



RUSSIAN TECHNOLOGICAL JOURNAL

**РОССИЙСКИЙ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ**

*Информационные системы.
Информатика.
Проблемы информационной безопасности*

*Роботизированные комплексы и системы.
Технологии дистанционного зондирования и неразрушающего контроля*

Современные радиотехнические и телекоммуникационные системы

*Микро- и нанoeлектроника.
Физика конденсированного состояния*

Аналитическое приборостроение и технологии

Математическое моделирование

*Экономика наукоемких и высокотехнологичных
предприятий и производств. Управление в организационных системах*

Управление качеством продукции. Стандартизация

Мировоззренческие основы технологии и общества



RUSSIAN TECHNOLOGICAL JOURNAL

РОССИЙСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

- Информационные системы. Информатика. Проблемы информационной безопасности
- Роботизированные комплексы и системы. Технологии дистанционного зондирования и неразрушающего контроля
- Современные радиотехнические и телекоммуникационные системы
- Микро- и нанoeлектроника. Физика конденсированного состояния
- Аналитическое приборостроение и технологии
- Математическое моделирование
- Экономика наукоемких и высокотехнологичных предприятий и производств. Управление в организационных системах
- Управление качеством продукции. Стандартизация
- Мировоззренческие основы технологии и общества
- Information systems. Computer sciences. Issues of information security
- Multiple robots (robotic centers) and systems. Remote sensing and nondestructive testing
- Modern radio engineering and telecommunication systems
- Micro- and nanoelectronics. Condensed matter physics
- Analytical instrument engineering and technology
- Mathematical modeling
- Economics of knowledge-intensive and high-tech enterprises and industries. Management in organizational systems
- Product quality management. Standardization
- Philosophical foundations of technology and society

Russian Technological Journal
2025, том 13, № 6

Russian Technological Journal
2025, Vol. 13, No. 6

Russian Technological Journal
2025, том 13, № 6

Дата опубликования 28 ноября 2025 г.

Научно-технический рецензируемый журнал освещает вопросы комплексного развития радио-технических, телекоммуникационных и информационных систем, электроники и информатики, а также результаты фундаментальных и прикладных междисциплинарных исследований, технологических и организационно-экономических разработок, направленных на развитие и совершенствование современной технологической базы.

Периодичность: 6 раз в год.

Журнал основан в декабре 2013 года. До 2016 г. издавался под названием «Вестник МГТУ МИРЭА» (ISSN 2313-5026), а с января 2016 г. по июль 2021 г. под названием «Российский технологический журнал» (ISSN 2500-316X).

Учредитель и издатель:

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «МИРЭА – Российский технологический университет» 119454, РФ, г. Москва, пр-т Вернадского, д. 78.

Журнал входит в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов ВАК РФ, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук и доктора наук, входит в RSCI, РГБ, РИНЦ, eLibrary, Directory of Open Access Journals (DOAJ), Directory of Open Access Scholarly Resources (ROAD), Google Scholar, Ulrich's International Periodicals Directory.

Главный редактор:

Сигов Александр Сергеевич, академик РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор, президент ФГБОУ ВО МИРЭА – Российский технологический университет (РТУ МИРЭА), Москва, Россия.
Scopus Author ID 35557510600, ResearcherID L-4103-2017, sigov@mirea.ru.

Редакция:

Зав. редакцией	к.т.н. Г.Д. Середина
Научный редактор	д.т.н., проф. Г.В. Куликов
Выпускающий редактор	А.С. Алексеенко
Технический редактор	Д.В. Трофимова

119571, г. Москва, пр-т Вернадского, 86, оф. Р-108.
Тел.: +7 (499) 600-80-80 (#31288).
E-mail: seredina@mirea.ru.

Регистрационный номер и дата принятия решения о регистрации СМИ ПИ № ФС 77 - 81733 от 19.08.2021 г. СМИ зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).

Индекс по объединенному каталогу «Пресса России» 79641.

<https://www.rtj-mirea.ru>

Russian Technological Journal
2025, Vol. 13, No. 6

Publication date November 28, 2025.

