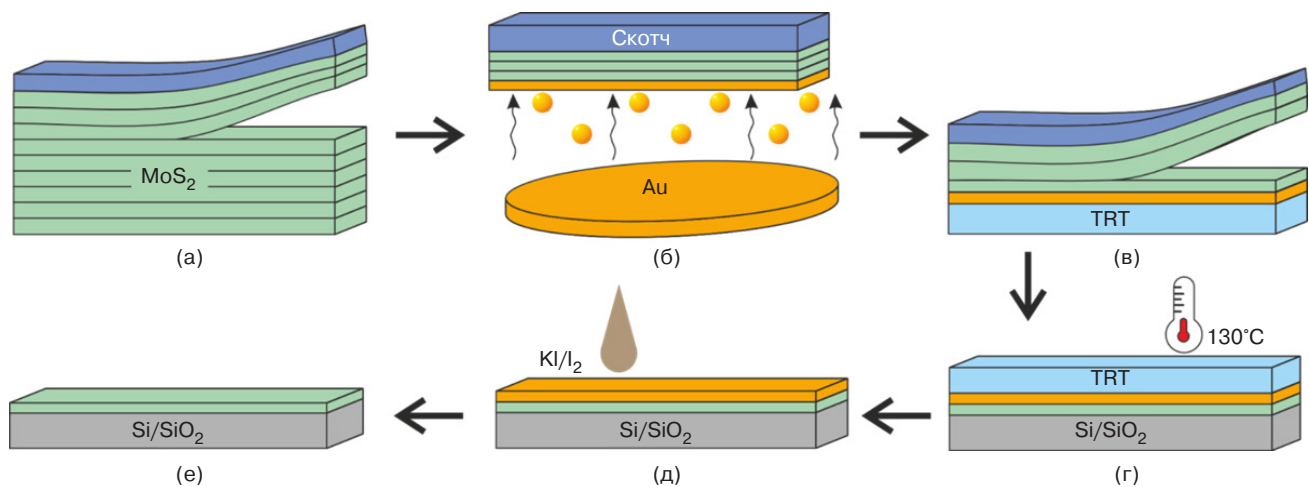


Рис. 1. Процесс создания монослойных пленок MoS_2 : (а) механическая эксфолиация MoS_2 , (б) магнетронное напыление золота на MoS_2 , (в) нанесение TRT-скотча на золото и последующее отслоение MoS_2 , (г) удаление TRT-скотча нагревом, (д) травление золота раствором KI/I_2 , (е) готовый монослой на подложке Si/SiO_2

качества полученных двумерных пленок и оценки влияния подложки на их морфологию [14]. Все измерения были проведены с помощью установки сканирующей зондовой микроскопии Ntegra Prima (НТ-МДТ, Россия) в контактном режиме. Использовались жесткие зонды серии Etalon с коэффициентом жесткости 12 Н/м, что обеспечило оптимальный баланс между разрешающей способностью и сохранностью исследуемых образцов.

Стандартная методика люминесцентной микроскопии-спектроскопии не применялась в данном исследовании из-за полного тушения сигнала, вызванного остаточными наноструктурами золота после применения методики GAE. Даже совсем незначительное количество золота (Au), сохраняющееся на поверхности подложки или вблизи двумерных кристаллитов, действует как эффективные центры безызлучательной рекомбинации. Это связано с двумя основными механизмами тушения люминесценции. Первый механизм – эффект зарядового тушения – перенос электронов из MoS_2 в Au приводит к *p*-допированию материала и подавлению экситонной люминесценции. Второй механизм – резонансный перенос энергии – при расстояниях менее 10 нм между Au и MoS_2 происходит безызлучательный перенос энергии от экситонов к плазмонным модам золота [15, 16]. Кроме того, данная методика не применима к образцам толще одного монослоя [17].

Именно поэтому для изучения структурной симметрии, кристаллографической ориентации и дефектов в двумерных материалах дополнительно применялся метод генерации второй оптической гармоники (ГВГ). Этот нелинейно-оптический метод основан на преобразовании двух фотонов возбуждающего излучения в один фотон с удвоенной частотой в нецентросимметричных средах. Метод генерации второй оптической гармоники особенно эффективен для исследования тонких слоев MoS_2 , поскольку интенсивность сигнала существенно зависит от количества слоев и их политапа. В областях с нарушенной кристаллической симметрией, включая края, дефекты и переходы между доменами, наблюдается значительное усиление нелинейного отклика, что обеспечивает высокую чувствительность метода к структурным особенностям двумерных кристаллитов.

В используемой экспериментальной установке источником излучения служил фемтосекундный титан-сапфировый лазер TiF-DR 60 (Авеста, Россия) с длительностью импульсов 20–60 фс и частотой следования 80 МГц. Фемтосекундные импульсы обеспечивали высокую пиковую мощность при низкой средней, что позволяло получать интенсивный нелинейный отклик без термического повреждения образца. Для прецизионного позиционирования и сканирования образца также был использован модифицированный конфокальный микроскоп WITec Alpha 300S+.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ

Для характеристики кристаллической структуры и фазового состава исходных материалов проведены рентгенодифракционные исследования в режиме 2θ -сканирования, результаты которых представлены на рис. 2. Дифрактограмма объемного кристалла MoS_2 демонстрирует четко выраженные рефлексы (004), (006) и (008), что свидетельствует о высокой степени кристалличности и преимущественной ориентации кристаллитов вдоль оси, перпендикулярной плоскости слоев. Такой характер дифракционной картины указывает на гексагональную структуру 2H или 3R политапа MoS_2 , что полностью соответствует литературным данным [18, 19]. Анализ дифрактограммы пленки ЦТС выявил присутствие характеристических пиков (100), (111), (002), (200) и (301), подтверждающих формирование перовскитной фазы с преимущественной ориентацией в плоскости (111) [20]. Формирование перовскитоподобной структуры ABO_3 в ЦТС обеспечивает возникновение сегнетоэлектрических свойств за счет смещения катионов $\text{Ti}^{4+}/\text{Zr}^{4+}$ и Pb^{2+} из центросимметричных позиций в кислородных октаэдрах, что нарушает инверсионную симметрию кристалла и создает спонтанную поляризацию [21]. Возможность переориентации этой поляризации внешним электрическим полем определяет сегнетоэлектрическое поведение материала, что подтверждается характерными петлями гистерезиса на зависимостях поляризация-электрическое поле [22]. Наблюдаемые малоинтенсивные рефлексы, соответствующие фазам Pt и Si, связаны с многослойной структурой используемой подложки и не влияют на функциональные свойства сегнетоэлектрической пленки. Количественный анализ полуширины дифракционных линий указывает на отсутствие значимых микронапряжений и структурных дефектов в исследуемых материалах, что подтверждает их высокое кристаллическое совершенство и структурную однородность. Данные результаты свидетельствуют о пригодности выбранных материалов для дальнейшего применения в качестве исходного сырья и функциональной подложки при создании гетероструктур методом золото-ассистированной эксфолиации.

Для анализа влияния параметров поверхности используемых подложек на эффективность применения методики GAE поверхности обеих подложек – Si/SiO₂ и ЦТС были проанализированы с помощью методики АСМ. Полученные трехмерные карты поверхностей подложек представлены на рис. 3. Как явно прослеживается из полученных результатов, ЦТС обладает значительно большими неоднородностями на поверхности из-за особенностей роста зерен в процессе кристаллизации. Для пленок ЦТС,

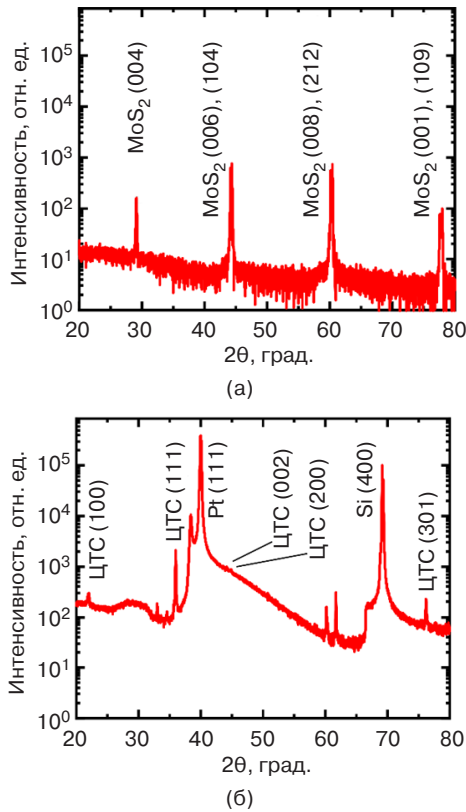


Рис. 2. Дифрактограммы объемных кристаллов MoS₂ (а) и подложки ЦТС (б)

полученных методом золь-гель, характерно формирование поликристаллической структуры с выраженными границами зерен, что приводит к образованию текстурированной поверхности. При дальнейшем анализе полученных результатов было установлено, что ЦТС обладает шероховатостью порядка $1.090 \cdot 10^{-9}$ м, тогда как у подложки Si/SiO₂ этот параметр равен $5.073 \cdot 10^{-10}$ м.

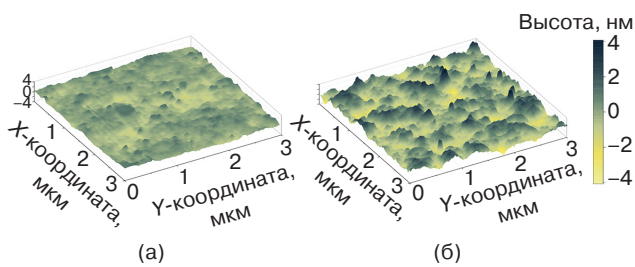


Рис. 3. Трехмерные карты топографии поверхности подложек, полученные методом АСМ: (а) Si/SiO₂ и (б) поликристаллическая пленка ЦТС

Таким образом, перепады высоты на поверхности подложки ЦТС сопоставимы или даже превышают толщину наносимых на нее двумерных пленок MoS₂ (~0.7 нм для монослоя), что приводит к существенному уменьшению площади контакта между подложкой и пленкой. Неоднородный контакт материалов негативным образом влияет на силы

Ван-дер-Ваальса, отвечающие за адгезию MoS₂ к поверхности, что в свою очередь ухудшает качество осаждения двумерных кристаллитов и приводит к образованию дефектов на границах контакта между двумерным материалом и подложкой. Все это снижает эффективность переноса заряда и ухудшает электронные характеристики устройств.

После создания образцов далее методом конфокальной оптической микроскопии на поверхностях подложек Si/SiO₂ и ЦТС было идентифицировано несколько сотен двумерных кристаллитов MoS₂. Для детального анализа были отобраны характерные образцы с типичными морфологическими характеристиками: площадь ~200 мкм², отсутствие видимых дефектов и равномерное распределение по поверхности. На рис. 4а и 4г представлены кристаллиты для каждой подложки, выбранные как эталоны для сравнительного исследования.

Для определения толщины и латеральных размеров кристаллитов методом АСМ были получены топографические карты (рис. 4б и 4д). Толщина пленки на подложке Si/SiO₂ составила 5 нм, что соответствует ~8 монослоям MoS₂ при межслойном расстоянии 0.65 нм, тогда как на ЦТС зафиксирована толщина 8 нм (~12 слоев). Площадь кристаллитов составляла примерно 200 мкм² для обоих кристаллитов.

Средняя шероховатость поверхности пленок MoS₂ составила 2.53 нм для обеих подложек, что значительно превышает значения для исходных подложек (0.51 нм для Si/SiO₂ и 1.09 нм для ЦТС). Такой рост шероховатости обусловлен появлением выраженных морфологических неровностей, прежде всего складок, которые отчетливо видны на топографических картах и выделены красным цветом на рис. 4в и 4е. Формирование складок связано с особенностями механического переноса и спецификой применения методики GAE. Кроме того, на поверхности кристаллитов наблюдаются сторонние дефекты, вызванные остаточными материалами после травления золота; эти дефекты проявляются как локальные включения и могут быть обнаружены как на подложке, так и по всей площади монослоя. Важно отметить, что зернистая структура подложки ЦТС частично просматривается сквозь поверхность MoS₂, что указывает на неоднородный контакт между пленкой и подложкой и наличие областей, где MoS₂ оказывается «подвешенным» над поверхностью.

На рис. 5а представлено изображение, полученное с помощью сканирующей электронной микроскопии (СЭМ), кристаллита MoS₂ на подложке Si/SiO₂, где четко видны характерные складки пленки (отмечены стрелками), образовавшиеся в процессе механического переноса. Анализ топографии выявил, что высота складок достигает 30 нм при средней длине 5 мкм, что согласуется с данными АСМ-исследований (рис. 4б, 4д).

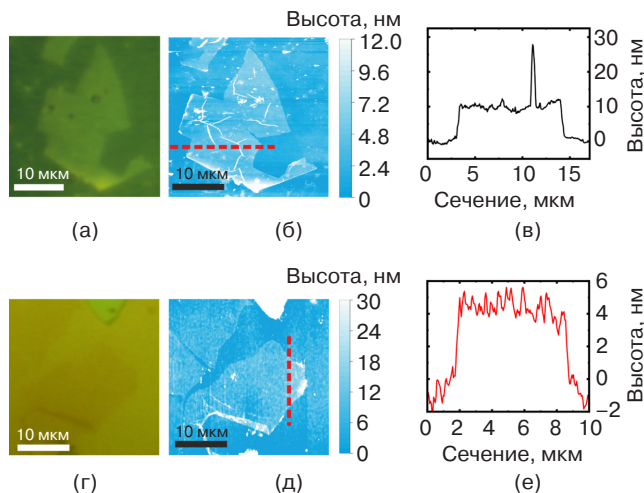


Рис. 4. Результаты эксфолиации с использованием золота:

(а) оптическое изображение области с кристаллитами MoS_2 на подложке Si/SiO_2 ; (б) АСМ-топография кристаллита MoS_2 на подложке Si/SiO_2 ; (в) профиль высоты, полученный по сечению (красная пунктирная линия), показанному на (б); (г) оптическое изображение области с кристаллитами MoS_2 на подложке ЦТС; (д) АСМ-топография кристаллита MoS_2 на подложке ЦТС; (е) профиль высоты, полученный по сечению (красная пунктирная линия), показанному на (д)

Для подложки ЦТС аналогичные СЭМ-измерения не проводились из-за возникновения локальной переполаризации сегнетоэлектрической пленки под действием электронного пучка, что существенно искажает распределение второй оптической гармоники [23]. Экспериментально установлено, что даже кратковременное (~ 30 с) воздействие электронов с энергией 5 кВ приводит к необратимому изменению доменной структуры ЦТС, что делает невозможным корректное сопоставление оптических и электронно-микроскопических данных.

Пространственные карты распределения интенсивности ГВГ, полученные методом сканирующей нелинейной микроскопии (рис. 5б, 5г), позволяют надежно идентифицировать морфологические дефекты, включая складки и трещины. В зонах, соответствующих таким дефектам, регистрируется локальное увеличение интенсивности сигнала. Усиление может быть связано с нарушением локальной centrosymmetрии либо с краевыми эффектами, обусловленными усилением нелинейной оптической восприимчивости вблизи границ доменов или у краев кристаллической области [24], а также увеличением толщины пленки.

Шестилучевая азимутальная зависимость интенсивности второй оптической гармоники в тонких MoS_2 (рис. 5в, д) обусловлена кристаллографической симметрией материала. В случае нецентросимметричного 3R-политипа, а также при четном числе слоев,

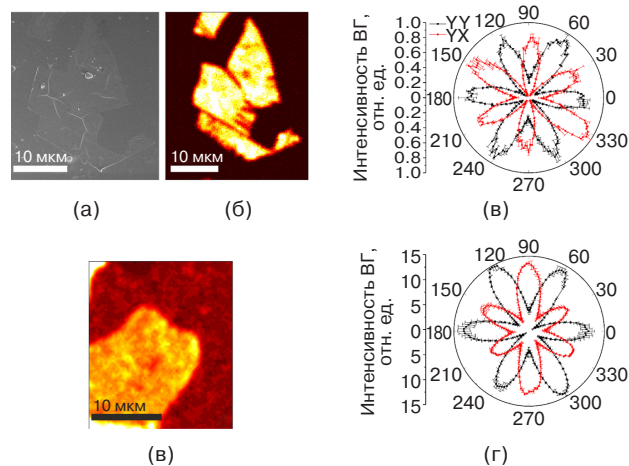


Рис. 5. Изображение кристаллита MoS_2 на подложке Si/SiO_2 , полученное при помощи СЭМ (а); двумерная карта распределения второй гармоники (ВГ) в квазидвумерных кристаллитах MoS_2 на подложках Si/SiO_2 и ЦТС (б), (г); азимутальные зависимости интенсивности ВГ в кристаллитах MoS_2 на подложках Si/SiO_2 и ЦТС (в), (д) в параллельной (YY) и скрещенной (YX) комбинациях поляризации излучения накачки и выделенной компоненты поля ВГ

структура характеризуется точечной группой симметрии C_{3v} . Это приводит к выраженной шестилучевой форме зависимости интенсивности ВГ от азимутального угла вращения образца [25, 26]. В эксперименте наблюдается совпадение фаз максимумов интенсивности по всем точкам флейка, что указывает на монокристаллическую природу пленки и однородную ориентацию кристаллографических осей.

В большинстве исследованных областей пленок MoS_2 наблюдается равномерное распределение интенсивности ГВГ, что свидетельствует о низкой плотности морфологических дефектов и высоком кристаллическом качестве материала. Однородность сигнала подтверждает отсутствие значимых границ зерен, складок и трещин на основной площади флейка, а также указывает на минимальное влияние политипизма – в частности, доминирование нецентросимметричного 3R-политипа, вносящего наибольший вклад в ГВГ-сигнал.

Для объективного сравнения эффективности формирования квазидвумерных пленок на различных подложках проведен статистический анализ морфологических параметров более 300 созданных кристаллитов. Одним из ключевых критериев в данном случае служит распределение площадей отдельных кристаллитов, поскольку этот параметр определяет пригодность материала для дальнейших применений и непосредственно зависит как от выбранного метода эксфолиации, так и от свойств подложки.

Гистограммы распределения площади квази-двумерных кристаллитов MoS_2 , полученных методом GAE, представлены на рис. 6 и демонстрируют существенное различие между подложками Si/SiO_2 (рис. 6а) и ЦТС (рис. 6б). При этом важно, что в статистическую выборку включены кристаллиты с площадью более 0.2 мкм^2 и толщиной менее или равной 7 нм (~ 10 монослоев), что соответствует переходной области между квантоворазмерными и объемными свойствами. Нижний порог площади выбран исходя из технологических требований: меньшие кристаллиты непригодны для создания функциональных устройств из-за ограничений литографии и формирования электродных структур.

Для подложки Si/SiO_2 более 25% визуализированных кристаллитов имеют площадь свыше 65000 мкм^2 , что на четыре порядка превышает типичные результаты обычной эксфолиации ($< 0.5 \text{ мкм}^2$) [27]. На подложке ЦТС распределение смещено в область меньших значений: площадь наибольших 25% кристаллитов составляет лишь 3000 мкм^2 , что связано с повышенной шероховатостью поверхности ($R_a = 1.09 \text{ нм}$) и, вследствие этого, неоднородным контактом между пленкой и подложкой. Принципиально важно, что на ЦТС при использовании стандартной механической эксфолиации не удалось зафиксировать ни одного кристаллита площадью более 1 мкм^2 .

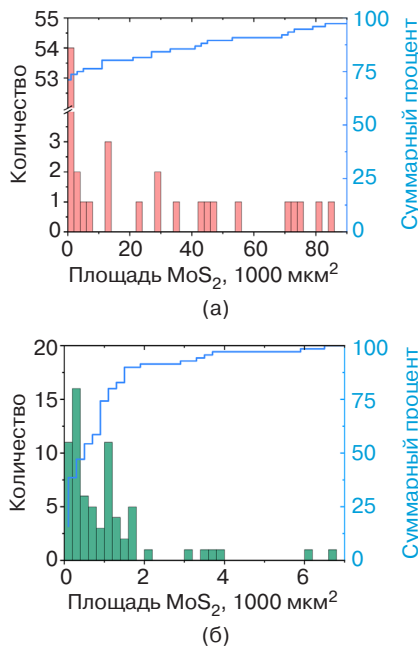


Рис. 6. Гистограмма площади двумерных кристаллитов MoS_2 на подложке (а) Si/SiO_2 и (б) ЦТС

Таким образом, метод золото-ассистированной эксфолиации обеспечивает формирование протяженных и качественных монослоев MoS_2 не только на стандартных, но и на текстурированных подложках, где другие подходы оказываются неэффективными.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведенной работы впервые продемонстрирована возможность получения протяженных и высококачественных монослоев MoS_2 на подложках с выраженной зернистой и текстурированной структурой, таких как сегнетоэлектрические пленки ЦТС. Метод золото-ассистированной эксфолиации позволил формировать кристаллиты площадью до 3000 мкм^2 на ЦТС и свыше 65000 мкм^2 на стандартных подложках Si/SiO_2 , что на несколько порядков превышает результаты, достижимые традиционной механической эксфолиацией, где на текстурированных подложках не удается получить ни одного кристаллита площадью более 1 мкм^2 . Кристалличность и однородность полученных слоев подтверждены методами АСМ и нелинейно-оптической микроскопии.

Полученные результаты открывают новые перспективы для интеграции двумерных полупроводников в функциональные устройства, такие как FeFET и мемристоры, где требуется перенос слоев на сложные и неровные подложки. Методика GAE может быть универсализирована для широкого спектра 2D-материалов и различных типов функциональных поверхностей. Таким образом, золото-ассистированная эксфолиация представляет собой эффективный и воспроизводимый инструмент для создания протяженных двумерных пленок с контролируемыми морфологическими и структурными характеристиками, в т.ч. на подложках, ранее считавшихся непригодными для подобных задач.

БЛАГОДАРНОСТИ

Основные результаты исследования были получены при поддержке Российского научного фонда (проект № 24-79-10304) в части разработки методики создания двумерных пленок, а также Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSFZ-2024-0047) – в части экспериментальных методик исследования свойств созданных структур.

ACKNOWLEDGMENTS

The main results of the study were obtained with the support of the Russian Science Foundation (project No. 24-79-10304) in terms of developing a method for creating two-dimensional films, as well as the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project No. FSFZ-2024-0047) in terms of experimental methods for studying the properties of the created structures.

Вклад авторов

Е.И. Жемеров – разработка методологии, обзор литературы, проведение эксперимента, интерпретация и обобщение результатов, подготовка первоначального варианта рукописи.

А.А. Гуськов – разработка методологии, проведение эксперимента, подготовка, интерпретация и обобщение результатов, подготовка первоначального варианта рукописи, подготовка статьи к публикации.

Е.А. Булавинцева, Д.С. Серегин – разработка методологии, создание образцов.

С.Д. Лавров – создание концепции и методологии исследования, подготовка первоначального варианта рукописи, редактирование текста рукописи, общее руководство.

Все авторы прочитали и согласовали публикуемый вариант рукописи.

Authors' contributions

E.I. Zhemerov – methodology development, literature review, conducting experiments, interpretation and generalization of results, preparation of the initial manuscript draft.

A.A. Guskov – methodology development, conducting experiments, interpretation and generalization of results, preparation of the initial manuscript draft, preparation of the article for publication.

E.A. Bulavintseva, D.S. Seregin – methodology development, sample preparation.

S.D. Lavrov – creation of research concept and methodology, preparation of the initial manuscript draft, manuscript text editing, general supervision.

All authors read and approved the published version of the manuscript.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

- Ziewer J., Ghosh A., Hanušová M., Pirker L., Frank O., Velický M., Grüning M., Huang F. Strain-Induced Decoupling Drives Gold-Assisted Exfoliation of Large-Area Monolayer 2D Crystals. *Adv. Mater.* 2025;37(14):2419184. <https://doi.org/10.1002/adma.202419184>
- Rodríguez A., Çakıroğlu O., Li H., Carrascoso F., Mompean F., Garcia-Hernandez M., Munuera C., Castellanos-Gomez A. Improved Strain Transfer Efficiency in Large-Area Two-Dimensional MoS₂ Obtained by Gold-Assisted Exfoliation. *J. Phys. Chem. Lett.* 2024;15(24):6355–6362. <https://doi.org/10.1021/acs.jpcclett.4c00855>
- Huang Y., Pan Y.-H., Yang R., Bao L.-H., Meng L., Luo H.-L., Cai Y.-Q., Liu G.-D., Zhao W.-J., Zhou Z., et al. Universal mechanical exfoliation of large-area 2D crystals. *Nat. Commun.* 2020;11(1):2453. <https://doi.org/10.1038/s41467-020-16266-w>
- Ding S., Lin F., Jin C. Quantify point defects in monolayer tungsten diselenide. *Nanotechnology.* 2021;32(25):255701. <https://doi.org/10.1088/1361-6528/abeb2>
- Edelberg D., Rhodes D., Kerelsky A., Kim B., Wang J., Zangiabadi A., Kim C., Abhinandan A., Ardelean J., Scully M., et al. Approaching the Intrinsic Limit in Transition Metal Diselenides via Point Defect Control. *Nano Lett.* 2019;19(7):4371–4379. <https://doi.org/10.1021/acs.nanolett.9b00985>
- Wu K., Wang H., Yang M., Li L., Sun Z., Hu G., Song Y., Han X., Guo J., Wu K., et al. Gold-Template-Assisted Mechanical Exfoliation of Large-Area 2D Layers Enables Efficient and Precise Construction of Moiré Superlattices. *Adv. Mater.* 2024;36(23):2313511. <https://doi.org/10.1002/adma.202313511>
- Dai Y., Huang X., Han X., Guo J., Xu X., Wang L., Liu K., Song N., Wang Y., Huang Y. Recent Progress of Mechanical Exfoliation and the Application in the Study of 2D Materials. In: Wee A., Yin X., Tang C.S. (Eds.). *Two-Dimensional Transition-Metal Dichalcogenides*. Wiley; 2024. P. 211–265. <https://doi.org/10.1002/9783527838752.ch6>
- Panasci S.E., Schilirò E., Migliore F., Cannas M., Gelardi F.M., Roccaforte F., Giannazzo F., Agnello S. Substrate impact on the thickness dependence of vibrational and optical properties of large area MoS₂ produced by gold-assisted exfoliation. *Appl. Phys. Lett.* 2021;119(9):093103. <https://doi.org/10.1063/5.0062106>
- Wan Y., Li E., Yu Z., Huang J.-K., Li M.-J., Chou A.-S., Lee Y.-T., Lee C.-J., Hsu H.-C., Zhan Q., et al. Low-defect-density WS₂ by hydroxide vapor phase deposition. *Nat. Commun.* 2022;13(1):4149. <https://doi.org/10.1038/s41467-022-31886-0>
- Velický M., Donnelly G.E., Hendren W.R., McFarland S., Scullion D., DeBenedetti W.J.I., Correa G.C., Han Y., Wain A.J., Hines M.A., et al. Mechanism of Gold-Assisted Exfoliation of Centimeter-Sized Transition-Metal Dichalcogenide Monolayers. *ACS Nano.* 2018;12(10):10463–10472. <https://doi.org/10.1021/acsnano.8b06101>
- Koenig S.P., Boddeti N.G., Dunn M.L., Bunch J.S. Ultrastrong adhesion of graphene membranes. *Nature Nanotech.* 2011;6(9):543–546. <https://doi.org/10.1038/nnano.2011.123>
- Huang Y., Sutter E., Shi N.N., Zheng J., Englund T.Y.D., Gao H.-J., Sutter P. Reliable Exfoliation of Large-Area High-Quality Flakes of Graphene and Other Two-Dimensional Materials. *ACS Nano.* 2015;9(11):10612–10620. <https://doi.org/10.1021/acsnano.5b04258>
- Котова Н.М., Воротилов К.А., Серегин Д.С., Сигов А.С. Роль прекурсоров в процессе формирования тонких пленок цирконата-титаната свинца. *Неорганические материалы.* 2014;50(6):661–666. <https://doi.org/10.7868/S0002337X14060104>
Kotova N.M., Vorotilov K.A., Seregin D.S., Sigov A.S. Role of precursors in the formation of lead zirconate titanate thin films. *Inorg. Mater.* 2014;50:612–616. <https://doi.org/10.1134/S0020168514060107>
[Original Russian Text: Kotova N.M., Vorotilov K.A., Seregin D.S., Sigov A.S. Role of precursors in the formation of lead zirconate titanate thin films. *Neorganicheskie materialy.* 2014;50(6):661–666 (in Russ.). <https://doi.org/10.7868/S0002337X14060104>]
- Brotons-Alcázar I., Terreblanche J.S., Giménez-Santamarina S., Gutiérrez-Finol G.M., Ryder K.S., Forment-Aliaga A., Coronado E. Atomic Force Microscopy beyond Topography: Chemical Sensing of 2D Material Surfaces through Adhesion Measurements. *ACS Appl. Mater. Interfaces.* 2024;16(15):19711–19719. <https://doi.org/10.1021/acsmi.3c19254>

15. Mendez-Gonzalez D., Melle S., Calderón O.G., Laurenti M., Cabrera-Granado E., Egatz-Gómez A., López-Cabarcos E., Rubio-Retama J., Díaz E. Control of upconversion luminescence by gold nanoparticle size: from quenching to enhancement. *Nanoscale*. 2019;11(29):13832–13844. <https://doi.org/10.1039/c9nr02039j>
16. Bhanu U., Islam M.R., Tetard L., Khondaker S.I. Photoluminescence quenching in gold – MoS₂ hybrid nanoflakes. *Sci Rep*. 2014 Jul 4;4:5575. <https://doi.org/10.1038/srep05575>
17. Mak K.F., Lee C., Hone J., Shan J., Heinz T.F. Atomically Thin MoS₂: A New Direct-Gap Semiconductor. *Phys. Rev. Lett*. 2010;105(13):136805. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.105.136805>
18. Srimuk P., Wang L., Budak Ö., Presser V. High-performance ion removal via zinc–air desalination. *Electrochem. Commun*. 2020;115:106713. <https://doi.org/10.1016/j.elecom.2020.106713>
19. Vasi S., Giorfrè S.V., Perathoner S., Mallamace D., Abate S., Wanderlingh U. X-ray Characterizations of Exfoliated MoS₂ Produced by Microwave-Assisted Liquid-Phase Exfoliation. *Materials*. 2024;17(16):3887. <https://doi.org/10.3390/ma17163887>
20. Kim C.J., Yoon D.S., Lee J.S., Choi C.G., No K. A Study on the Microstructure of Preferred Orientation of Lead Zirconate Titanate (PZT) Thin Films. *J. Mater. Res*. 1997;12(4):1043–1047. <https://doi.org/10.1557/JMR.1997.0145>
21. Popescu D.G., Husanu M.A., Constantinou P.C., et al. Experimental Band Structure of Pb(Zr,Ti)O₃: Mechanism of Ferroelectric Stabilization. *Adv. Sci*. 2023;10(6):e2205476. <https://doi.org/10.1002/advs.202205476>
22. Beklešovas B., Iljinas A., Stankus V., et al. Structural, Morphologic, and Ferroelectric Properties of PZT Films Deposited through Layer-by-Layer Reactive DC Magnetron Sputtering. *Coatings*. 2022;12(6):717. <https://doi.org/10.3390/coatings12060717>
23. Kokhanchik L.S., Gainutdinov R.V., Lavrov S.D., Mishina E.D., Volk T.R. E-Beam Recording of Domain Structures on the Nonpolar Surface of LiNbO₃ Crystals at Different SEM Voltages and their Investigation by PFM and SHG Microscopy. *Ferroelectrics*. 2015;480(1):49–57. <https://doi.org/10.1080/00150193.2015.1012419>
24. Мишина Е.Д., Шерстюк Н.Э., Шестакова А.П., Лавров С.Д., Семин С.В., Сигов А.С., Митиоглу А., Ангел С., Кулюк Л. Краевые эффекты в генерации второй гармоники в наноразмерных слоях дихалькогенидов переходных металлов. *Физика и техника полупроводников*. 2015;49(6):810–816.
Mishina E.D., Sherstyuk N.E., Shestakova A.P., Lavrov S.D., Semin S.V., Sigov A.S., Mitioglu A., Anghel S., Kulyuk L. Edge effects in second-harmonic generation in nanoscale layers of transition-metal dichalcogenides. *Semiconductors*. 2015;49(6):791–796.
[Original Russian Text: Mishina E.D., Sherstyuk N.E., Shestakova A.P., Lavrov S.D., Semin S.V., Sigov A.S., Mitioglu A., Anghel S., Kulyuk L. Edge effects in second-harmonic generation in nanoscale layers of transition-metal dichalcogenides. *Fizika i Tekhnika Poluprovodnikov*. 2015;49(6):810–816 (in Russ.).]
25. Li Z.-Y., Cheng H.-Y., Kung S.-H., Yao H.-C., Inbaraj C.R.P., Sankar R., Ou M.-N., Chen Y.-F., Lee C.-C., Lin K.-H. Uniaxial Strain Dependence on Angle-Resolved Optical Second Harmonic Generation from a Few Layers of Indium Selenide. *Nanomaterials*. 2023;13(4):750. <https://doi.org/10.3390/nano13040750>
26. Li Y. Measurement of the Second-Order Nonlinear Susceptibility and Probing Symmetry Properties of Few-Layer MoS₂ and h-BN by Optical Second-Harmonic Generation. In: *Probing the Response of Two-Dimensional Crystals by Optical Spectroscopy*. Springer Theses; 2016. P. 45–54. https://doi.org/10.1007/978-3-319-25376-3_6
27. Desai S.B., Madhvapathy S.R., Amani M., Kiriya D., Hettick M., Tosun M., Zhou Y., Dubey M., Ager J.W., Chrzan D., et al. Gold-Mediated Exfoliation of Ultralarge Optoelectronically-Perfect Monolayers. *Adv. Mater*. 2016;28(21):4053–4058. <https://doi.org/10.1002/adma.201506171>

Об авторах

Жемеров Евгений Игоревич, студент, стажер-исследователь, лаборатория физики для нейроморфных вычислительных систем, Институт перспективных технологий и промышленного программирования, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: zhemerov@mirea.ru. ResearcherID LLM-2528-2024, SPIN-код РИНЦ 6300-2743, <https://orcid.org/0009-0002-0507-6242>

Гуськов Андрей Александрович, аспирант, младший научный сотрудник, лаборатория физики для нейроморфных вычислительных систем, Институт перспективных технологий и промышленного программирования, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: guskov@mirea.ru. Scopus Author ID 57225969940, ResearcherID AAE-2479-2022, SPIN-код РИНЦ 8000-3575, <https://orcid.org/0000-0002-8462-5811>

Булавинцева Елизавета Александровна, студент, сотрудник лаборатории физики для нейроморфных вычислительных систем, Институт перспективных технологий и промышленного программирования, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: Liza12.07.2002@gmail.com. ResearcherID LLM-2612-2024, <https://orcid.org/0009-0009-5310-3146>

Серегин Дмитрий Сергеевич, к.т.н., начальник отдела, Научно-образовательный центр «Технологический центр», Институт перспективных технологий и промышленного программирования, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: d_seregin@mirea.ru. Scopus Author ID 55643557800, ResearcherID R-6023-2016, SPIN-код РИНЦ 4960-6761, <https://orcid.org/0000-0002-6371-9632>

Лавров Сергей Дмитриевич, к.ф.-м.н., старший научный сотрудник, лаборатория физики для нейроморфных вычислительных систем; доцент, кафедра наноэлектроники, Институт перспективных технологий и промышленного программирования, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: lavrov_s@mirea.ru. Scopus Author ID 55453548100, ResearcherID G-2912-2016, SPIN-код РИНЦ 5918-8994, <https://orcid.org/0000-0002-9432-860X>

About the Authors

Evgeny I. Zhemerov, Student, Researcher Intern, Laboratory of Physics for Neuromorphic Computing Systems, Institute for Advanced Technologies and Industrial Programming, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: zhemerov@mirea.ru. ResearcherID LLM-2528-2024, RSCI SPIN-code 6300-2743, <https://orcid.org/0009-0002-0507-6242>

Andrey A. Guskov, Graduate Student, Junior Researcher, Laboratory of Physics for Neuromorphic Computing Systems, Institute for Advanced Technologies and Industrial Programming, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: guskov@mirea.ru. Scopus Author ID 57225969940, ResearcherID AAE-2479-2022, RSCI SPIN-code 8000-3575, <https://orcid.org/0000-0002-8462-5811>

Elizaveta A. Bulavintseva, Student, Researcher Intern, Laboratory of Physics for Neuromorphic Computing Systems, Institute for Advanced Technologies and Industrial Programming, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: Liza12.07.2002@gmail.com. ResearcherID LLM-2612-2024, <https://orcid.org/0009-0009-5310-3146>

Dmitry S. Seregin, Cand. Sci. (Eng.), Head of the Department, Research and Education Center “Technology Center”, Institute for Advanced Technologies and Industrial Programming, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: d_seregin@mirea.ru. Scopus Author ID 55643557800, ResearcherID R-6023-2016, RSCI SPIN-code 4960-6761, <https://orcid.org/0000-0002-6371-9632>

Sergei D. Lavrov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Senior Researcher, Laboratory of Physics for Neuromorphic Computing Systems; Associate Professor, Department of Nanoelectronics, Institute for Advanced Technologies and Industrial Programming, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: lavrov_s@mirea.ru. Scopus Author ID 55453548100, ResearcherID G-2912-2016, RSCI SPIN-code 5918-8994, <https://orcid.org/0000-0002-9432-860X>

УДК 537.632

<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2026-14-1-55-63>

EDN FDCWGD



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Особенности температурных зависимостей колоссального и туннельного магнитосопротивления в пленках манганитов

Т.Н. Бахвалова¹, А.Н. Юрасов¹, М.М. Яшин^{1,®}, В.А. Бессонова²

¹ МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, 119454 Россия

² Институт физики металлов им. М.Н. Михеева УрО РАН, Екатеринбург, 620108 Россия

® Автор для переписки, e-mail: ihkamax@mail.ru

• Поступила: 03.04.2025 • Доработана: 15.04.2025 • Принята к опубликованию: 20.11.2025

Резюме

Цели. Целью работы является экспериментальное и теоретическое исследование особенностей температурных зависимостей магнитосопротивления в наноструктурированных пленках легированных манганитов. В широком температурном диапазоне изучено поведение электросопротивления пленок манганитов состава $\text{La}_{0.67}\text{Ba}_{0.33}\text{MnO}_3$, выращенных методом лазерной абляции на различных диэлектрических подложках.

Методы. Для достижения поставленной цели методом лазерной абляции с использованием импульсного эксимерного были выращены эпитаксиальные пленки $\text{La}_{0.67}\text{Ba}_{0.33}\text{MnO}_3$ толщиной 80 нм на монокристаллических подложках SrTiO_3 и $\text{ZrO}_2(\text{Y}_2\text{O}_3)$. Магнитосопротивление измерялось двухконтактным методом на постоянном токе в полях до 8 кЭ в плоскости образца и температурном интервале 80–350 К. Для достижения поставленной цели применялась эмпирическая модель магнитосопротивления в двух температурных областях: вблизи температуры магнитного фазового перехода и в области основного состояния.

Результаты. Построены эмпирические температурные зависимости магнитосопротивления для наноструктурированной пленки $\text{La}_{0.67}\text{Ba}_{0.33}\text{MnO}_3$, охватывающие как область температуры Кюри, так и область основного состояния. Показано, что в эпитаксиальной монокристаллической пленке $\text{La}_{0.67}\text{Ba}_{0.33}\text{MnO}_3$ магнитосопротивление имеет выраженный максимум вблизи температуры Кюри и пренебрежимо мало в других областях. В пленке $\text{La}_{0.67}\text{Ba}_{0.33}\text{MnO}_3$ с вариантной структурой имеется сильный низкотемпературный вклад в магнитосопротивление, связанный с изменением высокочастотной проводимости пленки во внешнем магнитном поле из-за процессов туннелирования спин-поляризованных электронов через границы структурных доменов. Предложена единая эмпирическая модель для описания различных механизмов магнитосопротивления в легированных манганитах.

Выводы. Впервые в рамках одной эмпирической модели проведено описание колоссального и туннельного магнитосопротивления для пленок легированных манганитов. Показано, что такая модель дает хорошее согласие экспериментальных и расчетных данных в пленке $\text{La}_{0.67}\text{Ba}_{0.33}\text{MnO}_3$ с вариантной структурой. Результаты моделирования хорошо согласуются с экспериментальными данными. Полученные данные могут способствовать пониманию механизмов магнитосопротивления и развитию теории магниторефрактивного эффекта для тонкопленочных манганитов, а также разработке новых подходов к управлению динамикой носителей заряда в сильно-коррелированных магнитных оксидах.

Ключевые слова: пленки манганитов, вариантная структура, колоссальное магнитосопротивление, туннелирование, магниторефрактивный эффект, структурные домены

Для цитирования: Баквалова Т.Н., Юрасов А.Н., Яшин М.М., Бессонова В.А. Особенности температурных зависимостей колоссального и туннельного магнитосопротивления в пленках манганитов. *Russian Technological Journal*. 2026;14(1):55–63. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2026-14-1-55-63>, <https://www.elibrary.ru/FDCWGD>

Прозрачность финансовой деятельности: Авторы не имеют финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

RESEARCH ARTICLE

Specific features of temperature dependence of colossal and tunneling magnetoresistance in manganite films

Tatiana N. Bakhvalova¹, Alexey N. Yurasov¹, Maxim M. Yashin^{1, @},
Valentina A. Bessonova²

¹ MIREA – Russian Technological University, Moscow, 119454 Russia

² Mikheev Institute of Metal Physics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia

@ Corresponding author, e-mail: ihkamax@mail.ru

• Submitted: 03.04.2025 • Revised: 15.04.2025 • Accepted: 20.11.2025

Abstract

Objectives. This work aims to theoretically and experimentally investigate the specific features of magnetoresistance temperature dependence in nanostructured films of doped manganites. The temperature dependence of electrical resistance for $\text{La}_{0.67}\text{Ba}_{0.33}\text{MnO}_3$ manganite films, grown by laser ablation on various dielectric substrates, is investigated over a wide temperature range.

Methods. Epitaxial $\text{La}_{0.67}\text{Ba}_{0.33}\text{MnO}_3$ films with a thickness of 80 nm were grown by pulsed laser ablation using an ArF excimer laser (a laser wavelength of 247 nm) on single-crystalline SrTiO_3 and $\text{ZrO}_2(\text{Y}_2\text{O}_3)$ substrates. The magnetoresistance properties were measured using a two-probe DC method. The measurements were conducted in magnetic fields up to 8 kOe applied in the film plane, across a temperature range of 80–350 K. To accomplish the research objectives, an empirical magnetoresistance model was applied in two distinct temperature regions: near the magnetic phase transition temperature and in the ground-state region.

Results. Empirical relations for temperature dependence of magnetoresistance for nanostructured $\text{La}_{0.67}\text{Ba}_{0.33}\text{MnO}_3$ films were established, encompassing both the Curie temperature region and the ground-state regime. Our studies revealed that the magnetoresistance of epitaxial single-crystalline $\text{La}_{0.67}\text{Ba}_{0.33}\text{MnO}_3$ films exhibits a sharp peak exclusively near the Curie temperature while remaining negligible in other temperature ranges. Conversely, $\text{La}_{0.67}\text{Ba}_{0.33}\text{MnO}_3$ films with a variant structure demonstrate significant low-temperature magnetoresistance. This effect arises from magnetic-field-induced modifications of the high-frequency conductivity, which results from spin-polarized electron tunneling across structural domain boundaries. A unified empirical model to describe various mechanisms of magnetoresistance in doped manganites is proposed.

Conclusions. For the first time, an empirical model to describe both the colossal and tunneling magnetoresistance in thin films of doped manganites has been developed. This model demonstrates excellent agreement between experimental and calculated data for $\text{La}_{0.67}\text{Ba}_{0.33}\text{MnO}_3$ films with and without a variant structure. The simulation results agree well with experimental data. The findings elucidate the understanding of magnetoresistance mechanisms, contribute to the development of the magnetorefractive effect theory for thin-film manganites, and inform new approaches for controlling charge carrier dynamics in strongly correlated magnetic oxides.