The peer-reviewed scientific and technical journal highlights the issues of complex development of radio engineering, telecommunication and information systems, electronics and informatics, as well as the results of fundamental and applied interdisciplinary researches, technological and economical developments aimed at the development and improvement of the modern technological base.

Periodicity: six times a year.

The journal was founded in December 2013. The titles were «Herald of MSTU MIREA» until 2016 (ISSN 2313-5026) and «Rossiiskii tekhnologicheskii zhurnal» from January 2016 until July 2021 (ISSN 2500-316X).

Founder and Publisher:

Federal State Budget
Educational Institution of Higher Education
«MIREA – Russian Technological University»
78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia.

The journal is included into the List of peer-reviewed science press of the State Commission for Academic Degrees and Titles of Russian Federation. The Journal is included in Russian Science Citation Index (RSCI), Russian State Library (RSL), Science Index, eLibrary, Directory of Open Access Journals (DOAJ), Directory of Open Access Scholarly Resources (ROAD), Google Scholar, Ulrich's International Periodicals Directory.

Editor-in-Chief:

Alexander S. Sigov, Academician at the Russian Academy of Sciences, Dr. Sci. (Phys.–Math.), Professor, President of MIREA – Russian Technological University (RTU MIREA), Moscow, Russia.
Scopus Author ID 35557510600, ResearcherID L-4103-2017, sigov@mirea.ru.

Editorial staff:

Managing Editor	Cand. Sci. (Eng.) Galina D. Seredina
Scientific Editor	Dr. Sci. (Eng.), Prof. Gennady V. Kulikov
Executive Editor	Anna S. Alekseenko
Technical Editor	Darya V. Trofimova

86, Vernadskogo pr., Moscow, 119571 Russia.
Phone: +7 (499) 600-80-80 (#31288).
E-mail: seredina@mirea.ru.

The registration number ПИ № ФС 77 - 81733 was issued in August 19, 2021 by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology, and Mass Media of Russia.

The subscription index of *Pressa Rossii*: 79641.

Редакционная коллегия

Кудж Станислав Алексеевич	д.т.н., профессор, ректор РТУ МИРЭА, Москва, Россия. Scopus Author ID 56521711400, ResearcherID AAG-1319-2019, https://orcid.org/0000-0003-1407-2788 , rector@mirea.ru
Банис Юрас Йонович	хабилитированный доктор наук, профессор, проректор Вильнюсского университета, Вильнюс, Литва. Scopus Author ID 7003687871, juras.banyas@ff.vu.lt
Бетелин Владимир Борисович	академик Российской академии наук (РАН), д.ф.-м.н., профессор, научный руководитель Федерального научного центра «Научно-исследовательский институт системных исследований» РАН, Москва, Россия. Scopus Author ID 6504159562, ResearcherID J-7375-2017, betelin@niisi.msk.ru
Боков Алексей Алексеевич	д.ф.-м.н., старший научный сотрудник, химический факультет и 4D LABS, Университет Саймона Фрейзера, Ванкувер, Британская Колумбия, Канада. Scopus Author ID 35564490800, ResearcherID C-6924-2008, http://orcid.org/0000-0003-1126-3378 , abokov@sfu.ca
Вахрушев Сергей Борисович	д.ф.-м.н., профессор, заведующий лабораторией нейтронных исследований Физико-технического института им. А.Ф. Иоффе РАН, профессор кафедры Физической электроники СПбГПУ, Санкт-Петербург, Россия. Scopus Author ID 7004228594, ResearcherID A-9855-2011, http://orcid.org/0000-0003-4867-1404 , s.vakhrushev@mail.ioffe.ru
Гуляев Юрий Васильевич	академик РАН, д.ф.-м.н., профессор, научный руководитель Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Москва, Россия. Scopus Author ID 35562581800, gulyaev@cplire.ru
Жуков Дмитрий Олегович	д.т.н., профессор кафедры телекоммуникаций Института радиоэлектроники и информатики РТУ МИРЭА, Москва, Россия. Scopus Author ID 57189660218, zhukov_do@mirea.ru
Кимель Алексей Вольдемарович	к.ф.-м.н., профессор, Университет Радбауд, г. Наймеген, Нидерланды. Scopus Author ID 6602091848, ResearcherID D-5112-2012, a.kimel@science.ru.nl
Крамаров Сергей Олегович	д.ф.-м.н., профессор, Сургутский государственный университет, Сургут, Россия. Scopus Author ID 56638328000, ResearcherID E-9333-2016, https://orcid.org/0000-0003-3743-6513 , mavoo@yandex.ru
Новиков Дмитрий Александрович	академик РАН, д.т.н., директор Института проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия. Scopus Author ID 7102213403, ResearcherID Q-9677-2019, https://orcid.org/0000-0002-9314-3304 , novikov@ipu.ru
Перно Филипп	Dr. Sci. (Electronics), профессор, Центральная Школа г. Лилль, Франция. Scopus Author ID 7003429648, philippe.pernod@ec-lille.fr
Романов Михаил Петрович	д.т.н., профессор, научный руководитель Института искусственного интеллекта РТУ МИРЭА, Москва, Россия. Scopus Author ID 14046079000, https://orcid.org/0000-0003-3353-9945 , m_romanov@mirea.ru
Савиных Виктор Петрович	академик РАН, Дважды Герой Советского Союза, д.т.н., профессор, президент Московского государственного университета геодезии и картографии, Москва, Россия. Scopus Author ID 56412838700, vp@miigaik.ru
Соболевский Андрей Николаевич	д.ф.-м.н., директор Института проблем передачи информации им. А.А. Харкевича, Москва, Россия. Scopus Author ID 7004013625, ResearcherID D-9361-2012, http://orcid.org/0000-0002-3082-5113 , sobolevski@iitp.ru
Сюй Ли Да	академик Европейской академии наук, Российской инженерной академии и Инженерной академии Армении, Dr. Sci. (Systems Science), профессор, Университет Олд Доминион, Норфолк, Соединенные Штаты Америки. Scopus Author ID 13408889400, https://orcid.org/0000-0002-5954-5115 , lxu@odu.edu
Харин Юрий Семенович	академик Национальной академии наук Беларуси, д.ф.-м.н., профессор, директор НИИ прикладных проблем математики и информатики Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь. Scopus Author ID 6603832008, http://orcid.org/0000-0003-4226-2546 , kharin@bsu.by
Чаплыгин Юрий Александрович	академик РАН, д.т.н., профессор, член Отделения нанотехнологий и информационных технологий РАН, президент Института микроприборов и систем управления им. Л.Н. Преснухина НИУ «МИЭТ», Москва, Россия. Scopus Author ID 6603797878, ResearcherID B-3188-2016, president@miet.ru
Шпак Василий Викторович	к.э.н., зам. министра промышленности и торговли Российской Федерации, Министерство промышленности и торговли РФ, Москва, Россия; доцент, Институт микроприборов и систем управления им. Л.Н. Преснухина НИУ «МИЭТ», Москва, Россия, mishinevaiv@minprom.gov.ru