Keywords: manganites films, variant structure, colossal magnetoresistance, spin-dependent tunneling, magnetorefractive effect, structural domains

For citation: Bakhvalova T.N., Yurasov A.N., Yashin M.M., Bessonova V.A. Specific features of temperature dependence of colossal and tunneling magnetoresistance in manganite films. *Russian Technological Journal*. 2026;14(1):55–63. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2026-14-1-55-63>, <https://www.elibrary.ru/FDCWGD>

Financial disclosure: The authors have no financial or proprietary interest in any material or method mentioned.

The authors declare no conflicts of interest.

ВВЕДЕНИЕ

В современной физике особое внимание уделяется изучению фундаментальных магнитных и транспортных свойств композитных или наноструктурированных функциональных тонкопленочных наноматериалов, поскольку они лежат в основе многих актуальных технологических приложений от информационных носителей до сенсорных устройств [1]. Одним из перспективных классов материалов, демонстрирующих необычные свойства, являются легированные манганиты лантана [2–5]. Эти материалы обладают рядом уникальных характеристик, таких как высокая спиновая поляризация носителей заряда и намагниченность, высокая чувствительность статической и оптической проводимости к структурным и магнитным фазовым переходам и внешним полям [2–5] (например, переход металл-диэлектрик, эффект колоссального магнитосопротивления (МС), гигантское магнитопротекание света, магниторефрактивный эффект (МРЭ) и т.д. [6–8]), что делает их потенциальными кандидатами для применения в спинтронике и магнитооптических устройствах инфракрасного (ИК) диапазона, работающих при комнатных температурах.

Магниторефрактивный эффект заключается в изменении оптических параметров (индексов рефракции, а вернее коэффициентов отражения и прохождения) в магнитном поле и в сильнолегированных манганитах является высокочастотным аналогом колоссального МС в ИК-диапазоне спектра [2]. В пленках манганитов МРЭ достигает гигантских значений (10–20%), однако его спектральные и температурные зависимости имеют достаточно сложный характер, т.к., помимо вклада делокализованных носителей заряда, значительную роль играют магнитная и зарядовая однородность пленок, их толщина, величина МС, а также размерные эффекты, резонансные явления и дефекты (источник [2] и ссылки в нем).

Физические свойства пленки манганитов определяются не только составом и условиями роста, но и типом подложки. Например, в [9] было показано, что в пленках $\text{La}_{2/3}\text{Ba}_{1/3}\text{MnO}_3$ на подложках $\text{ZrO}_2(\text{Y}_2\text{O}_3)$ при эпитаксиальном росте пленки на монокристаллической подложке с сильно

отличающимися параметрами кристаллической решетки образуется вариантная (эквивалентная) структура. Такая структура формируется структурными доменами (вариантами) с наноразмерными кристаллитами в объеме пленки, разделенными когерентными высокоугловыми границами толщиной ~ 0.4 нм. Отметим, что фиксированная ориентация кристаллитов с ограниченным набором углов является принципиальным отличием пленок с вариантной структурой от поликристаллических образцов с разориентированными кристаллитами разного размера в объеме пленки. Природа и особенности реализации вариантной структуры подробно рассмотрены в [10].

В результате доменная структура пленок приводит к появлению дополнительного механизма в МС, вызванного процессами туннелирования спин-поляризованных носителей заряда на границах доменов, наиболее интенсивных при стремлении температуры к абсолютному нулю. Сравнительный анализ оптических, электрических и магнитооптических свойств пленок $\text{La}_{2/3}\text{Ba}_{1/3}\text{MnO}_3$, обладающих и не обладающих вариантной структурой, позволил изучить основные особенности физических механизмов, ответственных за температурные и полевые зависимости МС и МРЭ в этих пленках [2, 7–9]. Для описания МРЭ как отклика на колоссальное МС в манганитах было успешно применено приближение эффективной среды [11], ранее предложенное для анализа процессов туннелирования на оптических частотах в различных металлических наноконструкциях и гранулярных сплавах [12]. Однако высокая восприимчивость электрических свойств манганитов к действию внутренних и внешних факторов приводит к трудностям теоретического описания механизмов МС и МРЭ, поскольку развитая теория применима для чисто металлической и туннельной проводимости, а также может учитывать перераспределение высоко- и низкопроводящей фазы, но не учитывает эффекты, связанные, например, с изменением в магнитном поле концентрации носителей заряда, края поглощения, эффективной массы поляронов [2] и т.д. Кроме того, на данный момент отсутствует какая-либо единая модель, описывающая сосуществование двух механизмов МС в пленках легированных манганитов с сильно отличающимися температурными областями существования.

В настоящей работе приведены результаты моделирования температурных зависимостей МС в пленке манганита $\text{La}_{0.67}\text{Ba}_{0.33}\text{MnO}_3$ (LBM), обладающей вариантной структурой, в сравнении с пленкой, не обладающей вариантной структурой. Показано, что предложенный эмпирический подход позволяет учесть основные особенности и может быть использован в дальнейшем для разработки общей теории МС в сильно-коррелированных магниторезистивных магнетиках.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Эпитаксиальные пленки LBM толщиной $d = 80$ нм были выращены методом лазерной абляции с использованием эксимерного импульсного аргон-фторидного лазера (ArF-лазера), длина волны лазера – 247 нм, частота порядка – 9 Гц, на монокристаллических подложках SrTiO_3 (далее – STO) и $\text{ZrO}_2(\text{Y}_2\text{O}_3)$ (далее – YSZ), при температуре подложки 730 К и давлении кислорода 0.4 мбар. Толщина пленок определялась по времени экспозиции. По данным сканирующей электронной микроскопии поверхность пленки LBM/YSZ имеет многозеренную структуру со средним размером кристаллитов 40–70 нм. Такая структура формируется прорастающими по толщине пленки колоннообразными ориентированными кристаллитами, что кардинально отличается от островкового характера роста тонких эпитаксиальных пленок LBM/STO. Более детально методика синтеза и результаты аттестации образцов пленок приведены в работах [9, 13].

Магнитосопротивление пленок

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = [\rho_H - \rho_0] / \rho_0,$$

где ρ_H и ρ_0 – значения удельного сопротивления при наличии и отсутствии магнитного поля, измерялось двухконтактным методом на постоянном токе в полях до 8 кЭ в плоскости образца и температурном интервале 80–50 К. Экспериментальные температурные и полевые зависимости МС пленок приведены на рис. 1. Магнитосопротивление в эпитаксиальных пленках манганитов LBM (без вариантной структуры) демонстрирует полевую и температурную зависимость, аналогичную объемным монокристаллам того же состава. В пленке LBM/STO имеется выраженный максимум в температурной зависимости отрицательного эффекта МС в области температуры Кюри пленки $T_C = 305$ К. Наличие максимума связано с подавлением полем флуктуаций магнитных моментов, максимальных в области магнитного фазового перехода, и является характерным для манганитов с колоссальным МС [2, 14]. Полевая зависимость МС в этой области демонстрирует линейную

зависимость без гистерезиса и насыщения в полях до 8 кЭ (рис. 1в). В то же время для пленки LBM/YSZ в зависимости МС от T имеется только плечо вблизи T_C на фоне непрерывного роста МС при понижении температуры (рис. 1а). Непрерывный рост МС связан с туннелированием спин-поляризованных электронов через границы структурных доменов.

Максимальная полученная величина туннельного МС составила примерно 27% при $T = 13$ К (на рисунке не показано). Оценка степени спин-поляризации электронов P при $T \sim 0$ К по выражению $\frac{\Delta\rho}{\rho} = 2P^2 / (1 - P^2)$ дает величину $P \approx 0.36$, близкую значению P для пленок $\text{La}_{0.8}\text{Ag}_{0.1}\text{MnO}_{3+\delta}/\text{ZrO}_2(\text{Y}_2\text{O}_3)$ с вариантной структурой [15]. Полевая зависимость низкотемпературного МС заметно отличается (рис. 1б): отрицательное МС резко выходит на насыщение и достигает почти 25% в магнитных полях больше 2 кЭ, появляется характерный для материалов с туннельным МС гистерезис типа «крылья бабочки» со слабыми положительными максимумами в полях ~ 0.5 кЭ. Стрелкой на рисунке отмечена особенность, связанная с колоссальным МС в пленке LBM/YSZ. Штриховые зоны схематично отражают области преимущественного вклада механизмов туннельного (I) и колоссального (II) МС, соответственно. Более детально с результатами анализа температурных и полевых зависимостей МС и МРЭ в пленках LBM можно ознакомиться в работах [9, 13, 16].

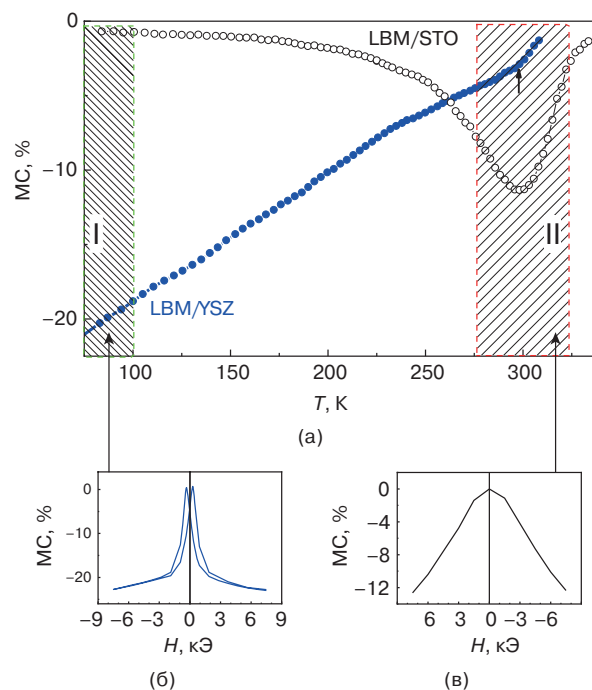


Рис. 1. Экспериментальные характеристики: (а) температурные зависимости МС пленок LBM/STO и LBM/YSZ при $H = 7.5$ кЭ; (б) и (в) – полевые зависимости МС для пленок LBM/YSZ при $T = 80$ К и LBM/STO при $T = T_C$, соответственно

РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Таким образом, в наноструктурированной пленке LBM/YSZ (с вариантной структурой) существуют проводящие ферромагнитные структурные домены, которые разделены слабопроводящими границами. При приложении постоянного внешнего магнитного поля в области T_C в МС наблюдается особенность, связанная с колоссальным МС в объеме доменов, а в области низких температур проявляется туннельное МС, связанное с туннелированием носителей заряда на границах доменов. В связи с этим особенности температурного поведения МС в LBM/YSZ рассматривались в двух основных областях: вблизи и сильно ниже температуры ферромагнитного упорядочения (температура Кюри). При низких температурах зависимость МС(T) имеет вид квазилинейной функции (до температуры $T_{кр} \sim 250$ К). При увеличении температуры она принимает вид как для пленки без вариантной структуры (LBM/STO) и описывается полиномиальной функцией 2-го порядка (или, в первом приближении, линейной функцией). Для учета этих двух вкладов в предлагаемой математической модели введены коэффициенты α и β . По своему физическому смыслу коэффициент α учитывает вклад низкотемпературного (туннельного) МС: $\alpha = 1$ при $T < T_{кр}$ и $\alpha = 0$ при $T > T_{кр}$. Выполнению данного условия удовлетворяет выражение вида:

$$\alpha = \frac{1}{1 + e^{\frac{T - T_{кр}}{T_{кр}}}}, \quad (1)$$

где $T_{кр}$ – критическое значение температуры, при которой наблюдается смена механизма МС. Аналогично можно получить формулу для коэффициента β высокотемпературного (колоссального) МС:

$$\beta = \frac{1}{1 + e^{\frac{T_{кр} - T}{T_{кр}}}}. \quad (2)$$

Аналогичный подход использован для описания МС в пленке LBM/STO (без вариантной структуры). Низкотемпературная область МС имеет слаболинейный участок с выходом на ноль вблизи $T = 0$ К, а выше 250 К зависимость МС(T) описывается функцией Гаусса. Подобную картину наблюдали для пленок $\text{La}_{0.7}\text{Ca}_{0.3}\text{MnO}_3$ в [17].

Низкотемпературная область МС пленок аппроксимировалась как квазилинейный участок. Лучшее совпадение экспериментальных и расчетных кривых достигается аппроксимацией функцией

полинома 2-го порядка (рис. 2). Однако использование полинома существенно усложняет расчеты, поэтому было взято линейное приближение. В результате общая формула для описания температурной зависимости МС ($\Delta\rho/\rho$) может быть представлена в виде:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \alpha A_1 T + \beta \left(A_1 T_{кр} + B_1 e^{-\frac{(T - T_C)^2}{2\sigma^2}} \right), \quad (3)$$

где A_1 – коэффициент, описывающий угол наклона кривой температурной зависимости и определяемый условиями роста и составом образца (величина по модулю мала и составляет ≈ 0.01 , что связано со слабым изменением МС в низкотемпературной области); B_1 – величина МС для данной пленки; σ – среднеквадратическое отклонение.

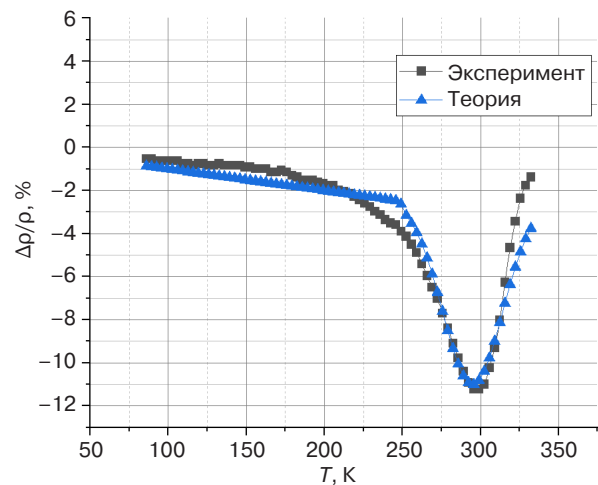


Рис. 2. Температурная зависимость МС ($\Delta\rho/\rho$) для пленки LBM/STO: эксперимент и расчет

В пленках LBM с вариантной структурой различия между низкотемпературной и высокотемпературной областями не столь существенны (рис. 3). Наличие структурных доменов в пленке приводит к заметному изменению хода кривой МС(T) и отсутствию выраженных особенностей вблизи T_C . При этом величина МС растет при понижении температуры в отличие от пленки без вариантной структуры. Подобную зависимость МС также наблюдали для пленок $(\text{La}_{0.65}\text{Sr}_{0.35})_{0.8}\text{Mn}_{1.2}\text{O}_{3\pm\delta}$ с вариантной структурой [18]. В низкотемпературной области зависимость $\Delta\rho/\rho(T)$ – линейная, а выше критической температуры она становится близкой к квадратичной (рис. 3). В первом приближении эту особенность вблизи T_C можно считать незначительной. Тогда зависимость $\Delta\rho/\rho(T)$ будет квазилинейной. В результате аналогично ранее рассмотренному случаю получаем упрощенное выражение для $\Delta\rho/\rho(T)$ для пленки LBM/YSZ:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = (\alpha + \beta)(A_0 + A_2T), \quad (4)$$

где коэффициент A_0 – это МС образца по модулю (при $T = 0$ К), A_2 – коэффициент, описывающий угол наклона кривой (~ 0.086).

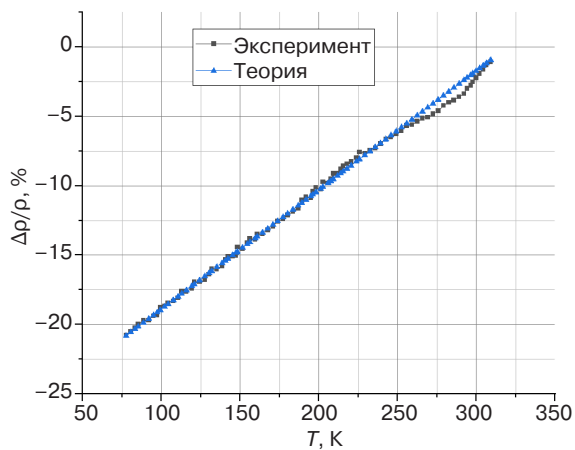


Рис. 3. Температурная зависимость МС ($\Delta\rho/\rho$) для пленки LBM/YSZ: эксперимент и расчет

Таким образом, в легированных манганитах LBM в рамках единой эмпирической модели удалось учесть высокотемпературную и низкотемпературную части МС. Простая линейная модель, учитывающая критическую температуру и характерные величины колоссального и туннельного МС, позволяет хорошо описать экспериментальные данные как для пленок с вариантной структурой, так и без нее. Данная модель может быть применена к объяснению температурных особенностей МС широкого класса манганитов других составов. Следующим шагом планируется построение теории МРЭ в поликристаллических и композитных образцах манганитов с учетом развития оптических расчетов магнитоотражения [19, 20] и результатов данной работы. Важно отметить, что МРЭ является четным по намагниченности магнитооптическим эффектом, в отличие от линейного экваториального эффекта Керра и в ИК-области спектра с учетом интерференционных эффектов [21, 22] может значительно превосходить последний, что делает МРЭ наиболее перспективным интенсивностным эффектом с точки зрения фундаментальных и прикладных задач.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе показано, что в пленке LBM/STO МС имеет выраженный максимум вблизи температуры Кюри и пренебрежимо мало в других областях. В пленке LBM/YSZ имеется сильный низкотемпературный вклад в МС, связанный с изменением высокочастотной проводимости пленки во внешнем магнитном поле из-за процесса туннелирования спин-поляризованных электронов через границы когерентных структурных доменов. Впервые в рамках единой эмпирической модели предложен учет разных механизмов МС в одном образце. Продемонстрировано, что такой учет дает хорошее согласие экспериментальных и рассчитанных данных для легированных манганитов. Предложенный эмпирический подход может быть использован для моделирования процессов спинового транспорта, в т.ч. на оптических частотах в виде МРЭ, в сильно-коррелированных магниторезистивных магнетиках.

В заключение можно также отметить, что широкое температурное окно существования МС в пленке с вариантной структурой является важным с точки зрения возможных практических приложений.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при поддержке программы «Акселератор РТУ МИРЭА».

ACKNOWLEDGMENTS

The study was supported by the “RTU MIREA Accelerator” program.

Вклад авторов

Т.Н. Бахвалова – обработка литературных источников, компьютерное моделирование, обсуждение результатов, написание статьи.

А.Н. Юрасов – разработка модели, обсуждение результатов, написание статьи, редактирование статьи.

М.М. Яшин – компьютерное моделирование, обсуждение результатов, написание статьи.

В.А. Бессонова – проведение эксперимента.

Authors' contributions

T.N. Bakhvalova – literature review, computer modeling, discussion of results, writing the text of the article.

A.N. Yurasov – model development, discussion of results, writing the text of the article, editing the article.

M.M. Yashin – computer modeling, discussion of results, writing the text of the article.

V.A. Bessonova – conducting the experiments.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ramirez A.P. Colossal magnetoresistance. *J. Phys.: Condens. Matter*. 1997;9(39):8171–8199. <http://doi.org/10.1088/0953-8984/9/39/005>
2. Granovsky A., Sukhorukov Yu., Gan'shina E., Telegin A. Magnetorefractive effect in magnetoresistive materials. In: *Magnetophotonics: From Theory to Applications*. Berlin Heidelberg: Springer; 2013. P. 107–133. http://doi.org/10.1007/978-3-642-35509-7_5
3. Gan'shina E., Loshkareva N., Sukhorukov Yu., et al. Optical and magneto-optical spectroscopy of manganites. *J. Magn. Mater.* 2006;300(1):62–66. <https://doi.org/10.1016/j.jmmm.2005.10.033>
4. Горбенко О.Ю., Демин Р.В., Кауль А.Р., Королева Л.И. Магнитные, электрические и кристаллографические свойства тонких пленок $\text{La}_{1-x}\text{Sr}_x\text{MnO}_3$. *Физика твердого тела (ФТТ)*. 1998;40(2):290–294.
5. Bebenin N.G. Lanthanum manganites near the Curie temperature. *Phys. Metals Metallography*. 2004;98(1):78–85.
6. Bebenin N.G., Loshkareva N.N., Makhnev A.A., et al. Optical and magneto-optical properties of ferromagnetic $\text{La}_{1-x}\text{Ba}_x\text{MnO}_3$ single crystals. *J. Phys.: Condens. Matter*. 2010;22(9):096003. <https://doi.org/10.1088/0953-8984/22/9/096003>
7. Sukhorukov Yu.P., Telegin A.V., Bessonov V.D., et al. Magnetorefractive effect in the $\text{La}_{1-x}\text{K}_x\text{MnO}_3$ thin films grown by MOCVD. *J. Magn. Mater.* 2014;367:53–59. <https://doi.org/10.1016/j.jmmm.2014.04.055>
8. Telegin A., Sukhorukov Yu., Bessonov V. Optical response on the colossal magnetoresistance effect in manganites. *J. Supercond. Nov. Magn.* 2013;26(5):1437–1440. <https://doi.org/10.1007/s10948-012-1867-8>
9. Telegin A.V., Barsaume S., Bessonova V.A., et al. Magneto-optical response to tunnel magnetoresistance in manganite films with a variant structure. *J. Magn. Mater.* 2018;459:317–321. <https://doi.org/10.1016/j.jmmm.2017.10.006>
10. Кауль А.Р., Горбенко О.Ю., Каменев А.А. Роль гетерозэпитаксии в разработке новых тонкопленочных функциональных материалов на основе оксидов. *Успехи химии*. 2004;73(9):932–939.
11. Юрасов А.Н., Телегин А.В., Сухоруков Ю.П. Модель магниторефрактивного эффекта в манганитах в рамках теории эффективной среды. *Физика твердого тела (ФТТ)*. 2016;58(4):656–660.
12. Быков И.В., Ганьшина Е.А., Грановский А.Б., Гущин В.С., Козлов А.А., Масумото Т., Онума С. Магниторефрактивный эффект в гранулированных сплавах с туннельным магнитосопротивлением. *Физика твердого тела (ФТТ)*. 2005;47(2):268–273.
13. Телегин А.В., Сухоруков Ю.П., Носов А.П., Бессонова В.А., Ганьшина Е.А. Магнитоотражение и магнитооптический эффект Керра в пленках $\text{La}_{2/3}\text{Ba}_{1/3}\text{MnO}_3$ при комнатной температуре. *Физика твердого тела (ФТТ)*. 2017;59(2):284–289. <https://doi.org/10.21883/FTT.2017.02.44049.303>
14. Нагаев Э.Л. Манганиты лантана и другие магнитные проводники с гигантским магнитосопротивлением. *Успехи физ. наук (УФН)*. 1996;166(8):833–858. <https://doi.org/10.3367/UFNr.0166.199608b.0833>
15. Сухоруков Ю.П., Телегин А.В., Ганьшина Е.А., Локарева Н.Н., Кауль А.Р., Горбенко О.Ю., Мостовщикова Е.Н., Мельников О.В., Виноградов А.Н. Туннелирование спин-поляризованных носителей заряда в пленках $\text{La}_{0.8}\text{Ag}_{0.1}\text{MnO}_{3+d}$ с вариантной структурой: магнотранспортные и магнитооптические данные. *Письма в ЖТФ*. 2005;31(11):78–87.
16. Бессонова В.А., Телегин А.В., Носов А.П., Сухоруков Ю.П. Особенности поглощения тонких пленок $\text{La}_{0.69}\text{Ba}_{0.31}\text{MnO}_{3-d}$, полученных методом импульсного лазерного осаждения. *Оптика и спектроскопия*. 2022;130(9):1365–1371. <https://doi.org/10.21883/OS.2022.09.53296.3223-22>
17. Грановский А.Б., Сухоруков Ю.П., Телегин А.В., Бессонов В.Д., Ганьшина Е.А., Кауль А.Р., Корсаков И.Е., Горбенко О.Ю., Гонзалес Х. Гигантский магниторефрактивный эффект в пленках $\text{La}_{0.7}\text{Ca}_{0.3}\text{MnO}_3$. *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. 2011;139(1):90–100.
18. Акимов Г.Я., Прилипко С.Ю., Ревенко Ю.Ф., Тимченко В.М. Особенности физических свойств нанокристаллических образцов $(\text{La}_{0.65}\text{Sr}_{0.35})_{0.8}\text{Mn}_{1.2}\text{O}_{3+\Delta}$, полученных с использованием холодного изостатического прессования. *Физика твердого тела (ФТТ)*. 2009;51(4):727–728.
19. Юрасов А.Н., Сайфулина Д.А., Бахвалова Т.Н. Магниторефрактивный эффект в металлических наноструктурах Co/Pt. *Russian Technological Journal*. 2024;12(2):57–66. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-2-57-66>
20. Гладышев И.В. Отражение света от многослойных структур, включающих как когерентные, так и некогерентные слои. В сб.: *Оптические технологии, материалы и системы (Optotech 2024): Сборник докладов конференции*. Москва: 2024. С. 520–525. <https://www.elibrary.ru/otpmij>
21. Гладышев И.В., Юрасов А.Н., Яшин М.М. Вклад интерференции в магнитооптический экваториальный эффект Керра в белом свете. *Russian Technological Journal*. 2024;12(6):59–68. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-6-59-68>
22. Ганьшина Е.А., Гаршин В.В., Перова Н.Н., Припеченков И.М., Юрасов А.Н., Яшин М.М., Рыльков В.В., Грановский А.Б. Магнитооптическая керр-спектроскопия наноконструктов. *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. 2023;164(4):662–672. <https://doi.org/10.31857/S0044451023100188>

REFERENCES

1. Ramirez A.P. Colossal magnetoresistance. *J. Phys.: Condens. Matter*. 1997;9(39):8171–8199. <http://doi.org/10.1088/0953-8984/9/39/005>
2. Granovsky A., Sukhorukov Yu., Gan'shina E., Telegin A. Magnetorefractive effect in magnetoresistive materials. In: *Magnetophotonics: From Theory to Applications*. Berlin Heidelberg: Springer; 2013. P. 107–133. http://doi.org/10.1007/978-3-642-35509-7_5
3. Gan'shina E., Loshkareva N., Sukhorukov Yu., et al. Optical and magneto-optical spectroscopy of manganites. *J. Magn. Mater.* 2006;300(1):62–66. <https://doi.org/10.1016/j.jmmm.2005.10.033>

4. Gorbenko O.Yu., Demin R.V., Kaul A.R., et al. Magnetic, electrical and crystallographic properties of thin $\text{La}_{1-x}\text{Sr}_x\text{MnO}_3$ films. *Phys. Solid State*. 1998;40(2):263–267. <https://doi.org/10.1134/1.1130289>
[Original Russian Text: Gorbenko O.Yu., Demin R.V., Kaul A.R., Koroleva L.I. Magnetic, electrical and crystallographic properties of thin $\text{La}_{1-x}\text{Sr}_x\text{MnO}_3$ films. *Fizika tverdogo tela (FTT)*. 1998;40(2):290–294 (in Russ..)]
5. Bebenin N.G. Lanthanum manganites near the Curie temperature. *Phys. Metals Metallography*. 2004;98(1):78–85.
6. Bebenin N.G., Loshkareva N.N., Makhnev A.A., et al. Optical and magneto-optical properties of ferromagnetic $\text{La}_{1-x}\text{Ba}_x\text{MnO}_3$ single crystals. *J. Phys.: Condens. Matter*. 2010;22(9):096003. <https://doi.org/10.1088/0953-8984/22/9/096003>
7. Sukhorukov Yu.P., Telegin A.V., Bessonov V.D., et al. Magnetorefractive effect in the $\text{La}_{1-x}\text{K}_x\text{MnO}_3$ thin films grown by MOCVD. *J. Magn. Magn. Mater.* 2014;367:53–59. <https://doi.org/10.1016/j.jmmm.2014.04.055>
8. Telegin A., Sukhorukov Yu., Bessonov V. Optical response on the colossal magnetoresistance effect in manganites. *J. Supercond. Nov. Magn.* 2013;26(5):1437–1440. <https://doi.org/10.1007/s10948-012-1867-8>
9. Telegin A.V., Barsaume S., Bessonova V.A., et al. Magneto-optical response to tunnel magnetoresistance in manganite films with a variant structure. *J. Magn. Magn. Mater.* 2018;459:317–321. <https://doi.org/10.1016/j.jmmm.2017.10.006>
10. Kaul A.R., Gorbenko O.Yu., Kamenev A.A. The role of heteroepitaxy in the development of new thin-film oxide-based functional materials. *Russ. Chem. Rev.* 2004;73(9):861–880. <https://doi.org/10.1070/RC2004v073n09ABEH000919>
[Original Russian Text: Kaul A.R., Gorbenko O.Yu., Kamenev A.A. The role of heteroepitaxy in the development of new thin-film oxide-based functional materials. *Uspekhi khimii*. 2004;73(9):932–939 (in Russ..)]
11. Yurasov A.N., Telegin A.V., Sukhorukov Yu.P. Model of magnetorefractive effect in manganites within the effective medium theory. *Phys. Solid State*. 2016;58(4):674–677. <https://doi.org/10.1134/S1063783416040326>
[Original Russian Text: Yurasov A.N., Telegin A.V., Sukhorukov Yu.P. Model of magnetorefractive effect in manganites within the effective medium theory. *Fizika tverdogo tela (FTT)*. 2016;58(4):656–660 (in Russ..)]
12. Bykov I.V., Gan'shina E.A., Granovskii A.B., et al. Magnetorefractive effect in granular alloys with tunnel magnetoresistance. *Phys. Solid State*. 2005;47(2):281–286. <https://doi.org/10.1134/1.1866407>
[Original Russian Text: Bykov I.V., Gan'shina E.A., Granovskii A.B., Gushchin V.S., Kozlov A.A., Masumoto T., Onuma S. Magnetorefractive effect in granular alloys with tunnel magnetoresistance. *Fizika tverdogo tela (FTT)*. 2005;47(2):268–273 (in Russ..)]
13. Telegin A.V., Sukhorukov Yu.P., Nosov A.P., et al. Magnetorefractive and magneto-optical Kerr effect in $\text{La}_{2/3}\text{Ba}_{1/3}\text{MnO}_3$ films at room temperature. *Phys. Solid State*. 2017;59(2):292–297. <https://doi.org/10.1134/S1063783417020305>
[Original Russian Text: Telegin A.V., Sukhorukov Yu.P., Nosov A.P., Bessonova V.A., Gan'shina E.A. Magnetorefractive and magneto-optical Kerr effect in $\text{La}_{2/3}\text{Ba}_{1/3}\text{MnO}_3$ films at room temperature. *Fizika tverdogo tela (FTT)*. 2017;59(2):284–289 (in Russ..)] <https://doi.org/10.21883/FTT.2017.02.44049.303>
14. Nagaev E.L. Lanthanum manganites and other giant magnetoresistance magnetic conductors. *Phys. Usp.* 1996;39(8):781–805. <https://doi.org/10.1070/PU1996v039n08ABEH000161>
[Original Russian Text: Nagaev E.L. Lanthanum manganites and other giant magnetoresistance magnetic conductors. *Uspekhi fizicheskikh nauk*. 1996;166(8):833–858 (in Russ..)] <https://doi.org/10.3367/UFNr.0166.199608b.0833>
15. Sukhorukov Yu.P., Telegin A.V., Gan'shina E.A., et al. Tunneling of spin-polarized charge carriers in $\text{La}_{0.8}\text{Ag}_{0.1}\text{MnO}_{3+\delta}$ film with variant structure: Magnetotransport and magneto-optical data. *Tech. Phys. Lett.* 2005;31(6):484–487. <https://doi.org/10.1134/1.1969772>
[Original Russian Text: Sukhorukov Yu.P., Telegin A.V., Gan'shina E.A., Lokareva N.N., Kaul' A.R., Gorbenko O.Yu., Mostovshchikova E.N., Mel'nikov O.V., Vinogradov A.N. Tunneling of spin-polarized charge carriers in $\text{La}_{0.8}\text{Ag}_{0.1}\text{MnO}_{3+\delta}$ film with variant structure: Magnetotransport and magneto-optical data. *Pis'ma v Zhurnal tekhnicheskoi fiziki*. 2005;31(11):78–87 (in Russ..)]
16. Bessonova V.A., Telegin A.V., Nosov A.P., et al. Features of absorption of thin films $\text{La}_{0.69}\text{Ba}_{0.31}\text{MnO}_{3-d}$ obtained using the method of pulsed laser deposition. *Opt. Spectroscopy*. 2022;130(9):1097–1103. <http://doi.org/10.21883/EOS.2022.09.54826.3223-22>
[Original Russian Text: Bessonova V.A., Telegin A.V., Nosov A.P., Sukhorukov Yu.P. Features of absorption of thin films $\text{La}_{0.69}\text{Ba}_{0.31}\text{MnO}_{3-d}$ obtained using the method of pulsed laser deposition. *Optika i spektroskopiya*. 2022;130(9):1365–1371 (in Russ..)] <https://doi.org/10.21883/OS.2022.09.53296.3223-22>
17. Granovskii A.B., Sukhorukov Y.P., Telegin A.V., et al. Giant magnetorefractive effect in $\text{La}_{0.7}\text{Ca}_{0.3}\text{MnO}_3$ films. *J. Exp. Theor. Phys.* 2011;112(1):77–86. <https://doi.org/10.1134/S106377611005105X>
[Original Russian Text: Granovskii A.B., Sukhorukov Yu.P., Telegin A.V., Bessonov V.D., Gan'shina E.A., Kaul' A.R., Korsakov I.E., Gorbenko O.Yu., Gonzales Kh. Giant magnetorefractive effect in $\text{La}_{0.7}\text{Ca}_{0.3}\text{MnO}_3$ films. *Zhurnal Eksperimental'noi i Teoreticheskoi Fiziki*. 2011;139(1):90–100 (in Russ..)]
18. Akimov G.Ya., Prilipko S.Yu., Revenko Yu.F., Timchenko V.M. Specific physical properties of nanocrystalline $(\text{La}_{0.65}\text{Sr}_{0.35})_{0.8}\text{Mn}_{1.2}\text{O}_{3+\Delta}$ samples obtained by cold isostatic pressing. *Phys. Solid State*. 2009;51(4):770–772. <https://doi.org/10.1134/S1063783409040210>
[Original Russian Text: Akimov G.Ya., Prilipko S.Yu., Revenko Yu.F., Timchenko V.M. Features of physical properties of nanocrystalline samples of $(\text{La}_{0.65}\text{Sr}_{0.35})_{0.8}\text{Mn}_{1.2}\text{O}_{3+\Delta}$ obtained using cold isostatic pressing. *Fizika tverdogo tela (FTT)*. 2009;51(4):727–728 (in Russ..)]
19. Yurasov A.N., Sayfulina D.A., Bakhvalova T.N. Magnetorefractive effect in metallic Co/Pt nanostructures. *Russian Technological Journal*. 2024;12(2):57–66. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-2-57-66>
20. Gladyshev I.V. Reflection of light from multilayer structures, including both coherent and incoherent layers. In: *Optical Technologies, Materials and Systems (Optotech 2024): Conference Proceedings*. Moscow: 2024. P. 520–525 (in Russ..)

21. Gladyshev I.V., Yurasov A.N., Yashin M.M. Contribution of interference to the magneto-optical transverse Kerr effect in white light. *Russian Technological Journal*. 2024;12(6):59–68. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-6-59-68>
22. Gan'shina E.A., Garshin V.V., Perova N.N., et al. Magneto-optical Kerr Spectroscopy of Nanocomposites. *J. Exp. Theor. Phys.* 2023;137(4):572–581. <https://doi.org/10.1134/S1063776123100151>
[Original Russian Text: Gan'shina E.A., Garshin V.V., Perova N.N., Pripechenkov I.M., Yurasov A.N., Yashin M.M., Ryl'kov V.V., Granovskii A.B. Magneto-optical Kerr Spectroscopy of Nanocomposites. *Zhurnal Eksperimental'noi i Teoreticheskoi Fiziki*. 2023;164(4):662–672 (in Russ.). <https://doi.org/10.31857/S0044451023100188>]

Об авторах

Бахвалова Татьяна Николаевна, преподаватель, кафедра наноэлектроники, Институт перспективных технологий и индустриального программирования, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: bahvalova@mirea.ru. ResearcherID ITW-2747-2023, Scopus Author ID 35145196400, <https://orcid.org/0000-0001-7595-785X>

Юрасов Алексей Николаевич, д.ф.-м.н., профессор, кафедра наноэлектроники, Институт перспективных технологий и индустриального программирования, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: alexey_yurasov@mail.ru. ResearcherID M-3113-2016, Scopus Authors ID 6602974416, SPIN-код РИНЦ 4259-8885, <https://orcid.org/0000-0002-9104-3529>

Яшин Максим Михайлович, к.ф.-м.н., доцент, кафедра наноэлектроники, Институт перспективных технологий и индустриального программирования, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: ihkamax@mail.ru. ResearcherID G-6809-2017, Scopus Author ID 57210607470, SPIN-код РИНЦ 2438-6135, <https://orcid.org/0000-0001-8022-9355>

Бессонова Валентина Анатольевна, младший научный сотрудник, ФГБУН «Институт физики металлов имени М.Н. Михеева Уральского отделения Российской академии наук» (ИФМ УрО РАН) (620108, Россия, Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, д. 18). E-mail: valentina.a.bessonova@mail.ru. Scopus Author ID 55510248600, ResearcherID K-5887-2013, SPIN-код РИНЦ 7874-2518, <https://orcid.org/0000-0002-2163-4913>

About the Authors

Tatiana N. Bakhvalova, Lecturer, Department of Nanoelectronics, Institute for Advanced Technologies and Industrial Programming, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: bahvalova@mirea.ru. ResearcherID ITW-2747-2023, Scopus Author ID 35145196400, <https://orcid.org/0000-0001-7595-785X>

Alexey N. Yurasov, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Department of Nanoelectronics, Institute for Advanced Technologies and Industrial Programming, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: alexey_yurasov@mail.ru. ResearcherID M-3113-2016, Scopus Authors ID 6602974416, RSCI SPIN-code 4259-8885, <https://orcid.org/0000-0002-9104-3529>

Maxim M. Yashin, Cand. Sci. (Phys.–Math.), Associate Professor, Department of Nanoelectronics, Institute for Advanced Technologies and Industrial Programming, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: ihkamax@mail.ru. ResearcherID G-6809-2017, Scopus Author ID 57210607470, RSCI SPIN-code 2438-6135, <https://orcid.org/0000-0001-8022-9355>

Valentina A. Bessonova, Junior Researcher, M.N. Mikheev Institute of Metal Physics of Ural Branch of Russian Academy of Sciences (IMP UB RAS) (18, S. Kovalevskaya ul., Yekaterinburg, 620108 Russia). E-mail: valentina.a.bessonova@mail.ru. Scopus Author ID 55510248600, ResearcherID K-5887-2013, RSCI SPIN-code 7874-2518, <https://orcid.org/0000-0002-2163-4913>

Математическое моделирование
Mathematical modeling

УДК 531.32

<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2026-14-1-64-81>

EDN JUUJON



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Математическое моделирование орбитального движения искусственного спутника Луны с использованием переменных Делоне

О.В. Мешкова, А.В. Шатина ©

МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, 119454 Россия

© Автор для переписки, e-mail: shatina_av@mail.ru

• Поступила: 19.05.2025 • Доработана: 10.07.2025 • Принята к опубликованию: 07.11.2025

Резюме

Цели. Целью работы является вывод и исследование системы уравнений орбитального движения искусственного спутника Луны (ИСЛ) в гравитационном поле притягивающей планеты в переменных Делоне, обеспечивающей снижение вычислительной сложности при моделировании долгосрочных траекторий, а также анализ стационарных орбит Луны с учетом гравитационного влияния Земли как третьего тела.

Методы. Используются методы аналитической механики, асимптотические методы, в частности, метод усреднения, методы теории устойчивости, численные методы для интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Результаты. Получены гамильтониан и уравнения движения ИСЛ в канонических переменных Делоне, на основе которых выведены усредненная и неусредненная системы уравнений движения ИСЛ в виде автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений относительно следующих параметров орбиты: большой полуоси, эксцентриситета, наклона, долготы восходящего узла, долготы перицентра от восходящего узла, истинных аномалий. Получена замкнутая система дифференциальных уравнений второго порядка относительно эксцентриситета орбиты и долготы перицентра от восходящего узла. Найдены ее стационарные решения, исследована их устойчивость, определены условия для существования стационарных движений в зависимости от значения константы первого интеграла усредненной системы уравнений. Построены интегральные кривые и фазовые портреты, демонстрирующие взаимосвязь параметров орбиты. Проведен сравнительный анализ с данными JPL Horizons¹ и ранее опубликованными работами.

Выводы. Разработанный метод позволяет оптимизировать проектирование траекторий для будущих лунных миссий (например, Artemis, «Луна-Глоб»), обеспечивая баланс между точностью и вычислительной эффективностью. Результаты подтверждают перспективность использования переменных Делоне для анализа долгосрочной орбитальной динамики в гравитационных полях сложной конфигурации.

¹ JPL Horizons – онлайн-сервис Национального управления по аэронавтике и исследованию космического пространства (США), который предоставляет доступ к ключевым данным о Солнечной системе и позволяет вычислять точные траектории объектов в ней. <https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons/>. Дата обращения 04.03.2025. [JPL Horizons is an online service from the National Aeronautics and Space Administration (USA) that provides access to key data about the solar system and enables the calculation of precise trajectories of objects in it. <https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons/>. Accessed March 04, 2025.]

Ключевые слова: искусственный спутник Луны, гравитационное поле притягивающего центра, гамильтониан, канонические переменные Делоне, система уравнений орбитального движения, параметры орбиты

Для цитирования: Мешкова О.В., Шатина А.В. Математическое моделирование орбитального движения искусственного спутника Луны с использованием переменных Делоне. *Russian Technological Journal*. 2026;14(1):64–81. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2026-14-1-64-81>, <https://www.elibrary.ru/JUUJON>

Прозрачность финансовой деятельности: Авторы не имеют финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

RESEARCH ARTICLE

Mathematical modeling of the orbital motion of an artificial satellite of the Moon using Delaunay variables

Olga V. Meshkova, Albina V. Shatina[®]

MIREA – Russian Technological University, Moscow, 119454 Russia

[®] Corresponding author, e-mail: shatina_av@mail.ru

• Submitted: 19.05.2025 • Revised: 10.07.2025 • Accepted: 07.11.2025

Abstract

Objectives. This work aims to derive and study the system of equations of orbital motion of an artificial satellite of the Moon (ASM) in the gravitational field of an attracting planet using Delaunay variables. This will ensure a reduction in computational complexity when modeling long-term trajectories, as well as provide an analysis of stationary orbits of the Moon taking into account the gravitational influence of the Earth as a third body.

Methods. The study uses analytical mechanics, asymptotic methods, in particular, the averaging method, methods of stability theory, numerical methods for integrating systems of ordinary differential equations.

Results. The Hamiltonian and equations of motion of the ASM in canonical Delaunay variables are obtained. Averaged and non-averaged systems of equations of motion of the ASM are derived in the form of autonomous systems of ordinary differential equations with respect to the following orbital parameters: semi-major axis, eccentricity, inclination, longitude of the ascending node, longitude of the pericenter from the ascending node, and true anomalies. A closed system of differential equations of the second order with respect to the orbital eccentricity and the pericenter longitude from the ascending node is obtained. Its stationary solutions are found, their stability is investigated, and conditions for the existence of stationary motions are determined depending on the value of the constant of the first integral of the averaged system of equations. Integral curves and phase portraits were constructed to demonstrate the interrelationship of orbital parameters. A comparative analysis was conducted using JPL Horizons² data and previously published works.

Conclusions. The method developed enables the design of trajectories for future lunar missions to be optimized (e.g., Artemis, Luna-Glob), thus providing a balance between accuracy and computational efficiency. The results confirm the prospects of using Delaunay variables for analyzing long-term orbital dynamics in gravitational fields of complex configuration.

Keywords: artificial satellite of the Moon, gravitational field of the attracting center, Hamiltonian, canonical Delaunay variables, system of equations of orbital motion, orbital parameters

² JPL Horizons is an online service from the National Aeronautics and Space Administration (USA) that provides access to key data about the solar system and enables the calculation of precise trajectories of objects in it. <https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons/>. Accessed March 04, 2025.

For citation: Meshkova O.V., Shatina A.V. Mathematical modeling of the orbital motion of an artificial satellite of the Moon using Delaunay variables. *Russian Technological Journal*. 2026;14(1):64–81. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2026-14-1-64-81>, <https://www.elibrary.ru/JUUJON>

Financial disclosure: The authors have no financial or proprietary interest in any material or method mentioned.

The authors declare no conflicts of interest.

ВВЕДЕНИЕ

Математическое моделирование орбитального движения искусственного спутника Луны (ИСЛ) представляет собой одну из наиболее актуальных задач в космических исследованиях. Актуальность работы усиливается растущим интересом к долгосрочным лунным проектам, включая программы «Артемида» (Artemis NASA³, США, 2022 г.) [1], миссии Chang'E-5 и Chang'E-6 (CNSA⁴, КНР, 2020 г. и 2024 г.) [2, 3], Chandrayaan-3 (ISRO⁵, Индия, 2023 г.) [4, 5], российскую лунную программу [6], предусматривающую развертывание орбитальной станции. В контексте активизации лунной программы в России, которая включает в себя запуск новых миссий и исследовательских проектов, точные модели движения спутников становятся особенно востребованы. Луна рассматривается не только как объект научного изучения, но и как потенциальная база для дальнейших космических исследований [6].

Орбитальное движение вокруг Луны подчиняется законам Кеплера, однако существенные отклонения от идеализированной модели объясняются влиянием внешних возмущений. Основы анализа таких возмущений изложены в трудах Лапласа и Лагранжа, которые предложили методы решения уравнений движения для систем многих тел⁶.

Исследования эволюции орбит спутников планет при дважды усредненной возмущающей функции были выполнены в 60-х гг. XX в. Подробное исследование этой задачи началось с открытия нового первого интеграла усредненной системы уравнений. Это открытие было почти одновременно сделано в 1961 г. советским ученым М.Л. Лидовым [7] и американским ученым Y. Kozai [8] и получило название эффекта Лидова – Козаи. Впоследствии картина эволюции орбитального движения спутника, основанная на указанном эффекте, была развита в работах М.А. Вашковьяка [9, 10]. Лидов М.Л. впервые подробно исследовал влияние гравитационных

возмущений на движение спутников в системах с несколькими телами. В своих работах [7, 11] он рассмотрел эффекты, вызванные гравитацией третьего тела, которые приводят к долгопериодическим изменениям орбитальных параметров. Кроме того, он предложил методы упрощения сложных уравнений движения для практического применения.

В свою очередь, Т.А. Эли [12] сосредоточился на численном моделировании орбитального движения спутников Луны с учетом значимых внешних возмущений. В исследованиях, опубликованных в начале 2000-х гг., он рассматривал как краткосрочные, так и долгосрочные изменения орбитальных параметров под воздействием гравитации Земли, Солнца и масконов Луны. Эли Т.А. показал, что для спутников на низких орбитах вокруг Луны (low lunar orbit, LLO) основное влияние оказывают гравитационные аномалии Луны, тогда как для спутников на высоких орбитах (high lunar orbit, HLO) доминируют возмущения от Земли и Солнца.

В последние годы значительный прогресс достигнут в моделировании гравитационных аномалий Луны. В исследовании [13] продемонстрировано применение сферических гармоник высокого порядка для учета масконов, что критично для низких лунных орбит. Работа [14] посвящена анализу устойчивости орбит в рамках миссии «Артемида», где авторы используют гибридные методы (аналитические и численные) для прогнозирования долгосрочной эволюции. В 2022 г. в [15] предложены алгоритмы машинного обучения для ускорения расчетов орбитальных возмущений, что особенно актуально для задач в реальном времени. Кроме того, миссия Chandrayaan-3 [4, 5] предоставила новые данные о динамике высокоэллиптических орбит, подтверждающие теоретические модели. В работе [16] предложен подход к проектированию замороженных низких лунных орбит, основанный на последовательном применении неградиентных методов, байесовской оптимизации и метода Нелдера – Мида.

Движение спутника Луны подвержено различным возмущениям, включая гравитационные влияния Земли, Солнца и других небесных тел, несферичность Луны, влияние масконов (концентраций массы) в ее литосфере, давление солнечного излучения, взаимодействие с космической средой и другие. В данной статье внимание будет сосредоточено на системе уравнений пространственного возмущенного движения ИСЛ, вызванного гравитационным

³ National Aeronautics and Space Administration – Национальное управление по аэронавтике и исследованию космического пространства (США).

⁴ China National Space Administration – Китайское национальное космическое управление.

⁵ Indian Space Research Organization – Индийская организация космических исследований.

⁶ Lagrange J.-L. *Mécanique Analytique*. Paris: Veuve Desaint, 1788.

полем Земли. Указанное возмущение является основным для спутников на высоких орбитах.

Современные системы расчета траекторий опираются на численные методы высокой сложности, требующие значительных ресурсов. Предложенная модель, основанная на уравнениях орбитального движения спутника в переменных Делоне, обеспечивает сопоставимую точность при сокращении времени вычислений. Это делает метод перспективным для предварительного анализа орбит на этапе проектирования миссий.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ГАМИЛЬТониАН

Рассмотрим модельную задачу о движении системы «небесное тело – спутник» в гравитационном поле притягивающего центра. Небесное тело, спутник, притягивающий центр будем моделировать материальными точками P, S, O с массами m_2, m_3, m_1 соответственно (рис. 1). Будем считать, что $m_3 \ll m_2 \ll m_1$. Радиус-вектор центра масс C_0 системы «небесное тело – спутник» обозначим вектором \mathbf{R}_1 , а взаимное положение точек P и S – вектором \mathbf{R}_2 , т.е. $\mathbf{R}_1 = \overline{OC_0}$, $\mathbf{R}_2 = \overline{PS}$. Будем считать, что $|\mathbf{R}_1| \gg |\mathbf{R}_2|$.

Введем инерциальную систему координат $OXYZ$ и оси Кёнига $C_0\xi_1\xi_2\xi_3$. Радиус-векторы точек P и S выражаются через $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$ следующим образом:

$$\overline{OP} = \mathbf{R}_1 - \frac{m_3}{m_2 + m_3} \mathbf{R}_2, \quad \overline{OS} = \mathbf{R}_1 + \frac{m_2}{m_2 + m_3} \mathbf{R}_2. \quad (1.1)$$

Кинетическая энергия системы «небесное тело – спутник» определяется равенством:

$$T = \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{d \overline{OP}}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m_3 \left(\frac{d \overline{OS}}{dt} \right)^2.$$

С учетом соотношений (1.1) получим:

$$T = \frac{1}{2} (m_2 + m_3) \dot{\mathbf{R}}_1^2 + \frac{1}{2} m_r \dot{\mathbf{R}}_2^2, \quad m_r = \frac{m_2 m_3}{m_2 + m_3}, \quad (1.2)$$

m_r – присоединенная масса.

Потенциальная энергия сил взаимного притяжения в поставленной задаче представляется в виде:

$$\Pi = - \frac{f m_1 m_2}{\left| \mathbf{R}_1 - \frac{m_3}{m_2 + m_3} \mathbf{R}_2 \right|} - \frac{f m_1 m_3}{\left| \mathbf{R}_1 + \frac{m_2}{m_2 + m_3} \mathbf{R}_2 \right|} - \frac{f m_2 m_3}{|\mathbf{R}_2|}, \quad (1.3)$$

где $f = 6.672 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \text{ кг}^{-1} \text{ с}^{-2}$ – универсальная гравитационная постоянная.

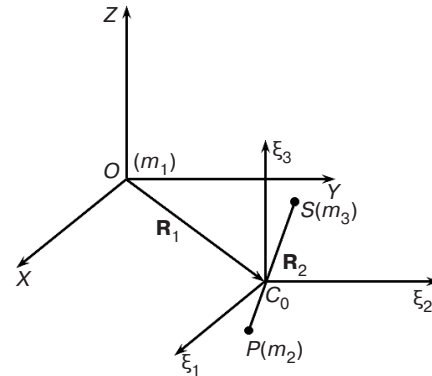


Рис. 1. Система «небесное тело – спутник»

С учетом того условия, что расстояние между небесным телом и спутником мало по сравнению с длиной радиус-вектора центра масс C_0 , а также используя формулы для производящей функции многочленов Лежандра $P_n(x)$ [17], сохраняя члены второго порядка малости по R_2/R_1 , преобразуем выражение (1.3). Потенциал (1.3) примет следующий вид:

$$\Pi = - \frac{f m_1 (m_2 + m_3)}{R_1} - \frac{f m_2 m_3}{R_2} - \frac{f m_1 m_r}{2 R_1} (3 \cos^2 \psi_{12} - 1) \frac{R_2^2}{R_1^2}. \quad (1.4)$$

Здесь $R_1 = |\mathbf{R}_1|$, $R_2 = |\mathbf{R}_2|$, ψ_{12} – угол между векторами $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$.

В качестве базовой задачи рассмотрим задачу о движении спутника S_0 массой m (материальной точки) в гравитационном поле притягивающего центра Q . В этом случае спутник движется по кеплеровской орбите – одному из конических сечений. Остановимся на случае эллиптической орбиты.

Для определения положения спутника на орбите вводятся следующие параметры: a – большая полуось эллипса; e – эксцентриситет; i – наклонение орбиты спутника; h – долгота восходящего узла (угол между Qx и линией QN_1 пересечения плоскости орбиты спутника с плоскостью Qxy); g – долгота перицентра π от восходящего узла (ближайшей к центру Q точки орбиты спутника); ϑ – истинная аномалия, угол между направлением на перицентр π и вектором \mathbf{R} , $\mathbf{G} = \mathbf{R} \times m \dot{\mathbf{R}}$ – вектор момента количества движения точки S_0 (рис. 2).

Величины h, i, g, e, n, a в невозмущенной задаче сохраняют постоянное значение, а истинная аномалия ϑ является функцией времени:

$$\dot{\vartheta} = \frac{(1 + e \cos \vartheta)^2}{(1 - e^2)^{3/2}} n, \quad n = \sqrt{\frac{f_0}{a^3}},$$

$f_0 = f M_0$, M_0 – масса притягивающего центра.

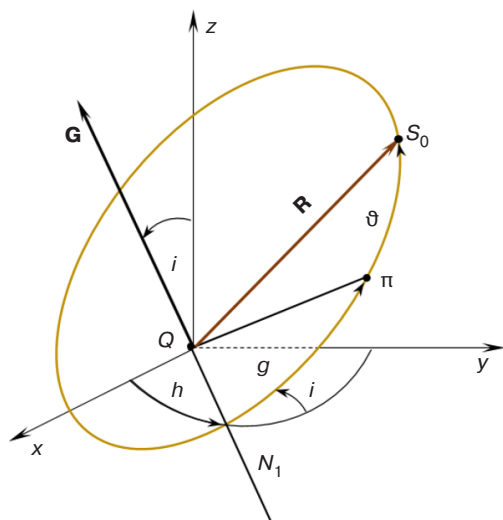


Рис. 2. Элементы орбиты спутника

Кинетическая и потенциальная энергии в этом случае имеют вид:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{R}}^2, \quad \Pi = -\frac{f_0 m}{R}. \quad (1.5)$$

В небесной механике для описания орбитально-го движения небесных тел используют канонические переменные Делоне L, G, H, l, g, h , которые связаны с модулем R радиус-вектора спутника и элементами a, e, i следующими равенствами [18–20]:

$$L = m\sqrt{f_0 a}, \quad G = m\sqrt{f_0 a(1-e^2)}, \\ H = m\sqrt{f_0 a(1-e^2)} \cos i, \quad R = \frac{G^2}{f_0 m^2 (1+e \cos \vartheta)}.$$

Здесь g, h, i, ϑ – определенные ранее параметры орбиты, l – средняя аномалия. Зависимость истинной аномалии ϑ от переменных l, L, G осуществляется неявно с помощью эксцентрисческой аномалии w через следующие соотношения:

$$\cos w = \frac{e + \cos \vartheta}{1 + e \cos \vartheta}, \quad l = w - e \sin w.$$

Гамильтониан невозмущенной задачи с кинетической и потенциальной энергиями (1.5) в переменных Делоне имеет простой вид:

$$\mathcal{H} = -\frac{f_0^2 m^3}{2L^2}.$$

Вернемся к поставленной задаче с кинетической энергией (1.2) и потенциальной энергией (1.4). Движение механической системы будем описывать посредством канонических переменных Делоне $L_k, G_k, H_k, l_k, g_k, h_k$, соответствующих

вектору \mathbf{R}_k ($k = 1, 2$). Гамильтониан задачи с учетом этого примет вид:

$$\mathcal{H} = -\frac{(fm_1)^2 (m_2 + m_3)^3}{2L_1^2} - \frac{f^2 (m_2 + m_3)^2 m_r^3}{2L_2^2} + \mathcal{H}_1, \quad (1.6)$$

$$\mathcal{H}_1 = -\frac{1}{2} \frac{fm_1 m_r}{R_1} (3 \cos^2 \vartheta_{12} - 1) \frac{R_2^2}{R_1^2}. \quad (1.7)$$

В формуле (1.7) модули векторов $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$ выражаются через переменные Делоне следующим образом ($k = 1, 2$):

$$R_1 = \frac{G_1^2}{fm_1 (m_2 + m_3)^2 (1 + e_1 \cos \vartheta_1)}, \quad (1.8)$$

$$R_2 = \frac{G_2^2}{f(m_2 + m_3) m_r^2 (1 + e_2 \cos \vartheta_2)}, \quad e_k = \sqrt{1 - \frac{G_k^2}{L_k^2}}.$$

При этом имеют место равенства:

$$\cos w_k = \frac{e_k + \cos \vartheta_k}{1 + e_k \cos \vartheta_k}, \quad l_k = w_k - e_k \sin w_k, \quad k = 1, 2.$$

Для больших полуосей орбит и косинуса угла наклона выражения через переменные Делоне имеют вид:

$$a_1 = \frac{L_1^2}{fm_1 (m_2 + m_3)^2}, \quad a_2 = \frac{L_2^2}{f(m_2 + m_3) m_r^2}, \quad (1.9) \\ \cos i_2 = \frac{H_2}{G_2}.$$

В силу условий задачи можно считать, что точки P и S не влияют на движение центра масс C_0 , т.е. точка C_0 движется по невозмущенной кеплеровской эллиптической орбите в плоскости OXY . Выпишем в инерциальной системе координат $OXYZ$ векторы $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$:

$$\mathbf{R}_1 = R_1 \boldsymbol{\eta}_1, \quad \boldsymbol{\eta}_1 = (\cos(g_1 + \vartheta_1), \sin(g_1 + \vartheta_1), 0),$$

$$R_1 = \frac{a_1 (1 - e_1^2)}{1 + e_1 \cos \vartheta_1}, \quad (1.10)$$

$$\dot{\vartheta}_1 = \frac{(1 + e_1 \cos \vartheta_1)^2}{(1 - e_1^2)^{3/2}} n_1, \quad n_1 = \sqrt{\frac{fm_1}{a_1^3}}.$$

$$\mathbf{R}_2 = R_2 \boldsymbol{\eta}_2, \quad \boldsymbol{\eta}_2 = (\eta_{2x}, \eta_{2y}, \eta_{2z}), \\ \eta_{2x} = \cos h_2 \cos(g_2 + \vartheta_2) - \sin h_2 \cos i_2 \sin(g_2 + \vartheta_2), \\ \eta_{2y} = \sin h_2 \cos(g_2 + \vartheta_2) + \cos h_2 \cos i_2 \sin(g_2 + \vartheta_2), \\ \eta_{2z} = \sin i_2 \sin(g_2 + \vartheta_2). \quad (1.11)$$

В рассматриваемой ограниченной постановке первое слагаемое в правой части формулы (1.6) является постоянной величиной. Поэтому гамильтониан задачи запишем в виде:

$$\mathcal{H} = -\frac{f^2(m_2 + m_3)^2 m_r^3}{2L_2^2} + \mathcal{H}_1. \quad (1.12)$$

С учетом (1.7)–(1.11) возмущающая часть гамильтониана \mathcal{H}_1 в формуле (1.12) примет вид:

$$\mathcal{H}_1 = \frac{f^2 m_1^4 G_2^4 (m_2 + m_3)^4 (1 + e_1 \cos \vartheta_1)^3}{2G_1^6 m_r^3 (1 + e_2 \cos \vartheta_2)^2} (1 - 3 \cos^2 \psi_{12}), \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} \cos \psi_{12} = (\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) = & \cos(g_1 + \vartheta_1)[\cos h_2 \cos(g_2 + \vartheta_2) - \sin h_2 \cos i_2 \sin(g_2 + \vartheta_2)] + \\ & + \sin(g_1 + \vartheta_1)[\sin h_2 \cos(g_2 + \vartheta_2) + \cos h_2 \cos i_2 \sin(g_2 + \vartheta_2)]. \end{aligned}$$

2. ЭВОЛЮЦИЯ ОРБИТАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ СПУТНИКА

Проведем процедуру усреднения гамильтониана по «быстрым» угловым переменным – средним аномалиям l_1, l_2 :

$$\langle (*) \rangle_{l_1, l_2} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (*) dl_1 dl_2 = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (*) \frac{(1 - e_1^2)^{3/2}}{(1 + e_1 \cos \vartheta_1)^2} \cdot \frac{(1 - e_2^2)^{3/2}}{(1 + e_2 \cos \vartheta_2)^2} d\vartheta_1 d\vartheta_2.$$

Возмущающая часть гамильтониана (1.13) в результате выполненной процедуры усреднения примет вид:

$$\langle \mathcal{H}_1 \rangle_{l_1, l_2} = \frac{f^2 m_1^4 (m_2 + m_3)^4}{16m_r^3} \cdot \frac{L_2^4}{G_1^3 L_1^3} \left\{ 2(1 - 3 \cos^2 i_2) + 3e_2^2 (1 - 3 \cos^2 i_2 - 5 \cos(2g_2) \sin^2 i_2) \right\}. \quad (2.1)$$

Выражая эксцентриситет e_2 и наклонение i_2 через переменные L_2, G_2, H_2 согласно формулам (1.8), (1.9) и учитывая формулы (1.12), (2.1), перейдем к усредненному гамильтониану в переменных Делоне:

$$\langle \mathcal{H} \rangle_{l_1, l_2} = -\frac{f^2 (m_2 + m_3)^2 m_r^3}{2L_2^2} + \frac{f^2 m_1^4 (m_2 + m_3)^4}{16m_r^3} \cdot \frac{L_2^4}{G_1^3 L_1^3} \left\{ \left(1 - 3 \frac{H_2^2}{G_2^2} \right) \left(5 - 3 \frac{G_2^2}{L_2^2} \right) - 15 \cos(2g_2) \left(1 - \frac{H_2^2}{G_2^2} \right) \left(1 - \frac{G_2^2}{L_2^2} \right) \right\}. \quad (2.2)$$

Таким образом, получено усредненное по быстрым угловым переменным представление гамильтониана. Усредненные уравнения движения записываются в виде системы канонических уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{L}_2 = -\frac{\partial \langle \mathcal{H}_1 \rangle_{l_1, l_2}}{\partial l_2}, \quad \dot{G}_2 = -\frac{\partial \langle \mathcal{H}_1 \rangle_{l_1, l_2}}{\partial g_2}, \quad \dot{H}_2 = -\frac{\partial \langle \mathcal{H}_1 \rangle_{l_1, l_2}}{\partial h_2}, \quad \dot{l}_2 = \frac{\partial \langle \mathcal{H}_1 \rangle_{l_1, l_2}}{\partial L_2} + \frac{f^2 (m_2 + m_3)^2 m_r^3}{L_2^3}, \\ \dot{g}_2 = \frac{\partial \langle \mathcal{H}_1 \rangle_{l_1, l_2}}{\partial G_2}, \quad \dot{h}_2 = \frac{\partial \langle \mathcal{H}_1 \rangle_{l_1, l_2}}{\partial H_2}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

С учетом формулы (2.2) эволюционная система уравнений движения спутника в переменных Делоне (2.3) имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{L}_2 = 0, \quad \dot{H}_2 = 0, \\ \dot{G}_2 = -\frac{15 f^2 m_1^4 (m_2 + m_3)^4}{8m_r^3} \cdot \frac{L_2^4}{G_1^3 L_1^3} \left(1 - \frac{H_2^2}{G_2^2} \right) \left(1 - \frac{G_2^2}{L_2^2} \right) \sin(2g_2), \\ \dot{g}_2 = \frac{6 f^2 m_1^4 (m_2 + m_3)^4}{16m_r^3} \cdot \frac{L_2^4}{G_1^3 L_1^3 G_2} \left\{ 5 \frac{H_2^2}{G_2^2} (1 - \cos(2g_2)) - \frac{G_2^2}{L_2^2} (1 - 5 \cos(2g_2)) \right\}, \end{aligned}$$

$$\dot{h}_2 = \frac{-6f^2 m_1^4 (m_2 + m_3)^4}{16m_1^3 G_2} \cdot \frac{L_2^4}{G_1^3 L_1^3} \left(\frac{H_2}{G_2} \right) \left\{ 2 + \left(1 - \frac{G_2^2}{L_2^2} \right) (3 - 5 \cos(2g_2)) \right\},$$

$$\dot{i}_2 = \frac{f^2 (m_2 + m_3)^2 m_r^3}{L_2^3} + \frac{f^2 m_1^4 (m_2 + m_3)^4}{16m_1^3 G_1^3 L_1^3} 2L_2^3 \left\{ \left(1 - 3 \frac{H_2^2}{G_2^2} \right) \left(10 - 3 \frac{G_2^2}{L_2^2} \right) - 15 \cos(2g_2) \left(1 - \frac{H_2^2}{G_2^2} \right) \left(2 - \frac{G_2^2}{L_2^2} \right) \right\}.$$

Используя следующие обратные соотношения $H_2^2/G_2^2 = \cos^2 i_2$, $1 - (H_2^2/G_2^2) = \sin^2 i_2$, $G_2^2/L_2^2 = 1 - e_2^2$, полученные из уравнений (1.8), (1.9), выведем усредненную систему уравнений движений спутника в переменных Делоне (относительно «медленных» переменных):

$$\begin{aligned} \dot{L}_2 &= 0, \quad \dot{H}_2 = 0, \\ \dot{G}_2 &= -\frac{15fm_1m_r}{8} \cdot \frac{a_2^2 e_2^2}{a_1^3 (1-e_1^2)^{3/2}} \sin^2 i_2 \sin(2g_2), \\ \dot{i}_2 &= \frac{\sqrt{f(m_2+m_3)}}{a_2^{3/2}} + \frac{m_1 \sqrt{f}}{8\sqrt{(m_2+m_3)}} \cdot \frac{a_2^{3/2}}{a_1^3 (1-e_1^2)^{3/2}} \left\{ (-2 + 3\sin^2 i_2)(7 + 3e_2^2) - 15 \cos(2g_2) \sin^2 i_2 (1 + e_2^2) \right\}, \quad (2.4) \\ \dot{g}_2 &= \frac{3m_1 \sqrt{f}}{8\sqrt{(m_2+m_3)}} \cdot \frac{a_2^{3/2}}{a_1^3 (1-e_1^2)^{3/2} \sqrt{(1-e_2^2)}} \left\{ 4 + e_2^2 (1 - 5 \cos(2g_2)) - 5 \sin^2 i_2 (1 - \cos(2g_2)) \right\}, \\ \dot{h}_2 &= \frac{-3m_1 \sqrt{f}}{8\sqrt{(m_2+m_3)}} \cdot \frac{a_2^{3/2}}{a_1^3 (1-e_1^2)^{3/2} \sqrt{(1-e_2^2)}} \cos i_2 \left\{ 2 + e_2^2 (3 - 5 \cos(2g_2)) \right\}. \end{aligned}$$

Далее выполним преобразования в эволюционной системе уравнений движения для перехода к виду, зависящему от переменных e_2 , i_2 , g_2 , h_2 , а также осуществим переход к безразмерному времени $\tau = n_2 t$, $n_2 = \sqrt{f(m_2+m_3)} a_2^{-3}$. Итоговая система принимает вид:

$$\begin{aligned} a_2' &= 0, \\ e_2' &= \frac{15\mu a_0^3}{8} \cdot \frac{e_2 \sqrt{1-e_2^2}}{(1-e_1^2)^{3/2}} \sin^2 i_2 \sin(2g_2), \\ i_2' &= \frac{-15\mu}{16} \cdot \frac{a_0^3 e_2^2}{\sqrt{1-e_2^2} (1-e_1^2)^{3/2}} \sin(2i_2) \sin(2g_2), \\ l_2' &= 1 + \frac{\mu}{8} \cdot \frac{a_0^3}{(1-e_1^2)^{3/2}} \left\{ (-2 + 3\sin^2 i_2)(7 + 3e_2^2) - 15 \cos(2g_2) \sin^2 i_2 (1 + e_2^2) \right\}, \quad (2.5) \\ g_2' &= \frac{3\mu}{8} \cdot \frac{a_0^3}{(1-e_1^2)^{3/2} \sqrt{1-e_2^2}} \left\{ 4 + e_2^2 (1 - 5 \cos(2g_2)) - 5 \sin^2 i_2 (1 - \cos(2g_2)) \right\}, \\ h_2' &= \frac{-3\mu}{8} \cdot \frac{a_0^3}{(1-e_1^2)^{3/2} \sqrt{1-e_2^2}} \cos i_2 \left\{ 2 + e_2^2 (3 - 5 \cos(2g_2)) \right\}, \end{aligned}$$

где $\mu = \frac{m_1}{m_2 + m_3}$, $a_0^3 = \frac{a_2^3}{a_1^3}$ – массовый коэффициент (отношение массы притягивающего центра к сумме масс небесного тела и спутника) и осевой коэффициент (отношение больших полуосей орбит) соответственно.

Заметим, что значение большой полуоси a_2 не подвержено изменениям в течение времени. Кроме того, правые части системы уравнений (2.5) зависят только от трех переменных: эксцентриситета e_2 , наклона орбиты i_2 , долготы перицентра g_2 . Поэтому второе, третье и пятое уравнения системы отделяются от остальных уравнений, а четвертое и шестое уравнения могут быть проинтегрированы после того, как будут найдены функции $e_2(\tau)$, $i_2(\tau)$, $g_2(\tau)$. Угловая переменная l_2 является «быстрой». По этой переменной было проведено усреднение. Поэтому ее можно исключить из рассмотрения. Система сокращается до четырех основных уравнений:

$$\begin{aligned} e_2' &= \frac{15k}{8} \cdot \frac{e_2 \sqrt{1-e_2^2}}{(1-e_1^2)^{\frac{3}{2}}} \sin^2 i_2 \sin(2g_2), \\ i_2' &= \frac{-15k}{16} \cdot \frac{e_2^2}{\sqrt{1-e_2^2} (1-e_1^2)^{\frac{3}{2}}} \sin(2i_2) \sin(2g_2), \\ g_2' &= \frac{3k}{8} \cdot \frac{1}{(1-e_1^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{1-e_2^2}} \left\{ 4 + e_2^2 (1 - 5 \cos(2g_2)) - 5 \sin^2 i_2 (1 - \cos(2g_2)) \right\}, \\ h_2' &= \frac{-3k}{8} \cdot \frac{\cos i_2}{(1-e_1^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{1-e_2^2}} \left\{ 2 + e_2^2 (3 - 5 \cos(2g_2)) \right\}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где $k = \mu a_0^3$.

Полученная система (2.6) с точностью до постоянного множителя, отвечающего за выбор безразмерного времени, совпадает с системой уравнений, полученной М.Л. Лидовым [7, 8], если пренебречь возмущениями, вызванными нецентральностью поля тяготения Луны. Система уравнений (2.6) имеет первые интегралы [7, 8]:

$$\cos^2 i_2 (1 - e_2^2) = C, \quad (2.7)$$

$$e_2^2 \left(\frac{2}{5} - \sin^2 g_2 \sin^2 i_2 \right) = D. \quad (2.8)$$

Из полученного соотношения (2.7) следует, что при увеличении значения e_2 значение i_2 будет уменьшаться, и наоборот. Перейдем к параметрам системы (2.6):

$$m_1 = 5.9736 \cdot 10^{24} \text{ кг} - \text{масса Земли},$$

$$m_2 = 7.349 \cdot 10^{22} \text{ кг} - \text{масса Луны},$$

$$m_3 = 10^3 \text{ кг} - \text{масса спутника},$$

$$\mu = \frac{m_1}{m_2 + m_3} = \frac{5.9736 \cdot 10^{24}}{7.349 \cdot 10^{22} + 10^3} \approx 81.28453.$$

В первом приближении можно считать, что Луна движется по эллиптической орбите с эксцентриситетом $e_1 = 0.0549$ и большой полуосью геоцентрической орбиты $a_1 = 384400 \cdot 10^3$ м.

Будем рассматривать лунные орбиты с высотами от 500 до 20000 км (от 310 до 12430 миль), на которые гравитация Земли оказывает наибольшее воздействие и приводит к возмущениям орбит. Пусть $a_2 = 6500 \cdot 10^3$ м – большая полуось орбиты спутника, тогда:

$$a_0^3 = \frac{a_2^3}{a_1^3} = \frac{6500 \cdot 10^3}{379739 \cdot 10^3} \approx 0.017117,$$

$$k = \mu a_0^3 \approx 81.28453 \cdot 0.017117 \approx 1.39135.$$

Проинтегрируем полученную систему (2.6) при помощи метода Рунге – Кутты четвертого порядка с постоянным шагом, задав начальные значения: $e_{2_0} = 0.01$, $i_{2_0} = \frac{j\pi}{180}$, $g_{2_0} = 0$, $h_{2_0} = 0$, $j = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 85^\circ$, и на данной основе построим интегральные кривые. На получившихся графиках (рис. 3) наглядно демонстрируется соблюдение взаимосвязи первого интеграла (2.7) рассматриваемой системы. Изменение значения эксцентриситета (степени эллиптичности орбиты) и угла наклона (угол между плоскостью орбиты и определенной эталонной плоскостью) на графике может быть как постепенным, так и резким.

3. СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ ЭВОЛЮЦИОННОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ИСЛ

Замороженные орбиты вокруг Луны, естественных спутников или астероидов представляют большой интерес, поскольку целью нескольких космических миссий является облет таких тел. Замороженными называются орбиты, у которых изменения наклона, эксцентриситета, долготы перицентра от восходящего узла сведены к минимуму. Для нахождения таких орбит найдем стационарные решения системы первых трех уравнений (2.6), определяемые условиями:

$$e'_2 = 0, i'_2 = 0, g'_2 = 0. \quad (3.1)$$

Так как рассматриваются эллиптические орбиты, то значения эксцентриситета e_2 будем ограничивать промежутком $[0; 1)$:

$$0 \leq e_2 < 1. \quad (3.2)$$

Учитывая интеграл (2.7), получим замкнутую автономную систему второго порядка относительно g_2, e_2 :

$$\begin{aligned} e'_2 &= 5k_1 e_2 \sqrt{1-e_2^2} (1-e_2^2 - C) \sin(2g_2), \\ g'_2 &= \frac{k_1}{(1-e_2^2)^{3/2}} \left\{ (1-e_2^2)(4+e_2^2 - 5e_2^2 \cos(2g_2)) - 5(1-e_2^2 - C)(1-\cos(2g_2)) \right\}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь

$$k_1 = \frac{3k}{8(1-e_1^2)^{3/2}}.$$

Найдем стационарные решения системы (3.3), приравняв нулю ее правые части. Учитывая условие (3.2), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} e_2(1-e_2^2 - C) \sin(2g_2) &= 0, \\ (1-e_2^2)(4+e_2^2 - 5e_2^2 \cos(2g_2)) - 5(1-e_2^2 - C)(1-\cos(2g_2)) &= 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Заметим, что согласно равенству (2.7), значение константы C ограничено отрезком $[0; 1]$.

Из первого уравнения системы (3.4) следует, что либо $e_2 = 0$, либо $1-e_2^2 - C = 0$, либо $\sin(2g_2) = 0$. В случае $e_2 = 0$ из второго уравнения системы (3.4) получаем:

$$\cos(2g_2) = \frac{1-5C}{5(1-C)}. \quad (3.5)$$

Уравнение (3.5) имеет решение при условии $0 \leq C \leq 0.6$. Следовательно, при указанных значениях параметра C получим первую серию стационарных решений:

$$e_2^* = 0, g_2^* = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1-5C}{5(1-C)} + \pi m, m \in \mathbb{Z} (C \in [0; 0.6]). \quad (3.6)$$

Если $1-e_2^2 - C = 0$, то из второго уравнения системы (3.4) получим:

$$\cos(2g_2) = 1 + \frac{4C}{5(1-C)}.$$

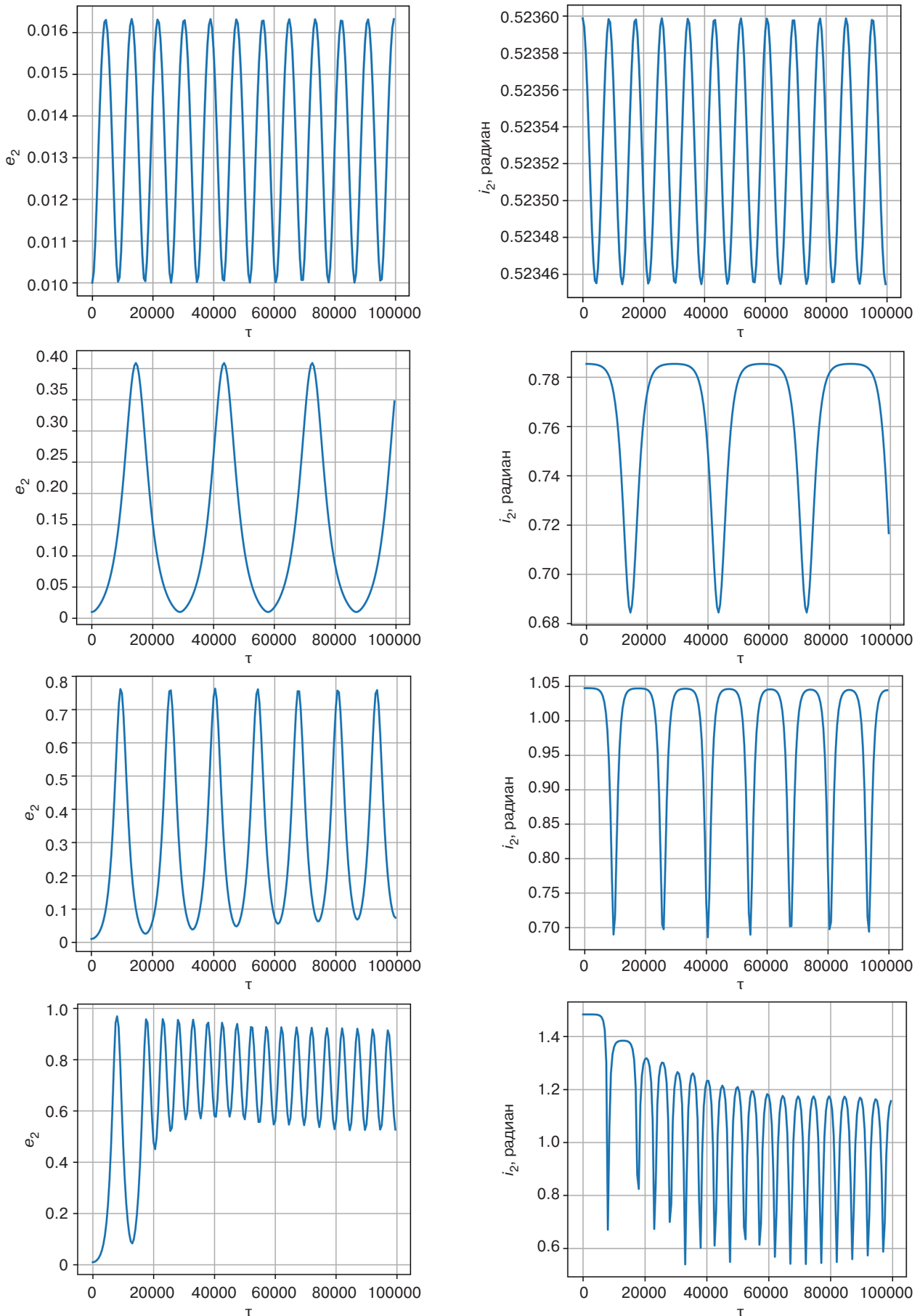


Рис. 3. Интегральные кривые усредненной системы уравнений (2.6) $e_2(\tau)$ и $i_2(\tau)$ при $i_{2_0} = \pi/6, \pi/4, \pi/3, 85\pi/180$

С учетом ограничений, наложенных на константу C , последнее равенство возможно, если $C = 0$. Но тогда $e_2 = 1$. Приходим к противоречию с (3.2).

Если $\sin(2g_2) = 0$, то либо $\cos(2g_2) = 1$, либо $\cos(2g_2) = -1$. Если $\cos(2g_2) = 1$, то из второго уравнения системы (3.4) получаем $e_2 = 1$, поэтому этот случай не подходит. Если $\cos(2g_2) = -1$, то из второго уравнения системы (3.4) следует:

$$e_2^2 = 1 - \sqrt{\frac{5C}{3}}.$$

Это равенство возможно при условии: $0 < C \leq 0.6$. Таким образом, получили еще одну серию стационарных решений:

$$e_2^* = \sqrt{1 - \sqrt{\frac{5C}{3}}}, \quad g_2^* = \frac{\pi}{2} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z} \quad (C \in (0; 0.6]). \quad (3.7)$$

Проведем исследование устойчивости стационарных решений на основе возмущенной системы уравнений первого порядка. Положим $e_2 = e_2^* + x_1$, $g_2 = g_2^* + x_2$. Правые части системы уравнений (3.3) обозначим соответственно $F_1(e_2, g_2)$, $F_2(e_2, g_2)$. Тогда возмущенная система уравнений первого приближения запишется в виде:

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \quad x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \\ a_{11} &= \frac{\partial F_1(e_2^*, g_2^*)}{\partial e_2}, \quad a_{12} = \frac{\partial F_1(e_2^*, g_2^*)}{\partial g_2}, \quad a_{21} = \frac{\partial F_2(e_2^*, g_2^*)}{\partial e_2}, \quad a_{22} = \frac{\partial F_2(e_2^*, g_2^*)}{\partial g_2}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Частные производные правых частей эволюционной системы уравнений (3.3) имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1(e_2, g_2)}{\partial e_2} &= \frac{5k_1 \sin(2g_2)}{\sqrt{1-e_2^2}} \left\{ (1-e_2^2)(1-3e_2^2-C) - e_2^2(1-e_2^2-C) \right\}, \\ \frac{\partial F_1(e_2, g_2)}{\partial g_2} &= 10k_1 e_2 \sqrt{1-e_2^2} (1-e_2^2-C) \cos(2g_2), \\ \frac{\partial F_2(e_2, g_2)}{\partial e_2} &= \frac{3e_2 F_2(e_2, g_2)}{1-e_2^2} + \frac{4k_1 e_2}{\sqrt{1-e_2^2}} (1-5\cos(2g_2)), \\ \frac{\partial F_2(e_2, g_2)}{\partial g_2} &= \frac{10k_1 \sin(2g_2)}{(1-e_2^2)^{3/2}} \left(C - (1-e_2^2)^2 \right). \end{aligned}$$

Для стационарного решения (3.6) коэффициенты a_{ij} в правых частях уравнений (3.8) имеют вид:

$$a_{11} = 5k_1 \sin(2g_2^*)(1-C), \quad a_{12} = 0, \quad a_{21} = 0, \quad a_{22} = -2a_{11}.$$

Корни характеристического уравнения вещественные, разных знаков (тип особой точки – седло). Следовательно, стационарное решение (3.6) неустойчиво.

Для стационарного решения (3.7) получим:

$$a_{11} = 0, \quad a_{12} = -10k_1 e_2^* \sqrt{1-e_2^{*2}} \left(\sqrt{\frac{5C}{3}} - C \right) < 0, \quad a_{21} = \frac{24k_1 e_2^{*2}}{\sqrt{1-e_2^{*2}}} > 0, \quad a_{22} = 0.$$

Корни характеристического уравнения $\lambda^2 - a_{12}a_{21} = 0$ являются чисто мнимыми. Поэтому в первом приближении стационарное решение устойчиво (тип особой точки – центр).

На рис. 4–7 изображены фазовые портреты системы уравнений (3.3) при различных значениях константы C .

Можем заметить, что характер изменения эксцентриситета – колебательный. Что касается эволюции аргумента перицентра, то его изменение демонстрирует либо систему незамкнутых траекторий монотонного характера, либо систему замкнутых траекторий осциллирующего характера, окружающих положения равновесия. Согласно проведенному аналитическому исследованию при $C > 0.6$ система уравнений (3.3) не имеет стационарных решений. Этот случай изображен на рис. 7. Здесь изменения эксцентриситета носят колебательный характер, а долгота перицентра изменяется монотонно.