Editorial Board

Stanislav A. Kudzh	Dr. Sci. (Eng.), Professor, Rector of RTU MIREA, Moscow, Russia. Scopus Author ID 56521711400, ResearcherID AAG-1319-2019, https://orcid.org/0000-0003-1407-2788 , rector@mirea.ru
Juras Banys	Habilitated Doctor of Sciences, Professor, Vice-Rector of Vilnius University, Vilnius, Lithuania. Scopus Author ID 7003687871, juras.banys@ff.vu.lt
Vladimir B. Betelin	Academician at the Russian Academy of Sciences (RAS), Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Supervisor of Scientific Research Institute for System Analysis, RAS, Moscow, Russia. Scopus Author ID 6504159562, ResearcherID J-7375-2017, betelin@niisi.msk.ru
Alexei A. Bokov	Dr. Sci. (Phys.-Math.), Senior Research Fellow, Department of Chemistry and 4D LABS, Simon Fraser University, Vancouver, British Columbia, Canada. Scopus Author ID 35564490800, ResearcherID C-6924-2008, http://orcid.org/0000-0003-1126-3378 , abokov@sfu.ca
Sergey B. Vakhrushev	Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Head of the Laboratory of Neutron Research, A.F. Ioffe Physico-Technical Institute of the RAS, Department of Physical Electronics of St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia. Scopus Author ID 7004228594, ResearcherID A-9855-2011, http://orcid.org/0000-0003-4867-1404 , s.vakhrushev@mail.ioffe.ru
Yury V. Gulyaev	Academician at the RAS, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Academic Supervisor of V.A. Kotelnikov Institute of Radio Engineering and Electronics of the RAS, Moscow, Russia. Scopus Author ID 35562581800, gulyaev@cplire.ru
Dmitry O. Zhukov	Dr. Sci. (Eng.), Professor of the Department of Telecommunications, Institute of Radio Electronics and Informatics, RTU MIREA, Moscow, Russia. Scopus Author ID 57189660218, zhukov_do@mirea.ru
Alexey V. Kimel	PhD (Phys.-Math.), Professor, Radboud University, Nijmegen, Netherlands, Scopus Author ID 6602091848, ResearcherID D-5112-2012, a.kimel@science.ru.nl
Sergey O. Kramarov	Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Surgut State University, Surgut, Russia. Scopus Author ID 56638328000, ResearcherID E-9333-2016, https://orcid.org/0000-0003-3743-6513 , mavoo@yandex.ru
Dmitry A. Novikov	Academician at the RAS, Dr. Sci. (Eng.), Director of V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences, Moscow, Russia. Scopus Author ID 7102213403, ResearcherID Q-9677-2019, https://orcid.org/0000-0002-9314-3304 , novikov@ipu.ru
Philippe Pernod	Dr. Sci. (Electronics), Professor, Dean of Research of Centrale Lille, Villeneuve-d'Ascq, France. Scopus Author ID 7003429648, philippe.pernod@ec-lille.fr
Mikhail P. Romanov	Dr. Sci. (Eng.), Professor, Academic Supervisor of the Institute of Artificial Intelligence, RTU MIREA, Moscow, Russia. Scopus Author ID 14046079000, https://orcid.org/0000-0003-3353-9945 , m_romanov@mirea.ru
Viktor P. Savinykh	Academician at the RAS, Dr. Sci. (Eng.), Professor, President of Moscow State University of Geodesy and Cartography, Moscow, Russia. Scopus Author ID 56412838700, vp@miigaik.ru
Andrei N. Sobolevski	Professor, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Director of Institute for Information Transmission Problems (Kharkevich Institute), Moscow, Russia. Scopus Author ID 7004013625, ResearcherID D-9361-2012, http://orcid.org/0000-0002-3082-5113 , sobolevski@iitp.ru
Li Da Xu	Academician at the European Academy of Sciences, Russian Academy of Engineering (formerly, USSR Academy of Engineering), and Armenian Academy of Engineering, Dr. Sci. (Systems Science), Professor and Eminent Scholar in Information Technology and Decision Sciences, Old Dominion University, Norfolk, VA, the United States of America. Scopus Author ID 13408889400, https://orcid.org/0000-0002-5954-5115 , lxu@odu.edu
Yury S. Kharin	Academician at the National Academy of Sciences of Belarus, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Director of the Institute of Applied Problems of Mathematics and Informatics of the Belarusian State University, Minsk, Belarus. Scopus Author ID 6603832008, http://orcid.org/0000-0003-4226-2546 , kharin@bsu.by
Yuri A. Chaplygin	Academician at the RAS, Dr. Sci. (Eng.), Professor, Member of the Departments of Nanotechnology and Information Technology of the RAS, President of the National Research University of Electronic Technology (MIET), Moscow, Russia. Scopus Author ID 6603797878, ResearcherID B-3188-2016, president@miet.ru
Vasily V. Shpak	Cand. Sci. (Econ.), Deputy Minister of Industry and Trade of the Russian Federation, Ministry of Industry and Trade of the Russian Federation, Moscow, Russia; Associate Professor, National Research University of Electronic Technology (MIET), Moscow, Russia, mishinevaiv@minprom.gov.ru

Содержание

Информационные системы. Информатика. Проблемы информационной безопасности

Г.В. Петушков

- 7** Организация и исследование кластерных вычислительных систем с функциональной архитектурой, определяемой исполнимыми моделями. Автоматные исполнимые модели обработки информации

А.В. Корольков, А.А. Крючков

- 25** Подход к выявлению оптимального набора кубит квантовых вычислительных устройств на примере модели генерации случайных двоичных последовательностей

Современные радиотехнические и телекоммуникационные системы

О.В. Болховская

- 47** Максимально правдоподобные оценки угла прихода детерминированных и случайных сигналов в многоэлементных антенных решетках различной конфигурации

В.В. Никитин, С.У. Увайсов, Д.В. Басов

- 63** Устройство вызова экстренных оперативных служб для обеспечения голосовой связи водителя двухколесного транспортного средства и оператора системы «ЭРА-ГЛОНАСС»

О.В. Тихонова, А.И. Стариковский, Фам Тхань Туан

- 78** Метод ограничения пик-фактора с дополнительным сигналом компенсации в системе с ортогональным частотным разделением каналов при применении регрессии для выбора параметров

Микро- и нанoeлектроника. Физика конденсированного состояния

Д.М. Бакеренкова, А.С. Петров

- 86** Влияние встраивания поверхностных состояний на стойкость мощных металлооксидных полупроводниковых полевых транзисторов к электростатическому разряду

Аналитическое приборостроение и технологии

Д.А. Сандуляк, М.Н. Полисмакова, Д.А. Головченко, А.С. Харин, А.В. Сандуляк, А.А. Сандуляк

- 95** О рабочей зоне измерительного устройства при использовании в нем противостоящих полюсов с плоскими поверхностями

Математическое моделирование

Э.М. Карташов

- 104** Метод расщепления интегрального преобразования в задачах сложного теплообмена

А.А. Парамонов, А.В. Калач, Т.Е. Саратова

- 116** О мониторинге и прогнозировании динамики развития структуры тропических циклонов на основе почти периодического анализа спутниковых изображений

М.Е. Соловьев, С.С. Кокарев, С.Л. Балдаев, Л.Х. Балдаев, Д.В. Малышев

- 127** Нестационарная задача теплопроводности в технологии газотермического напыления защитных покрытий

В.Б. Федоров, С.Г. Харламов

- 139** Оценка параметра гауссовского размытия методом сопоставления гистограмм градиентов с эталонным изображением

Contents

Information systems. Computer sciences. Issues of information security

- 7** *Grigory V. Petushkov*
Organization and study of cluster computing systems with functional architecture determined by executable models. Automata executable models of information processing
- 25** *Andrey V. Korolkov, Andrey A. Kryuchkov*
Approach for identifying the optimal set of qubits of quantum computing devices based on a model for generating binary random sequences

Modern radio engineering and telecommunication systems

- 47** *Olesya V. Bolkhovskaya*
Maximum likelihood estimates of the angle-of-arrival of deterministic and random signals in multielement antenna arrays of various configurations
- 63** *Vasily V. Nikitin, Saygid U. Uvaysov, Dmitry V. Basov*
A device for calling emergency operational services to provide voice communication between the driver of a two-wheeled vehicle and the operator of the ERA-GLONASS system
- 78** *Olga V. Tikhonova, Anatoly I. Starikovskiy, Pham Thanh Tuan*
Method of peak factor reduction with compensation signal in OFDM system using regression for parameter selection

Micro- and nanoelectronics. Condensed matter physics

- 86** *Diana M. Bakerenkova, Aleksandr S. Petrov*
Interface traps build-up and its influence on electrostatic discharge robustness of high-power metal-oxide-semiconductor field-effect transistor

Analytical instrument engineering and technology

- 95** *Daria A. Sandulyak, Maria N. Polismakova, Daria A. Golovchenko, Alexey S. Kharin, Alexander V. Sandulyak, Anna A. Sandulyak*
On the working zone of a magnetometer-electromagnet measuring device when using opposing pole pieces with flat surfaces