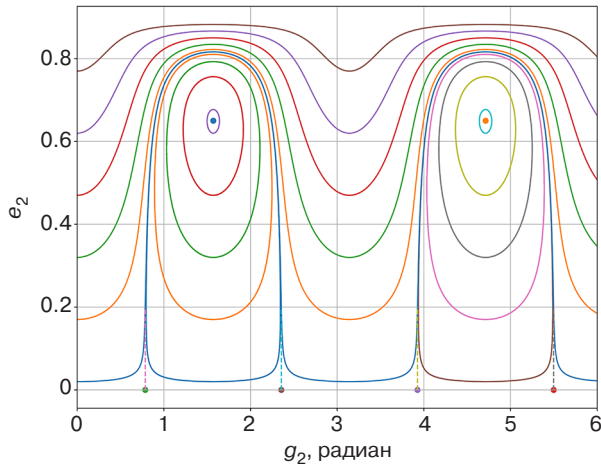


Рис. 4. Фазовый портрет системы уравнений (3.3) при $C = 0.2$

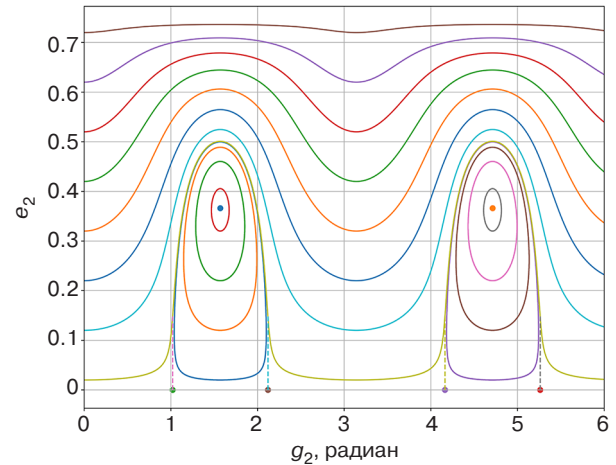


Рис. 5. Фазовый портрет системы уравнений (3.3) при $C = 0.45$

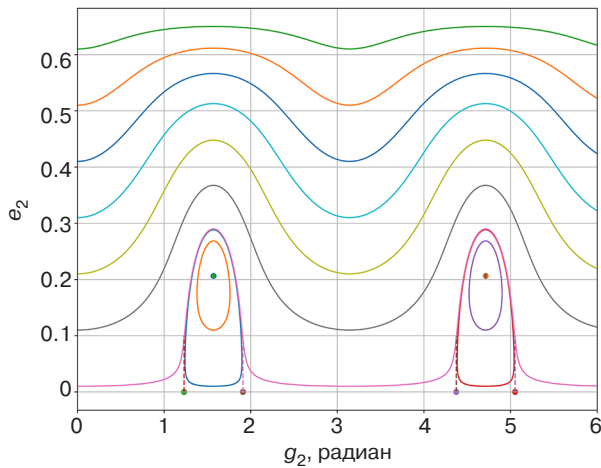


Рис. 6. Фазовый портрет системы уравнений (3.3) при $C = 0.55$

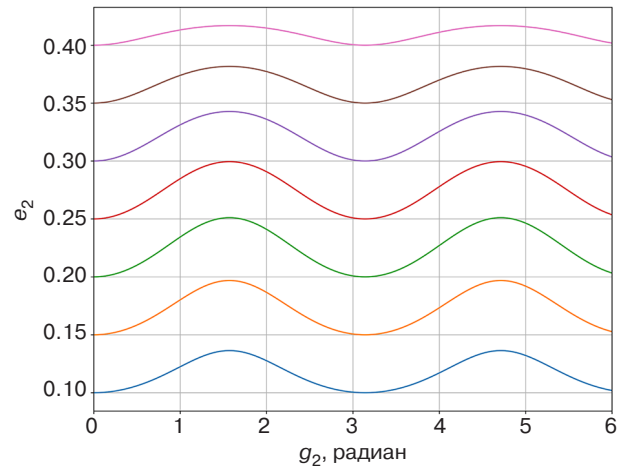


Рис. 7. Фазовый портрет системы уравнений (3.3) при $C = 0.8$

4. НЕУСРЕДНЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СПУТНИКА ДЛЯ ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ

Выведем неусредненную систему уравнений движения ИСЛ. Гамильтониан задачи имеет вид:

$$\mathcal{H} = -\frac{f^2(m_2 + m_3)^2 m_r^3}{2L_2^2} + \mathcal{H}_1, \quad \mathcal{H}_1 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{f m_1 m_r R_2^2}{R_1^3} (3\Phi^2 - 1). \quad (4.1)$$

Слагаемое \mathcal{H}_1 в выражении для гамильтониана зависит от переменных Делоне $L_2, G_2, H_2, l_2, g_2, h_2$ через $R_2 = R_2(L_2, G_2, l_2)$ согласно (1.8) и Φ :

$$\Phi = \cos \psi_{12} = \cos(g_2 + \vartheta_2) \cos(g_1 + \vartheta_1 - h_2) + \cos i_2 \sin(g_2 + \vartheta_2) \sin(g_1 + \vartheta_1 - h_2). \quad (4.2)$$

Канонические уравнения движения спутника в переменных Делоне имеют вид:

$$\dot{L}_2 = -\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial l_2}, \quad \dot{G}_2 = -\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial g_2}, \quad \dot{H}_2 = -\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial h_2}, \quad \dot{l}_2 = \frac{f^2(m_2 + m_3)^2 m_r^3}{L_2^3} + \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial L_2}, \quad \dot{g}_2 = \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial G_2}, \quad \dot{h}_2 = \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial H_2}. \quad (4.3)$$

После вычисления частных производных получим:

$$\begin{aligned} \dot{L}_2 &= \frac{fm_1m_rR_2^2}{R_1^3} \cdot \frac{(1+e_2 \cos \vartheta_2)}{(1-e_2^2)^{3/2}} \left\{ (3\Phi^2 - 1)e_2 \sin \vartheta_2 + 3(1+e_2 \cos \vartheta_2)\Phi\Phi_2 \right\}, \\ \dot{G}_2 &= \frac{3fm_1m_rR_2^2}{R_1^3} \Phi\Phi_2, \quad \dot{H}_2 = \frac{3fm_1m_rR_2^2}{R_1^3} \Phi\Phi_3, \\ \dot{l}_2 &= n_2 - \frac{fm_1m_rR_2^2}{R_1^3 L_2 e_2} \left\{ (2e_2 - \cos \vartheta_2 - e_2 \cos^2 \vartheta_2)(3\Phi^2 - 1) + 3\Phi\Phi_2 \sin \vartheta_2 (2 + e_2 \cos \vartheta_2) \right\}, \\ \dot{g}_2 &= \frac{fm_1m_rR_2^2}{R_1^3 e_2 G_2} \left\{ (1+e_2 \cos \vartheta_2) \cos \vartheta_2 (1-3\Phi^2) + 3\Phi\Phi_2 \sin \vartheta_2 (2 + e_2 \cos \vartheta_2) + \right. \\ &\quad \left. + 3\Phi e_2 \cos i_2 \sin(g_2 + \vartheta_2) \sin(g_1 + \vartheta_1 - h_2) \right\}, \\ \dot{h}_2 &= -\frac{3fm_1m_rR_2^2}{R_1^3 G_2} \Phi \sin(g_2 + \vartheta_2) \sin(g_1 + \vartheta_1 - h_2). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Здесь

$$\begin{aligned} n_2 &= \frac{f^2 (m_2 + m_3)^2 m_r^3}{L_2^3}, \\ \Phi_2 &= \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta_2} = -\sin(g_2 + \vartheta_2) \cos(g_1 + \vartheta_1 - h_2) + \cos i_2 \cos(g_2 + \vartheta_2) \sin(g_1 + \vartheta_1 - h_2), \\ \Phi_3 &= \frac{\partial \Phi}{\partial h_2} = \cos(g_2 + \vartheta_2) \sin(g_1 + \vartheta_1 - h_2) - \cos i_2 \sin(g_2 + \vartheta_2) \cos(g_1 + \vartheta_1 - h_2). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Таким образом, получена система уравнения (3.4) движения спутника шестого порядка в переменных Делоне. Первое уравнение с \dot{L}_2 отвечает за изменение общего орбитального действия по времени, второе с \dot{G}_2 – за изменение полного углового момента по времени, третье с \dot{H}_2 – за изменение азимутального углового момента по времени. Остальные три уравнения отвечают за изменения элементов орбиты: средней аномалии l_2 , аргумента перигентра g_2 и долготы восходящего узла h_2 . Точка C_0 движется по невозмущенной кеплеровской эллиптической орбите в плоскости OXY , поэтому R_1, ϑ_1 в (4.4), (4.5) являются заданными функциями времени согласно (1.10), а долгота перигентра g_1 , большая полуось a_1 и эксцентриситет e_1 являются постоянными величинами.

Осуществим переход к безразмерным переменным $n_{20}, e_2, i_2, g_2, \vartheta_2, h_2$, где

$$n_{20} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{f^2 (m_2 + m_3)^2 m_r^3}{L_2^3 n_1}, \quad n_1 = \sqrt{\frac{fm_1}{a_1^3}}.$$

Кроме того, перейдем к безразмерному времени $\tau = n_1 t / (2\pi)$ – числу оборотов барицентра C_0 относительно точки O . Проведем преобразование правых частей уравнений системы (4.4), учитывая (1.10) и опираясь на известные соотношения для переменных Делоне:

$$\begin{aligned} L_2 &= m_r \sqrt{f(m_2 + m_3) a_2}, \quad G_2 = m_r \sqrt{f(m_2 + m_3) a_2 (1 - e_2^2)}, \\ H_2 &= m_r \sqrt{f(m_2 + m_3) a_2 (1 - e_2^2) \cos i_2}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

В результате получим:

$$n'_{20} = -\frac{6\pi \sqrt{1 - e_2^2} (1 + e_1 \cos \vartheta_1)^3}{(1 - e_1^2)^3 (1 + e_2 \cos \vartheta_2)} \left\{ (3\Phi^2 - 1)e_2 \sin \vartheta_2 + 3(1 + e_2 \cos \vartheta_2)\Phi\Phi_2 \right\},$$

$$\begin{aligned}
 e_2' &= \frac{2\pi\sqrt{(1-e_2^2)^3}(1+e_1\cos\vartheta_1)^3}{(1-e_1^2)^3(1+e_2\cos\vartheta_2)^2 n_{20}} \left\{ (3\Phi^2 - 1)\sin\vartheta_2(1+e_2\cos\vartheta_2) + 3\Phi\Phi_2(2\cos\vartheta_2 + e_2\cos^2\vartheta_2 + e_2) \right\}, \\
 i_2' &= -\frac{6\pi\sqrt{(1-e_2^2)^3}(1+e_1\cos\vartheta_1)^3}{(1-e_1^2)^3(1+e_2\cos\vartheta_2)^2 n_{20}} \Phi \sin i_2 \cos(g_2 + \vartheta_2) \sin(g_1 + \vartheta_1 - h_2), \\
 g_2' &= \frac{2\pi\sqrt{(1-e_2^2)^3}(1+e_1\cos\vartheta_1)^3}{(1-e_1^2)^3(1+e_2\cos\vartheta_2)^2 e_2 n_{20}} \left\{ (1+e_2\cos\vartheta_2)\cos\vartheta_2(1-3\Phi^2) + 3\Phi\Phi_2\sin\vartheta_2(2+e_2\cos\vartheta_2) + \right. \\
 &\quad \left. + 3\Phi e_2 \cos i_2 \sin(g_2 + \vartheta_2) \sin(g_1 + \vartheta_1 - h_2) \right\}, \\
 \vartheta_2' &= \frac{2\pi(1+e_2\cos\vartheta_2)^2 n_{20}}{(1-e_2^2)^{3/2}} + \frac{2\pi\sqrt{(1-e_2^2)^3}(1+e_1\cos\vartheta_1)^3}{(1-e_1^2)^3(1+e_2\cos\vartheta_2)^2 e_2 n_{20}} \times \\
 &\quad \times \left\{ (1+e_2\cos\vartheta_2)\cos\vartheta_2(3\Phi^2 - 1) - 3\Phi\Phi_2\sin\vartheta_2(2+e_2\cos\vartheta_2) \right\}, \\
 h_2' &= -\frac{6\pi\sqrt{(1-e_2^2)^3}(1+e_1\cos\vartheta_1)^3}{(1-e_1^2)^3(1+e_2\cos\vartheta_2)^2 n_{20}} \Phi \sin(g_2 + \vartheta_2) \sin(g_1 + \vartheta_1 - h_2), \\
 \vartheta_1' &= \frac{2\pi(1+e_1\cos\vartheta_1)^2}{(1-e_1^2)^{3/2}}.
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Проведем численное интегрирование усредненной и неусредненной систем уравнений (2.6), (4.7) и сравним полученные численные результаты с современными временными изменениями эксцентриситета и наклона, представленными в [12]. В качестве начальных значений, следуя [12], для усредненной системы уравнений (2.6) возьмем

$$e_2(0) = 0.61, i_2(0) = 55.9^\circ = 55.9\pi/180 \text{ рад}, g_2(0) = \pi/2, h_2(0) = 0. \tag{4.8}$$

В качестве безразмерного времени в системе (2.6) используется $\tau = n_2 t$, $n_2 = \sqrt{f(m_2 + m_3)a_2^{-3}}$, поэтому для рассмотрения двойного периода $2T = 2.5$ года или $2.5 \cdot 365$ дней необходимо задать временной диапазон $\tau = \frac{2.5 \cdot 365}{0.0874} \cong 10440$. На рис. 8 изображены интегральные кривые усредненной системы уравнений (2.6).

Получаем следующие предсказанные отклонения средних значений элементов: $\Delta e_2 \sim 0.08$, $\Delta i_2 \sim 3.7^\circ$ (0.07 рад), что является близким совпадением к результатам из [12], отражая таким образом основной характер изменений элементов, но упуская короткопериодические гравитационные эффекты.

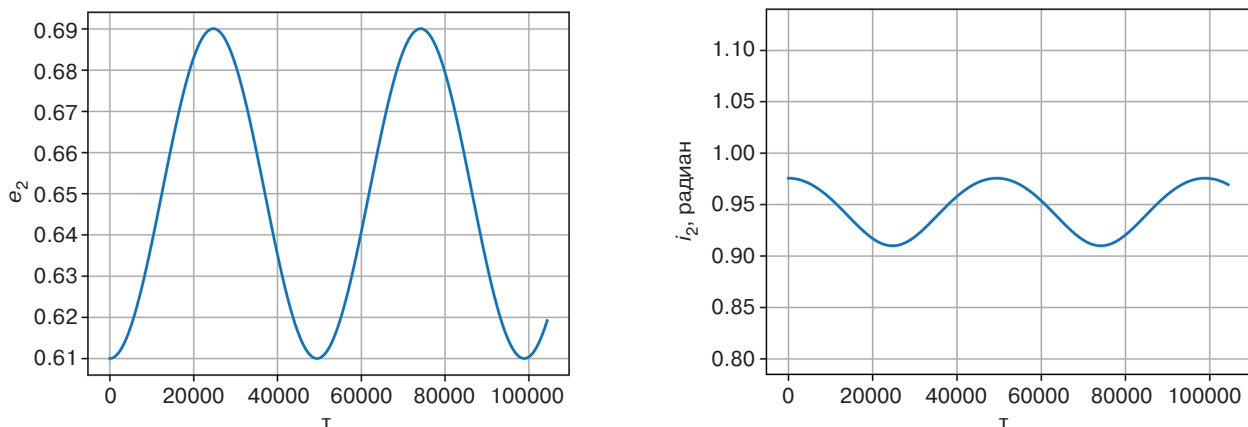


Рис. 8. Интегральные кривые $e_2(\tau)$ и $i_2(\tau)$ усредненной системы уравнений

Далее проинтегрируем неусредненную систему (4.7). Для этого необходимо задать начальные значения эксцентриситета, большой полуоси, долготы перицентра орбиты Луны и начальное значение ее истинной аномалии. Данные собраны при помощи утилиты *Horizons System*⁷ со следующими параметрами: целевой объект – Луна, координатный центр – Земля, время – 2009-07-15 01:00:00. Так как в [12] даны только 4 начальных значения (4.8), оставшиеся недостающие значения истинной и средней аномалии также собраны при помощи *Horizons System* для функционирующего на тот момент ИСЛ: LRO 2009-031A⁸. В качестве безразмерного времени в системе (4.7) используется $\tau = n_1 t / (2\pi)$, поэтому для рассмотрения двойного периода $2T = 2.5$ года или $2.5 \cdot 365$ дней необходимо задать временной диапазон в $\tau^* = \frac{2.5 \cdot 365}{27.0632} \cong 34$.

На рис. 9 изображены интегральные кривые $e_2(t)$ и $i_2(t)$ усредненной и неусредненной систем уравнений. На рис. 10 построены интегральные кривые систем уравнений (2.6) и (4.7) с теми же начальными условиями в плоскости (g_2, e_2) , которые имеют общее сходство с аналогичными кривыми, представленными в [12]. Наблюдается характерное устойчивое колебательное движение, долгота перицентра зависит от эксцентриситета в соответствии с периодическим законом. Отмечается изменение эксцентриситета e_2 в пределах от 0.61 до 0.69, что является относительно схожим с $\Delta e \sim 0.09$ в работе [12].

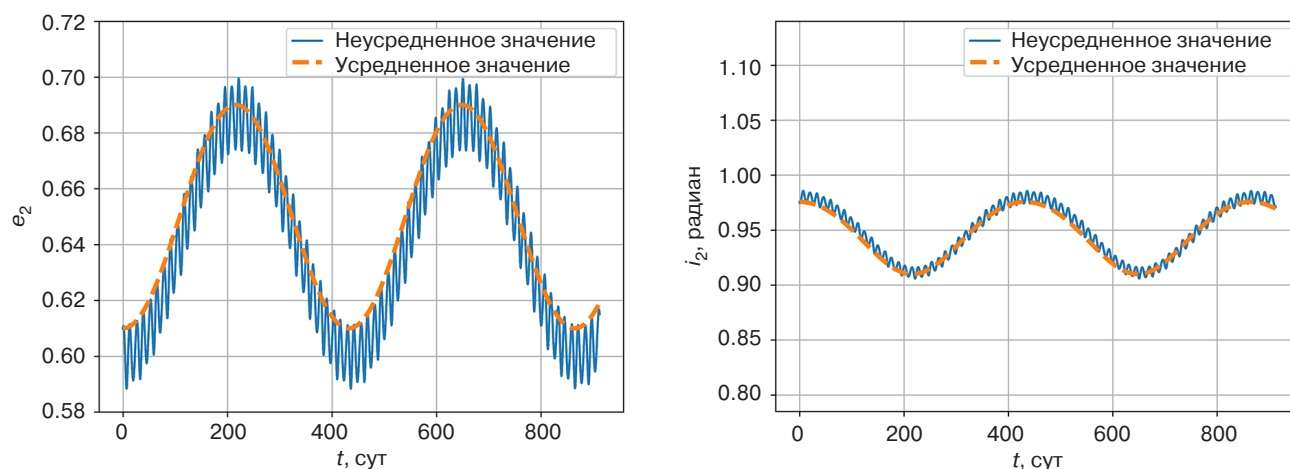


Рис. 9. Интегральные кривые $e_2(t)$ и $i_2(t)$ усредненной и неусредненной систем уравнений орбитального движения спутника

На полученных графиках также демонстрируется периодическое поведение и основной период, как и у усредненной модели, но с наложенными на него высокочастотными колебаниями. Общая амплитуда колебаний соответствует амплитуде усредненной линии, но мгновенные значения эксцентриситета и наклона отклоняются от усредненного значения. Усредненная система представляет собой «сглаженную» версию неусредненной системы. Интегральные кривые неусредненной системы уравнений содержат больше деталей и информации о кратковременных изменениях элементов орбиты. Усредненная система может быть полезна для долгосрочного прогнозирования и анализа общих тенденций. Неусредненная система необходима для точного моделирования и предсказания поведения спутника на коротких временных интервалах. Неусредненная система, хоть и сложнее для анализа, предоставляет более полную картину поведения спутника.

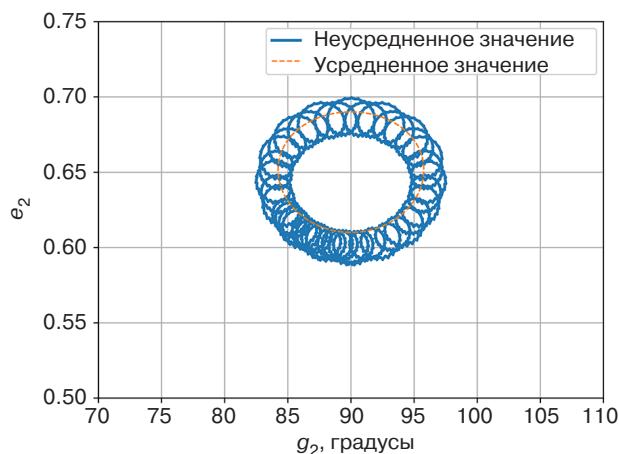


Рис. 10. Интегральные кривые усредненной и неусредненной систем уравнений орбитального движения спутника в плоскости (g_2, e_2)

⁷ <https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons/#api>. Дата обращения 04.02.2025. / Accessed February 04, 2025.

⁸ Lunar Reconnaissance Orbiter – роботизированный космический корабль, вращающийся вокруг Луны. Запущен 18 июня 2009 г. <https://www.n2yo.com/satellite/?s=35315>. Дата обращения 04.02.2025. [Lunar Reconnaissance Orbiter is a robotic spacecraft orbiting the Moon. Launched on June 18, 2009. <https://www.n2yo.com/satellite/?s=35315>. Accessed February 04, 2025.]

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведенного исследования выведены усредненная и неусредненная системы уравнений движения ИСЛ с учетом возмущения, вызванного гравитационным полем Земли, на основе системы уравнений движения спутника в канонических переменных Делоне, позволяющие проследить изменение его орбитальных параметров во времени.

Найдены стационарные решения усредненной системы уравнений, проведено исследование их устойчивости. Получены условия существования «замороженных» орбит, у которых изменения наклона, эксцентриситета, долготы перицентра от восходящего узла сведены к минимуму. Построены фазовые портреты для усредненной системы уравнений при различных значениях параметра задачи, зависящего от начальных значений наклона и эксцентриситета орбиты. Построены интегральные кривые неусредненной системы уравнений.

Стоит отметить, что исследование учитывает влияние основного фактора на орбиту движения спутника – гравитационного внешнего возмущения. Дальнейшее изучение этого вопроса может позволить более точно описать движение спутников вокруг небесных тел. Исследование имеет практическое

значение для разработки и планирования космических миссий, связанных с исследованием Луны и ее окрестностей. Полученные уравнения могут быть использованы для более точного прогнозирования орбитального движения спутников и определения оптимальных параметров их орбит.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа проведена в рамках инициативной научно-исследовательской работы кафедры высшей математики Института искусственного интеллекта РТУ МИРЭА (№ 192-ИИИ(ВМ)).

ACKNOWLEDGMENTS

The work was carried out as part of the initiative research work of the Department of Higher Mathematics of the Institute of Artificial Intelligence at RTU MIREA (No. 192-III(VM)).

Вклад авторов

Все авторы в равной степени внесли свой вклад в исследовательскую работу.

Authors' contribution

All authors contributed equally to the research work.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Woodard M., Folta D.C., Woodfork D.W. ARTEMIS The First Mission to the Lunar Libration Orbits. In: *Conference: Internation Symposium on Space Flight Dynamics*. 2009. URL: <https://www.researchgate.net/publication/235990349>. Дата обращения 04.02.2025. / Accessed February 04, 2025.
2. Li C., Hu H., Yang M.-F., et al. Characteristics of the lunar samples returned by the Chang'E-5 mission. *Natl. Sci. Rev.* 2022;9(2):nwab188. <https://doi.org/10.1093/nsr/nwab188>
3. Li C., Hu H., Yang M.-F., et al. Nature of the lunar far-side samples returned by the Chang'E-6 mission. *Natl. Sci. Rev.* 2024;11(11):nwae328. <https://doi.org/10.1093/nsr/nwae328>
4. Mathavaraj S., Negi K. Chandrayaan-3 Trajectory Design: Injection to Successful Landing. *J. Spacecraft Rockets*. 2025;62(1):159–166. <https://doi.org/10.2514/1.A35980>
5. Kanu N.J., Gupta E., Verma N.J. An insight into India's Moon mission – Chandrayan-3: The first nation to land on the southernmost polar region of the Moon. *Planet. Space Sci.* 2024;242(5):105864. <https://doi.org/10.1016/j.pss.2024.105864>
6. Зеленый Л.М., Митрофанов И.Г., Третьяков В.И., Литвак М.Л., Калашников Д.В., Суков А.В., Прохоров В.Г. Научная программа исследований космического аппарата «Луна-25». В кн.: *Автоматический космический аппарат нового поколения «Луна-25» – от исследования к освоению лунных ресурсов*: в 2 т. Химки: Научно-производственное объединение им. С.А. Лавочкина; 2023. С. 8–28. <https://elibrary.ru/lggmqz>
7. Лидов М.Л. Эволюция орбит искусственных спутников планет под действием гравитационных возмущений внешних тел. *Искусственные спутники Земли*. 1961;8:5–45.
8. Kozai Y. Secular perturbations of asteroids with high inclination and eccentricity. *The Astronomical Journal*. 1962;67(9):591–598.
9. Вашковьяк М.А., Тесленко Н.М. Уточненная модель эволюции далеких спутниковых орбит. *Письма в Астрономический журнал*. 2009;35(12):934–950. <https://elibrary.ru/kygisd>
10. Вашковьяк М.А. Конструктивно-аналитическое решение эволюционной задачи Хилла. *Астрономический вестник*. 2010;44(6):560–573. <https://elibrary.ru/nbsuhf>
11. Лидов М.Л. О приближенном анализе эволюции орбит искусственных спутников. В кн.: *Проблемы движения искусственных небесных тел*. М.: Изд-во АН СССР; 1963. С. 119–134.
12. Ely T.A. Stable Constellations of Frozen Elliptical Inclined Lunar Orbits. *J. Astronaut. Sci.* 2005;53(3):301–316. <https://doi.org/10.1007/BF03546355>

13. Goossens S., Sabaka T.J., Wieczorek M.A., Neumann G.A., Mazarico E., Lemoine F.G., et al. High-resolution gravity field models from GRAIL data and implications for models of the density structure of the Moon's crust. *Journal of Geophysical Research: Planets (JGR Planets)*. 2020;125(2):e2019JE006086. <https://doi.org/10.1029/2019JE006086>
14. Folta D.C., Pavlak T.A., Haapala A.F., Howell K.C., Woodard M.A. Earth–Moon libration point orbit stationkeeping: Theory, modeling, and operations. *Acta Astronautica*. 2013;94(1):421–433. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2013.01.022>
15. Jadala G., Meedinti G.N., Delhibabu R. Satellite Orbit Prediction Using a Machine Learning Approach. *ICAI Workshops*. 2022. P. 28–46.
16. Ovchinnikov M., Shirobokov M., Trofimov S. Lunar Satellite Constellations in Frozen Low Orbits. *Aerospace*. 2024;11(11):918. <https://doi.org/10.3390/aerospace11110918>
17. Аксенов Е.П. *Специальные функции в небесной механике*. М.: Наука; 1986, 320 с.
18. Дубошин Г.Н. *Небесная механика. Основные задачи и методы*. М.: Наука; 1975, 800 с.
19. Мюррей К., Дермотт С. *Динамика Солнечной системы*: пер. с англ. М.: Физматлит; 2010, 588 с. ISBN 978-5-9221-1121-8
20. Вильке В.Г. *Механика систем материальных точек и твердых тел*. М.: Физматлит; 2013, 268 с. ISBN 978-5-9221-1481-3

REFERENCES

1. Woodard M., Folta D.C., Woodfork D.W. ARTEMIS The First Mission to the Lunar Libration Orbits. In: *Conference: International Symposium on Space Flight Dynamics*. 2009. Available from URL: <https://www.researchgate.net/publication/235990349>. Accessed February 04, 2025.
2. Li C., Hu H., Yang M.-F., et al. Characteristics of the lunar samples returned by the Chang'E-5 mission. *Natl. Sci. Rev.* 2022;9(2):nwab188. <https://doi.org/10.1093/nsr/nwab188>
3. Li C., Hu H., Yang M.-F., et al. Nature of the lunar far-side samples returned by the Chang'E-6 mission. *Natl. Sci. Rev.* 2024;11(11):nwae328. <https://doi.org/10.1093/nsr/nwae328>
4. Mathavaraj S., Negi K. Chandrayaan-3 Trajectory Design: Injection to Successful Landing. *J. Spacecraft Rockets*. 2025;62(1):159–166. <https://doi.org/10.2514/1.A35980>
5. Kanu N.J., Gupta E., Verma N.J. An insight into India's Moon mission – Chandrayan-3: The first nation to land on the southernmost polar region of the Moon. *Planet. Space Sci.* 2024;242(5):105864. <https://doi.org/10.1016/j.pss.2024.105864>
6. Zelenyi L.M., Mitrofanov I.G., Tret'yakov V.I., Litvak M.L., Kalashnikov D.V., Surov A.V., Prokhorov V.G. Scientific program for the study of the spacecraft “Luna-25”. In: *Automatic Spacecraft of the New Generation “Luna-25” – from Research to the Development of Lunar Resources*: in 2 v. Khimki; 2023. P. 8–28 (in Russ.). <https://elibrary.ru/lggmqz>
7. Lidov M.L. The evolution of orbits of artificial satellites of planets under the action of gravitational perturbations of external bodies. *Planet. Space Sci.* 1962;9(10):719–759. [https://doi.org/10.1016/0032-0633\(62\)90129-0](https://doi.org/10.1016/0032-0633(62)90129-0)
[Original Russian Text: Lidov M.L. The evolution of orbits of artificial satellites of planets under the action of gravitational perturbations of external bodies. *Iskusstvennye Sputniki Zemli*. 1961;8:5–45 (in Russ.).]
8. Kozai Y. Secular perturbations of asteroids with high inclination and eccentricity. *The Astronomical Journal*. 1962;67(9): 591–598.
9. Vashkov'yak M.A., Teslenko N.M. Refined model for the evolution of distant satellite orbits. *Astron. Lett.* 2009;35(12): 850–865. <https://doi.org/10.1134/S1063773709120056>
[Original Russian Text: Vashkov'yak M.A., Teslenko N.M. Refined model for the evolution of distant satellite orbits. *Pis'ma v Astronomicheskii zhurnal*. 2009;35(12):934–950 (in Russ.). <https://elibrary.ru/kygisd>]
10. Vashkov'yak M.A. Constructive analytical solution of the evolution hill problem. *Sol. Syst. Res.* 2010;44(6):527–540. <https://doi.org/10.1134/S0038094610060067>
[Original Russian Text: Vashkov'yak M.A. Constructive analytical solution of the evolution hill problem. *Astronomicheskii Vestnik*. 2010;44(6):560–573 (in Russ.). <https://elibrary.ru/nbsuhf>]
11. Lidov M.L. On the approximate analysis of the evolution of artificial satellite orbits. In: *Problemy dvizheniya iskusstvennykh nebesnykh tel (Problems of the Motion of Artificial Celestial Bodies)*. Moscow: USSR Academy of Sciences; 1963. P. 119–134 (in Russ.).
12. Ely T.A. Stable Constellations of Frozen Elliptical Inclined Lunar Orbits. *J. Astronaut. Sci.* 2005;53(3):301–316. <https://doi.org/10.1007/BF03546355>
13. Goossens S., Sabaka T.J., Wieczorek M.A., Neumann G.A., Mazarico E., Lemoine F.G., et al. High-resolution gravity field models from GRAIL data and implications for models of the density structure of the Moon's crust. *Journal of Geophysical Research: Planets (JGR Planets)*. 2020;125(2):e2019JE006086. <https://doi.org/10.1029/2019JE006086>
14. Folta D.C., Pavlak T.A., Haapala A.F., Howell K.C., Woodard M.A. Earth–Moon libration point orbit stationkeeping: Theory, modeling, and operations. *Acta Astronautica*. 2013;94(1):421–433. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2013.01.022>
15. Jadala G., Meedinti G.N., Delhibabu R. Satellite Orbit Prediction Using a Machine Learning Approach. *ICAI Workshops*. 2022. P. 28–46.
16. Ovchinnikov M., Shirobokov M., Trofimov S. Lunar Satellite Constellations in Frozen Low Orbits. *Aerospace*. 2024;11(11):918. <https://doi.org/10.3390/aerospace11110918>
17. Aksekov E.P. *Spetsial'nye funktsii v nebesnoi mekhanike (Special Functions in Celestial Mechanics)*. Moscow: Nauka; 1986, 320 p. (In Russ.).
18. Duboshin G.N. *Nebesnaya mekhanika. Osnovnye zadachi i metody (Celestial Mechanics. Basic Problems and Methods)*. Moscow: Nauka; 1975, 800 p. (In Russ.).

19. Murray C., Dermott S. *Dinamika Solnechnoi sistemy (Solar System Dynamics)*; transl. from Engl. Moscow: Fizmatlit; 2010, 588 p. (In Russ.). ISBN 978-5-9221-1121-8
[Murray C.D., Dermott S.F. *Solar System Dynamics*. Cambridge University Press; 1999, 592 p.]
20. Vil'ke V.G. *Mekhanika sistem material'nykh toчек i tverdykh tel (Mechanics of Systems of Material Points and Rigid Bodies)*. Moscow: Fizmatlit; 2013, 268 p. (In Russ.). ISBN 978-5-9221-1481-3

Об авторах

Мешкова Ольга Вячеславовна, магистрант, кафедра высшей математики, Институт искусственного интеллекта, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: oxn.lar5@yandex.ru . <https://orcid.org/0009-0002-2917-1025>

Шатина Альбина Викторовна, д.ф.-м.н., доцент, заведующая кафедрой высшей математики, Институт искусственного интеллекта, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: shatina_av@mail.ru. Scopus Author ID 6506958326, SPIN-код РИНЦ 8714-6450, <https://orcid.org/0000-0001-5016-5899>

About the Authors

Olga V. Meshkova, Master Student, Department of Higher Mathematics, Institute of Artificial Intelligence, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: oxn.lar5@yandex.ru. <https://orcid.org/0009-0002-2917-1025>

Albina V. Shatina, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Docent, Head of the Department of Higher Mathematics, Institute of Artificial Intelligence, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: shatina_av@mail.ru. Scopus Author ID 6506958326, RSCI SPIN-code 8714-6450, <https://orcid.org/0000-0001-5016-5899>

Математическое моделирование
Mathematical modeling

УДК 004.8, 004.852
<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2026-14-1-82-90>
EDN KCUBAG



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Трансформация пространства признаков в методе опорных векторов

А.В. Федоров[@],
Д.В. Парфенов

МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, 119454 Россия
[@] Автор для переписки, e-mail: fedorov_av@mirea.ru

• Поступила: 22.05.2025 • Доработана: 02.07.2025 • Принята к опубликованию: 10.11.2025

Резюме

Цели. Работа посвящена разработке и исследованию обобщенного нелинейного метода опорных векторов (support vector machine, SVM) с использованием адаптивной трансформации пространства признаков, направленной на улучшение вычислительной эффективности при сохранении высокого качества классификации. В качестве задачи-примера рассматривается двухклассовая классификация. Целью исследования является количественная оценка производительности предложенного подхода в сравнении с классическими SVM-моделями, использующими фиксированные ядровые функции, а также изучение влияния параметров трансформации на качество классификации.

Методы. Предлагается модифицированный подход, при котором входные данные предварительно преобразуются с помощью обучаемого нелинейного отображения фиксированной структуры. Это отображение реализуется в виде композиции элементарных функций и параметризуется ограниченным числом обучаемых весов, что обеспечивает контроль над сложностью модели. После трансформации применяется линейный SVM с L2-регуляризацией. Для обучения модели используются стандартные методы численной оптимизации без ограничений. Качество классификации оценивается с помощью метрики точности (Accuracy), усредненной по результатам 10-кратной перекрестной валидации. Рассматривается поведение модели при изменении размерности признакового пространства. Проводится анализ вычислительной сложности по числу операций и времени применения модели на тестовых выборках.

Результаты. Численные эксперименты показали, что предложенная модель позволяет существенно сократить время классификации по сравнению с SVM с полиномиальным ядром, обеспечивая при этом сопоставимое качество. Анализ временных затрат подтвердил, что предложенный подход масштабируется значительно лучше, чем классические ядровые методы. При этом структура модели сохраняет интерпретируемость и может быть дополнительно адаптирована под особенности предметной области.

Выводы. Разработанный метод представляет собой эффективную альтернативу классическим ядровым алгоритмам. Благодаря параметризуемому отображению признакового пространства он обеспечивает адаптивность, интерпретируемость и масштабируемость, что делает его перспективным для практического применения в задачах машинного обучения.

Ключевые слова: классификация, преобразование признакового пространства, нелинейное отображение, нелинейный метод опорных векторов, функции ядра, вычислительная сложность

Для цитирования: Федоров А.В. Парфенов Д.В. Трансформация пространства признаков в методе опорных векторов. *Russian Technological Journal*. 2026;14(1):82–90. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2026-14-1-82-90>, <https://www.elibrary.ru/KCUBAG>

Прозрачность финансовой деятельности: Авторы не имеют финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

RESEARCH ARTICLE

Feature space transformation in the support vector method

Aleksey V. Fedorov [®],
Denis V. Parfenov

MIREA – Russian Technological University, Moscow, 119454 Russia

[®] Corresponding author, e-mail: fedorov_av@mirea.ru

• Submitted: 22.05.2025 • Revised: 02.07.2025 • Accepted: 10.11.2025

Abstract

Objectives. This study focuses on the development and investigation of a generalized nonlinear Support Vector Machine (SVM) method incorporating an adaptive transformation of the feature space. Its aim is to improve computational efficiency while maintaining high classification accuracy. The binary classification problem is used as a case study. The main objective of the research is to quantitatively evaluate the performance of the proposed approach when compared to classical SVM models using fixed kernel functions, and to analyze how the transformation parameters affect classification quality.

Methods. The proposed approach involves a preliminary transformation of the input data using a learnable nonlinear mapping with a fixed structure. This mapping is implemented as a composition of elementary functions and is parameterized by a limited number of trainable weights which allows control over model complexity. A linear SVM with L2 regularization is applied after the transformation. The model is trained using conventional, unconstrained numerical optimization methods. The classification quality is evaluated using the Accuracy metric averaged over 10-fold cross-validation. The work also studies the behavior of the model with varying feature space dimensionality. In addition, computational complexity is analyzed in terms of the number of operations and inference time required on test datasets.

Results. Numerical experiments demonstrate that the proposed model significantly reduces classification time when compared to a polynomial-kernel SVM, while maintaining a comparable level of accuracy. The runtime analysis confirms that the proposed approach scales much better than traditional kernel methods. At the same time, the structure of the model remains interpretable and can be further adapted to the specifics of the application domain.

Conclusions. The method developed provides an efficient alternative to traditional kernel-based algorithms. Through the use of a parameterized transformation of the feature space, the method enables adaptability, interpretability, and scalability, making it promising for practical applications in machine learning tasks.

Keywords: classification, feature space transformation, nonlinear mapping, nonlinear support vector machine, kernel functions, computational complexity

For citation: Fedorov A.V., Parfenov D.V. Feature space transformation in the support vector method. *Russian Technological Journal*. 2026;14(1):82–90. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2026-14-1-82-90>, <https://www.elibrary.ru/KCUBAG>

Financial disclosure: The authors have no financial or proprietary interest in any material or method mentioned.

The authors declare no conflicts of interest.

ВВЕДЕНИЕ

Решение задачи классификации линейно неразделимых данных является одной из ключевых в машинном обучении. Одним из традиционных подходов к ее решению является применение обобщенного нелинейного метода опорных векторов (support vector machine, SVM) с использованием функций ядра, которые позволяют вычислять скалярное произведение в новом пространстве, обладающем лучшими геометрическими свойствами для разделения классов [1]. Однако такой подход имеет ряд ограничений, так известные ядра имеют малое количество параметров, что ограничивает их гибкость. Кроме того, количество используемых на практике ядер невелико, что снижает адаптивность модели.

В работе предлагается альтернативный подход, который, в отличие от классических ядерных методов, предполагает оптимизацию параметров нелинейного преобразования пространства признаков непосредственно в процессе обучения SVM. Используемое преобразование состоит из двух частей. Сначала осуществляется линейное отображение входных признаков, задаваемое матрицей с обучаемыми коэффициентами. Затем ко всем компонентам полученного вектора применяются одномерные нелинейные преобразования, реализуемые многочленами с обучаемыми коэффициентами. Такой метод позволяет гибко адаптировать пространство признаков под конкретные данные, сохраняя при этом высокую вычислительную эффективность.

Главным преимуществом предложенной модели является значительное снижение вычислительных затрат при применении уже обученной модели по сравнению с методами, основанными на функциях ядра. В классическом SVM, использующем функцию ядра, сложность вычислений сильно зависит от числа опорных векторов, которое в реальных задачах может быть очень велико, что значительно увеличивает время классификации. В предлагаемом подходе преобразование данных выполняется с фиксированной вычислительной сложностью, зависящей только от размерности входного и выходного пространств и выбранного порядка многочленов. Это делает данный метод особенно эффективным при обработке больших объемов данных.

В последнее время активно развиваются методы, направленные на повышение эффективности и адаптивности классификации в задачах машинного обучения. В [2] предложена робастная модель SVM с модифицированной схемой оптимизации, обеспечивающая устойчивость к шуму в данных. Исследование [3] представляет теоретическую основу многомасштабного адаптивного извлечения признаков, предлагая альтернативу традиционным

ядерным методам. В [4] рассматривается геометрическая интерпретация адаптивного преобразования признаков в нейронных сетях, что созвучно идее параметризуемого отображения признаков пространства. В [5] представлен подход к диагональному расширению параметров в гильбертовом пространстве с воспроизводящим ядром, позволяющий одновременно обучать и структуру признаков, и параметры ядра. Наконец, метод преобразования на основе адаптивного закона (adaptive law-based transformation, ALT), описанный в [6], реализует адаптивную трансформацию признаков, ориентированную на задачи классификации временных рядов, что концептуально близко предлагаемому в данной работе подходу.

1. ТРАНСФОРМАЦИЯ ПРОСТРАНСТВА ПРИЗНАКОВ

Как было отмечено выше, каждый объект исходного набора данных $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, где n – размерность исходного пространства, преобразуется с использованием матрицы \mathbf{A} размера $m \times n$. Результирующий вектор $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^m$ вычисляется по следующей формуле:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Размерность m выбирается пользователем и определяет число признаков в новом пространстве. Это позволяет уменьшить или увеличить размерность пространства данных. Параметры матрицы \mathbf{A} являются обучаемыми, что позволяет адаптировать соответствующее линейное преобразование к структуре данных.

К каждому элементу результирующего вектора $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_m)^T$ применяется некоторая нелинейная функция в виде полинома $p_i(\tilde{x}_i)$ степени d , где $i = \overline{1, m}$. Результирующий вектор $\tilde{\tilde{\mathbf{x}}} \in \mathbb{R}^m$ вычисляется следующим образом:

$$\tilde{\tilde{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} p_1(\tilde{x}_1) \\ p_2(\tilde{x}_2) \\ \dots \\ p_m(\tilde{x}_m) \end{bmatrix}.$$

Полиномы $p_i(\cdot)$ могут быть различными для каждой координаты, что обеспечивает высокую гибкость модели. Общая форма полинома $p_i(\tilde{x}_i)$ задается как:

$$p_i(\tilde{x}_i) = c_{i1}\tilde{x}_i + c_{i2}\tilde{x}_i^2 + \dots + c_{id}\tilde{x}_i^d,$$

где c_{ij} – обучаемые параметры, d – фиксированная степень полинома.

Наличие нелинейных функций позволяет адаптировать геометрию пространства признаков для более качественного разделения классов. Основной особенностью предлагаемой модели классификатора является совместное обучение параметров трансформации признакового пространства и метода опорных векторов.

Задача обучения модели ставится следующим образом:

$$\frac{1}{2}\|\mathbf{w}\|^2 + C \sum_{i=1}^N \max(1 - y_i (\langle \mathbf{w}, \Phi_{\mathbf{A}, \mathbf{P}}(\mathbf{x}_i) \rangle + b), 0)^2 \rightarrow \min_{\mathbf{w}, b, \mathbf{A}, \mathbf{P}},$$

где $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$ – входные векторы; $y_i \in \{-1; +1\}$ – метки классов; $\Phi_{\mathbf{A}, \mathbf{P}}(\mathbf{x})$ – отображение исходного вектора \mathbf{x} сначала линейной трансформацией \mathbf{A} , а затем применением полиномиальных функций p_i ; \mathbf{A} , \mathbf{P} – параметры преобразования (линейная и полиномиальная части); \mathbf{w} , b – параметры линейного классификатора; C – вес штрафа за отклонения; N – количество объектов обучающей выборки.

В предложенном методе использовалась L2-регуляризация [7, 8], которая играет ключевую роль в стабилизации процесса обучения и предотвращении переобучения. Регуляризация применялась как к параметрам матрицы линейного преобразования, так и к коэффициентам полиномиального отображения. Включение L2-регуляризации ограничивает рост норм весов, уменьшая вероятность переобучения. Численные эксперименты подтвердили, что использование регуляризации способствует качественному обучению. В результате, целевая функция принимает следующий вид:

$$\sum_{i=1}^N \max(1 - y_i (\langle \mathbf{w}, \Phi_{\mathbf{A}, \mathbf{P}}(\mathbf{x}_i) \rangle + b), 0)^2 + \frac{1}{2C}\|\mathbf{w}\|^2 + \lambda_1 \|\mathbf{A}\|^2 + \lambda_2 \|\mathbf{P}\|^2 \rightarrow \min_{\mathbf{w}, b, \mathbf{A}, \mathbf{P}}, \quad (1)$$

где λ_1, λ_2 – коэффициенты регуляризации.

Для решения задачи (1) в работе применяется метод оптимизации без ограничений BFGS¹ [9], предоставляемый пакетом *Optim.jl*². Градиенты целевой функции вычисляются с использованием автоматического дифференцирования на основе дуальных чисел [10, 11], реализуемого пакетом *ForwardDiff.jl*.

2. ТЕСТИРОВАНИЕ

Для оценки качества классификатора использовались наборы данных из OpenML-CC18 Curated Classification Benchmark [12]. Эти наборы представляют собой коллекцию специально отобранных данных для сравнения алгоритмов машинного обучения. В табл. 1 приведен список использованных наборов данных с указанием их основных характеристик (количество объектов, размерность признакового пространства) и краткой информацией.

Все задачи являются задачами двоичной классификации, т.е. содержат ровно два класса.

В процессе тестирования модели использовался метод 10-кратной кросс-валидации (10-fold cross-validation) [13] для обеспечения более надежной оценки качества классификатора.

Таблица 1. Характеристики используемых наборов данных

№	Набор данных	Количество объектов	Размерность	Краткая информация
1	blood-transfusion-service-center	748	4	Требуется предсказание факта донации крови в будущем (2 класса)
2	phoneme	5404	5	Требуется классификация звуков речи на две категории (2 класса)
3	diabetes	768	8	Требуется выявление наличия или отсутствия диабета (2 класса)
4	qsar-biodeg	1055	41	Требуется предсказание биоразлагаемости химических веществ (2 класса)
5	kc1	2109	21	Требуется определение наличия ошибок в программных модулях (2 класса)
6	pc1	1109	21	Задача аналогична kc1 – классификация программных компонентов на «с ошибками» и «без ошибок» (2 класса)

¹ Broyden – Fletcher – Goldfarb – Shanno algorithm, алгоритм Бройдена – Флетчера – Гольдфарба – Шанно. [The Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno algorithm.]

² *Optim.jl* Documentation. *Optim.jl* – Julia optimization library. <https://juliansolvers.github.io/Optim.jl/stable/>. Дата обращения 07.07.2025. / Accessed July 07, 2025.

Использование нескольких наборов позволило проверить обобщающую способность модели на различных данных. Применение стандартного набора тестовых данных обеспечивает возможность сравнения полученных результатов с существующими методами и опубликованными исследованиями, а также позволяет объективно оценить сильные и слабые стороны модели.

Перед обучением классификатора все данные подвергались предварительной нормализации, включающей центрирование и масштабирование, что необходимо для повышения устойчивости и улучшения обобщающей способности модели. В совокупности с 10-кратной кросс-валидацией и тестированием на различных выборках все это обеспечивает объективную и надежную оценку качества (Accuracy) [14] исследуемого классификатора.

В табл. 2 показаны результаты тестирования данной модели классификатора с адаптивной трансформацией пространства признаков.

Было проведено сравнение предложенной модели с методом SVM, использующим полиномиальное ядро [15, 16]. В SVM с полиномиальными ядрами классификация осуществляется в неявно заданном пространстве более высокой размерности, скалярное произведение в котором вычисляется напрямую через функцию ядра, без явного построения признакового преобразования. В отличие от этого,

предлагаемый метод явно строит нелинейное отображение исходного пространства с последующим линейным разделением методом опорных векторов.

Следует отметить, что в качестве конкурирующего прототипа рассматривается SVM именно с полиномиальным ядром. Это связано с тем, что полиномиальное ядро, как правило, дает качество несколько хуже, чем более сложные ядра (например, RBF – radial basis function, радиально-базисная функция), но при этом является вычислительно более эффективным, предоставляя компромисс между качеством классификации и вычислительной сложностью. Предлагаемый метод дает близкое к SVM с полиномиальным ядром качество, но при этом дает еще больший вычислительный выигрыш.

Для сравнения были выполнены тесты, в которых параметры полиномиального ядра подбирались с использованием метода случайного поиска (random search) по заданной сетке значений. Подбор проводился с использованием 10-кратной перекрестной валидации. Это позволило достаточно тщательно подобрать гиперпараметры ядра, что обеспечило корректное сравнение моделей. Результаты тестирования SVM с полиномиальным ядром приведены в табл. 3.

В табл. 4 представлено сравнение качества классификации на каждом из наборов данных для предлагаемой модели и SVM с полиномиальным ядром.

Таблица 2. Результаты тестирования предлагаемой модели

№	Набор данных	Размерность выходного пространства (m)	Степень полиномов (d)	Точность (Accuracy), %
1	blood-transfusion-service-center	4	3	79.29
2	phoneme	5	3	83.33
3	diabetes	8	3	77.47
4	qsar-biodeg	41	3	85.97
5	kc1	21	3	84.45
6	pc1	21	3	92.24

Таблица 3. Результаты тестирования SVM с полиномиальным ядром

№	Набор данных	Степень (d)	Точность (Accuracy), %	Количество опорных векторов
1	blood-transfusion-service-center	3	77.14	367
2	phoneme	3	83.81	2074
3	diabetes	2	76.95	397
4	qsar-biodeg	2	86.24	429
5	kc1	3	84.69	643
6	pc1	3	93.06	158

Таблица 4. Сравнение точности предлагаемой модели и SVM с полиномиальным ядром

№	Набор данных	Точность (Accuracy), %	
		Предлагаемая модель	Полиномиальное ядро
1	blood-transfusion-service-center	79.29	77.14
2	phoneme	83.33	83.81
3	diabetes	77.47	76.95
4	qsar-biodeg	85.97	86.24
5	kc1	84.45	84.69
6	pc1	92.24	93.06

Как видно из табл. 4, предлагаемая модель классификатора дает точность, близкую к SVM с полиномиальным ядром. Это говорит о хорошей гибкости модели и демонстрирует ее возможности подстраиваться под особенности набора данных.

3. АНАЛИЗ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СЛОЖНОСТИ

Во многих задачах машинного обучения ключевым фактором является не только точность модели, но и ее вычислительная сложность при классификации. Это особенно важно в приложениях, где требуется быстрая обработка данных, например, в системах реального времени (обнаружение объектов, анализ потоков данных или диагностика). Ограниченные вычислительные ресурсы также играют значительную роль, особенно на устройствах с невысокой мощностью, таких как мобильные устройства, встроенные системы или микроконтроллеры, где сложные модели могут быть непригодны из-за недостатка памяти, энергии или вычислительной мощности. Таким образом, при выборе модели важно учитывать ее сложность и эффективность на целевом оборудовании.

После обучения предлагаемой модели итоговый классификатор (решающая функция) выглядит следующим образом:

$$f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{w}, \Phi_{\mathbf{A}, \mathbf{P}}(\mathbf{x}) \rangle + b.$$

Преобразование $\Phi_{\mathbf{A}, \mathbf{P}}(\mathbf{x})$ сводится к умножению на матрицу и покомпонентному полиномиальному преобразованию. Умножение на матрицу \mathbf{A} требует $n \times m$ операций умножения и $(n - 1) \times m$ операций сложения. Применение многочленов $p_i(x)$ требует $d \times m$ операций умножения и $(d - 1) \times m$ операций сложения. Скалярное произведение со сдвигом требует еще m операций умножения и m операций сложения.

В итоге классификация одного объекта требует $m \times (n + d + 1)$ операций умножения, $m \times (n + d - 1)$

операций сложения. Таким образом, вычислительная сложность классификации не зависит от количества опорных векторов. Это является кардинальным отличием предлагаемого метода от классического SVM (с применением функции ядра и решением двойственной задачи [17]). Благодаря явному параметризованному преобразованию признаков $\Phi_{\mathbf{A}, \mathbf{P}}(\mathbf{x})$, удается избежать перехода к двойственной задаче, характерного для методов с использованием функций ядра (kernel trick) [15, 18]. Это позволяет существенно снизить вычислительную сложность, особенно в случаях, когда решение двойственной задачи приводит к большому числу опорных векторов, что типично для зашумленных и высокоразмерных данных.

В случае использования преобразования ядра решается двойственная задача минимизации. В результате получается следующая решающая функция:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^l \alpha_i k(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}) + b,$$

где $k(\mathbf{x}_i, \mathbf{x})$ – функция ядра, \mathbf{x}_i – опорные векторы.

Полиномиальное ядро задается следующим образом:

$$k(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = (\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}' \rangle + c)^d,$$

где c и d являются параметрами ядра.

Вычисление полиномиального ядра требует $(n + d - 1) \times l$ операций умножения (для невысоких степеней: $d \in \{2; 3\}$), $n \times l$ операций сложения, где n – размерность пространства (длина вектора \mathbf{x}), d – степень полиномиального ядра, l – количество опорных векторов. Для принятия решения о классификации берется сумма по всем опорным векторам, это требует l операций умножения (умножение значения функции ядра на коэффициент α_i), $l + 1$ операций сложения. В итоге общее число элементарных операций необходимых для классификации составляет $l \times (n + d)$ операций умножения и $l \times (n + 1) + 1$ операций сложения.

Таблица 5. Сравнение вычислительной сложности предлагаемой модели и SVM с полиномиальным ядром

№	Набор данных	Число операций	
		Предлагаемая модель	Полиномиальное ядро
1	blood-transfusion-service-center	56	4405
2	phoneme	80	29037
3	diabetes	176	7544
4	qsar-biodeg	3608	36466
5	kc1	1008	29579
6	pc1	1008	7269

На практике количество опорных векторов l обычно оказывается достаточно большим, что приводит к увеличению объема вычислений. Для предварительного анализа вычислительной сложности предлагаемого метода преобразования пространства признаков по сравнению с классическим подходом на основе ядерных функций можно использовать следующие соотношения, которые часто наблюдаются на практике:

$$l \gg n, l \gg m, l \gg d, m \sim n, d < n.$$

Отсюда получается, что, как правило, подход с использованием функций ядра будет требовать значительно больше вычислений для классификации на выходе. В табл. 5 сведены результаты расчета общего числа элементарных операций, необходимых для классификации объекта для каждого набора данных.

Таким образом, предлагаемая модель требует значительно меньше арифметических операций (сложение, умножение) для классификации объекта. Это делает данный подход вычислительно более эффективным в сравнении с использованием полиномиального ядра.

4. ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТЬ МОДЕЛИ

В ходе эксперимента производился замер времени классификации одного объекта для каждого набора данных. Для точного измерения времени выполнения использовался пакет *BenchmarkTools.jl*³, обеспечивающий минимизацию влияния фоновых процессов и точную оценку вычислительных затрат. Каждое измерение проводилось на заранее обученных моделях, а время классификации фиксировалось в микросекундах. В качестве основной метрики использовалось медианное время выполнения для всех запусков, т.к. оно обеспечивает устойчивость к случайным выбросам и отражает типичную производительность модели. Полученные результаты сведены в табл. 6, позволяющую провести сравнительный анализ скорости классификации предлагаемой модели и SVM с полиномиальным ядром.

Результаты экспериментов показывают, что предлагаемая модель обладает значительно большей вычислительной эффективностью по сравнению с SVM с полиномиальным ядром. На всех тестируемых наборах данных время классификации одного объекта в предложенной модели оказалось существенно ниже, что подтверждает теоретические

Таблица 6. Сравнение производительности предлагаемой модели и SVM с полиномиальным ядром

№	Набор данных	Производительность, мкс	
		Предлагаемая модель	Полиномиальное ядро
1	blood-transfusion-service-center	0.356	7.75
2	phoneme	0.384	45.1
3	diabetes	0.422	11.3
4	qsar-biodeg	1.94	21.8
5	kc1	0.822	22.2
6	pc1	0.822	5.25

³ *BenchmarkTools.jl* Documentation. *BenchmarkTools.jl* Manual. <https://juliaci.github.io/BenchmarkTools.jl/stable/manual/>. Дата обращения 07.07.2025. / Accessed July 07, 2025.

оценки ее вычислительной сложности. В отличие от полиномиального ядра, где сложность классификации зависит от количества опорных векторов, предложенный метод выполняет предсказание с фиксированной вычислительной сложностью, что делает его значительно более эффективным при работе с большими объемами данных. Анализ медианных значений времени выполнения показывает, что ускорение классификации достигается без значительного ухудшения качества, что делает предложенный подход конкурентоспособной альтернативой ядровым методам. Таким образом, экспериментальные результаты подтверждают, что предлагаемая модель является перспективным решением для задач, требующих высокой скорости классификации при сохранении точности.

Для анализа зависимости времени классификации от размерности пространства признаков проведены дополнительные эксперименты на синтетических данных. В ходе тестов матрица линейного преобразования A выбиралась квадратной ($m = n$). Данный тест позволил исследовать влияние размерности на вычислительные затраты. Эксперименты проводились на сгенерированных наборах данных различной размерности, а для каждого случая выполнялся замер медианного времени классификации одного объекта. Полученные результаты представлены в виде графика (рисунок), иллюстрирующего рост вычислительных затрат в зависимости от размерности признакового пространства.

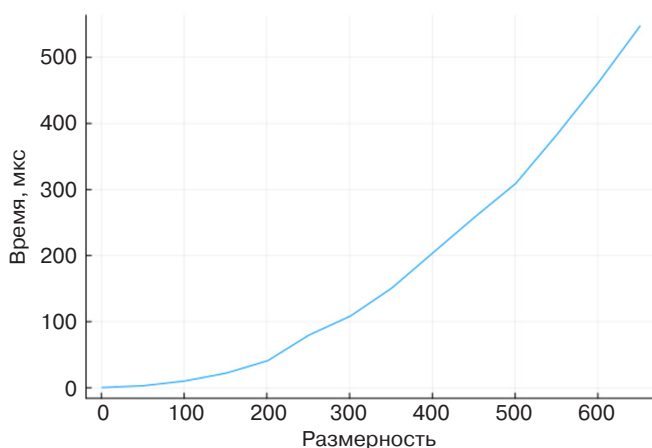


Рисунок. График зависимости времени классификации от размерности

Как показывают результаты, при размерностях $n \leq 600$ время классификации увеличивается умеренно, что свидетельствует о возможности эффективного применения предложенного метода в т.ч. в задачах с высокоразмерными признаками. Таким образом, предложенная модель остается вычислительно эффективной при средних и умеренно высоких размерностях, что делает ее пригодной для широкого спектра практических задач.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложен метод преобразования пространства признаков, позволяющий эффективно классифицировать линейно неразделимые данные. В отличие от классических ядровых методов, модель выполняет явное нелинейное отображение признаков с параметрами, обучаемыми в процессе оптимизации.

Для оценки эффективности предложенного метода проведены численные эксперименты, включающие сравнение с классическими ядровыми методами по качеству классификации и вычислительной сложности. Проведенные эксперименты показали, что предлагаемая модель значительно превосходит SVM с полиномиальным ядром по скорости классификации, сохраняя при этом сопоставимое качество. Анализ зависимости времени выполнения от размерности пространства признаков продемонстрировал, что при размерностях $n \leq 600$ время классификации растет умеренно, что подтверждает возможность эффективного применения метода в задачах с высокоразмерными данными.

Таким образом, разработанный метод представляет собой вычислительно эффективную альтернативу классическим ядровым методам и может быть применим в задачах, требующих высокой скорости работы без значительного снижения качества классификации.

Вклад авторов

А.В. Федоров – детальная разработка модели, ее исследование и формулировка части идеи метода.

Д.В. Парфенов – постановка задачи, формулировка части идеи метода и общее руководство работой.

Author's contributions

A.V. Fedorov – development of the model, its detailed study, and formulation of part of the method's idea.

D.V. Parfenov – problem statement, formulation of part of the method's idea, and overall supervision of the work.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

1. Vapnik V. *Statistical Learning Theory*. New York: Wiley; 1998, 736 p. ISBN 978-0-471-03003-4
2. Maggioni F., Spinelli A. A novel robust optimization model for nonlinear Support Vector Machine. *Computers & Operations Research*. 2024;157:105059.
3. Rubin N., Fischer K., Lindner J., Dahmen D., Seroussi I., Ringel Z., Krüger M., Helias M. From Kernels to Features: A Multi-Scale Adaptive Theory of Feature Learning. *arXiv preprint arXiv:2402.03210*. 2024. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2502.03210>

4. LeJeune D., Alemohammad S. An Adaptive Tangent Feature Perspective of Neural Networks. In: *Proceedings of the 37th International Conference on Machine Learning (ICML)*. 2024. URL: <https://proceedings.mlr.press/v234/lejeune24a/lejeune24a.pdf>. Дата обращения 07.07.2025. / Accessed July 07, 2025.
5. Li Y., Lin Q. Diagonal Over-parameterization in Reproducing Kernel Hilbert Spaces as an Adaptive Feature Model: Generalization and Adaptivity. *arXiv preprint arXiv:2501.08679*. 2025. <https://arxiv.org/abs/2501.08679>
6. Kurbucz M.T., Benkő Z., Varga L., et al. Adaptive Law-Based Transformation (ALT): A Fast and Transparent Feature Transformation Method for Time Series Classification. *arXiv preprint arXiv:2501.09217*. 2025. <https://arxiv.org/abs/2501.09217>
7. Tikhonov A.N., Arsenin V.Y. *Solutions of Ill-Posed Problems*. Washington, D.C.: W.H. Freeman and Co.; 1977, 258 p.
8. Bishop C.M. *Pattern Recognition and Machine Learning*. New York: Springer; 2006, 738 p.
9. Fletcher R. *Practical Methods of Optimization*. New York: John Wiley & Sons; 1987, 464 p.
10. Baydin A.G., Pearlmutter B.A., Radul A.A., Siskind J.M. Automatic differentiation in machine learning: a survey. *Journal of Machine Learning Research (JMLR)*. 2018;18(153):1–43.
11. Fisher J. Automatic differentiation with dual numbers. *arXiv preprint arXiv:2201.00024*.
12. Bischl B., Casalicchio G., Feurer M., Hutter F., Lang M., Mantovani R.G., van Rijn J.N., Vanschoren J. OpenML Benchmarking Suites. *arXiv preprint arXiv:1708.03731v2 [stat.ML]*, 2019. <https://arxiv.org/abs/1708.03731v2>
13. Kohavi R. A Study of Cross-Validation and Bootstrap for Accuracy Estimation and Model Selection. In: *Proceedings of Fourteenth International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI)*. 1995;14(2):1137–1143.
14. Labatut V., Cherifi H. Accuracy Measures for the Comparison of Classifiers. *arXiv preprint arXiv:1207.3790*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1207.3790>
15. Schölkopf B., Smola A.J. *Learning with Kernels*. Cambridge: MIT Press; 2002, 300 p.
16. Hofmann T., Schölkopf B., Smola A.J. Kernel Methods in Machine Learning. *Ann. Statist.* 2008;36(3):1171–1220. <https://doi.org/10.1214/009053607000000677>
17. Boser B.E., Guyon I.M., Vapnik V. A Training Algorithm for Optimal Margin Classifiers. In: *Proceedings of the Fifth Annual Workshop on Computational Learning Theory (COLT)*. 1992. P. 144–152. <https://doi.org/10.1145/130385.130401>
18. Cortes C., Vapnik V. Support-Vector Networks. *Mach. Learn.* 1995;20(3):273–297. <https://doi.org/10.1007/BF00994018>

Об авторах

Федоров Алексей Викторович, аспирант, кафедра высшей математики, Институт искусственно-го интеллекта, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: fedorov_av@mirea.ru. <https://orcid.org/0009-0003-2314-7400>

Парфенов Денис Васильевич, к.т.н., доцент, кафедра высшей математики, Институт искусственно-го интеллекта, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: parfenov@mirea.ru. Scopus Author ID 57217119805, SPIN-код РИНЦ 7463-3220, <https://orcid.org/0009-0004-0905-3827>

About the Authors

Aleksy V. Fedorov, Postgraduate Student, Higher Mathematics Department, Institute of Artificial Intelligence, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: fedorov_av@mirea.ru. <https://orcid.org/0009-0003-2314-7400>

Denis V. Parfenov, Cand. Sci. (Eng.), Associate Professor, Higher Mathematics Department, Institute of Artificial Intelligence, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: parfenov@mirea.ru. Scopus Author ID 57217119805, RSCI SPIN-code 7463-3220, <https://orcid.org/0009-0004-0905-3827>

Математическое моделирование
Mathematical modeling

УДК 621.372.8
<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2026-14-1-91-102>
EDN KVXGWT



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Моделирование поверхностных волн в фотонных кристаллических структурах с профилем показателя преломления, убывающим с расстоянием от поверхности

С.Е. Савотченко[®]

МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, 119454 Россия
[®] Автор для переписки, e-mail: savotchenkose@mail.ru

• Поступила: 27.11.2024 • Доработана: 30.05.2025 • Принята к опубликованию: 18.11.2025

Резюме

Цели. Выявление закономерностей распространения поверхностных волн в неоднородных и нелинейных кристаллических структурах на основе математических моделей является важной фундаментальной задачей в физике конденсированного состояния, относящейся к волноводной оптике. При этом особой важностью обладают такие модели волноводных структур, в которых удается найти точное аналитическое решение. Цель работы – теоретическое изучение поверхностных электрических волн поперечной поляризации, распространяющихся вдоль фотонного кристалла с определенной формой профиля показателя преломления.

Методы. Применены методы математической физики, анализа, дифференциальных уравнений и теории специальных функций, а также физические модели волноводной оптики.

Результаты. Для описания пространственно неоднородного распределения оптических свойств фотонного кристалла предложен обобщенный гиперболический профиль диэлектрической проницаемости, который обладает широкими возможностями вариации формы, что позволяет его использовать для широкого круга задач, не ограничиваясь волноводной оптикой. Найдено точное аналитическое решение волнового уравнения для выбранного профиля диэлектрической проницаемости, выражаемое через функцию Уиттекера. Рассмотрены частые случаи обобщенного профиля, для которого указаны точные аналитические решения, выражаемые через функции Уиттекера и Макдональда. Описаны поверхностные поперечные электрические волны, поле в которых локализовано вблизи поверхности фотонного кристалла и убывает при удалении от нее. Полученное решение также описывает волноводные моды, в которых поле убывает при удалении от поверхности фотонного кристалла с осцилляциями. Выявлены новые особенности локализации поверхностных волн, обусловленные изменением параметров обобщенного гиперболического профиля, моделирующего зависимость диэлектрической проницаемости. Установлено, что в линейной поверхностной волне максимум интенсивности расположен в фотонном кристалле.

Выводы. Полученные результаты описания характеристик поверхностных волн расширяют теоретические представления волноводной оптики. Они могут быть полезны для прогнозирования оптических свойств различных фотонных кристаллических структур, а также при проектировании различных волноводных структур с требуемыми дисперсионно-оптическими характеристиками.

Ключевые слова: неоднородные оптические среды, фотонный кристалл, поверхностные волны, управляемые волны, волноводные моды

Для цитирования: Савотченко С.Е. Моделирование поверхностных волн в фотонных кристаллических структурах с профилем показателя преломления, убывающим с расстоянием от поверхности. *Russian Technological Journal*. 2026;14(1):91–102. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2026-14-1-91-102>, <https://www.elibrary.ru/KVXGWT>

Прозрачность финансовой деятельности: Автор не имеет финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

RESEARCH ARTICLE

Modeling of surface waves in photonic crystal structures with a refractive index profile decreasing with distance from the surface

Sergey E. Savotchenko [®]

MIREA – Russian Technological University, Moscow, 119454 Russia

[®] Corresponding author, e-mail: savotchenkose@mail.ru

• Submitted: 27.11.2024 • Revised: 30.05.2025 • Accepted: 18.11.2025

Abstract

Objectives. Identification of the propagation patterns of surface waves in inhomogeneous and nonlinear crystal structures using mathematical models is an important fundamental problem in condensed matter physics, specifically waveguide optics. Models of waveguide structures used to establish an exact analytical solution are of particular significance. The aim of this work is to carry out a theoretical study of transversely polarized surface electric waves propagating along a photonic crystal with a certain refractive index profile.

Methods. The methods of mathematical physics, analysis, differential equations, and theory of special functions, as well as physical models of waveguide optics, were used in this study.

Results. A generalized hyperbolic permittivity profile was proposed to describe the spatially inhomogeneous distribution of the optical properties of a photonic crystal. This profile has a wide range of possibilities for varying its shape, allowing it to be used for a wide range of problems not limited to waveguide optics. An exact analytical solution of the wave equation with the selected permittivity profile was found in terms of the Whittaker function. Frequent cases of the generalized profile for which exact analytical solutions were indicated were also considered. These are expressed through the Whittaker and Macdonald functions. The study also describes surface transverse electric waves, where the field is localized near the surface of the photonic crystal and decreases with distance from it. The solution obtained also describes waveguide modes in which the field decreases with distance from the surface of the photonic crystal with oscillations. New features of surface wave localization were established. These were caused by a change in the parameters of the generalized hyperbolic profile modeling the dependence of the permittivity. It was also established that the maximum intensity of the surface wave is located in the photonic crystal.

Conclusions. The results of the description of the characteristics of surface waves obtained expand the theoretical concepts of waveguide optics. They can be useful in predicting the optical properties of various photonic crystal structures, as well as in designing various waveguide structures with the required dispersion-optical characteristics.

Keywords: inhomogeneous optical media, photonic crystal, surface waves, guided waves, waveguide modes

For citation: Savotchenko S.E. Modeling of surface waves in photonic crystal structures with a refractive index profile decreasing with distance from the surface. *Russian Technological Journal*. 2026;14(1):91–102. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2026-14-1-91-102>, <https://www.elibrary.ru/KVXGWT>

Financial disclosure: The author has no financial or proprietary interest in any material or method mentioned.

The author declares no conflicts of interest.

ВВЕДЕНИЕ

Изучение свойств поверхностных волн в кристаллах, в т.ч. и фотонных гетероструктурах, на основе математического моделирования является важной фундаментальной задачей [1]. При этом особую роль играют такие модели волноводных структур, в рамках которых удастся найти точное аналитическое решение.

Выбор формы профиля показателя преломления (или диэлектрической проницаемости), моделирующего оптическую неоднородность, при описании реальных кристаллов производится на основе наилучшего согласия с экспериментальными данными. К примеру, в [2] исследована фотонная запрещенная зона в одномерных экспоненциально градиентных фотонных кристаллах, где использован экспоненциальный профиль для описания изменения показателя преломления между начальной и конечной границами градиентного слоя. В [3] свойства новой структуры фотонно-кристаллического резонатора также описываются с использованием экспоненциального профиля показателя преломления. Простой гиперболический профиль показателя преломления в виде $n \sim 1/x$, характеризующий его снижение с расстоянием x от поверхности контакта, использован при описании фотонных запрещенных зон [4, 5] и в новом подходе для достижения улучшенных характеристик чувствительности фотонного кристалла [6].

Проблема нахождения точных решений волнового уравнения в нелинейных и неоднородных средах связана с выбором профиля показателя преломления (диэлектрической проницаемости) в неоднородных средах [7]. Несмотря на то, что известно много точно интегрируемых профилей показателя преломления [8–11], остается значительное число задач, связанных с нахождением явных аналитических выражений для поверхностных волн, которые описываются решениями не отдельных уравнений, а решениями краевых задач систем уравнений в определенных областях, удовлетворяющих условиям сопряжения на их границах [12–14].

В данной работе представлены результаты теоретического изучения поверхностных волн, а точнее электрических волн поперечной поляризации, распространяющихся вдоль фотонного кристалла

с определенной формой профиля показателя преломления. Для такой пространственной зависимости, представляющей собой обобщение гиперболического профиля [15], получено новое точное аналитическое решение. С его помощью описаны новые типы линейных и нелинейных поверхностных волн. Линейные поверхностные волны для простого гиперболического профиля диэлектрической проницаемости $\epsilon \sim 1/x$ были описаны недавно в [16]. Нелинейные поверхностные волны, распространяющиеся вдоль контакта неоднородной среды с таким профилем с нелинейной средой со ступенчатой нелинейностью, описаны в [17]. В представленной работе приведены результаты изучения поверхностных волн в случае ступенчатой нелинейности при использовании обобщенного гиперболического профиля диэлектрической проницаемости. Такой профиль обладает широкими возможностями вариации формы, что позволяет его использовать для широкого круга задач, не ограничиваясь волноводной оптикой [18].

1. МОДЕЛЬ ФОТОННОЙ КРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ С ПЕРЕМЕННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ ПРЕЛОМЛЕНИЯ

Рассмотрим фотонный кристалл, в котором значение показателя преломления снижается при удалении от его поверхности. Такой убывающий профиль можно получить путем инжентирования ионов специально подобранных примесей [5]. Технологии ионной имплантации хорошо развиты и позволяют формировать такое распределение ионов, которое будет обеспечивать требуемый пространственный профиль показателя преломления [2–6]. В данной работе будем рассматривать модели гетероструктур из немагнитных материалов, состоящих из фотонного кристалла, контактирующего со средой с однородными оптическими характеристиками.

Выберем ось Ox перпендикулярно поверхности фотонного кристалла, которая считается плоской (плоскость $x = 0$ и оси Oy и Oz в ней расположены). Пространственное распределение оптических свойств рассматриваемой фотонной гетероструктуры вдоль поверхности будем считать однородным, а их изменение формируется только в поперечном к поверхности направлении.

Будем рассматривать только поперечные монохроматические волны, распространяющиеся вдоль поверхности кристалла, с компонентой напряженности электрического поля:

$$E_y(x, z) = u(x)e^{i(knz - \omega t)}, \quad (1)$$

где $u(x)$ – поперечный профиль напряженности электрического поля, $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число, λ – длина волны, $n = ck/\omega$ – эффективный показатель преломления, ω – частота, c – скорость света в вакууме.

Уравнение для нахождения поперечного профиля напряженности электрического поля будет иметь вид [7]:

$$u''(x) + \{\varepsilon(x, I) - n^2\}k^2u(x) = 0, \quad (2)$$

где $\varepsilon(x, I)$ – диэлектрическая проницаемость фотонной гетероструктуры, которая в общем случае может отражать нелинейный отклик в виде определенной зависимости от интенсивности электрического поля $I = |u|^2$ (модели нелинейности среды), а также оптическую неоднородность, моделируемую зависимостью от пространственной координаты (пространственным профилем). Квадрат диэлектрической проницаемости определяет показатель преломления.

В рассматриваемом случае, когда фотонный кристалл плоской поверхностью контактирует с оптически однородной средой с нелинейным откликом (нелинейной средой) или без него (линейной средой), диэлектрическую проницаемость можно представить в виде [13]:

$$\varepsilon(x, I) = \begin{cases} \varepsilon_{\text{in}}(x), & x > 0, \\ \varepsilon_{\text{ho}}(I), & x < 0, \end{cases} \quad (3)$$

где $\varepsilon_{\text{in}}(x)$ моделирует неоднородность профиля диэлектрической проницаемости в зависимости от координаты перпендикулярно поверхности фотонного кристалла (in – inhomogeneous), а $\varepsilon_{\text{ho}}(I)$ моделирует нелинейный отклик оптически однородной среды, контактирующей с фотонным кристаллом (ho – homogeneous).

Если поперечный профиль напряженности электрического поля записать в виде:

$$u(x) = \begin{cases} u_{\text{in}}(x), & x > 0, \\ u_{\text{ho}}(I), & x < 0, \end{cases} \quad (4)$$

где $u_{\text{in}}(x)$ и $u_{\text{ho}}(I)$ – профили напряженности электрического поля в фотонном кристалле и в оптически однородной среде, соответственно, определенные на полуосях, то уравнение (2) разделяется на два уравнения на полуосях:

$$u_{\text{in}}''(x) + \{\varepsilon_{\text{in}}(x) - n^2\}k^2u_{\text{in}}(x) = 0, \quad x > 0, \quad (5)$$

$$u_{\text{ho}}''(x) + \{\varepsilon_{\text{ho}}(I) - n^2\}k^2u_{\text{ho}}(x) = 0, \quad x < 0. \quad (6)$$

Непрерывность компонент поля на поверхности фотонного кристалла определяет граничные условия сопряжения при $x = 0$:

$$u_{\text{in}}(+0) = u_{\text{ho}}(-0), \quad (7)$$

$$u_{\text{in}}'(+0) = u_{\text{ho}}'(-0). \quad (8)$$

Кроме того, следует добавить вытекающие из требования исчезновения поля на бесконечности условия: $u_{\text{ho}}(x) \rightarrow 0$, $u_{\text{in}}(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$.

В результате получаем формулировку модели в виде краевой задачи сопряжения (5)–(8), непрерывные и ограниченные всюду решения которой могут применяться для описания распространения поверхностных волн в фотонных кристаллических структурах.

2. МОДЕЛИРОВАНИЕ УБЫВАЮЩЕГО ПРОФИЛЯ ПОКАЗАТЕЛЯ ПРЕЛОМЛЕНИЯ ФОТОННОЙ КРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ

Для нахождения решений в явном виде необходимо выбрать конкретный вид профиля диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{\text{in}}(x)$ и модель нелинейности среды $\varepsilon_{\text{ho}}(I)$. Для моделирования неоднородности фотонной кристаллической структуры часто применяются убывающие профили [2–6], которые соответствуют снижению значения показателя преломления при удалении от поверхности в глубину фотонной структуры. Предлагается использовать зависимость в виде:

$$\varepsilon_{\text{in}}(x) = e_0 + \frac{e_1}{x + h_1} + \frac{e_2}{(x + h_2)^2}, \quad (9)$$

где e_0, e_1, e_2, h_1, h_2 – параметры пространственного профиля диэлектрической проницаемости.

Такая форма профиля диэлектрической проницаемости представляет собой обобщение гиперболического профиля, рассмотренного ранее [15–17], получаемого из (9) при $e_0 = e_2 = 0$.

Подстановка профиля (9) в уравнение (5) приводит к уравнению:

$$u_{\text{in}}''(x) + \left(e_0 + \frac{e_1}{x + h_1} + \frac{e_2}{(x + h_2)^2} - n^2 \right) k^2 u_{\text{in}}(x) = 0. \quad (10)$$

Если воспользоваться определением конфлюэнтной функции Хойна (the Heun confluent function) $H_c(q, \alpha, \gamma, \delta, e, z)$ как решения $y(z)$

конфлюэнтного дифференциального уравнения Хойна [19]:

$$z(z-1)y'' + (\gamma(z-1) + \delta z + z(z-1)e)y' + (\alpha z - q)y = 0,$$

то общее решение уравнения (10) может быть записано с ее помощью в виде:

$$u_{in}(x) = (x+h_1)e^{n_0 k x} \left\{ C_1 (x+h_2)^{\frac{n_1+1}{2}} H_c \times \right. \\ \times \left(2kn_0(h_2-h_1), n_1, 1, k^2 e_1(h_2-h_1), \frac{1}{2}, \frac{x+h_2}{h_2-h_1} \right) + \\ \left. + C_2 (x+h_2)^{\frac{n_1+1}{2}} H_c \times \right. \\ \left. \times \left(2kn_0(h_2-h_1), -n_1, 1, k^2 e_1(h_2-h_1), \frac{1}{2}, \frac{x+h_2}{h_2-h_1} \right) \right\},$$

где $n_0 = \sqrt{n^2 - e_0}$ и $n_1 = \frac{1}{2}\sqrt{1 - 4k^2 e_2}$, C_1, C_2 – константы интегрирования.

Очевидно, что анализ такого решения весьма затруднителен. Однако, если считать, что $h_1 = h_2 = h$, то для профиля

$$\varepsilon_{in}(x) = e_0 + \frac{e_1}{x+h} + \frac{e_2}{(x+h)^2} \quad (11)$$

уравнение (10) имеет вид:

$$u_{in}''(x) + \left(e_0 + \frac{e_1}{x+h} + \frac{e_2}{(x+h)^2} - n^2 \right) k^2 u_{in}(x) = 0. \quad (12)$$

При таком упрощении оказывается, что общее решение уравнения (12) выражается через функции Уиттекера (the Whittaker functions) $W_{\mu, \nu}(z)$ и $M_{\mu, \nu}(z)$ как решения $y(z)$ дифференциального уравнения Уиттекера [19]:

$$y'' + \left(\frac{\mu}{z} - \frac{1}{4} + \frac{1/4 - \nu^2}{z^2} \right) y = 0,$$

которое, очевидно, является более простым по сравнению с дифференциальным уравнением Хойна.

Поскольку ограниченным и убывающим на бесконечности решением уравнения Уиттекера является функция Уиттекера $W_{\mu, \nu}(z)$, то поперечный профиль напряженности электрического поля в фотонной кристаллической структуре, определяемый решением уравнения (10), можно записать в виде:

$$u_{in}(x) = u_0 \frac{W_{\mu, \nu}(2n_0 k(x+h))}{W_{\mu, \nu}(2n_0 kh)}, \quad (13)$$

где u_0 – значение напряженности электрического поля на поверхности фотонного кристалла, и индексы функции Уиттекера определяются параметрами уравнения (11) как:

$$\mu = e_1 k / 2n_0 = e_1 k / 2\sqrt{n^2 - e_0},$$

$$\nu = n_1 = \sqrt{1 - 4k^2 e_2} / 2.$$

Отсюда следует, что решение (13) существует при условиях $n^2 > e_0$ и $k^2 > 1/4e_2$.

Таким образом, получено пространственное распределение напряженности электрического поля в фотонной кристаллической структуре с профилем диэлектрической проницаемости, убывающим при удалении от поверхности по обобщенному гиперболическому закону (11) в явном аналитическом виде (12).

Отметим, что использование обобщенного профиля (11) позволяет применять полученное решение (13) не только в теории волноводной оптики, но и в квантовой механике, поскольку уравнение (12) может рассматриваться как стационарное уравнение Шредингера [18] с обобщенным гиперболическим потенциалом, описываемым профилем (11). При этом, варьируя значения параметров профиля (11), можно получить его существенно различные формы (рис. 1), применимые для описания как монотонных (рис. 1а) и немонотонных потенциальных барьеров (рис. 1б), так и потенциальных ям (рис. 1в).

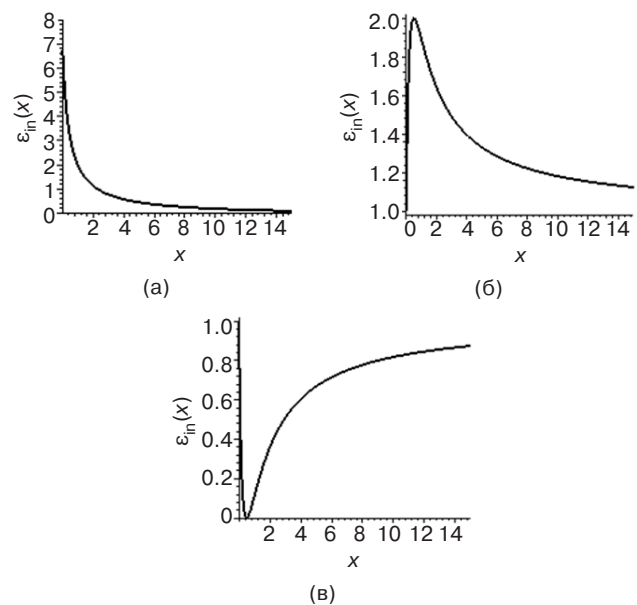


Рис. 1. Пространственные профили диэлектрической проницаемости (11) при различных значениях его параметров (в условных безразмерных единицах): (а) $e_0 = -0.1, e_1 = 3, e_2 = 0.2$; (б) $e_0 = -1, e_1 = 2, e_2 = -1$; (в) $e_0 = 1, e_1 = -2, e_2 = 1, h = 0.5$

Рассмотрим частные случаи профиля (9).

1) $e_2 = 0$. В этом случае профиль (9) принимает вид зависимости, убывающей по гиперболическому закону:

$$\varepsilon_{\text{in}}(x) = e_0 + \frac{e_1}{x+h}, \quad (14)$$

а уравнение (12) становится таким:

$$u_{\text{in}}''(x) + \left(e_0 + \frac{e_1}{x+h} - n^2 \right) k^2 u_{\text{in}}(x) = 0, \quad (15)$$

общее решение которого выражается через функции Уиттекера:

$$u_{\text{in}}(x) = C_1 W_{\mu,1/2}(2n_0 k(x+h)) + C_2 W_{\mu,1/2}(2n_0 k(x+h)), \quad (16)$$

где индексы функции Уиттекера $\mu = e_1 k / 2n_0 = e_1 k / 2\sqrt{n^2 - e_0}$ и $\nu = 1/2$.

Поскольку для описания поверхностных волн должно выполняться требование ограниченности решения на бесконечности, причем $u_{\text{in}}(x) \rightarrow 0$, при $|x| \rightarrow \infty$, то для дальнейшего применения решения (16) следует положить $C_2 = 0$. Для удовлетворения условию сопряжения (7) на границе раздела кристаллов допустимо выбрать $C_1 = u_0 / W_{\mu,1/2}(2n_0 kh)$, и тогда решение (16), которое можно будет использовать для решения краевой задачи сопряжения, примет вид:

$$u_{\text{in}}(x) = u_0 \frac{W_{\mu,1/2}(2n_0 k(x+h))}{W_{\mu,1/2}(2n_0 kh)}. \quad (17)$$

2) $e_1 = 0$. В этом случае профиль (9) принимает вид зависимости, убывающей по гиперболическому закону:

$$\varepsilon_{\text{in}}(x) = e_0 + \frac{e_2}{(x+h)^2}, \quad (18)$$

а уравнение (12) становится таким:

$$u_{\text{in}}''(x) + \left(e_0 + \frac{e_2}{(x+h)^2} - n^2 \right) k^2 u_{\text{in}}(x) = 0. \quad (19)$$

Автором найдено общее решение уравнения (19):

$$u_{\text{in}}(x) = \sqrt{x+h} \times \{ C_1 I_{\nu}(2n_0 k(x+h)) + C_2 K_{\nu}(2n_0 k(x+h)) \}, \quad (20)$$

где $I_{\nu}(z)$ и $K_{\nu}(z)$ – модифицированные цилиндрические функции мнимого аргумента первого и второго

рода, называемые также функциями Инфельда и Макдональда, соответственно, порядка $\nu = n_1 = \sqrt{1 - 4k^2 e_2} / 2$. Эти функции являются линейно независимыми решениями модифицированного дифференциального уравнения Бесселя [19]:

$$y'' + \frac{1}{z} y' - \left(1 + \frac{\nu^2}{z^2} \right) y = 0,$$

которое, очевидно, является более простым по сравнению как с дифференциальным уравнением Хойна, так и дифференциальным уравнением Уиттекера.

Поскольку функция Инфельда является неограниченной, то для дальнейшего применения решения (20) следует положить $C_1 = 0$. Для удовлетворения условию сопряжения (7) на границе раздела кристаллов допустимо выбрать $C_2 = u_0 \sqrt{h} / K_{\nu}(2n_0 kh)$, и тогда решение (20), которое можно будет использовать для решения краевой задачи сопряжения, примет вид:

$$u_{\text{in}}(x) = u_0 \sqrt{1 + \frac{x}{h}} \frac{K_{\nu}(2n_0 k(x+h))}{K_{\nu}(2n_0 kh)}. \quad (21)$$

Следует отметить, что решение (17) является таким частным случаем решения (13), которое получается при $e_2 = 0$ очевидным образом, а решение (21) не вытекает явным образом из решения (13) при $e_1 = 0$. Однако его форма является более предпочтительной для применения при построении решения краевой задачи сопряжения при моделировании поверхностных волн, поскольку функции Макдональда содержит на один параметр (индекс) меньше, чем функция Уиттекера, что упрощает анализ решения.

3. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ ВДОЛЬ ФОТОННОГО КРИСТАЛЛА С УБЫВАЮЩИМ ПОКАЗАТЕЛЕМ ПРЕЛОМЛЕНИЯ

В рассматриваемом случае, когда фотонный кристалл контактирует с воздухом или с оптически однородным диэлектриком без нелинейного отклика (линейной средой), диэлектрическая проницаемость в этом полупространстве считается постоянной и не зависящей от интенсивности поля: $\varepsilon_{\text{ho}}(I) = \varepsilon_0$.

В результате рассматриваемая фотонная кристаллическая структура будет характеризоваться диэлектрической проницаемостью:

$$\varepsilon(x, I) = \begin{cases} e_0 + \frac{e_1}{x+h} + \frac{e_2}{(x+h)^2}, & x > 0, \\ \varepsilon_0, & x < 0. \end{cases} \quad (22)$$

Тогда, с учетом сделанных предположений, уравнение (6), описывающее распределение поля в однородной среде, примет вид

$$u_{ho}''(x) - q_0^2 u_{ho}(x) = 0, x < 0, \quad (23)$$

где $q_0^2 = k^2(n^2 - \epsilon_0)$.

Убывающее на бесконечности решение уравнения (15) имеет вид:

$$u_{ho}(x) = u_0 e^{q_0 x}. \quad (24)$$

Поверхностная волна описывается решением краевой задачи сопряжения (5)–(8). Для нахождения этого решения необходимо определить параметры полученных решений на полуосях (13) и (24) так, чтобы они удовлетворяли граничным условиям (7) и (8). Видно, что решения (13) и (24) удовлетворяют условию непрерывности на поверхности фотонного кристалла (7). Для выполнения условия непрерывности производных, т.е. для обеспечения гладкости поперечного профиля поверхностной волны, решения (13) и (24) подставляются в граничное условие (8). В результате получается дисперсионное уравнение:

$$q_0 = \frac{k}{n_0} (n_0^2 - \epsilon_1 / 2) - \frac{W_{\mu+1,\nu}(2n_0 kh)}{h W_{\mu,\nu}(2n_0 kh)}. \quad (25)$$

Дисперсионное уравнение определяет непрерывный спектр значений эффективного показателя преломления n в зависимости от параметров профиля диэлектрической проницаемости (22). Результаты численного решения дисперсионного уравнения (25) представлены на рис. 2. Эффективный показатель преломления возрастает при увеличении таких параметров, как $e_0, e_1, e_2, \epsilon_0, k$, и снижается только при увеличении h .