Mathematical modeling

- 104** *Eduard M. Kartashov*
Method for splitting integral transformation in problems of complex heat transfer
- 116** *Alexander A. Paramonov, Andrew V. Kalach, Tatiana E. Saratova*
On monitoring and forecasting the dynamics of the development of the structure of tropical cyclones based on almost periodic analysis of satellite images
- 127** *Mikhail E. Soloviev, Sergey S. Kokarev, Sergey L. Baldaev, Lev Kh. Baldaev, Denis V. Malyshev*
Unsteady heat transfer problem during single-pass spraying on a half-space
- 139** *Victor B. Fedorov, Sergey G. Kharlamov*
Estimation of the Gaussian blur parameter by comparing histograms of gradients with a standard image

УДК 004.9:681.3
<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-6-7-24>
EDN WGZANH



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Организация и исследование кластерных вычислительных систем с функциональной архитектурой, определяемой исполнимыми моделями. Автоматные исполнимые модели обработки информации

Г.В. Петушков[@]

МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, 119454 Россия

[@] Автор для переписки, e-mail: petushkov@mirea.ru

• Поступила: 04.08.2025 • Доработана: 12.09.2025 • Принята к опубликованию: 06.10.2025

Резюме

Цели. Актуальной является задача совершенствования функциональной архитектуры кластерных вычислительных систем за счет внедрения методологий создания программного обеспечения прикладного и промежуточного уровней на основе формализованных спецификаций. Одна из таких методологий основана на использовании автоматных спецификаций программного обеспечения вычислительных систем. Сложность решения задачи вызвана разветвленностью построенных алгоритмов, а также наличием циклических участков. Время выполнения разветвленных участков программы и число проходимых циклов зависят от вида входных условий и на практике могут быть определены при помощи детальной имитационной модели и анализа созданной на ее основе управляющей программы. Цель работы – нахождение подходов к определению функциональной архитектуры, которые возможно применять практически на основных уровнях предметной ориентации кластерных вычислительных систем.

Методы. Предлагаемые и использованные методы основаны на концепции организации и исследования вычислительных систем кластерного типа с функциональной архитектурой, определяемой исполнимыми автоматными моделями.

Результаты. Предложены методы построения автоматных и логико-вероятностных моделей кластерных вычислительных систем и создания на этой основе программных средств. Вводится понятие логико-вероятностной модели «темпоральная вероятностная система канонических уравнений», которая позволит получить наглядную формализацию и реализацию автоматных моделей и рабочих программ, характерных для кластерных и других приложений, и в существенной степени сократить число «инкрементных» сложений при перечислении моментов дискретного времени. Главной особенностью новой логико-вероятностной модели является сохранение в ее основе исходной системы канонических уравнений.

Выводы. Сделан вывод о том, что выбор системной и функциональной архитектуры вычислительного кластера должен определяться не столько указанными производителем пиковыми характеристиками коммуникационной аппаратуры, сколько реальными показателями, достигаемыми на уровне приложений пользователей и режимов использования кластера. Показано, что исполнимые автоматные модели могут применяться практически на всех уровнях предметной ориентации кластерных вычислительных систем.

Ключевые слова: вычислительная система кластерного типа, приложение промежуточного уровня, функциональная архитектура, логико-вероятностная модель, логико-алгебраическая модель, режимы обработки запросов, результаты моделирования

Для цитирования: Петушков Г.В. Организация и исследование кластерных вычислительных систем с функциональной архитектурой, определяемой исполнимыми моделями. Автоматные исполнимые модели обработки информации. *Russian Technological Journal*. 2025;13(6):7–24. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-6-7-24>, <https://www.elibrary.ru/WGZANH>

Прозрачность финансовой деятельности: Автор не имеет финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

RESEARCH ARTICLE

Organization and study of cluster computing systems with functional architecture determined by executable models. Automata executable models of information processing

Grigory V. Petushkov[@]

MIREA – Russian Technological University, Moscow, 119454 Russia

[@] Corresponding author, e-mail: petushkov@mirea.ru

• Submitted: 04.08.2025 • Revised: 12.09.2025 • Accepted: 06.10.2025

Abstract

Objectives. An urgent task is to improve the functional architecture of cluster computing systems by introducing methodologies for creating software at the applied and intermediate levels based on formalized specifications. One such methodology is based on the use of automatic specifications for computer systems software. The complexity of resolving the problem is caused by the branching of the algorithms built, as well as the presence of cyclic sections. The execution time of the branched sections of the program and the number of cycles run depends on the type of conditions entered. In practice it can be determined using a detailed simulation model and analysis of the control program created on its basis. The aim of the work is to find approaches to the definition of functional architecture which can be applied practically at the main levels of the subject orientation of cluster computing systems.