Таким образом, решение краевой задачи (5)–(8), описывающее поверхностную волну, распространяющуюся вдоль поверхности фотонного кристалла, получается после подстановки в (4) решений (13) и (24):

$$u(x) = u_0 \begin{cases} \frac{W_{\mu,\nu}(2n_0 k(x+h))}{W_{\mu,\nu}(2n_0 kh)}, & x > 0, \\ e^{q_0 x}, & x < 0. \end{cases} \quad (26)$$

Поперечные профили напряженности электрического поля в поверхностной волне (26) приведены на рис. 3.

Видно, что электрическое поле локализовано в узких областях вблизи поверхности по обеим ее сторонам с максимумом интенсивности в фотонном кристалле. Интенсивность может быть больше в фотонном кристалле, чем в однородном диэлектрике, несмотря на то, что глубина проникновения поля в фотонный кристалл может быть меньше, чем в диэлектрике.

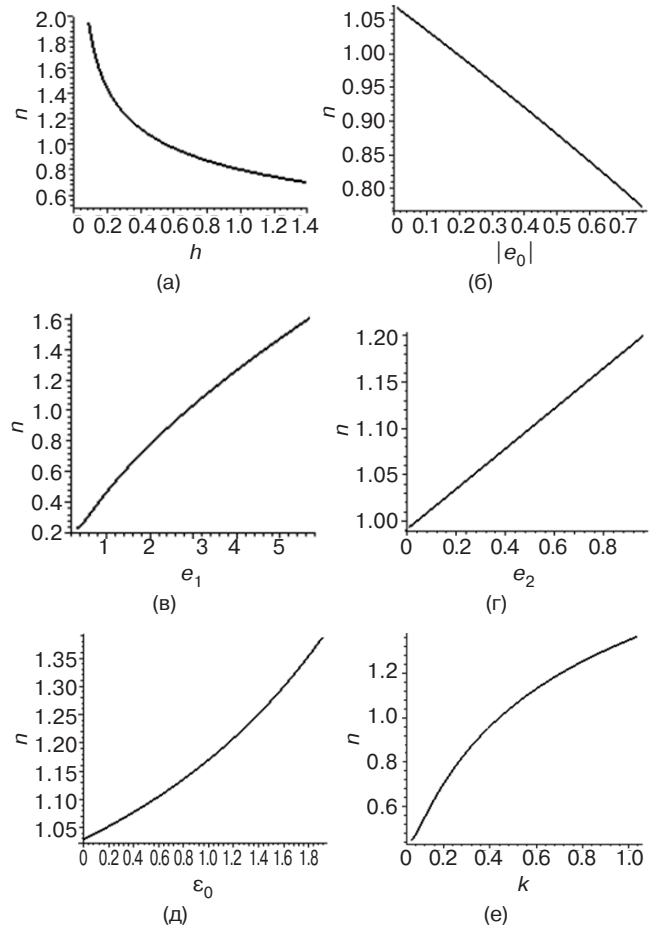


Рис. 2. Зависимости эффективного показателя преломления (в условных безразмерных единицах): (а) от h при $e_0 = -0.1, e_1 = 3, e_2 = 0.2, \epsilon_0 = 0.05, k = 0.5$; (б) от e_0 при $h = 0.5, e_1 = 3, e_2 = 0.2, \epsilon_0 = 0.05, k = 0.5$; (в) от e_1 при $h = 0.5, e_0 = -0.1, e_2 = 0.2, \epsilon_0 = 0.05, k = 0.5$; (г) от e_2 при $h = 0.5, e_0 = -0.1, e_1 = 3, \epsilon_0 = 0.05, k = 0.5$; (д) от e_0 при $h = 0.5, \epsilon_0 = -0.1, e_1 = 3, e_2 = 0.2, k = 0.5$; (е) от k при $h = 0.5, e_0 = -0.1, e_1 = 3, e_2 = 0.2, \epsilon_0 = 0.05$

Увеличение параметра h приводит к увеличению ширины локализации поля, максимум интенсивности сдвигается в глубину фотонного кристалла, а его интенсивность возрастает (рис. 3а). При снижении параметра e_0 (его увеличении по модулю) наблюдается увеличение глубины проникновения поля в однородный диэлектрик и ее снижение в фотонном кристалле, максимум интенсивности сдвигается к поверхности, а его интенсивность снижается (рис. 3б). Увеличение параметра e_1 приводит к уменьшению ширины локализации поля, интенсивность максимума возрастает, а его положение не меняется (рис. 3в). Увеличение параметра e_2 приводит также к уменьшению ширины локализации поля, но интенсивность максимума снижается, а его положение смещается к поверхности (рис. 3г). Почти к такому же эффекту приводит увеличение

параметра ε_0 , за исключением того, что наблюдается увеличение глубины проникновения поля в однородный диэлектрик (рис. 3д). Увеличение значения волнового числа (уменьшения длины волны) приводит к уменьшению ширины локализации поля, интенсивность максимума возрастает, а его положение незначительно смещается к поверхности (рис. 3е).

Из проведенного анализа следует, что глубина проникновения поля в фотонный кристалл

уменьшается с ростом эффективного показателя преломления. Следовательно, регулируя угол падения лазерного луча, возбуждающего поверхностную волну, можно изменять глубину проникновения поля в фотонный кристалл.

Важным моментом является то, что полученное решение (26) сформулированной краевой задачи (5)–(8) описывает не только поверхностную волну, в которой профиль напряженности электрического

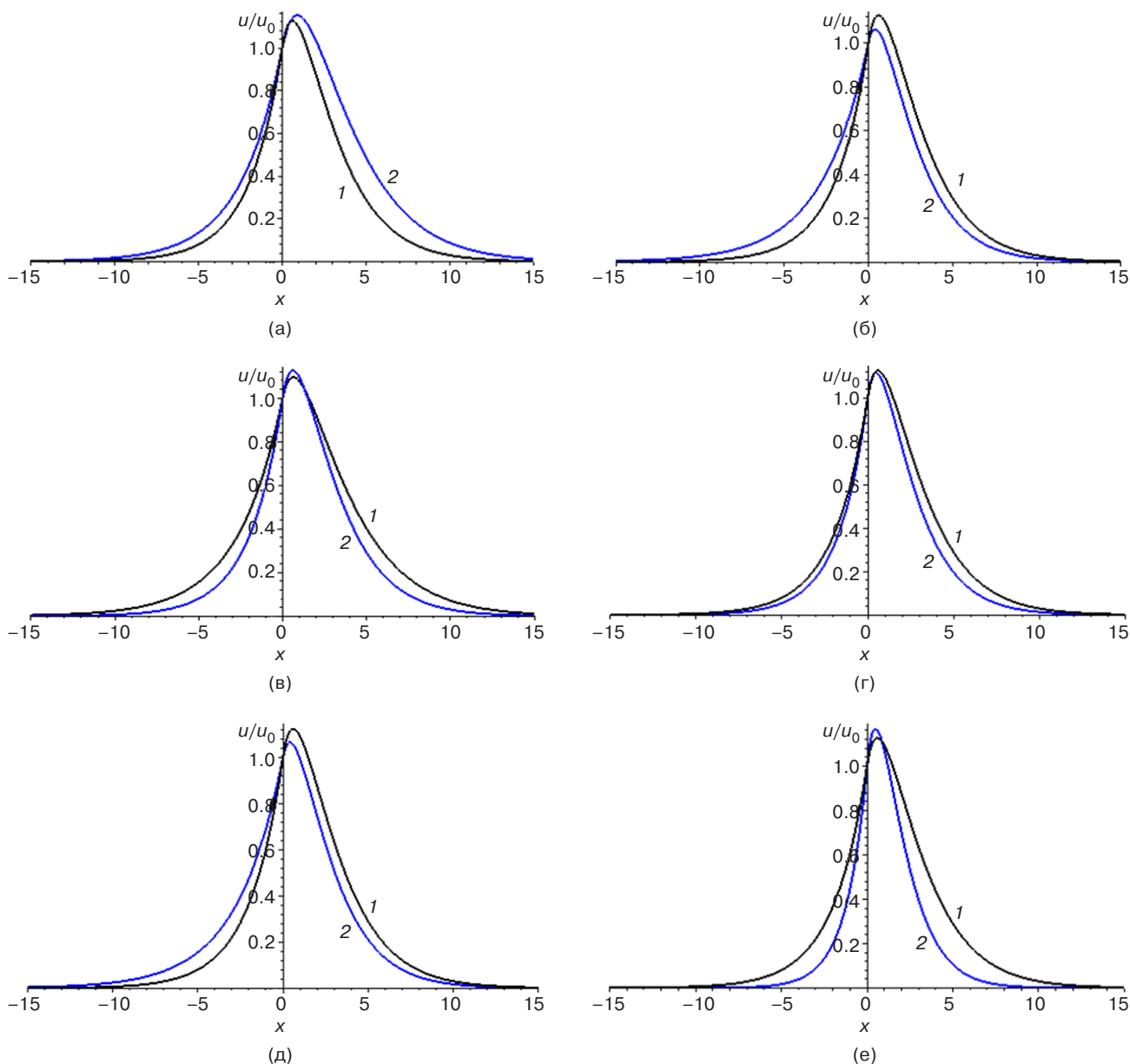


Рис. 3. Поперечные профили напряженности электрического поля в поверхностной волне (26) при различных значениях параметров системы (в условных безразмерных единицах):

- (а) $h = 0.5$ (линия 1), $h = 0.9$ (линия 2), $\varepsilon_0 = -0.1$, $\varepsilon_1 = 3$, $\varepsilon_2 = 0.2$, $\varepsilon_0 = 0.05$, $k = 0.5$;
- (б) $h = 0.5$, $\varepsilon_0 = -0.1$ (линия 1), $\varepsilon_0 = -0.9$ (линия 2), $\varepsilon_1 = 3$, $\varepsilon_2 = 0.2$, $\varepsilon_0 = 0.05$, $k = 0.5$;
- (в) $h = 0.5$, $\varepsilon_0 = -0.1$, $\varepsilon_1 = 2$ (линия 1), $\varepsilon_1 = 3$ (линия 2), $\varepsilon_2 = 0.2$, $\varepsilon_0 = 0.05$, $k = 0.5$;
- (г) $h = 0.5$, $\varepsilon_0 = -0.1$, $\varepsilon_1 = 3$, $\varepsilon_2 = 0.2$ (линия 1), $\varepsilon_2 = 0.9$ (линия 2), $\varepsilon_0 = 0.05$, $k = 0.5$;
- (д) $h = 0.5$, $\varepsilon_0 = -0.1$, $\varepsilon_1 = 3$, $\varepsilon_2 = 0.2$, $\varepsilon_0 = 0.05$ (линия 1), $\varepsilon_0 = 0.5$ (линия 2), $k = 0.5$;
- (е) $h = 0.5$, $\varepsilon_0 = -0.1$, $\varepsilon_1 = 3$, $\varepsilon_2 = 0.2$, $\varepsilon_0 = 0.05$, $k = 0.5$ (линия 1), $k = 0.7$ (линия 2)

поля достаточно быстро убывает с ростом расстояния от поверхности, но волноводные моды, в которых профиль напряженности электрического поля убывает с осцилляциями. Волноводные моды возбуждаются при определенных значениях параметров. Их характерные профили показаны на рис. 4. Амплитуды осцилляций волноводных мод спадают по мере их расположения к поверхности кристалла. Можно называть порядком волноводной моды количество максимумов интенсивности $I = |u|^2$ (количество максимумов и минимумов напряженности электрического поля).

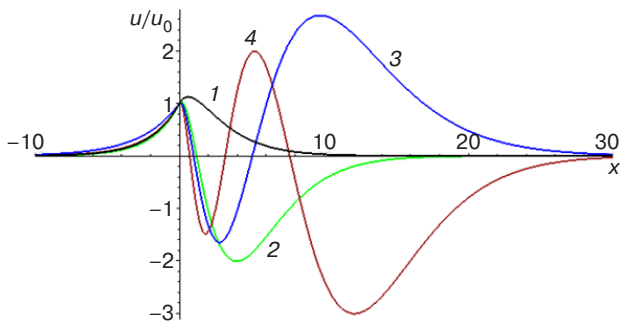


Рис. 4. Поперечные профили напряженности электрического поля волноводных мод (26) при фиксированных значениях (в условных безразмерных единицах) $h = 0.5$, $e_0 = -0.1$, $e_2 = 0.2$, $e_0 = 0.05$, $k = 0.5$ и различных e_1 : $e_1 = 3$ (линия 1), $e_1 = 9.1$ (линия 2), $e_1 = 10.1$ (линия 3), $e_1 = 17.5$ (линия 4)

Рассмотрим теперь кратко частный случай профиля (9) при $e_1 = 0$. Тогда рассматриваемая фотонная кристаллическая структура будет характеризоваться диэлектрической проницаемостью:

$$\varepsilon(x, I) = \begin{cases} e_0 + \frac{e_2}{(x+h)^2}, & x > 0, \\ \varepsilon_0, & x < 0. \end{cases} \quad (27)$$

Математическое описание поверхностной волны теперь конструируется из решения (21) и (24). Для нахождения решения задачи сопряжения (5)–(8) в этом случае необходимо определить параметры полученных решений на полуосях (21) и (24) так, чтобы они удовлетворяли граничным условиям (7) и (8). Видно, что решения (21) и (24) удовлетворяют условию непрерывности на поверхности фотонного кристалла (7). В результате получается решение краевой задачи сопряжения (5)–(8) в виде:

$$u(x) = u_0 \begin{cases} \sqrt{1 + \frac{x}{h} \frac{K_\nu(2n_0 k(x+h))}{K_\nu(2n_0 kh)}}, & x > 0, \\ e^{q_0 x}, & x < 0. \end{cases} \quad (28)$$

Аналогичным образом получается дисперсионное уравнение, которое можно записать в виде:

$$\sqrt{\xi^2 - \varepsilon_0 (kh)^2} = \frac{1}{2} + \nu - \xi \frac{K_{\nu+1}(\xi)}{K_\nu(\xi)}, \quad (29)$$

где $\xi = n_0 kh$.

Дисперсионное уравнение (29) определяет непрерывный спектр значений эффективного показателя преломления

$$n^2 = e_0 + (\xi/kh)^2, \quad (30)$$

где ξ – положительный корень уравнения (29).

Подробный анализ решения (28) и корней дисперсионного уравнения в частном случае $e_0 = 0$ приведен в работе [20].

Таким образом, получены точные аналитические решения краевой задачи, описывающие в двух случаях разными функциями поверхностные волны и волноводные моды, распространяющиеся вдоль фотонного кристалла с убывающим показателем преломления в соответствии с обобщенным гиперболическим профилем, контактирующего с оптически однородной средой.

Сформулированные модели и описанные характеристики линейных и нелинейных поверхностных волн могут быть полезны для прогнозирования оптических свойств различных фотонных кристаллических структур, многослойных композитных оптических структур [21, 22], используемых в оптоэлектронной инженерии и фотонике [23]. Также результаты работы можно использовать при проектировании различных волноводных структур, в т.ч. слоистых, с требуемыми дисперсионно-оптическими характеристиками.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложены модели фотонных гетероструктур с пространственным профилем диэлектрической проницаемости, допускающим нахождение точного аналитического решения. Для моделирования такого пространственного распределения использован обобщенный гиперболический профиль. Найдены точные аналитические решения волнового уравнения для выбранных профилей диэлектрической проницаемости, выражаемые через функции Уиттекера и Макдональда.

Для описания поверхностных волн и волноводных мод, распространяющихся вдоль поверхности фотонного кристалла, сформулирована краевая задача. При нахождении ее решения использовано точное решение для обобщенного гиперболического профиля. Рассмотрены случаи контакта фотонного

кристалла с однородным диэлектриком и с нелинейно оптической средой. Получены выражения, описывающие поверхностные поперечные электрические волны, поле в которых локализовано вблизи поверхности фотонного кристалла и убывает при удалении от нее.

В случае контакта фотонного кристалла с однородным диэлектриком подробно проанализировано влияние оптических характеристик системы, таких как параметры обобщенного гиперболического профиля диэлектрической проницаемости, диэлектрической

константы однородной среды и волнового числа. Получено и численно проанализировано дисперсионное уравнение, описывающее зависимость эффективного показателя преломления от оптических параметров системы. Выявлены условия для управляющих параметров, позволяющие контролировать локализацию электрического поля вблизи поверхности фотонного кристалла. Показано, что решение краевой задачи также описывает волноводные моды, в которых поле убывает при удалении от поверхности фотонного кристалла с осцилляциями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Agrawal G.P. *Physics and Engineering of Graded-Index Media*. New York: Cambridge University Press; 2023, 348 p. <https://doi.org/10.1017/9781009282086>
2. Singh B.K., Bambole V., Tiwari S., Shukla K.K., Pandey P.C., Rastogi V. Photonic band gap consequences in one-dimensional exponential graded index photonic crystals. *Optik*. 2021;240:166854. <https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2021.166854>
3. Dash D., Saini J., Goyal A.K., Massoud Y. Exponentially index modulated nanophotonic resonator for high-performance sensing applications. *Sci. Rep.* 2023;13(1):1431. <https://doi.org/10.1038/s41598-023-28235-6>
4. Singh B.K., Bijalwan A., Pandey P.C., Rastogi V. Photonic bandgaps engineering in double graded hyperbolic, exponential and linear index materials embedded one-dimensional photonic crystals. *Eng. Res. Express*. 2019;1(2):025004. <https://doi.org/10.1088/2631-8695/ab48a0>
5. Singh B.K., Bambole V., Rastogi V., Pandey P.C. Multi-channel photonic bandgap engineering in hyperbolic graded index materials embedded one-dimensional photonic crystals. *Opt. Laser Technol.* 2020;129(17):106293. <https://doi.org/10.1016/j.optlastec.2020.106293>
6. Dash D., Saini J. Hyperbolic Graded Index Biophotonic Cholesterol Sensor with Improved Sensitivity. *Progress In Electromagnetics Research M*. 2023;116:165–176. <https://doi.org/10.2528/PIERM23032302>
7. Chen C-L. *Foundations for Guided-Wave Optics*. New York: John Wiley & Sons Inc.; 2005, 462 p. <https://doi.org/10.1002/0470042222>
8. Lachance R.L., Belanger P.-A. Modes in divergent parabolic graded-index optical fibers. *Journal of Lightwave Technology (JLwT)*. 1991;9(11):1425–1430. <https://doi.org/10.1109/50.97628>
9. Touam T., Yergeau F. Analytical solution for a linearly graded-index-profile planar waveguide. *Appl. Opt.* 1993;32(3):309–312. <https://doi.org/10.1364/AO.32.000309>
10. Шварцбург А.Б. Дисперсия электромагнитных волн в слоистых и нестационарных средах (точно решаемые модели). *Успехи физических наук (УФН)*. 2000;170(12):1297–1324. <https://doi.org/10.3367/UFNr.0170.200012b.1297>
11. Svendsen B.B., Söderström M., Carlens H., Dalarsson M. Analytical and Numerical Models for TE-Wave Absorption in a Graded-Index GNP-Treated Cell Substrate Inserted in a Waveguide. *Appl. Sci.* 2022;12(14):7097. <https://doi.org/10.3390/app12147097>
12. Almawgani A.H.M., Taya S.A., Hussein A.J., Colak I. Dispersion properties of a slab waveguide with a graded-index core layer and a nonlinear cladding using the WKB approximation method. *J. Opt. Soc. Am. B*. 2022;39(6):1606–1613. <https://doi.org/10.1364/JOSAB.458569>
13. Савотченко С.Е. Модели волноводов, сочетающих градиентные и нелинейно-оптические слои. *Russian Technological Journal*. 2023;11(4):84–93. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2023-11-4-84-93>
14. Савотченко С.Е. Модели симметричных трехслойных волноводных структур с градиентной сердцевиной и нелинейно-оптическими обкладками. *Russian Technological Journal*. 2024;12(5):77–89. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-5-77-89>
15. Savotchenko S.E. Nonlinear surface waves propagating along an interface between the Kerr nonlinear and hyperbolic graded-index crystals. *J. Opt.* 2025;54:2363–2371. <https://doi.org/10.1007/s12596-024-01907-w>
16. Savotchenko S.E. New surface waves in a hyperbolic graded-index crystal. *Rom. Rep. Phys.* 2024;76(4):406. <https://doi.org/10.59277/RomRepPhys.2024.76.406>
17. Savotchenko S.E. Features of the surface wave propagation along the interface between the hyperbolic graded-index layer and nonlinear medium with a step change in the dielectric constant. *Phys. Lett. A*. 2024;524(11):129822. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2024.129822>
18. Kaplan I.G. *Intermolecular Interactions: Physical Picture, Computational Methods and Model Potentials*. Hoboken: John Wiley & Sons; 2006, 367 p. <https://doi.org/10.1002/047086334X>
19. Andrews G.E., Askey R., Roy R. *Special Functions*. UK: Cambridge University Press; 1999, 664 p. <https://doi.org/10.1017/CBO9781107325937>

20. Savotchenko S.E. Surface waves in a medium with spatial monotonic attenuation of the refractive index. *Rom. Rep. Phys.* 2025;77(1):402. <https://doi.org/10.59277/RomRepPhys.2025.77.402>
21. Юрасов А.Н., Яшин М.М., Гладышев И.В., Семенова Д.В., Ганьшина Е.А., Каназакова Е.С. Влияние размерных эффектов и распределения гранул по размерам на оптические и магнитооптические свойства нанокompозитов. *Russian Technological Journal.* 2021;9(3):49–57. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2021-9-3-49-57>
22. Zhang X., Shao J., Yan C., Qin R., Lu Z., Geng H., Xu T., Ju L. A review on optoelectronic device applications of 2D transition metal carbides and nitrides. *Materials & Design.* 2021;200:109452. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2021.109452>
23. Santiago S. *Optoelectronics, Photonics and Sensors.* Prague: Czech Technical University of Prague; 2017, 40 p.

REFERENCES

1. Agrawal G.P. *Physics and Engineering of Graded-Index Media.* New York: Cambridge University Press; 2023, 348 p. <https://doi.org/10.1017/9781009282086>
2. Singh B.K., Bambole V., Tiwari S., Shukla K.K., Pandey P.C., Rastogi V. Photonic band gap consequences in one-dimensional exponential graded index photonic crystals. *Optik.* 2021;240:166854. <https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2021.166854>
3. Dash D., Saini J., Goyal A.K., Massoud Y. Exponentially index modulated nanophotonic resonator for high-performance sensing applications. *Sci. Rep.* 2023;13(1):1431. <https://doi.org/10.1038/s41598-023-28235-6>
4. Singh B.K., Bijalwan A., Pandey P.C., Rastogi V. Photonic bandgaps engineering in double graded hyperbolic, exponential and linear index materials embedded one-dimensional photonic crystals. *Eng. Res. Express.* 2019;1(2):025004. <https://doi.org/10.1088/2631-8695/ab48a0>
5. Singh B.K., Bambole V., Rastogi V., Pandey P.C. Multi-channel photonic bandgap engineering in hyperbolic graded index materials embedded one-dimensional photonic crystals. *Opt. Laser Technol.* 2020;129(17):106293. <https://doi.org/10.1016/j.optlastec.2020.106293>
6. Dash D., Saini J. Hyperbolic Graded Index Biophotonic Cholesterol Sensor with Improved Sensitivity. *Progress In Electromagnetics Research M.* 2023;116:165–176. <https://doi.org/10.2528/PIERM23032302>
7. Chen C-L. *Foundations for Guided-Wave Optics.* New York: John Wiley & Sons Inc.; 2005, 462 p. <https://doi.org/10.1002/0470042222>
8. Lachance R.L., Belanger P.-A. Modes in divergent parabolic graded-index optical fibers. *Journal of Lightwave Technology (JLwT).* 1991;9(11):1425–1430. <https://doi.org/10.1109/50.97628>
9. Touam T., Yergeau F. Analytical solution for a linearly graded-index-profile planar waveguide. *Appl. Opt.* 1993;32(3):309–312. <https://doi.org/10.1364/AO.32.000309>
10. Shvartsburg A.B. Dispersion of electromagnetic waves in stratified and nonstationary media (exactly solvable models). *Phys. Usp.* 2000;43(12):1201–1228. <https://doi.org/10.1070/PU2000v043n12ABEH000827>
[Original Russian Text: Shvartsburg A.B. Dispersion of electromagnetic waves in stratified and nonstationary media (exactly solvable models). *Uspekhi Fizicheskikh Nauk.* 2000;170(12):1297–1324 (in Russ.). <https://doi.org/10.3367/UFNr.0170.200012b.1297>]
11. Svendsen B.B., Söderström M., Carlens H., Dalarsson M. Analytical and Numerical Models for TE-Wave Absorption in a Graded-Index GNP-Treated Cell Substrate Inserted in a Waveguide. *Appl. Sci.* 2022;12(14):7097. <https://doi.org/10.3390/app12147097>
12. Almagani A.H.M., Taya S.A., Hussein A.J., Colak I. Dispersion properties of a slab waveguide with a graded-index core layer and a nonlinear cladding using the WKB approximation method. *J. Opt. Soc. Am. B.* 2022;39(6):1606–1613. <https://doi.org/10.1364/JOSAB.458569>
13. Savotchenko S.E. Models of waveguides combining gradient and nonlinear optical layers. *Russian Technological Journal.* 2023;11(4):84–93 (in Russ.). <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2023-11-4-84-93>
14. Savotchenko S.E. Models of symmetric three-layer waveguide structures with graded-index core and non-linear optical liners. *Russian Technological Journal.* 2024;12(5):77–89 (in Russ.). <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-5-77-89>
15. Savotchenko S.E. Nonlinear surface waves propagating along an interface between the Kerr nonlinear and hyperbolic graded-index crystals. *J. Opt.* 2025;54:2363–2371. <https://doi.org/10.1007/s12596-024-01907-w>
16. Savotchenko S.E. New surface waves in a hyperbolic graded-index crystal. *Rom. Rep. Phys.* 2024;76(4):406. <https://doi.org/10.59277/RomRepPhys.2024.76.406>
17. Savotchenko S.E. Features of the surface wave propagation along the interface between the hyperbolic graded-index layer and nonlinear medium with a step change in the dielectric constant. *Phys. Lett. A.* 2024;524(11):129822. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2024.129822>
18. Kaplan I.G. *Intermolecular Interactions: Physical Picture, Computational Methods and Model Potentials.* Hoboken: John Wiley & Sons; 2006, 367 p. <https://doi.org/10.1002/047086334X>
19. Andrews G.E., Askey R., Roy R. *Special Functions.* UK: Cambridge University Press; 1999, 664 p. <https://doi.org/10.1017/CBO9781107325937>
20. Savotchenko S.E. Surface waves in a medium with spatial monotonic attenuation of the refractive index. *Rom. Rep. Phys.* 2025;77(1):402. <https://doi.org/10.59277/RomRepPhys.2025.77.402>
21. Yurasov A.N., Yashin M.M., Gladyshev I.V., Semyonova D.V., Gan'shina E.A., Kanazakova E.S. Influence of size effects and granule distribution by size on optical and magneto-optical properties of nanocomposites. *Russian Technological Journal.* 2021;9(3):49–57 (in Russ.). <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2021-9-3-49-57>

22. Zhang X., Shao J., Yan C., Qin R., Lu Z., Geng H., Xu T., Ju L. A review on optoelectronic device applications of 2D transition metal carbides and nitrides. *Materials & Design*. 2021;200:109452. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2021.109452>
23. Santiago S. *Optoelectronics, Photonics and Sensors*. Prague: Czech Technical University of Prague; 2017, 40 p.

Об авторе

Савотченко Сергей Евгеньевич, д.ф.-м.н, доцент, профессор кафедры высшей математики, Институт перспективных технологий и промышленного программирования, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: savotchenkose@mail.ru. Scopus Author ID 6603577988, SPIN-код РИНЦ 2552-4344, <https://orcid.org/0000-0002-7158-9145>

About the Author

Sergey E. Savotchenko, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor, Professor, High Mathematics Department, Institute for Advanced Technologies and Industrial Programming, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: savotchenkose@mail.ru. Scopus Author ID 6603577988, RSCI SPIN-code 2552-4344, <https://orcid.org/0000-0002-7158-9145>

Математическое моделирование
Mathematical modeling

УДК 004.023, 519.677

<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2026-14-1-103-112>

EDN LDJQIL



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Экспериментальное исследование характеристик сходимости квазиньютоновского алгоритма на негладких и невыпуклых функциях

А.В. Смирнов [®]

МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, 119454 Россия

[®] Автор для переписки, e-mail: av_smirnov@mirea.ru

• Поступила: 02.04.2025 • Доработана: 14.06.2025 • Принята к опубликованию: 13.11.2025

Резюме

Цели. Целью работы является разработка методики исследования характеристик сходимости квазиньютоновского алгоритма (КНА) на негладких и невыпуклых целевых функциях (ЦФ) и выполнение экспериментов по этой методике.

Методы. Эксперименты выполнялись на тестовой функции, обеспечивающей возможность задания различных законов изменения ее значений по разным направлениям от точки минимума. Всего исследованы 18 примеров ЦФ с разными параметрами рельефа. Для каждого примера выполнялись 200 стартов КНА из случайных точек и фиксировались все значения ЦФ, полученные в процессе поиска. Затем по этим данным вычислялись значения Expected Run Time (ERT) – ожидаемого времени достижения заданного порогового уровня ЦФ. Далее выполнялась аппроксимация зависимости достигнутого порога ЦФ от ERT отдельно для отрезка, в котором все пороги достигаются во всех стартах для этого примера, и для отрезка, в котором пороги достигаются, но не во всех стартах.

Результаты. Эксперименты показали, что в большинстве примеров для отрезка, в котором все пороги достигаются во всех стартах, имеет место убывание ЦФ по закону геометрической прогрессии (линейная сходимость), а во втором отрезке преобладает сходимость по степенному закону. Также установлено, что наличие анизотропии рельефа ЦФ и нарушений гладкости приводят к замедлению сходимости и завершению поиска до достижения минимума с требуемой точностью.

Выводы. Исследование позволило выявить закономерности в сходимости КНА на ЦФ с различными свойствами рельефа. Дальнейшее развитие методики должно включать автоматизацию сбора и обработки данных и распространение на другие виды алгоритмов поиска оптимальных решений.

Ключевые слова: квазиньютоновский алгоритм, рельеф целевой функции, выпуклая функция, вогнутая функция, негладкая функция, аппроксимация, показатель степени, сходимость алгоритма

Для цитирования: Смирнов А.В. Экспериментальное исследование характеристик сходимости квазиньютоновского алгоритма на негладких и невыпуклых функциях. *Russian Technological Journal*. 2026;14(1):103–112. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2026-14-1-103-112>, <https://www.elibrary.ru/LDJQIL>

Прозрачность финансовой деятельности: Автор не имеет финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

RESEARCH ARTICLE

Experimental investigation of convergence characteristics of quasi-Newton algorithm on nonsmooth and nonconvex functions

Alexander V. Smirnov[@]

MIREA – Russian Technological University, Moscow, 119454 Russia

[@] Corresponding author, e-mail: av_smirnov@mirea.ru

• Submitted: 02.04.2025 • Revised: 14.06.2025 • Accepted: 13.11.2025

Abstract

Objectives. The aim of the paper is to develop a methodology for studying the convergence of the quasi-Newton minimization algorithm (QNA) on nonsmooth and nonconvex objective functions (OF), as well as to conduct related numerical experiments.

Methods. The experiments were performed on a flexible OF capable of mimicking various patterns of value changes in different directions away from the minimum. A total of 18 OF instances with different landscape parameters were studied. For each example, 200 QNA searches were performed from random starting points, and all corresponding OF values were recorded. Then, the Expected Run Time (ERT) to reach a given threshold level of the OF was computed based on the data. The dependence of the achieved OF threshold on ERT was approximated separately for the segment in which all thresholds were achieved in all searches, and for a segment in which the thresholds were achieved, but not in all searches.

Results. The experiments show that, for the majority of cases in which all thresholds are achieved in all takes, a decrease in the OF follows the geometric progression law (linear convergence). However, in the second segment, convergence follows the power law. It was also found that the presence of anisotropy of the OF landscape and a loss of smoothness lead to convergence slowdown, and premature termination of search process before reaching the minimum with the required accuracy.

Conclusions. The study identifies patterns in the QNA convergence on the objective functions with different landscape parameters. Further advancement of the methodology would involve automating data collection and processing, as well as extending it to other types of optimization algorithms.

Keywords: quasi-Newton algorithm, objective function landscape, convex function, concave function, nonsmooth function, approximation, exponent, algorithm convergence

For citation: Smirnov A.V. Experimental investigation of convergence characteristics of quasi-Newton algorithm on nonsmooth and nonconvex functions. *Russian Technological Journal*. 2026;14(1):103–112. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2026-14-1-103-112>, <https://www.elibrary.ru/LDJQIL>

Financial disclosure: The author has no financial or proprietary interest in any material or method mentioned.

The author declares no conflicts of interest.

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается задача поиска локального экстремума (ЛЭ) \mathbf{x}^* , конкретно минимума, целевой функции (ЦФ) $f(\mathbf{x})$ в некоторой области Ω_X пространства поиска

$$\mathbf{x}^* = \arg \min_{\mathbf{x} \in \Omega_X} (f(\mathbf{x})). \quad (1)$$

Во многих случаях эффективным средством решения задачи (1) являются квазиньютоновские алгоритмы (КНА), в которых для определения направления очередного шага поиска используется аппроксимация матрицы вторых частных производных ЦФ (гессиана) с использованием градиента ЦФ, т.е. только первых производных. Доказано, что для сходимости такого алгоритма к ЛЭ достаточно, чтобы функция была гладкой и выпуклой

в Ω_x [1, 2]. Программные реализации КНА входят в широко применяемые пакеты математических программ.

В случаях, когда условия гладкости и/или выпуклости ЦФ не выполняются, строгий анализ для КНА отсутствует. В то же время на практике КНА во многих случаях успешно применяются для поисков ЛЭ негладких и/или невыпуклых ЦФ. Условия и достижимые результаты такого применения мало исследованы. При этом известны исследования условий сходимости и оценки скорости сходимости на таких ЦФ для некоторых других типов алгоритмов поиска [1–7], однако эти алгоритмы сходятся медленнее КНА.

В работе [8] приведен теоретический анализ работы КНА на функции одной переменной $f(x) = |x|$, имеющей нарушение гладкости в точке ЛЭ. Доказано, что для достижения ЛЭ с погрешностью не более заданного $\varepsilon > 0$ необходимо выполнить порядка $\log_2(\varepsilon^{-1})$ итераций. Для случая функции $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$ при размерности пространства поиска $ND > 1$ теоретический анализ выполнить не удалось, но экспериментально показано, что имеет место линейная сходимость поиска, т.е. уменьшение значения ЦФ по закону геометрической прогрессии, знаменатель которой приближается к единице с ростом ND . В указанной работе используется только ЦФ одного вида с неизменяемыми параметрами рельефа, но результаты для ЦФ других типов могут оказаться другими.

В работе [9] приведены результаты экспериментальных исследований работы КНА и гибридного алгоритма на его основе на большом наборе тестовых функций. Но эта публикация не дает достаточно полной информации о характеристиках сходимости, т.к. приведены только конечные результаты – достигнутые значения ЛЭ и количества итераций. Отсутствуют сведения о зависимостях, связывающих количество выполненных итераций и изменение значения ЦФ в ЛЭ.

Сравнение работы нескольких алгоритмов, в числе которых есть и реализации КНА, выполнено в работе [10]. При этом используются стандартный набор тестовых функций [11] и статистические характеристики процессов сходимости. Однако указанный набор тестовых функций не дает возможности варьировать в широких пределах характеристики рельефа ЦФ в окрестностях ЛЭ, в частности выпуклость и асимметрию. В работе [12] в экспериментах использовались КНА и тестовая функция с возможностью регулировки некоторых ее характеристик. Но процессы сходимости не исследовались, а лишь фиксировались достигнутые значения ЦФ, а в экспериментах можно было задавать только два разных закона изменения ЦФ по координатам.

Цель данной работы – разработать методику и выполнить экспериментальные исследования сходимости КНА при различных параметрах рельефа ЦФ в окрестностях ЛЭ, включая нарушения гладкости, невыпуклость, анизотропию и асимметрию по координатам.

МЕТОДЫ И МАТЕРИАЛЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Экспериментальные исследования выполнялись с применением программ на языке *MATLAB*¹, реализованных в свободно распространяемой платформе *GNU Octave*². Квазиньютоновский алгоритм в ней реализуется функцией `fminunc(.)`. Но эта функция может возвращать только конечный результат поиска и общее количество вычислений ЦФ, а для анализа характеристик сходимости необходимы все значения ЦФ, рассчитанные в процессе поиска. Для этого была написана новая функция `QNLS_M(.)`, упрощенная структура которой приведена на рис. 1.

1. Вход: \mathbf{X} – стартовая точка, *Options* – настройки алгоритма.
2. Инициализация аппроксимации гессииана \mathbf{B} диагональной матрицей.
3. Расчет ЦФ F и ее градиента \mathbf{g} в стартовой точке.
4. Выполнять итерации поиска до выполнения условия его завершения.
 - 4.1. Определить по \mathbf{B} и \mathbf{g} направление поиска \mathbf{s} .
 - 4.2. Найти подходящую длину шага λ методом линейного поиска.
 - 4.3. Перейти в новую точку $\mathbf{X} = \mathbf{X} + \lambda\mathbf{s}$ и рассчитать значения F и \mathbf{g} в ней.
 - 4.4. Рассчитать \mathbf{B} в соответствии с алгоритмом BFGS³.
 - 4.5. Проверить условия завершения поиска.
5. Выход: **History** – массив, содержащий все рассчитанные в процессе поиска значения ЦФ в порядке, в котором они рассчитывались, и координаты точек, в которых выполнялся расчет.

Рис. 1. Структура функции `QNLS_M(.)`, реализующей КНА

Данная структура является стандартной за исключением п. 5 [1, 2]. В п. 4.2 используется алгоритм линейного поиска, описанный в [8]. В п. 4.4 осуществляется расчет новой аппроксимации гессииана \mathbf{B} при выполнении условия положительной кривизны ЦФ на данной итерации [2]. Расчеты градиента \mathbf{g} и производной по направлению шага линейного поиска проводятся методом конечных разностей. С целью минимизации количества расчетов ЦФ для оценки частной производной по каждой координате x_i

¹ <https://www.mathworks.com/products/matlab.html>. Дата обращения 26.08.2025. / Accessed August 26, 2025.

² <https://octave.org/>. Дата обращения 26.08.2025. / Accessed August 26, 2025.

³ Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno algorithm – Алгоритм Бройдена – Флетчера – Гольдфарба – Шанно – итерационный метод численной оптимизации. [The Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno (BFGS) algorithm is an iterative method for solving unconstrained nonlinear optimization problems.]

берется только одна дополнительная точка со смещением $\Delta x_i = 10^{-8}$.

Условия завершения поиска, значения признака причины завершения ExitFlag и пороговые значения, использовавшиеся в экспериментах, приведены в табл. 1.

Таблица 1. Значения признака причины завершения поиска

ExitFlag	Условие завершения поиска
0	Превышен предел числа итераций $\max_iter = 1000$
1	Выполнен критерий оптимальности 1-го порядка $\max(\ g\) \leq g_tol = 10^{-8}$
2	Выполнено условие на длину шага $\ \lambda s\ \leq \min_step = 10^{-12}$
3	Число итераций подряд, в которых относительное изменение ЦФ меньше $ftol = 1.00001$, превысило заданный порог $\max_Nftol = 4$
4	Не найден шаг, не приводящий к увеличению ЦФ
5	Значение ЦФ меньше заданного порога $FuncTol = 10^{-8}$

В экспериментах использовалась тестовая функция $TestLE6(x, x^*, R, W, K, NS)$, значение которой в точке x вычисляется следующим образом. Сначала выполняются смещение относительно заданного ЛЭ x^* и поворот координат, задаваемый матрицей R :

$$z = (x - x^*)^T R, \quad (2)$$

где T – операция транспонирования. Затем по координатам с индексами от 1 до $ND - NS$, где NS – целое число, выполняется интерполяция значений коэффициента k и показателя степени α и вычисление предварительного значения функции f :

$$k = \frac{1}{\|z\|^2} \sum_{n=1}^{ND-NS} (K_{1n} z_n^2 h(z_n) + K_{2n} z_n^2 h(-z_n)),$$

где $h(y) = \begin{cases} 1, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0, \end{cases} \quad (3)$

$$\alpha = \frac{1}{\|z\|^2} \sum_{n=1}^{ND-NS} (W_{1n} z_n^2 h(z_n) + W_{2n} z_n^2 h(-z_n)),$$

$$f = k \|z\|^\alpha.$$

Переменные K_{ij} и W_{ij} являются элементами матриц K и W , имеющих размеры $2 \times ND$, и представляют значения, соответственно, коэффициентов

и показателей степени по положительным и отрицательным направлениям всех координат пространства поиска. Данный алгоритм был предложен в [13] и обеспечивает возможность произвольного задания параметров степенной функции по разным координатам и плавных изменений этих параметров по промежуточным направлениям.

В случае $NS = 0$ полученное значение функции f является окончательным. В случае $NS > 0$ по координатам с индексами n от $ND - |NS| + 1$ до ND выполняется цикл вычисления:

$$f = f + \max \left[K_{1n} |z(n)|^{W_{1n}} \text{sign}(z(n)), -K_{2n} |z(n)|^{W_{2n}} \text{sign}(z(n)) \right]. \quad (4)$$

В случае же $NS < 0$ по указанным индексам выполняется цикл операций

$$f = \max \left[f, K_{1n} |z(n)|^{W_{1n}} \text{sign}(z(n)), -K_{2n} |z(n)|^{W_{2n}} \text{sign}(z(n)) \right]. \quad (5)$$

В результате формируются исходящие из точки ЛЭ линии, вдоль которых гладкость функции нарушена. При $NS = 0$ гладкость может нарушаться только в точке ЛЭ x^* . Задавая различные комбинации параметров, можно получать как многие известные одномерные ЦФ, так и функции с ранее не встречавшимися свойствами. На рис. 2 приведены примеры графиков функции $TestLE6(\cdot)$ в случае $ND = 2$ и разных значениях NS . Другие параметры функции при этом принимали следующие значения:

$$x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.75 & 1.0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Экспериментальные исследования проводились в виде отдельных опытов, в каждом из которых выполнялись 10 серий по 20 поисков ЛЭ. Стартовые точки поисков задавались случайно на гиперсфере единичного радиуса с центром в x^* . В каждом опыте задавались различные комбинации параметров W, K, NS , а в начале каждой серии поисков выполнялся поворот осей координат с применением формируемой из случайных чисел, а затем ортонормируемой матрицы R . В каждом поиске фиксировались координаты всех точек, в которых выполнялось вычисление ЦФ, и сами значения ЦФ.

В качестве характеристики, обобщающей результаты всех поисков данного опыта, применялась зависимость ожидаемого времени достижения заданного порога ЦФ от значения этого порога, известная в литературе по оптимизации как Expected Run Time и далее обозначаемая ERT. Эта функция определяется следующим образом [14, 15].

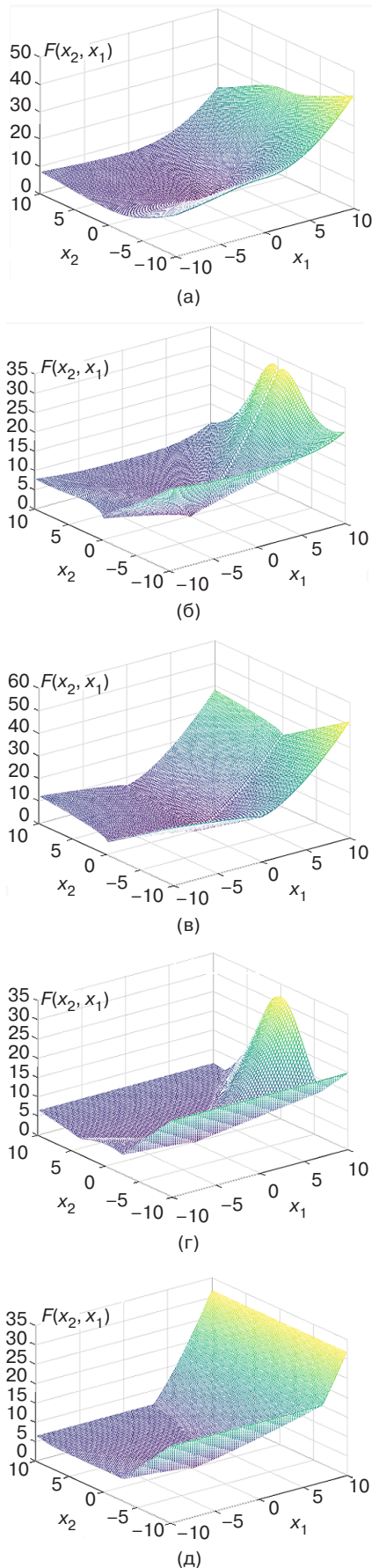


Рис. 2. Графики функции TestLE6(..): (а) $NS = 0$, (б) $NS = 1$, (в) $NS = 2$, (г) $NS = -1$, (д) $NS = -2$

Введем переменную

$$h = -\lg(f), \quad (6)$$

где f – значение ЦФ. Зададим шкалу пороговых уровней

$$h_k = -2 + 0.02(k - 1), \quad k = \overline{1, 51}. \quad (7)$$

Соответствующие пороговые значения ЦФ f_k , получаемые из (6), занимают диапазон от 10^2 до 10^{-8} . Обозначим $Nr_i(h_k)$ – количество вычислений ЦФ выполненных в i -м поиске до достижения порога h_k ; Ne_i – количество вычислений ЦФ до завершения i -го поиска; Ir_k – подмножество поисков, в которых порог h_k достигнут; $|Ir_k|$ – количество таких поисков; Inr_k – подмножество поисков, в которых порог h_k не достигнут. Тогда

$$ERT(h_k) = \frac{\sum_{i \in Ir_k} Nr_i(h_k) + \sum_{i \in Inr_k} Ne_i}{|Ir_k|}. \quad (8)$$

Если порог h_k не достигнут ни в одном из поисков, значение $ERT(h_k)$ оказывается бесконечно большим.

Для сравнения характеристик работы КНА введем определяемые по ERT показатели. Для этого определим следующие границы на шкале порогов:

h_{start} – значение порога, достигнутое в стартовой точке опыта;

h_{all} – максимальное значение порога, достигнутое во всех поисках опыта;

h_{finish} – максимальное значение порога, достигнутое хотя бы в одном из поисков опыта.

Если $h_{all} = 8$, т.е. верхней границе шкалы, то устанавливается $h_{finish} = h_{all}$.

Затем в отрезке $[h_{start}, h_{all}]$ с применением функции *MATLAB/Octave regress(..)* выполняем аппроксимацию зависимости $\lg(f)$ от ERT:

$$\lg(f) = b_{11} \cdot ERT + b_{12} \cdot \lg(ERT) + b_{13}. \quad (9)$$

Определяем также коэффициенты детерминации первых двух слагаемых.

Если отрезок $[h_{all}, h_{finish}]$ содержит больше 2, но меньше 9 делений шкалы порогов, то на всем этом отрезке выполняем аппроксимацию вида (9) и определяем коэффициенты b_{31}, b_{32}, b_{33} и соответствующие коэффициенты детерминации. Если же этот отрезок занимает не меньше 9 делений шкалы порогов, то он разбивается на два отрезка, границу которых на шкале порогов обозначим h_b , и аппроксимацию вида (9) выполняем отдельно на каждом из этих отрезков. При этом коэффициенты аппроксимации

на первом отрезке будем обозначать b_{21}, b_{22}, b_{23} , а на втором – b_{31}, b_{32}, b_{33} . Поиск значения h_b осуществляется методом перебора возможных значений в отрезке $[h_{all}, h_{finish}]$ с расчетом аппроксимаций на двух его частях и последующим выбором значения h_b , при котором среднеквадратическая погрешность аппроксимации минимальна. Разделение отрезка $[h_{all}, h_{finish}]$ позволяет, как показали эксперименты, получать более точные аппроксимации зависимости $\lg(f)$ от ERT на этом участке.

Затем, выполняя потенцирование (9), получаем

$$f = (10^{b_{11}})^{ERT} \cdot ERT^{b_{12}} \cdot 10^{b_{13}}. \quad (10)$$

Обозначим $10^{b_{11}} = q_1, \quad b_{12} = p_1, \quad 10^{b_{13}} = a_1$. Тогда (10) принимает вид:

$$f = a_1 \cdot q_1^{ERT} \cdot ERT^{p_1}. \quad (11)$$

Второй сомножитель в (11) изменяется по закону геометрической прогрессии, что соответствует линейной сходимости [1, 4]. Третий сомножитель изменяется как степенная функция. Таким образом, значения q_1 и p_1 характеризуют законы и скорости сходимости поиска на отрезке $[h_{start}, h_{all}]$. Аналогично определяются значения q_3, p_3 для отрезка $[h_{all}, h_{finish}]$, если этот отрезок не разделяется на два, или значения q_2, p_2 для отрезка $[h_{all}, h_b]$ и значения q_3, p_3 для отрезка $[h_b, h_{finish}]$, если отрезок $[h_{all}, h_{finish}]$ разделяется на два.

Границы отрезков и коэффициенты аппроксимации на этих отрезках могут служить показателями для сравнения сходимости алгоритмов поиска на ЦФ с разными свойствами. В изложенном методе вместо значения ЦФ может рассматриваться расстояние от достигнутой точки x до ЛЭ x^* , во многих случаях используемое в качестве показателя сходимости

поиска [1, 5, 6]. Возможна также аппроксимация зависимости ERT(f) для получения оценок требуемого количества вычислений ЦФ до достижения заданного значения ЦФ – еще одной используемой в ряде случаев характеристики [4, 7].

РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Параметры функции TestLE6(x, x^*, R, W, K, NS), задававшиеся в 18 опытах, приведены в табл. 2. Положение ЛЭ всегда задавалось в начале координат $x^* = 0$.

В опытах 1–6 размерность пространства $ND = 4$, ЦФ – изотропные по всем направлениям. При этом в опытах 1–3 ЦФ выпуклые, в опыте 4 ЦФ изменяется по линейному закону, а в 5 и 6 ЦФ – вогнутые. Целевая функция в опыте 1 всюду гладкая, а в опытах 2–5 нарушение гладкости есть в ЛЭ. В последующих опытах за основу берутся ЦФ из опытов 2 и 5, и в них изменяются какие-либо свойства. В опытах 7–10 вводится анизотропия по направлениям, в 11–14 – увеличивается размерность пространства, в 15–18 – создаются нарушения гладкости на линиях, исходящих из ЛЭ.

Поясним введение анизотропии. Правило расчета элементов W следующее:

$$W_{1i} = W_{2i} = W_{\min} + \frac{(W_{\max} - W_{\min})(i-1)}{ND-1}, \quad i = \overline{1, ND}. \quad (12)$$

В случае $W_{\max} = W_{\min}$ получается $W_{1i} = W_{2i} = W_{\max}$, $i = \overline{1, ND}$, и показатель степени α в (5) не зависит от направления. Аналогично определяются и значения элементов матрицы K . В опыте 9 дополнительно выполнена случайная перестановка элементов строк W , например

$$W(\text{Опыт } 8) = \begin{pmatrix} 0.75 & 1 & 1.25 & 1.5 \\ 0.75 & 1 & 1.25 & 1.5 \end{pmatrix},$$

Таблица 2. Параметры тестовой функции в опытах

Опыт	ND	W_{\max}	W_{\min}	K_{\max}	K_{\min}	NS	Опыт	ND	W_{\max}	W_{\min}	K_{\max}	K_{\min}	NS
1	4	2.00	2.00	1	1	0	10	4	0.75	0.75	1	0.1	0
2	4	1.50	1.50	1	1	0	11	8	1.50	1.50	1	1	0
3	4	1.25	1.25	1	1	0	12	16	1.50	1.50	1	1	0
4	4	1.00	1.00	1	1	0	13	8	0.75	0.75	1	1	0
5	4	0.75	0.75	1	1	0	14	16	0.75	0.75	1	1	0
6	4	0.50	0.50	1	1	0	15	4	1.50	1.50	1	1	2
7	4	1.50	1.50	10	1	0	16	4	1.50	1.50	1	1	-2
8	4	1.50	0.75	1	1	0	17	4	0.75	0.75	1	1	2
9	4	1.50*	0.75*	1	1	0	18	4	0.75	0.75	1	1	-2

$$W(\text{Опыт 9}) = \begin{pmatrix} 1 & 1.25 & 1.5 & 0.75 \\ 0.75 & 1.5 & 1 & 1.25 \end{pmatrix}.$$

В табл. 3 приведены причины завершения поиска в опытах (табл. 1). Здесь EF_1 (Exit Flag) – признак чаще всего встретившейся в данном опыте причины, PEF_1 – вероятность этой причины. Далее по убыванию вероятности приводятся другие встретившиеся в опыте причины остановки. Эти данные показывают, что если хотя бы по части координат функция выпуклая, т.е. среди элементов матрицы W есть превышающие 1, то поиск доходит до значения $f = 10^{-8}$. В противном случае поиск останавливается раньше по другим причинам.

На рис. 3 и рис. 4 представлены графики ERT, полученные в выполненных экспериментах, а в табл. 4 – результаты аппроксимации этих зависимостей. Для лучшей наглядности в качестве аргумента используются не пороги h_k , а получаемые из них с помощью (6) значения f с теми же индексами, например, $f_{all} = 10^{-h_{all}}$. Значения $\lg(f_{start})$ в таблице не приведены, их можно определить по точке начала увеличения ERT. Коэффициенты аппроксимации отображаются в формате P/R^2 , где P – значение q или p ; R^2 – соответствующий коэффициент детерминации. На графиках показаны только точки, в которых значения ERT конечные.

Перейдем к анализу результатов экспериментов. В случае изотропной квадратичной функции в опыте 1 КНА после первой же итерации точно находит ЛЭ, что отображается горизонтальной линией на рис. 3. Аппроксимация вида (9) при этом оказывается крайне неточной. Соответствующие значения в табл. 4 выделены жирным шрифтом.

В опытах 4 и 6, в которых показатель степени ЦФ равен, соответственно, 1 и 0.5, КНА после первой итерации также скачком переходит в точки

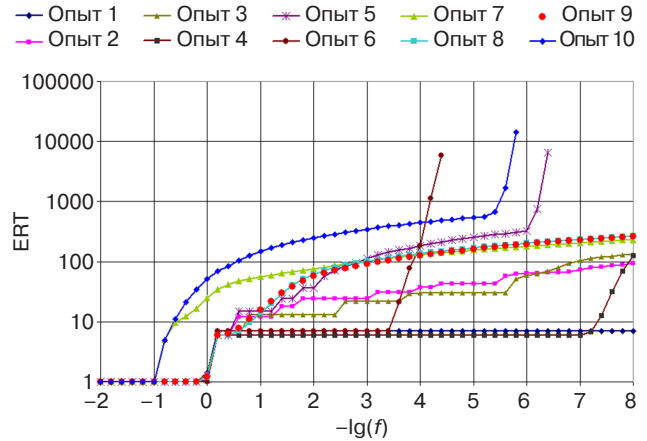


Рис. 3. Графики ERT опытов с 1 по 10

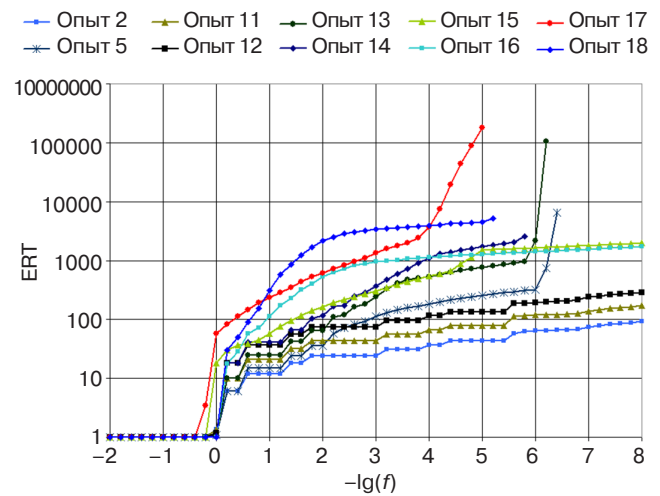


Рис. 4. Графики ERT опытов 2, 5 и с 11 по 18

с $f = f_{all}$. На отрезках $[f_{all}, f_{finish}]$ поиск замедляется, и эти участки с хорошей точностью аппроксимируются степенным законом, а убывание по закону геометрической прогрессии отсутствует, т.к. $q_3 = 1.00$. В опытах 2, 3 и 5, в которых показатели степени равны, соответственно, 1.5, 1.25 и 0.75, такого

Таблица 3. Статистика причин завершения поиска в опытах

Опыт	EF_1	PEF_1	EF_2	PEF_2	Опыт	EF_1	PEF_1	EF_2	PEF_2	EF_3	PEF_3	EF_4	PEF_4
1	5	0.970	1	0.03	10	2	1.000	–	–	–	–	–	–
2	5	1.000	–	–	11	5	1.000	–	–	–	–	–	–
3	5	1.000	–	–	12	5	1.000	–	–	–	–	–	–
4	2	0.530	5	0.47	13	2	1.000	–	–	–	–	–	–
5	2	1.000	–	–	14	2	1.000	–	–	–	–	–	–
6	2	0.990	4	0.01	15	5	0.650	2	0.340	3	0.010	–	–
7	5	1.000	–	–	16	5	0.685	2	0.155	3	0.140	4	0.020
8	5	1.000	–	–	17	2	0.895	4	0.080	3	0.025	–	–
9	5	1.000	–	–	18	2	0.450	4	0.300	3	0.250	–	–

скачкообразного уменьшения ЦФ не наблюдается. Отрезок $[f_{\text{start}}, f_{\text{all}}]$ в опытах 2 и 5 достаточно точно аппроксимируется геометрической прогрессией.

В последующих опытах изменялись параметры ЦФ из опытов 2 и 5. Как видно из графиков на рис. 3, введение в ЦФ вида (5) анизотропии как по коэффициенту (опыты 7 и 10), так и по показателю степени (опыты 8 и 9), приводит к смещению ERT вверх, т.е. к замедлению поиска. При этом случайная перестановка показателей степени по координатам в опыте 9 не изменила ERT по сравнению с опытом 8. Во всех этих опытах отрезок $[f_{\text{start}}, f_{\text{all}}]$ с высокой точностью аппроксимируется геометрической прогрессией, а отрезок $[f_{\text{all}}, f_{\text{finish}}]$, имеющий место в опыте 10, – степенной функцией.

Влияние размерности ND пространства поиска отображено на рис. 4 (опыты 11–14). Как и следовало ожидать, при увеличении ND сходимость замедляется. При этом в случае выпуклой ЦФ (опыты 2, 11 и 12) каждое увеличение ND в 2 раза приводит к равному смещению ERT вверх на логарифмической шкале при сохранении линейной сходимости. В случае вогнутой ЦФ (опыты 5, 13 и 14) явных закономерностей не наблюдается.

Введение нарушений гладкости вдоль полубесконечных линий, начинающихся в ЛЭ, в случае

выпуклой ЦФ (опыты 2, 15 и 16), приводит к замедлению поиска, который теперь достигает предела $f = 10^{-8}$ далеко не во всех стартах. В случае вогнутой ЦФ (опыты 5, 17 и 18), помимо этого, увеличивается значение достигаемого хотя бы в одном старте минимума f_{all} . Во всех опытах 15–18 отрезок $[f_{\text{start}}, f_{\text{all}}]$ с хорошей точностью аппроксимируется геометрической прогрессией, а в аппроксимацию отрезков $[f_b, f_{\text{finish}}]$ и $[f_b, f_{\text{finish}}]$ основной вклад вносит степенная функция, т.к. значения q_2, q_3 близки к единице. Необычно большие значения $|p_2|$ и $|p_3|$ в результатах некоторых опытов, возможно, получаются вследствие медленного изменения ERT на соответствующих участках.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из результатов экспериментов можно сделать вывод, что разделение диапазона порогов ERT на отрезки предложенным способом и аппроксимация вида (9) на этих отрезках зависимостей $f(\text{ERT})$ позволяют выявить некоторые закономерности. Наличие выпуклости ЦФ хотя бы по части направлений обеспечивает достижение минимального порога $f = 10^{-8}$. На отрезках $[f_{\text{start}}, f_{\text{all}}]$, включающих значения ЦФ, достигаемые во всех поисках, сходимость

Таблица 4. Результаты аппроксимации ERT в опытах

Опыт	$\lg f_{\text{all}}$	$\lg f_b$	$\lg f_{\text{finish}}$	ERT(f_{all})	ERT(f_b)	ERT(f_{all})	q_1	p_1	q_2	p_2	q_3	p_3
1	-8.0	-	-8.0	7.00	-	-	0.15/0.14	0.74/0.14	-	-	-	-
2	-8.0	-	-8.0	93.2	-	-	0.84/0.96	-1.06/0.78	-	-	-	-
3	-8.0	-	-8.0	134	-	-	0.96/0.78	-3.39/0.87	-	-	-	-
4	-7.2	-	-8.0	6.77	-	126	0.00/0.19	14.0/0.17	-	-	1.00/0.94	-0.56/1.00
5	-5.8	-	-6.4	308	-	$6.56 \cdot 10^3$	0.97/0.96	-0.97/0.87	-	-	1.00/0.79	-0.58/0.94
6	-3.4	-	-4.4	7.00	-	$5.86 \cdot 10^3$	0.00/0.30	66.7/0.29	-	-	1.00/0.70	-0.33/0.98
7	-8.0	-	-8.0	232	-	-	0.91/1.00	0.057/0.72	-	-	-	-
8	-8.0	-	-8.0	270	-	-	0.94/1.00	-0.11/0.75	-	-	-	-
9	-8.0	-	-8.0	263	-	-	0.94/1.00	-0.28/0.76	-	-	-	-
10	-5.2	-	-5.8	563	-	$14.3 \cdot 10^3$	0.98/1.00	-0.26/0.73	-	-	1.00/0.80	-0.58/0.95
11	-8.0	-	-8.0	170	-	-	0.91/0.96	-0.84/0.74	-	-	-	-
12	-8.0	-	-8.0	290	-	-	0.94/0.96	-0.60/0.68	-	-	-	-
13	-5.8	-	-6.2	951	-	$106 \cdot 10^3$	0.99/0.92	-1.01/0.88	-	-	-	-
14	-4	-5.4	-5.8	1.11k	$1.96 \cdot 10^3$	$2.53 \cdot 10^3$	1.00/0.75	-1.04/0.88	1.00/0.99	-6.66/1.00	1.02/0.89	-52.4/0.90
15	-4.2	-5.2	-8.0	602	$1.53 \cdot 10^3$	$1.98 \cdot 10^3$	0.94/0.99	-0.39/0.83	1.07/0.86	-14.8/0.90	0.75/0.99	64.0/0.99
16	-0.8	-3.6	-8.0	71.9	$1.09 \cdot 10^3$	$1.73 \cdot 10^3$	0.98/0.98	-0.064/0.80	0.99/0.98	0.19/0.91	0.99/1.00	-11.4/1.00
17	-0.6	-3.8	-5.0	140	$2.45 \cdot 10^3$	$177 \cdot 10^3$	0.99/0.97	-0.33/0.84	1.00/0.94	-2.14/0.99	1.00/0.77	-0.61/0.99
18	-0.6	-3	-5.2	89.3	$3.40 \cdot 10^3$	$5.25 \cdot 10^3$	0.97/0.98	-0.894/0.80	1.00/0.99	-0.19/0.90	1.01/0.91	-51.3/0.94

может считаться линейной с достаточно высокой точностью, а на отрезках $[f_{\text{all}}, f_{\text{finish}}]$, где значения ЦФ достигаются не во всех поисках, преобладает сходимость по степенному закону вида ERT^p .

Некоторые результаты вызывают вопросы. На отрезках $[f_{\text{all}}, f_{\text{finish}}]$ значения ЦФ достигаются не во всех поисках. В случаях, когда ЦФ анизотропная (опыты 10 и 15–17), это объяснимо. Но в опытах 4–6 и 14 ЦФ изотропная, и все стартовые точки должны давать одинаковый результат поиска. Возможно, что в этих случаях разброс конечных результатов поиска связан со случайными ошибками округления при вычислениях в КНА.

Проведенные исследования, конечно, не дают полной информации о зависимостях характеристик сходимости КНА от свойств рельефа ЦФ, т.к. в них эти свойства изменялись по отдельности

и в ограниченных диапазонах. Для получения более полной картины необходимо менять свойства рельефа в разных сочетаниях и с большим количеством значений параметров. При этом потребуется большой объем экспериментов и обработки данных. Реализация такой программы, видимо, будет возможна с использованием автоматизации планирования экспериментов, сбора и обработки данных, в т.ч. с применением технологий искусственного интеллекта.

Еще одно представляющее интерес направление – распространение метода на другие виды алгоритмов поиска оптимальных решений, в частности, на популяционные алгоритмы. Это позволит сравнивать характеристики сходимости разных алгоритмов, что необходимо для выбора наилучших алгоритмов для задач разных типов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поляк Б.Т. *Введение в оптимизацию*. М.: Наука; 1983, 384 с.
2. Nocedal J., Wright S. *Numerical Optimization*: 2nd ed. Springer; 2006, 684 p.
3. Демьянов В.Ф., Васильев Л.В. *Недифференцируемая оптимизация*. М.: Наука; 1981, 384 с.
4. Воронцова Е.А., Хильдебранд Р.Ф., Гасников А.В., Стонякин Ф.С. *Выпуклая оптимизация*. М.: МФТИ; 2021, 364 с. ISBN 978-5-7417-0776-0
5. Пучинин С.М., Корольков Е.Р., Стонякин Ф.С., Алкуса М.С., Выгузов А.А. Субградиентные методы с шагом типа Б.Т. Поляка для задач минимизации квазивыпуклых функций с ограничениями-неравенствами и аналогами острого минимума. *Компьютерные исследования и моделирование*. 2024;16(1):105–122. <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2024-16-1-105-122>
6. Bento G.C., Mordukhovich B.S., Mota T.S., Nesterov Yu. Convergence of Descent Methods under Kurdyka-Lojasiewicz Properties. *arXiv Preprint*. 2024. <http://arxiv.org/pdf/2407.00812v1>
7. Grimmer B., Jia Zh. Goldstein Stationarity in Lipschitz Constrained Optimization. *Optim. Lett.* 2025;19:225–235. <https://doi.org/10.1007/s11590-024-02158-1>
8. Lewis A.S., Overton M.L. Nonsmooth optimization via quasi-Newton methods. *Math. Program.* 2013;141:135–163. <https://doi.org/10.1007/s10107-012-0514-2>
9. Tor A.H. Comparative numerical results on HANSO (Hybrid Algorithm for Nonsmooth Optimization). *arXiv Preprint*. 2020. <http://arxiv.org/pdf/2009.01037v1>
10. Varelas K., Dahito M.-A. Benchmarking Multivariate Solvers of SciPy on the Noiseless Testbed. In: *GECCO 2019 Companion – The Genetic and Evolutionary Computation Conference*, Jul. 2019, Prague, Czech Republic. 2019. P. 1946–1954. <https://doi.org/10.1145/3319619.3326891>
11. Hansen N., Finck S., Ros R., Auger A. *Real-Parameter Black-Box Optimization Benchmarking 2009: Noiseless Functions Definitions*. [Research Report] RR-6829. INRIA; 2009. URL: <https://hal.inria.fr/inria-00362633v2>. Дата обращения 26.08.2025. / Accessed August 26, 2025.
12. Смирнов А.В. Исследование влияния степени овражности целевой функции на погрешность определения координат ее минимума. *Russian Technological Journal*. 2023;11(6):57–67. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2023-11-6-57-67>
13. Смирнов А.В. Метод оценки выпуклости рельефа целевых функций в процессе поиска экстремума. *Russian Technological Journal*. 2025;13(2):121–131. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-2-121-131>
14. Hansen N., Auger A., Ros R., Mersmann O., Tusar T., Brockhoff D. COCO: A Platform for Comparing Continuous Optimizers in a Black-Box Setting. *Optim. Meth. Software*. 2021;36(1):114–144. <https://doi.org/10.1080/10556788.2020.1808977>
15. Wang H., Vermetten D., Ye F., Doerr C., Back T. IOHanalyzer: Detailed Performance Analyses for Iterative Optimization Heuristics. *ACM Transaction on Evolutionary Learning and Optimization*. 2022;2(1):1–29. <https://doi.org/10.1145/3510426>

REFERENCES

1. Polyak B.T. *Vvedenie v optimizatsiyu (Introduction into Optimization)*. Moscow: Nauka; 1983, 384 p. (In Russ.).
2. Nocedal J., Wright S. *Numerical Optimization*: 2nd ed. Springer; 2006, 684 p.
3. Dem'yanov V.F., Vasil'ev L.V. *Nedifferentsiruemaya optimizatsiya (Non-differentiable Optimization)*. Moscow: Nauka; 1981, 384 p. (In Russ.).

4. Vorontsova E.A., Hilderbrand R.F., Gasnikov A.V., Stonyakin F.S. *Vypuklaya optimizatsiya (Convex Optimization)*. Moscow: MPTI; 2021, 364 p. (In Russ.). ISBN 978-5-7417-0776-0
5. Puchinin S.M., Korolkov E.R., Stonyakin F.S., Alkousa M.S., Vyuzov A.A. Subgradient methods with B.T. Polyak-type step for quasiconvex minimization problems with inequality constraints and analogs of the sharp minimum. *Komp'yuternye issledovaniya i modelirovanie = Computer Research and Modeling*. 2024;16(1):105–122 (in Russ.). <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2024-16-1-105-122>
6. Bento G.C., Mordukhovich B.S., Mota T.S., Nesterov Yu. Convergence of Descent Methods under Kurdyka-Lojasiewicz Properties. *arXiv. Preprint*. 2024. <http://arxiv.org/pdf/2407.00812v1>
7. Grimmer B., Jia Zh. Goldstein Stationarity in Lipschitz Constrained Optimization. *Optim. Lett.* 2025;19:225–235. <https://doi.org/10.1007/s11590-024-02158-1>
8. Lewis A.S., Overton M.L. Nonsmooth optimization via quasi-Newton methods. *Math. Program.* 2013;141:135–163. <https://doi.org/10.1007/s10107-012-0514-2>
9. Tor A.H. Comparative numerical results on HANSO (Hybrid Algorithm for Nonsmooth Optimization). *arXiv. Preprint*. 2020. <http://arxiv.org/pdf/2009.01037v1>
10. Varelas K., Dahito M.-A. Benchmarking Multivariate Solvers of SciPy on the Noiseless Testbed. In: *GECCO 2019 Companion – The Genetic and Evolutionary Computation Conference*, Jul. 2019, Prague, Czech Republic. 2019. P. 1946–1954. <https://doi.org/10.1145/3319619.3326891>
11. Hansen N., Finck S., Ros R., Auger A. *Real-Parameter Black-Box Optimization Benchmarking 2009: Noiseless Functions Definitions*. [Research Report] RR-6829. INRIA; 2009. Available from URL: <https://hal.inria.fr/inria-00362633v2>. Accessed August 26, 2025.
12. Smirnov A.V. Investigation of influence of objective function valley ratio on the determination error of its minimum coordinates. *Russian Technological Journal*. 2023;11(5):57–67. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2023-11-6-57-67>
13. Smirnov A.V. The method of estimation of objective functions landscapes convexity during extremum search. *Russian Technological Journal*. 2025;13(2):121–131. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-2-121-131>
14. Hansen N., Auger A., Ros R., Mersmann O., Tusar T., Brockhoff D. COCO: A Platform for Comparing Continuous Optimizers in a Black-Box Setting. *Optim. Meth. Software*. 2021;36(1):114–144. <https://doi.org/10.1080/10556788.2020.1808977>
15. Wang H., Vermetten D., Ye. F., Doerr C., Back T. IOHalyzer: Detailed Performance Analyses for Iterative Optimization Heuristics. *ACM Transaction on Evolutionary Learning and Optimization*. 2022;2(1):1–29. <https://doi.org/10.1145/3510426>

Об авторе

Смирнов Александр Витальевич, к.т.н., доцент, профессор кафедры телекоммуникаций, Институт радиоэлектроники и информатики, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: av_smirnov@mirea.ru. Scopus Author ID 56380930700, SPIN-код РИНЦ 1616-0120, <https://orcid.org/0000-0002-2696-8592>

About the Author

Alexander V. Smirnov, Cand. Sci. (Eng.), Professor, Department of Telecommunications, Institute of Radio Electronics and Informatics, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: av_smirnov@mirea.ru. Scopus Author ID 56380930700, RSCI SPIN-code 1616-0120, <https://orcid.org/0000-0002-2696-8592>

Мировоззренческие основы технологии и общества
Philosophical foundations of technology and society

УДК 811.161.1

<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2026-14-1-113-126>

EDN MMFNUT



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Коммуникативно-эстетический принцип в обучении иностранных студентов технических специальностей русскому языку

Е.Н. Тарасова[@], Ж.О. Москвина

МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, 119454 Россия

[@] Автор для переписки, e-mail: tarasova_e@mirea.ru

• Поступила: 23.04.2025 • Доработана: 02.07.2025 • Принята к опубликованию: 17.11.2025

Резюме

Цели. В условиях интернационализации высшего образования и расширения присутствия русского языка как средства профессионального общения в образовательных пространствах особую актуальность приобретает поиск эффективных методических решений для обучения иностранных студентов технических специальностей. Целью настоящего исследования является научное обоснование методической значимости коммуникативно-эстетического принципа в обучении русскому языку иностранных студентов технического профиля и выявление влияния коммуникативно-эстетического принципа на развитие речевой культуры обучающихся и формирование навыков профессиональной коммуникации.

Методы. Методологическую основу исследования составили сравнительно-сопоставительный анализ существующих методических подходов, включающих элементы коммуникативной и эстетической направленности и наблюдение за учебным процессом в иноязычной аудитории в технических вузах. Для объективизации выводов применялись элементы количественно-качественного анализа ответов и речевых продуктов обучающихся.

Результаты. Полученные данные демонстрируют, что применение коммуникативно-эстетического принципа способствует более точному и мотивированному владению правильной и хорошей русской речью, ориентированной на литературные нормы. Отмечается повышение интереса студентов к языковому обучению, облегчение их интеграции в академическую и культурную среду, а также развитие речевого вкуса, что в совокупности способствует формированию профессионально релевантной языковой картины мира.

Выводы. Коммуникативно-эстетический принцип может рассматриваться как эффективное методическое средство при обучении русскому языку как иностранному в техническом вузе. Его применение усиливает воспитательный потенциал речевого обучения и создает условия для интеграции эстетического компонента в профессионально ориентированную коммуникацию. Практическая значимость исследования заключается в возможности использования разработанных методических рекомендаций при создании образовательных программ и учебных пособий. Перспективным направлением дальнейших исследований является разработка дидактических материалов, направленных на формирование профессионально ориентированной речи и стимулирование креативного мышления студентов.

Ключевые слова: коммуникативно-эстетический принцип, обучение русскому языку, иностранные студенты, технические специальности, речевая культура, профессиональная коммуникация, методические подходы, эстетическое восприятие речи, адаптация

Для цитирования: Тарасова Е.Н., Москвина Ж.О. Коммуникативно-эстетический принцип в обучении иностранных студентов технических специальностей русскому языку. *Russian Technological Journal*. 2026;14(1):113–126. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2026-14-1-113-126>, <https://www.elibrary.ru/MMFNUT>

Прозрачность финансовой деятельности: Авторы не имеют финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

RESEARCH ARTICLE

The communicative and aesthetic principle in teaching Russian as a foreign language to international students of technical specialties

Elena N. Tarasova [®], Zhanna O. Moskvina

MIREA – Russian Technological University, Moscow, 119454 Russia

[®] Corresponding author, e-mail: tarasova_e@mirea.ru

• Submitted: 23.04.2025 • Revised: 02.07.2025 • Accepted: 17.11.2025

Abstract

Objectives. In the context of the internationalization of higher education and the growing role of the Russian language as a means of professional communication in educational environments, the search for effective methodological solutions for teaching foreign students in technical disciplines has become particularly relevant. The aims of this study are twofold: to provide a scientific rationale for the methodological relevance of the communicative-aesthetic principle in teaching Russian as a foreign language to students of technical specialties; and to identify the impact of the communicative-aesthetic principle on the development of student speech culture and the formation of professional communication skills.

Methods. The methodological framework includes a comparative analysis of existing pedagogical approaches which incorporate communicative and aesthetic elements, along with classroom observation in multilingual technical university settings. In order to ensure objectivity in the findings, elements of both quantitative and qualitative analysis of student responses and speech production were used.

Results. The findings indicate that the application of the communicative-aesthetic principle enhances precision and motivation amongst students learning the Russian language aligned with literary norms. A number of observations were made including: increased interest in language learning; improved integration into the academic and cultural environment; and the development of speech aesthetics. All these factors contribute to the formation of a professionally relevant linguistic worldview.

Conclusions. The communicative-aesthetic principle can be considered as an effective methodological tool in teaching Russian as a foreign language in technical universities. Its implementation enhances the educational potential of speech instruction and fosters the integration of aesthetic components into professionally oriented communication. The practical significance of the study lies in the potential application of the developed methodological recommendations in educational programs and teaching materials. A promising area for further research is the creation of didactic resources aimed at developing professionally oriented speech and fostering creative thinking among students.

Keywords: communicative and aesthetic principle, teaching Russian as a foreign language, international students, technical specialties, speech culture, professional communication, methodological approaches, aesthetic perception of speech, student adaptation

For citation: Tarasova E.N., Moskvina Zh.O. The communicative and aesthetic principle in teaching Russian as a foreign language to international students of technical specialties. *Russian Technological Journal*. 2026;14(1):113–126. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2026-14-1-113-126>, <https://www.elibrary.ru/MMFNUT>

Financial disclosure: The authors have no financial or proprietary interest in any material or method mentioned.

The authors declare no conflicts of interest.

ВВЕДЕНИЕ

В современных подходах к обучению иностранным языкам, включая русский как иностранный (РКИ), центральное место занимает развитие иноязычной коммуникативной компетентности, определяющей практические ориентиры учебного процесса. В широком понимании «компетенция» трактуется как способность и готовность индивида выполнять определенные виды деятельности [1]. В рамках образования под компетенцией чаще всего подразумевают заданные извне требования к результатам подготовки обучающегося¹ [2], тогда как компетентность осмысливается как внутреннее личностное образование, возникающее в результате освоения комплекса компетенций и обеспечивающее способность субъекта к эффективному выполнению деятельности².

Иноязычная коммуникативная компетентность понимается как умение продуктивно вступать в речевое взаимодействие на изучаемом языке в различных значимых ситуациях общения, включая профессиональную сферу [3]. При этом сама коммуникативная компетенция включает совокупность знаний, практических навыков и речевого опыта, необходимых для формирования полноценной способности к коммуникации у изучающих язык³.

Следуя принципу профессиональной направленности обучения РКИ⁴, формирование речевой

компетенции, соотношенной с учебно-профессиональной сферой, начинается уже на этапе довузовской подготовки. На этом уровне иностранные обучающиеся осваивают не только нормы общелитературного языка, но и элементы научного стиля речи, соответствующего будущей профессиональной специализации – гуманитарной, естественнонаучной, технической или технологической⁵ [4]. Это обеспечивает к моменту поступления в университет (продвинутый этап обучения) наличие у студентов базовой академической и профессиональной коммуникативной компетенций [5].

На последующих этапах обучения возникает потребность в интеграции дисциплинарно маркированных языковых средств, отражающих специфику различных профессиональных подъязыков. Для студентов технических специальностей эта задача особенно значима: их профессиональная коммуникация требует овладения специализированной терминологией и устойчивыми синтаксическими структурами, характерными для инженерной, физико-математической или информационно-технологической областей. Эти особенности обостряют требования к методическим подходам и усиливают актуальность применения интегративных принципов обучения, в частности, коммуникативно-эстетического [4]. Последний, ориентируясь на активизацию речевой деятельности через художественно-речевые практики и сценические формы интерпретации, способствует более глубокому освоению сложных абстрактных понятий и формированию у студентов профессионально направленной речевой культуры.

В статье [5] отмечается, «дети изменились, а инструменты обучения эволюционируют медленно».

¹ Педагогический терминологический словарь. <https://voennaya-pedagogika.slovaronline.com/44-компетенция>. Дата обращения 18.03.2025. [Pedagogical Terminology Dictionary. <https://voennaya-pedagogika.slovaronline.com/44-компетенция>. Accessed March 18, 2025 (in Russ.).]

² Зимняя И.А. Ключевые компетенции – новая парадигма результата современного образования. *Эйдос*. 2006. № 5. <https://elibrary.ru/smmmbix>. Дата обращения 20.03.2025. [Zimnyaya I.A. Key competencies – a new paradigm for the outcomes of modern education. *Eidos*. 2006. No. 5. <https://elibrary.ru/smmmbix>. Accessed March 20, 2025 (in Russ.).]

³ Хуторской А.В. Ключевые компетенции и образовательные стандарты. *Эйдос*. 2002. № 2. <https://elibrary.ru/ztakqu>. Дата обращения 19.03.2025. [Khutorskoy A.V. Key competencies and educational standards. *Eidos*. 2002. No. 2. <https://elibrary.ru/ztakqu>. Accessed March 19, 2025 (in Russ.).]

⁴ Хуторской А.В. Технология проектирования ключевых и предметных компетенций. *Эйдос*. 2005. № 4. <https://elibrary.ru/qlhzwj>. Дата обращения 01.04.2025. [Khutorskoy A.V. Key and subject-specific competency design technology. *Eidos*. 2005. No. 4. <https://elibrary.ru/qlhzwj>. Accessed April 01, 2025 (in Russ.).]

⁵ Приказ Министерства образования и науки Российской Федерации от 3 октября 2014 г. № 1304 «Об утверждении требований к освоению дополнительных общеобразовательных программ, обеспечивающих подготовку иностранных граждан и лиц без гражданства к освоению профессиональных образовательных программ на русском языке». https://brstu.ru/docs/podrazdeleniya-brgu/centr-dopolnitelnoi-podgotovki/inostr/Prikaz_1304.pdf. Дата обращения 02.04.2025. [Order of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation No. 1304 of October 3, 2014, “On the Approval of Requirements for the Implementation of Additional General Education Programs that Prepare Foreign Citizens and Stateless Persons for Professional Education Programs in Russian.” https://brstu.ru/docs/podrazdeleniya-brgu/centr-dopolnitelnoi-podgotovki/inostr/Prikaz_1304.pdf. Accessed April 02, 2025 (in Russ.).]

Ключевую роль в организации учебного процесса играет принцип сознательности, в соответствии с которым языковые единицы преподносятся на сопоставительной основе, что способствует снижению влияния интерференции родного языка. Построение системы обучения предполагает последовательное прохождение нескольких этапов: курсов коррекции и артикуляции, интенсивного разговорного курса, этапа воспроизведения текстов, а затем переход к продуктивным видам речевой деятельности – говорению и письму [6]. Также видится целесообразным вводить новые разработки в видах и формах тестирования языкового уровня студентов. Учет когнитивных, психологических и мотивационных особенностей иностранных студентов технических специальностей представляется важным условием успешного внедрения коммуниктивно-эстетического принципа в преподавание. Разработка специального входного теста [7] позволяет выявить потенциальные трудности и адаптировать образовательную траекторию с учетом индивидуальных характеристик обучающихся.

Особое значение при этом приобретает включение в образовательный процесс элементов театрализованного обучения, позволяющих моделировать профессионально-значимые ситуации средствами выразительной речи, интонации, мимики и контекстуального взаимодействия. Исследователь Я. Генцель подчеркивает, что активное вовлечение обучающихся является важнейшим фактором успешности обучения по данной технологии [8].

Следовательно, эстетизация речевой деятельности не только способствует развитию языковой компетенции, но и облегчает преодоление когнитивных и эмоциональных трудностей, возникающих при освоении специализированной терминологии и форматов общения, свойственных технической профессиональной среде.

ПОСТАНОВКА ЦЕЛИ

В методике преподавания РКИ на современном этапе наблюдается трансформация целевых ориентиров и всей концептуальной парадигмы языкового образования. Вектор развития направлен от лингвоцентрического подхода к когнитивно-дискурсивной модели, акцентирующей внимание на усвоении культуры посредством языка как медиатора межкультурной коммуникации [9]. В этом контексте эстетический аспект речевой деятельности приобретает методологический статус ключевого параметра, поскольку язык выполняет не только информативную и когнитивную функции, но и служит репрезентантом аксиологических доминант, национально-культурной специфики и эстетических норм социума [7].

Цель статьи заключается в научном обосновании методической значимости коммуниктивно-эстетического принципа в обучении русскому языку иностранных студентов технического профиля и выявлении его влияния на развитие речевой культуры и навыков профессиональной коммуникации. Исследование направлено на определение эффективных подходов к преподаванию, обеспечивающих не только развитие языковых навыков, но и эстетическое восприятие языка как инструмента межкультурной и профессиональной коммуникации.

Методологическую основу исследования составили сравнительно-сопоставительный анализ методических подходов, наблюдение за учебным процессом и анкетирование иностранных студентов.

Сравнительно-сопоставительный анализ методических подходов позволил выявить ключевые особенности применения коммуниктивно-эстетического принципа в обучении РКИ, определить его место в системе современных лингводидактических концепций, а также обосновать необходимость интеграции лингвистических и эстетических компонентов в процесс формирования профессионально ориентированной речевой компетенции.

Наблюдение за учебным процессом было направлено на изучение динамики развития речевых умений и навыков студентов в условиях применения коммуниктивно-эстетического принципа. Особое внимание уделялось анализу уровня сформированности выразительных средств речи, соблюдению литературных норм и способности студентов использовать русский язык в академической и профессиональной коммуникации.

Интеграция результатов сравнительно-сопоставительного анализа, наблюдения и анкетирования обеспечила комплексное исследование методической значимости коммуниктивно-эстетического принципа и позволила объективно выявить его влияние на развитие речевой культуры и профессиональных коммуниктивных навыков иностранных студентов.

В данной работе представлено комплексное рассмотрение понятий эстетики речи и коммуниктивного подхода в обучении РКИ с опорой на дедуктивно-индуктивный метод анализа. Исследование направлено на выявление взаимосвязи между эстетическими характеристиками речевого акта и основными принципами коммуниктивного подхода, что позволит обосновать и сформулировать самостоятельный коммуниктивно-эстетический принцип, актуальный для методики преподавания РКИ.

Особую актуальность приобретает применение коммуниктивно-эстетического принципа, реализуемого через включение в содержание пособий художественно-педагогических текстов, фрагментов

диалогов, ролевых ситуаций и театрализованных элементов. Особенно последнее, а именно, театрализация, не только активизирует восприятие и осмысление текста, но и позволяет реализовать принципы персонализации, эмоционального включения и креативной переработки материала [9]. Такая форма работы усиливает внутреннюю мотивацию студентов, способствует формированию устойчивого интереса к изучаемой профессиональной лексике и развивает их выразительно-речевые и интерпретативные способности.

Обоснование исследования и применения коммуникативно-эстетического принципа

Научное обоснование методической значимости коммуникативно-эстетического принципа в обучении русскому языку иностранных студентов технического профиля основывается на необходимости комплексного подхода к развитию языковой компетенции, предполагающего единство когнитивного, культурного и эмоционально-эстетического компонентов. Данный принцип позволяет организовать образовательный процесс таким образом, чтобы язык воспринимался не только как средство профессиональной коммуникации, но и как культурный код, отражающий ценностные ориентиры общества.

Актуальность исследования и активного применения коммуникативно-эстетического принципа в обучении иностранных студентов технических специальностей русскому языку определяется несколькими взаимосвязанными факторами.

Во-первых, современные требования к профессиональной коммуникации в технических дисциплинах предполагают не только владение терминологическим аппаратом, но и способность к четкому, логически выстроенному и выразительному изложению мыслей. Это особенно важно в условиях глобализации научного и инженерного взаимодействия, где русский язык выступает как средство профессиональной и академической коммуникации. Как следствие, важно рассматривать и вводить в широкое употребление данный принцип [10].

Во-вторых, традиционные подходы к обучению русскому языку в технических вузах преимущественно ориентированы на формирование прагматической компетенции, тогда как эстетический аспект речи, связанный с выразительностью, когерентностью и стилистической уместностью высказываний, остается в значительной степени недооцененным. Между тем, именно коммуникативно-эстетический принцип способен обеспечить более эффективное усвоение языковых норм и развитие навыков речевой деятельности, соответствующих профессиональному и академическому контексту [6].