Methods. The methods proposed and used are based on the concept of organization and research of cluster-type computing systems with a functional architecture as defined by executable automatic models.

Results. The paper proposes methods of constructing automatic and logical-probabilistic models of cluster computing systems and creating software tools based on them. The concept of the logical-probabilistic model “temporal probabilistic system of canonical equations (CES)” is introduced. This enables a visual formalization

to be obtained, as well as implementation of automatic models and work programs typical for cluster and other applications. It also significantly reduced the number of “incremental” additions when enumerating discrete time moments. The main feature of the new logical-probabilistic model is the preservation of the original CES in its basis.

Conclusions. The work concludes that the choice of the system and functional architecture of a computing cluster should be determined not so much by the peak characteristics of the communication equipment specified by the manufacturer, as by the actual indicators achieved at the level of user applications and cluster usage modes. It is also shown that executable automatic models can be applied at almost all levels of cluster computing systems subject orientation.

Keywords: cluster computing system, intermediate level application, functional architecture, finite automaton models, logical-probabilistic model, logical-algebraic model, query processing modes, simulation results

For citation: Petushkov G.V. Organization and study of cluster computing systems with functional architecture determined by executable models. Automata executable models of information processing. *Russian Technological Journal*. 2025; 13(6):7–24. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-6-7-24>, <https://www.elibrary.ru/WGZAHN>

Financial disclosure: The author has no financial or proprietary interest in any material or method mentioned.

The author declares no conflicts of interest.

ВВЕДЕНИЕ

Кластеризация – одно из самых современных направлений в области создания вычислительных систем. Появление кластерных вычислительных систем обусловлено прогрессом в области сетевых технологий, чаще всего локальных. При соединении машин в кластер объединение компьютеров производится при помощи сетевых технологий на базе шинной архитектуры или коммутатора, что обусловило увеличение числа приобретенных или арендованных в качестве облачных сервисов вычислительных кластеров [1]. По прогнозам ряда маркетинговых компаний ожидается, что рынок кластерных вычислений к 2032 г. вырастет до 102.4 млрд долларов¹.

Постоянно расширяется сфера применения кластеров при организации информационных и предметно ориентированных систем, используемых для сбора, обработки и последующего анализа информации. Вместе с тем ограниченность простых однородных систем кластеров усложняет создание систем, обеспечивающих высокий уровень структурно-функциональной динамики и эффективную проблемную ориентацию на основе разработки программного обеспечения промежуточного уровня *middleware*.

Интенсивное развитие приложений на основе машинного обучения и искусственного интеллекта определило необходимость обучения большого количества моделей. В настоящее время одним из самых мощных в мире является суперкомпьютерный кластер Colossus на базе графических процессоров Nvidia (Nvidia Corporation, США). Этот кластер теоретически может достичь производительности

около 497.9 эксафлопс (497900000 терафлопс), устанавливая новые стандарты в суперкомпьютерной мощности. Целью компании xAI (США) является увеличение числа графических ускорителей (GPU – graphics processing unit) в Colossus до 1 миллиона в ближайшие годы². В настоящее время суперкластер xAI начал работать в режиме обучения системы искусственного интеллекта большой языковой модели (LLM – large language model) с использованием более двухсот тысяч графических процессоров Nvidia H100, H200 и GB200, оптимизированных для решения задач глубокого обучения нейронных сетей. Сеть кластера основана на высокоскоростном коммутаторе Nvidia Spectrum-X Ethernet с пропускной способностью до 800 Гбит/с³.