В-третьих, интеграция коммуникативно-эстетического принципа в методику преподавания РКИ для технических специальностей способствует развитию у студентов способности адаптировать свою речь к различным коммуникативным ситуациям, повышает мотивацию к изучению языка и способствует формированию языковой личности специалиста, способного не только воспринимать и передавать информацию, но и делать это в соответствии с нормами академической и профессиональной дискурсивной культуры [10].

СТЕПЕНЬ ИЗУЧЕННОСТИ ПРОБЛЕМЫ

Коммуникативный подход, представляющий собой систему принципов, определяющих стратегию обучения и воспроизводящих модели естественного речевого взаимодействия, пришел на смену грамматико-переводному методу. Его внедрение привело к трансформации процесса обучения иностранному языку: вместо акцента на текстовый анализ, выполнения объемных грамматических упражнений, механического заучивания диалогов и фраз, а также строгого контроля и коррекции ошибок со стороны преподавателя, основное внимание стало уделяться развитию коммуникативных навыков и непосредственному использованию языка в реальном общении. В отечественной педагогической науке значительный вклад в развитие коммуникативного подхода внесли авторы работ [6–14] и другие исследователи.

Концепция коммуникативной компетенции получила развитие в трудах многих отечественных и зарубежных ученых, таких как [6–9, 12, 13] и других. Большинство исследователей рассматривают коммуникативную компетенцию как сложную систему, включающую в себя различные частные компетенции (субкомпетенции). Среди них авторы работ [12, 14–17] и другие исследователи.

В качестве двух обязательных компонентов коммуникативной компетенции называют лингвистическую (языковую) и прагматическую (речевую, социолингвистическую, иллокутивную) компетенции^{6, 7} [14, 18–20], выделяя

⁶ Щукин А.Н. *Методика преподавания русского языка как иностранного*: учебное пособие для вузов. М.: Высшая школа; 2003, 334 с. [Shchukin A.N. *Methods of teaching Russian as a foreign language: academic textbook for higher education institutions*. Moscow: Vysshaya Shkola; 2003, 334 p. (In Russ.).]

⁷ Балыхина Т.М. *Методика преподавания русского языка как неродного (нового)*: учебное пособие для преподавателей и студентов. М.: Издательство РУДН; 2007, 187 с. [Balykhina T.M. *Methods of teaching Russian as a non-native (new) language: academic textbook for teachers and students*. Moscow: RUDN Publ.; 2007, 187 p. (In Russ.).]

также субкомпетенции: предметную (специальную, лингвопрофессиональную, предметно-тематическую^{8, 9}, социокультурную¹⁰ [13–15, 18–21], межкультурную [11–15, 19–22], лингвострановедческую и лингвокраеведческую [13–15, 19], стратегическую (компенсаторную), дискурсивную [17–20] и другие.

Изучение эстетики языка и речи имеет давнюю традицию, охватывая различные научные дисциплины: философию, лингвистику, риторику, литературоведение и культуру речи. Вопросы выразительности и эстетической ценности речи рассматривались еще в античности [14, 15]. Так, Аристотель в трудах по риторике и поэтике выделял стилистические уровни, а Цицерон подчеркивал роль гармонии и изящества в речи. Сократ в «Панегирике» предлагал рекомендации по благозвучию и уместному использованию метафор. Античные идеи продолжают оказывать влияние на современные исследования эстетики языка [23].

В русской традиции М.В. Ломоносов уделял особое внимание качеству речи, различая «чистую» и «нечистую» речь. В «Российской грамматике» он формулировал принципы благозвучия, логичности и точности, предостерегая от избыточных стечений согласных и повторений гласных, что усложняет восприятие текста. Многие его идеи сохраняют актуальность в современной лингвистике [16].

В начале XX века в России, когда велась активная борьба за чистоту языка и повышение речевой эстетики, речевой культуры общества, вклад в развитие вопросов внесли авторы¹¹ [13, 17]. Среди современных исследователей в рамках трудов по обучению эстетике речи можно отметить Г.Е. Соколову. Она занимается проблематикой обучения иностранцев основам эстетики русской речи в контексте преподавания РКИ. В своих работах она рассматривает исторические аспекты эстетики языка, подчеркивая их значимость для формирования у студентов ценностного отношения к русскому языку. Особое внимание уделяется художественным текстам как эффективному средству освоения эстетических норм

речи. Исследовательница акцентирует необходимость интеграции эстетического компонента в процесс обучения, что способствует не только развитию языковой компетенции, но и пониманию культурных кодов русской речи [24].

Вопрос коммуникативно-эстетического принципа в обучении иностранных студентов русскому языку изучен в различных аспектах, однако остается недостаточно проработанным в контексте преподавания техническим специалистам.

Исследования Е.А. Шестериной эстетики звучания русской речи (например, анализ представлений носителей немецкого языка) демонстрируют межкультурные аспекты восприятия фонетической выразительности. Однако их результаты лишь косвенно могут применяться в методике обучения иностранцев, ориентированной на технические специальности [25].

Анализ научно-учебного подстиля с точки зрения его эстетического воздействия подчеркивает значимость эстетики речи в научной деятельности, но признает недостаточную разработанность этого направления. Вопрос эстетики научного стиля, важного для технических специальностей, остается открытым¹².

Курс «Этика и эстетика речи»¹³ ориентирован на студентов филологических факультетов и затрагивает формирование этической и эстетической культуры в широком смысле. Его подходы могут быть адаптированы для преподавания русской речи техническим специалистам, но требуют специальной методической проработки.

Работы О.Ю. Королёвой и О.Г. Филипповой по коммуникативной эстетике младших школьников иллюстрируют развитие эстетики речи в образовательном процессе, однако данный возрастной и когнитивный контекст существенно отличается от задач, стоящих перед иностранными студентами технических специальностей [26].

Вопросы эстетики разговорной речи [27], дидактических требований к эстетике речи [28] и эстетики

⁸ Щукин А.Н. Указ. соч. [Shchukin A.N. *Op. cit.*]

⁹ Риске И.Э. *Формирование социокультурной компетенции у учащихся старшей ступени обучения на материале англоязычной поэзии*: автореф. ... дис. канд. пед. наук: 13.00.02. СПб.: РГПУ им. А.И. Герцена; 2000, 16 с. [Riske I.E. *Developing sociocultural competence in senior students using English-language poetry*: Cand. Sci. Thesis (Pedagog.): 13.00.02. St. Petersburg: A.I. Herzen State Pedagogical University; 2000, 16 p. (In Russ.).]

¹⁰ Там же. [*Ibid.*]

¹¹ Винокур Г.О. *О языке художественной литературы*: учеб. пособие для филол. спец. вузов / сост. Т.Г. Винокур; предисл. В.П. Григорьева. М.: Высшая школа; 1991, 448 с. [Vinokur G.O. *On the language of fiction literature*: Textbook for philology majors at universities. Moscow: Vysshaya Shkola; 1991, 448 p. (In Russ.).]

¹² Ваджибов М.Д. *Русский язык и культура речи. Теоретический материал и практические задания*: учебное пособие для бакалавров гуманитарных направлений подготовки. Саратов: Ай Пи Ар Медиа; 2019, 207 с. ISBN 978-5-4497-0260-9. <https://elibrary.ru/KAFNQS>. Дата обращения 01.04.2025. [Vadzibov M.D. *Russian language and speech culture. Theoretical material and practical assignments*: academic textbook for bachelor's degree students in the humanities. Saratov: IPR Media; 2019, 207 p. ISBN 978-5-4497-0260-9. <https://elibrary.ru/KAFNQS>. Accessed April 01, 2025 (in Russ.).]

¹³ Магомедгаджиева П.Н., Магомедова Л. *Этика и эстетика речи*: учебно-методическое пособие. Махачкала: Дагестанский государственный педагогический университет; 2021, 54 с. [Magomedgadzieva P.N., Magomedova L. *Ethics and aesthetics of speech*: educational and methodological guide. Makhachkala: Dagestan State Pedagogical University; 2021, 54 p. (In Russ.).]

и культуры русской речи [29] изучаются преимущественно в общем лингвистическом и методическом ключе, без конкретной привязки к преподаванию русского языка иностранным техническим специалистам [30].

Таким образом, хотя существуют исследования эстетики речи в различных аспектах (фонетика, научная речь, педагогика), коммуникативно-эстетический подход в обучении русскому языку иностранных студентов технических специальностей требует дальнейшего развития и систематизации.

ОБСУЖДЕНИЕ

М.В. Ломоносов писал так: «формирование языка происходит в определенной культурной среде, что обуславливает его уникальные способы выражения мысли, национальные метафоры и литературные традиции. Без учета эстетического аспекта изучение языка сводится к механическому освоению лексики и грамматики, что затрудняет понимание ментальности носителей» [16]. В русском языке, например, важную роль играют эмоционально-экспрессивные конструкции, художественные средства выразительности и идиомы, отражающие особенности национального мировосприятия. В трудах М.В. Ломоносова сказано, что коммуникативная компетенция включает не только передачу информации, но и создание эстетически оформленного высказывания, соответствующего нормам и традициям носителей языка.

Вежливость, речевые стратегии и стилистика текста существенно варьируются в разных культурах, и их незнание может привести к неестественности речи или даже к нарушению норм общения. Эстетический компонент помогает осваивать речевой этикет, способствуя интеграции в языковую среду. В русской традиции, например, характерны образность, афористичность, использование пословиц и поговорок, что обогащает речь и делает ее более выразительной [31].

Художественная литература является важным инструментом изучения языка через культуру. Она раскрывает особенности национального характера, исторические реалии и стилистику речи, что способствует формированию у обучающихся эстетического восприятия и способности к выразительному высказыванию. Таким образом, включение эстетического компонента в процесс обучения иностранным языкам позволяет глубже проникнуть в национальное мировосприятие, освоить культурные ценности и традиции общения, делая изучение языка более осмысленным и эффективным [11].

Коммуникативный подход в обучении иностранным языкам направлен на развитие коммуникативной компетенции, т.е. способности осуществлять речевую деятельность в соответствии с целями и ситуацией

общения [32]. Он отличается гибкостью и отсутствием строго предписанных методик, что позволяет моделировать реальные коммуникативные ситуации [33].

Ключевые принципы подхода включают:

- функциональность, предполагающую отбор и организацию материала в соответствии с речевыми функциями;
- моделирование общения, где преподаватель действует как собеседник и координатор, побуждая студентов к взаимодействию;
- ситуативность, заключающуюся в создании коммуникативных условий для практики языка;
- речевую направленность, обеспечивающую использование языка как средства общения;
- принцип новизны, предполагающий постоянное обновление тем, заданий и условий общения для повышения мотивации;
- индивидуализацию, учитывающую личностные особенности обучающихся [34–37].

Коммуникативный подход делает изучение языка процессом, максимально приближенным к естественному общению, обеспечивая развитие языковых и социокультурных навыков.

Исходя из приведенной выше информации можно вывести понятие коммуникативно-эстетического принципа в обучении РКИ. Он основывается на сочетании функциональной направленности языка и его эстетической ценности и предполагает, что освоение языка происходит не только через формирование коммуникативной компетенции, но и через развитие способности к выразительному, стилистически и культурно адекватному речевому высказыванию.

Этот принцип исходит из идеи, что язык формируется в определенной культурной среде и несет в себе уникальные способы выражения мысли, метафорические модели, литературные традиции и средства художественной выразительности. Без учета эстетического аспекта изучение языка сводится к механическому усвоению лексики и грамматики, что затрудняет полноценное понимание ментальности носителей [16]. Коммуникативно-эстетический принцип включает несколько ключевых аспектов:

1. Формирование коммуникативной компетенции через эстетику речи. Умение не только передавать информацию, но и оформлять ее в соответствии с нормами и традициями носителей языка. Это включает вежливость, речевые стратегии, стилистическую вариативность, афористичность, использование пословиц и других выразительных средств¹⁴.

¹⁴ Щукин А.Н. *Обучение иностранным языкам: теория и практика: учебное пособие для преподавателей и студентов*. 2-е изд., испр. и доп. М.: Филоматис; 2004, 480 с. [A.N. Shchukin. *Foreign language teaching: theory and practice: academic textbook for teachers and students*. 2nd ed., revised and expanded. Moscow: Filomaths; 2004, 480 p. (In Russ.).]

2. Ситуативность и моделирование общения. Создание учебных ситуаций, отражающих естественные коммуникативные условия, в которых обучающиеся могут использовать язык выразительно и стилистически уместно.
3. Роль художественной литературы. Использование художественных текстов как средства изучения не только языка, но и национального мировосприятия, истории и культуры. Это способствует формированию эстетического восприятия речи и навыков ее выразительного оформления [35].
4. Социокультурная адаптация через язык. Освоение норм речевого этикета, принятых в русскоязычном обществе, что облегчает интеграцию в языковую среду и делает речь естественной и гармоничной.
5. Коммуникативно-эстетический принцип направлен на создание условий, в которых изучение русского языка происходит не только через освоение его функциональной стороны, но и через эстетическое восприятие речи, что делает процесс обучения осмысленным, глубоким и эффективным [38–42].

Обучение русскому языку иностранных студентов технических специальностей требует подхода, включающего не только развитие языковых навыков, но и формирование эстетического восприятия языка как инструмента межкультурной и профессиональной коммуникации.

Коммуникативно-эстетический принцип направлен на интеграцию лингвистических и эстетических аспектов обучения, что способствует формированию профессионально-ориентированной языковой компетенции. Согласно Г.Е. Соколовой, обучение иностранцев эстетике русского языка играет ключевую роль в развитии их способности понимать и осваивать язык на более глубоком уровне. Это позволяет им не только читать и интерпретировать произведения русской литературы, но и выражать свои мысли на русском языке в соответствии с нормами речевого этикета [32].

Эстетика речи охватывает множество аспектов, включая выразительность, ясность, точность и гармоничность языкового высказывания. Формирование этих качеств у студентов способствует развитию их коммуникативной компетенции, а также помогает избегать механистического усвоения языка. Включение элементов художественного текста и анализ произведений русских классиков позволяют студентам развивать художественное мышление, эмоциональную вовлеченность и интерес к русскому языку [43, 44].

Одним из эффективных методов реализации коммуникативно-эстетического принципа является использование художественных текстов,

раскрывающих красоту русского языка. Анализ текстов К.Г. Паустовского, И.А. Бунина и других авторов способствует формированию русской языковой картины мира у иностранных студентов, развитию их речевого идеала и способности оценивать эстетические составляющие речи. Применение предтекстового, притекстового и послетекстового анализа позволяет студентам осознанно воспринимать речевые образцы и использовать их в собственной коммуникации [45–47].

Включение эстетических аспектов в обучение способствует развитию у студентов выразительности речи, логической стройности и убедительности высказываний. Как отмечает Г.Е. Соколова, изучение эстетики языка помогает студентам не только совершенствовать устную и письменную речь, но и формировать положительную мотивацию к изучению русского языка. Развитие художественного мышления и эмоционального восприятия языка делает обучение более осмысленным, а взаимодействие студентов с русской речевой культурой – более продуктивным [24, 48].

ИЗ ОПЫТА КАФЕДРЫ РУССКОГО ЯЗЫКА (КАК ИНОСТРАННОГО)

Особое внимание в рамках исследования уделяется выявлению влияния коммуникативно-эстетического принципа на развитие речевой культуры студентов и совершенствование их навыков профессиональной коммуникации. Формирование устойчивых навыков выразительного, нормативного и культурно адекватного использования русского языка способствует успешной интеграции обучающихся в академическую и профессиональную среду, повышению уровня их коммуникативной компетентности и развитию способности к межкультурному взаимодействию [49].

Одним из уникальных практико-ориентированных воплощений коммуникативно-эстетического принципа в преподавании РКИ выступает деятельность интернационального студенческого театра «Постскрипtum», функционирующего при МИРЭА – Российском технологическом университете. Этот театр, объединяющий студентов из разных стран, представляет собой поликультурное образовательное пространство, в котором театральная деятельность становится эффективным инструментом освоения русского языка как средства межкультурной и профессиональной коммуникации.

Репертуар театра включает произведения русской и мировой классики, а также современные пьесы, что позволяет реализовать принципы содержательной насыщенности, культурной аутентичности и стилистического разнообразия учебного

материала. Иммерсивный формат постановок способствует погружению студентов в языковую среду, активизируя как рецептивные, так и продуктивные виды речевой деятельности, включая произносительно-интонационные навыки, диалогическую речь и выразительное чтение. При этом театр выступает не только как форма внеаудиторной практики, но и как полигон для формирования речевой культуры, эмоционального интеллекта и навыков командного взаимодействия.

С методической точки зрения деятельность театра «Постскриптум» позволяет рассматривать художественно-речевую практику как интегративную дидактическую модель, объединяющую элементы ролевой игры, драматизации и проектного обучения. Участие в репетициях и постановках стимулирует когнитивную и эмоционально-эстетическую мотивацию, создает условия для овладения нормами литературного языка, а также способствует более глубокому осмыслению культурных и языковых реалий [34].

Практическая значимость театрализованной формы обучения заключается в возможности тиражирования данного опыта в образовательных организациях, реализующих программы РКИ для студентов инженерно-технических направлений. В перспективе театр может служить основой для создания элективных курсов и авторских методических пособий, направленных на интеграцию театральных технологий в процесс формирования профессионально ориентированной речевой компетенции иностранных обучающихся.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Коммуникативно-эстетический принцип является важным методическим элементом обучения русскому языку иностранных студентов технических специальностей. Он направлен на интеграцию лингвистических и культурологических аспектов, что способствует не только формированию профессионально ориентированной языковой компетенции, но и углублению понимания культуры и традиций носителей языка. Включение эстетических элементов русского языка в образовательный процесс не только улучшает навыки владения языком, но и стимулирует интерес студентов к русской литературе и культуре, что делает обучение более глубоким и многогранным.

Разработка и обоснование коммуникативно-эстетического принципа отвечает современным

требованиям образовательной практики, обеспечивая комплексный подход к формированию языковой компетенции. Он способствует более полному восприятию языка, его связи с культурой и социумом, что помогает студентам не только успешно осваивать русский язык, но и адаптироваться к русскоязычной академической и профессиональной среде. Данный принцип создает условия для формирования у студентов выразительных навыков устной речи, развития эмоционального интеллекта и навыков межкультурного взаимодействия, что делает образовательный процесс более осмысленным и гармоничным.

Реализация коммуникативно-эстетического принципа в преподавании РКИ, опирающаяся на практику интернационального студенческого театра «Постскриптум» при МИРЭА – Российском технологическом университете, демонстрирует высокую эффективность в обучении студентов технических направлений. Театральная деятельность, выступая в качестве поликультурной образовательной платформы, способствует активному развитию всех компонентов речевой компетенции, формированию устойчивой мотивации к обучению и более глубокой интеграции обучающихся в речевую среду.

Эстетизация речевого опыта через художественно-речевую практику обеспечивает не только совершенствование языковых умений в соответствии с литературными нормами, но и глубокое освоение культурно-языковых реалий, эмоциональное вовлечение обучающихся в процесс изучения языка, что усиливает их мотивацию и способствует успешной академической адаптации.

Дальнейшие перспективы научного исследования предполагают развитие направлений, связанных с интеграцией театрализованного обучения в процесс формирования профессионально ориентированной речи студентов технических специальностей. Важными задачами продолжения работы станут увеличение объема учебного времени, отведенного на освоение РКИ, а также создание комплексных методических пособий, включающих рекомендации для преподавателей и практико-ориентированные задания, основанные на реализации коммуникативно-эстетического принципа.

Вклад авторов

Все авторы в равной степени внесли свой вклад в исследовательскую работу.

Authors' contribution

All authors contributed equally to the research work.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азимов Э.Г., Щукин А.Н. *Новый словарь методических терминов и понятий* (теория и практика обучения языкам). М.: ИКАР; 2010, 446 с.
2. Абакумова Н.Н., Малкова И.Ю. *Компетентный подход в образовании: организация и диагностика*. Томск: Томский гос. ун-т; 2007, 368 с.
3. Болотов В.А., Сериков В.В. Компетентностная модель: от идеи к образовательной парадигме. *Педагогика*. 2003;10:8–14. <https://elibrary.ru/skchxt>
4. Щербенко Л.Р. О роли профессионально-ориентированных текстов в формировании профессиональной коммуникативной компетенции обучающихся неязыковых вузов. *Мир педагогики и психологии*. 2022;11(76):229–233. <https://www.elibrary.ru/wukmqc>
5. Volkova A.G. Organization of speaking clubs as a way of forming professional foreign language communicative competence of students. В сб.: *Современные тенденции развития системы подготовки обучающихся по иностранному языку в неязыковом вузе: региональная практика: Материалы всероссийской (национальной) научной конференции*, Красноярск, 10–11 ноября 2022 г. Красноярск: Красноярский государственный аграрный университет; 2022. Р. 176–179. <https://www.elibrary.ru/tdrxjv>
6. Пассов Е.И., Кузовлева Н.Е. *Основы коммуникативной теории и технологии иноязычного образования*. М.: Русский язык. Курсы; 2010, 568 с.
7. Кулаева Г.М. Система работы по формированию представлений иностранных учащихся о языковом эстетическом идеале. В сб.: *Русский язык: проблемы функционирования и методики преподавания на современном этапе: Материалы Международной научно-практической конференции*, Пенза, 18–20 мая 2009 г. Пенза; 2009. С. 233–235. <https://www.elibrary.ru/vmajmp>
8. Генцель Я. Обучение русскому языку как иностранному репродуктивно-креативным методом. *Русский язык за рубежом*. 1988;2:49–53.
9. Пассов Е.И., Кузовлева Н.Е. *Урок иностранного языка*. Ростов-на-Дону: Феникс; М.: Глосса-Пресс; 2010, 640 с.
10. Верещагин Е.М., Костомаров В.Г. *Язык и культура*. М.: Русский язык; 1990, 247 с.
11. Маркова А.К. *Психология усвоения языка как средства общения*. М.: Педагогика; 1974, 239 с.
12. Щепилова А.В. *Коммуникативно-когнитивный подход к обучению французскому языку как второму иностранному*. М.: Школьная книга; 2003, 488 с.
13. Щерба Л.В. О тройном аспекте языковых явлений и об эксперименте в языкознании. В кн.: Звегинцев В.А. *История языкознания 19 и 20 веков в очерках и извлечениях*. М.: 1960. С. 301–312.
14. Щерба Л.В. *Языковая система и речевая деятельность*. М.: Едиториал УРСС; 2004, 344 с.
15. Леонтьев А.А. *Основы психолингвистики*. М.: Смысл; СПб.: Лань; 2003, 285 с.
16. Ломоносов М.В. *Труды по филологии 1739–1758 гг.* М.–Л.; 1952, 996 с.
17. Луначарский А.В. *Основы позитивной эстетики*. М.: URSS: Либроком; 2011, 189 с.
18. Чуваева К.М. Формирование коммуникативной компетенции иностранных учащихся в курсе русского языка на начальном этапе подготовки в вузах Российской Федерации. *Известия Волгоградского государственного технического университета. Серия: Проблемы социально-гуманитарного знания*. 2013;12(2(105)):69–73. <https://www.elibrary.ru/qbmiyn>
19. Шоканова Р.Д., Тарасова Е.Н. Репродуктивный метод в обучении иностранных студентов русскому языку и его инновационные аспекты. *Russian Technological Journal*. 2021;9(3):98–107. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2021-9-3-98-107>
20. Чернова Н.И., Иванова Е.А., Богущ Н.Б., Катахова Н.В. Технология определения когнитивно-психологических особенностей студентов негуманитарного вуза. *Russian Technological Journal*. 2023;11(3):104–116. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2023-11-3-104-116>
21. Кулаева Г.М. Роль представлений иностранных студентов о русском языковом эстетическом идеале в повышении уровня их языковой и коммуникативной компетенции. В кн.: *Язык rosyjski jako przedmiot nauczanie wszkolе wyzszej (Русский язык как предмет обучения в высших учебных заведениях)*. Lublin; 2013. С. 197–203.
22. Дорфман О.В., Чернова О.Е. Развитие коммуникативной компетенции студентов технических вузов как стратегия обучения эффективной коммуникации. *Litera*. 2022;4:27–35. <https://doi.org/10.25136/2409-8698.2022.4.37806>, <https://www.elibrary.ru/gmhglm>
23. Бим И.Л. Некоторые актуальные проблемы современного обучения иностранным языкам. *Иностранные языки в школе*. 2001;4:5–8.
24. Соколова Г.Е. Изучение истории эстетики русского языка и речи на занятиях с иностранными студентами. *Наука и школа*. 2019;6:208–219. <https://www.elibrary.ru/kksoeb>
25. Шестерина Е.А. Представления немцев об эстетике звучания русской речи (на материале немецких интернет-форумов). *Филологические науки в МГИМО*. 2021;7(5(29)):102–110. <https://doi.org/10.24833/2410-2423-2021-5-29-102-110>, <https://www.elibrary.ru/qprzuj>
26. Королева О.Ю., Филиппова О.Г. Социальные ситуации общения как условие эффективности развития коммуникативной эстетики речи младших школьников. *Образование и воспитание дошкольников, школьников, молодежи: теория и практика*. 2024;2:43–50. <https://www.elibrary.ru/wirdjr>
27. Мультигули В.М. Эстетика разговорной речи к современной ситуации русского языка. *Вестник Санкт-Петербургского университета. История*. 2006;1:73–82. <https://www.elibrary.ru/rttcnj>

28. Вятютнев М.Н. *Теория учебника русского языка как иностранного* (методические основы). М.: Русский язык; 1984, 144 с. <https://www.elibrary.ru/sdihee>
29. Дмитриева Л.И. Русская речь: эстетика и культура. *Научный альманах*. 2017;8-1(34):98–100. <https://www.elibrary.ru/ziburyj>
30. Сафонова В.В. *Изучение языков международного общения в контексте диалога культур и цивилизаций*. Воронеж: Истоки; 1996, 238 с.
31. *Techniques & Principles in Language Teaching*. Oxford: Oxford University Press; 2011. P. 152, 161–164.
32. Соколова Г.Е. Обучение основам эстетики речи иностранных учащихся на занятиях по РКИ. В сб.: *Современные технологии в преподавании русского языка: сборник материалов Международной научно-практической конференции*. М.: Московский педагогический государственный университет; 2020. С. 479–482. <https://www.elibrary.ru/qzanvb>
33. Гальперин П.Я. Новые возможности обучения, в частности, иностранным языкам. В кн.: *Вопросы методики преподавания иностранных языков на неязыковых факультетах университетов*. М.: МГУ; 1971. С. 50–57.
34. Пассов Е.И. *Коммуникативный метод обучения иноязычному говорению*. М.: Просвещение; 1991. С. 32–33.
35. Гальскова Н.Д., Гез Н.И. *Теория обучения иностранным языкам. Лингводидактика и методика*. М.: Издательский центр «Академия»; 2013, 336 с.
36. Brown G. *Speakers, Listeners and Communication. Explorations in Discourse Analysis*. Cambridge: Cambridge University Press; 1995, 261 p.
37. Brumfit G.F., Jonson K. *The Communicative Approach to Language Teaching*. Oxford: Oxford University Press; 1979, 243 p.
38. Goethals M. *Creative and Cognitive Foreign Language Learning*. *Int. J. Appl. Linguistics*. 1977;36(1):3–44. <https://doi.org/10.1075/itl.36.01goe>
39. Тер-Минасова С.Г. *Язык и межкультурная коммуникация*. М.: Слово; 2000, 264 с. <https://www.elibrary.ru/yqozjo>
40. Тарасов Е.Ф. Язык как средство трансляции культуры. *Культурология. Дайджест*. 2002;2:95–97.
41. Китайгородская Г.А. Коммуникативный подход к созданию системы упражнений (небольшой исторический экскурс). *Вестник Московского университета. Серия 19. Лингвистика и межкультурная коммуникация*. 2001;2:7–14.
42. Костомаров В.Г. Язык. Культура. Цивилизация. *Вестник Московского университета. Серия 20. Педагогическое образование*. 2007;2:93–102. <https://www.elibrary.ru/iceuel>
43. Жинкин Н.Н. Интеллект, язык и речь. В кн.: сост. Р.А. Белова-Давид. *Нарушение речи у дошкольников*. М.: Просвещение; 1972. С. 9–31.
44. Иевлева З.Н. Грамматическое содержание коммуникативно-ориентированного обучения русскому языку как иностранному. В кн.: *Методика преподавания русского языка как иностранного. Хрестоматия*. Екатеринбург: УГУ им. М. Горького; 2008. С. 14–36.
45. Анисимова И.М. *Магия общения. История и практика этикета*. М.: Звонница-МГ; 2004, 480 с.
46. Абдраимов К.А. Эстетика речи и предъявляемые к ней дидактические требования. *Наука и новые технологии*. 2013;1:276–279. <https://elibrary.ru/vzjrjd>
47. Дейкина А.Д., Кулаева Г.М. Формирование представлений об эстетическом идеале в процессе обучения русскому языку как иностранному. *ВЕСТНИК РУДН. Серия «Вопросы образования: языки и специальность»*. 2007;2:49–54. <https://elibrary.ru/mstkov>
48. Соколова Г.Е. Художественные тексты как средство обучения эстетике русского языка и речи иностранных учащихся. *Преподаватель XXI век*. 2021;(4-1):240–247. <https://doi.org/10.31862/2073-9613-2021-4-240-247>, <https://elibrary.ru/wakhvb>
49. Кононенко Т.А., Ляшенко А.В., Притула О.Ю., Беляева С.Ю. Эстетика научной речи. *Студент и наука*. 2022;1(20): 39–45. <https://elibrary.ru/osypou>

REFERENCES

1. Azimov E.G., Shchukin A.N. *Novyi slovar' metodicheskikh terminov i ponyatii (teoriya i praktika obucheniya yazykam) (New Dictionary of Methodological Terms and Concepts (Theory and Practice of Language Teaching))*. Moscow: IKAR; 2010, 446 p. (In Russ.).
2. Abakumova N.N., Malkova I.Iu. *Kompetentnostnyi podkhod v obrazovanii: organizatsiya i diagnostika (Competence-Based Approach in Education: Organization and Diagnostics)*. Tomsk: Tomsk State University; 2007, 368 p. (In Russ.). <https://elibrary.ru/skchxt>
3. Bolotov V.A., Serikov V.V., Serikov V.V. *Kompetentnostnaya model': ot idei k obrazovatel'noi paradigme (Competence Model: From Idea to Educational Paradigm)*. *Pedagogika*. 2003;10:8–14 (in Russ.).
4. Shcherbenko L.R. On the role of professionally oriented texts in the formation of professional communicative competence of students in non-linguistic universities. *Mir Pedagogiki i Psikhologii*. 2022;11(76):229–233 (in Russ.). <https://www.elibrary.ru/wukmqc>
5. Volkova A.G. Organization of speaking clubs as a way of forming professional foreign language communicative competence of students. In: *Modern Trends in the Development of the System of Foreign Language Training in Non-Linguistic Universities: Regional Practice*. Krasnoyarsk: Krasnoyarsk State Agrarian University; 2022. P. 176–179 (in Russ.). <https://www.elibrary.ru/tdrxjv>
6. Passov E.I., Kuzovleva N.E. *Osnovy kommunikativnoi teorii i tekhnologii inoyazychnogo obrazovaniya (Bases of Communicative Theory and Foreign Language Teaching Techniques)*. Moscow: Russkii yazyk. Kursy; 2010, 568 p. (In Russ.).

7. Kulaeva G.M. System for developing foreign students' ideas about the linguistic aesthetic ideal. In: *Russian Language: Problems of Functioning and Teaching Methodology at the Present Stage: Proceedings of the International Scientific and Practical Conference*. Penza; 2009. P. 233–235 (in Russ.). <https://www.elibrary.ru/vmajmp>
8. Genzel Ya. Teaching Russian as a Foreign Language by the Reproductive-Creative Method. *Russkii yazyk za rubezhom = Russian Language Abroad*. 1988;2:49–53 (in Russ.).
9. Passov E.I., Kuzovleva N.E. *Urok inostrannogo yazyka (Foreign Language Lesson)*. Rostov-on-Don: Feniks; Moscow: Glossa-Press; 2010, 640 p. (In Russ.).
10. Vereshchagin E.M., Kostomarov V.G. *Yazyk i kultura (Language and Culture)*. Moscow: Russkii yazyk; 1990, 247 p. (In Russ.).
11. Markova A.K. *Psikhologiya usvoeniya yazyka kak sredstva obshcheniya (Psychology of Language Acquisition as a Means of Communication)*. Moscow: Pedagogika; 1974, 234 p. (In Russ.).
12. Shchepilova A.B. *Kommunikativno-kognitivnyi podkhod k obucheniyu frantsuzskomu yazyku kak vtoromu inostrannomu (Communicative-Cognitive Approach to Teaching French as a Second Foreign Language)*. Moscow: Shkol'naya kniga; 2003, 488 p. (In Russ.).
13. Shcherba L.V. On the triple aspect of linguistic phenomena and experiments in linguistics. In: Zvegintsev V.A. (Ed.). *Istoriya yazykoznaniiya 19 i 20 vekov v ocherkakh i izvlecheniyakh (History of Linguistics in the 19th and 20th Centuries in Essays and Extracts)*. Moscow; 1960. P. 301–312 (in Russ.).
14. Shcherba L.V. *Yazykovaya sistema i rechevaya deyatel'nost' (Language System and Speech Activity)*. Moscow: Editorial URSS; 2004, 344 p. (In Russ.).
15. Leont'ev A.A. *Osnovy psikholingvistiki (Fundamentals of Psycholinguistics)*. Moscow: Smysl, St. Petersburg: Lan; 2003, 285 p. (In Russ.).
16. Lomonosov M.V. *Trudy po filologii 1739–1758 gg (Works on Philology, 1739–1758)*. Moscow–Leningrad; 1952, 996 p. (In Russ.).
17. Lunacharskii A.V. *Osnovy pozitivnoi ehstetiki (Fundamentals of Positive Aesthetics)*. Moscow: URSS: Librokom; 2011, 189 p. (In Russ.).
18. Chuvaeva K.M. Forming communicative competence of international students in the course of Russian language at the initial stage of pre-university program. *Izvestiya Volgogradskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Problemy sotsial'no-gumanitarnogo znaniya*. 2013;12(2(105)):69–73 (in Russ.). <https://www.elibrary.ru/qbmiyn>
19. Shokanova R.D., Tarasova E.N. Reproductive method in teaching Russian as a foreign language and its innovative aspects. *Russian Technological Journal*. 2021;9(3):98–107 (in Russ.). <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2021-9-3-98-107>
20. Chernova N.I., Ivanova E.A., Bogush N.B., Katakova N.V. Technology for determining non-humanities university students' cognitive-and-psychological characteristics. *Russian Technological Journal*. 2023;11(3):104–116. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2023-11-3-104-116>
21. Kulaeva G.M. The role of foreign students' ideas about the Russian linguistic aesthetic ideal in improving their language and communicative competence. In: *Russkii yazyk kak predmet obucheniya v vysshikh uchebnykh zavedeniyakh (Russian Language as a Subject of Teaching in Higher Education)*. Lublin; 2013. P. 197–203 (in Russ.).
22. Dorfman O.V., Chernova O.E. Development of the communicative competence of students of technical universities as a strategy for teaching effective communication. *Litera*. 2022;4:27–35 (in Russ.). <https://doi.org/10.25136/2409-8698.2022.4.37806>, <https://www.elibrary.ru/gmhglm>
23. Bim I.L. Some current problems of modern foreign language teaching. *Inostrannye yazyki v shkole = Foreign Languages in School*. 2001;4:5–8 (in Russ.).
24. Sokolova G.E. Studying the history of the aesthetics of the Russian language and speech in classes with foreign students. *Nauka i shkola = Science and School*. 2019;6:208–219 (in Russ.). <https://www.elibrary.ru/kksocb>
25. Shesterina E.A. Aesthetic perception of the Russian sound speech by Germans (a case study of German internet forums). *Filologicheskie nauki v MGIMO = Linguistics & Polyglot Studies*. 2021;7(5):102–110 (in Russ.). <https://doi.org/10.24833/2410-2423-2021-5-29-102-110>, <https://www.elibrary.ru/qprzjy>
26. Koroleva O.Iu., Filippova O.G. Social situations of communication as a condition for the effective development of the communicative aesthetics of speech of younger schoolchildren. *Obrazovanie i vospitanie doskol'nikov, shkol'nikov, molodezhi: teoriya i praktika*. 2024;2:43–50 (in Russ.). <https://www.elibrary.ru/wirdjr>
27. Multatuli V.M. The aesthetics of spoken language in the contemporary situation of the Russian language. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Istoriya = Vestnik of St. Petersburg University. History*. 2006;1:73–82 (in Russ.). <https://www.elibrary.ru/rttcnj>
28. Vyatyutnev M.N. *Teoriya uchebnika russkogo yazyka kak inostrannogo (metodicheskie osnovy) (The Theory of the Textbook of Russian as a Foreign Language: Methodological Foundations)*. Moscow: Russkii yazyk; 1984, 144 p. (In Russ.). <https://www.elibrary.ru/sdihee>
29. Dmitrieva L.I. Russian Speech: Aesthetics and Culture. *Nauchnyi al'manakh = Science Almanac*. 2017;8-1(34): 98–100 (in Russ.). <https://www.elibrary.ru/zibyryj>
30. Safonova V.V. *Izuchenie yazykov mezhdunarodnogo obshcheniya v kontekste dialoga kul'tur i tsivilizatsii (Studying Languages of International Communication in the Context of Dialogue of Cultures and Civilizations)*. Voronezh: Istoki; 1996, 238 p. (In Russ.).
31. *Techniques & Principles in Language Teaching*. Oxford: Oxford University Press; 2011. P. 152, 161–164.

32. Sokolova G.E. Teaching the basics of speech aesthetics to foreign students in Russian language classes. In: *Modern Technologies in Teaching Russian: Proceedings of the International Scientific and Practical Conference*. Moscow: Moscow Pedagogical State University; 2020. P. 479–482 (in Russ.). <https://www.elibrary.ru/qzanvb>
33. Galperin P.Ia. New leaning opportunities, in particular, foreign languages. In: *Issues of Foreign Language Teaching Methodology in Non-Linguistic University Faculties*. Moscow: MGU Press; 1971. P. 50–57 (in Russ.).
34. Passov E.I. *Kommunikativnyi metod obucheniya inoyazychnomu govoreniyu (Communicative Method of Teaching Foreign Language Speaking)*. Moscow: Prosveshchenie; 1991. P. 32–33 (in Russ.).
35. Galskova N.D., Gez N.I. *Teoriya obucheniya inostrannym yazykam. Lingvodidaktika i metodika (Theory of Teaching Foreign Languages. Linguodidactics and Methodology)*. Moscow: Akademiya; 2013, 336 p. (In Russ.).
36. Brown G. *Speakers, Listeners and Communication. Explorations in Discourse Analysis*. Cambridge: Cambridge University Press; 1995, 261 p.
37. Brumfit G.F., Jonson K. *The Communicative Approach to Language Teaching*. Oxford: Oxford University Press; 1979, 243 p.
38. Goethals M. *Creative and Cognitive Foreign Language Learning*. *Int. J. Appl. Linguistics*. 1977;36(1):3–44. <https://doi.org/10.1075/itl.36.01goe>
39. Ter-Minasova S.G. *Yazyk i mezhkulturnaya kommunikatsiya (Language and Intercultural Communication)*. Moscow: Slovo; 2000, 261 p. (In Russ.).
40. Tarasov E.F. *Iazyk kak sredstvo translyatsii kultury (Language as a Means of Cultural Transmission)*. *Kulturologiia. Daidzhest (Culturology. Digest)*. 2002;2:95–97 (in Russ.).
41. Kitaigorodskaya G.A. Communicative approach to developing a system of exercises (a brief historical overview). *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 19. Lingvistika i mezhkulturnaya kommunikatsiya = Moscow University Bulletin. Series 19. Linguistics and Intercultural Communication*. 2001;2:7–14 (in Russ.).
42. Kostomarov V.G. Language. Culture. Civilization. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 20. Pedagogicheskoe obrazovanie = Lomonosov Pedagogical Education Journal*. 2007;2:93–102 (in Russ.). <https://www.elibrary.ru/iceuel>
43. Zhinkin N.N. Intellect, Language and Speech. In: R.A. Belova-David (Comp.). *Narushenie rechi u doshkol'nikov (Speech Disorders in Preschoolers)*. Moscow: Prosveshchenie; 1972. P. 9–31 (in Russ.).
44. Ievleva Z.N. Grammatical content of communicative-oriented teaching of Russian as a foreign language. In: *Metodika prepodavaniya russkogo yazyka kak inostrannogo. Khrestomatiya (Methodology of Teaching Russian as a Foreign Language. Anthology)*. Yekaterinburg: Ural State University; 2008. P. 14–36 (in Russ.).
45. Anisimova I.M. *Magiya obshcheniya. Istoriya i praktika ehtiketa (The Magic of Communication. History and Practice of Etiquette)*. Moscow: Zvonitsa-MG; 2004, 480 p. (In Russ.).
46. Abdraimov K.A. The aesthetics of speech, delivered didactic requirements. *Nauka i novye tekhnologii = Science and New Technologies*. 2013;1:276–279 (in Russ.). <https://elibrary.ru/vzjrjd>
47. Deikina A.D., Kulaeva G.M. Formation notions about aesthetic ideal in process of teaching Russian language as foreign language. *VESTNIK RUDN. Seriya "Voprosy obrazovaniya: yazyki i spetsial'nost'" = RUDN Journal of Language Education and Translingual Practices*. 2007;2:49–54 (in Russ.). <https://elibrary.ru/mstkov>
48. Sokolova G.E. Literary texts as a means of teaching foreign students aesthetics of the Russian language and speech. *Prepodavatel' XXI Vek. Russian Journal of Education*. 2021;4-1:240–247 (in Russ.). <https://doi.org/10.31862/2073-9613-2021-4-240-247>, <https://elibrary.ru/wakhvb>
49. Kononenko T.A., Lyashenko A.V., Pritula O.Yu., Belyaeva S.Yu. Aesthetics of Scientific Speech. *Student i nauka = Student and Science*. 2022;1(20):39–45 (in Russ.). <https://elibrary.ru/osypou>

Об авторах

Тарасова Елена Николаевна, д.пед.н., доцент, заведующая кафедрой русского языка (как иностранного), Институт международного образования, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: tarasova_e@mirea.ru. SPIN-код РИНЦ 6286-0426, <https://orcid.org/0000-0002-2942-9586>

Москвина Жанна Олеговна, к.филол.н., доцент, кафедра русского языка (как иностранного), Институт международного образования, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: moskvina@mirea.ru. SPIN-код РИНЦ 7009-7666, <https://orcid.org/0009-0002-0111-6681>

About the Authors

Elena N. Tarasova, Dr. Sci. (Ped.), Head of the Department of Russian Language (as a Foreign Language), Institute of International Education, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: tarasova_e@mirea.ru. RSCI SPIN-code 6286-0426, <https://orcid.org/0000-0002-2942-9586>

Zhanna O. Moskvina, Cand. Sci. (Philol.), Associate Professor, Department of Russian Language (as a Foreign Language), Institute of International Education, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: moskvina@mirea.ru. RSCI SPIN-code 7009-7666, <https://orcid.org/0009-0002-0111-6681>

Отпечатано в «МИРЭА – Российский технологический
университет».

119454, РФ, г. Москва, пр-т Вернадского, д. 78.

Подписано в печать 29.01.2026 г.

Формат 60 × 90/8. Печать цифровая.

Уч.-изд. листов 15.75.

Тираж 50 экз. Заказ № 3698.

Подписку на печатную версию

Russian Technological Journal можно оформить
через ООО «Агентство «Книга-Сервис», www.akc.ru.

Подписной индекс: **79641**.

Printed in MIREA – Russian Technological University.
78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russian
Federation.

Signed to print January 29, 2026.

Format 60 × 90/8. Digital print.

C.p.l. 15.75.

50 copies. Order No. 3698.

Subscription to the *Russian Technological
Journal* printed version can be made through
the *Kniga-Servis* Agency, www.akc.ru.

Subscription index: **79641**.