Функциональная архитектура вычислительных кластеров основана на согласованной работе следующих компонент: система управления потоком работ; система мониторинга кластера; библиотеки для параллельной работы; средства для управления кластером; глобальное пространство процесса, связывающего воедино все узлы кластера; система управления ресурсами; сетевая (возможно, параллельная) файловая система; сетевые, в т.ч. облачные сервисы, обеспечивающие доступ к кластеру многих

² Tyson M. Elon Musk fires up “the most powerful AI cluster in the world” to create the “world’s most powerful AI” by December – system uses 100000 Nvidia H100 GPUs on a single fabric. Published July 22, 2024. <https://www.tomshardware.com/pc-components/gpus/elon-musk-fires-up-the-most-powerful-ai-training-cluster-in-the-world-uses-100000-nvidia-h100-gpus-on-a-single-fabric>. Дата обращения 02.06.2025. / Accessed June 02, 2025.

³ Полмиллиона GPU за 4 месяца: как Маск строит самый мощный кластер в мире. <https://www.braintools.ru/article/18041>. Дата обращения 02.06.2025. [Half a million GPUs in four months: how Musk is building the world’s most powerful cluster. <https://www.braintools.ru/article/18041>. Accessed June 02, 2025 (in Russ.).]

¹ Cluster Computing Market Overview. <https://www.marketresearchfuture.com/reports/cluster-computing-market-1746>. Дата обращения 02.06.2025. / Accessed June 02, 2025.

пользователей [1]. Предполагается, что текущие проблемы в области высокопроизводительных вычислений сохраняют свою актуальность и в будущем: потребность в дальнейшем значительном увеличении параллелизма и скорости передачи данных; развитие архитектуры и технологии высокопроизводительных вычислений; тенденция к выходу рабочих процессов и вариантов использования за пределы центров обработки данных; существование множества мощных научных и промышленных факторов; переход от высокопроизводительных вычислений как изолированных систем к высокопроизводительным инфраструктурам [2].

Важный шаг в развитии науки и промышленности связан с разработкой и внедрением суперкомпьютера с AI-способностями «ELBJUWEL» (AI – artificial intelligence, искусственный интеллект)⁴. Усилия разработчиков направлены на создание уникальной инновационной платформы, которая объединит экспертизу в области AI и высокопроизводительных вычислений. Описанию потребностей в высокопроизводительных вычислениях при решении задач машинного обучения посвящены работы [3–5].

Следующей проблемой, с которой сталкиваются суперкомпьютерные центры, является неэффективное использование ресурсов для высокопроизводительных вычислений при решении некоторых вычислительных задач. Такие задачи могут блокировать ценные вычислительные ресурсы и замедлять вычисления других пользователей. Для решения этой проблемы в Национальном исследовательском университете «Высшая школа экономики» для высокопроизводительного вычислительного кластера «сHARISMa» разработана система мониторинга задач, автоматически формирующая выводы об их производительности [6]. Этим университетом накоплен богатый опыт использования суперкомпьютерного комплекса на базе кластера «сHARISMa» при решении задач различными категориями пользователей. Среди этих задач, например, задачи поиска, анализа и прогнозирования данных в социальных сетях [7], исследование моделей машинного обучения для прогнозирования рисков основных сердечно-сосудистых событий у пациентов с инфарктом миокарда и различными генотипами [8] и многие другие.

Дополнительные сведения о существующих программных пакетах в кластерных системах приведены в работах [9–11].

К российским кластерным проектам относятся суперкомпьютер MBC-100K, установленный в Межведомственном суперкомпьютерном центре Российской академии наук,

и суперкомпьютер «Ломоносов», установленный в Научно-исследовательском вычислительном центре Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова в рамках проекта СКИФ⁵. Суперкомпьютеры «Червоненкис», «Галушкин» и «Ляпунов», созданные компанией «Яндекс», также имеют кластерную архитектуру⁶. Они работают на графических ускорителях Nvidia A100 (GPU Nvidia A100 с тензорными ядрами) с системой связи InfiniBand на базе коммутаторов Mellanox (Израиль)⁷.

Многие вопросы, связанные с вычислительными ресурсами, необходимыми рядовым пользователям и организациям, возникают в связи с организацией и использованием вычислительных кластеров. Поэтому обзор литературы необходимо дополнить анализом некоторых характерных зарубежных источников. В работах [12, 13] отмечаются недостатки кластерных вычислительных систем. Некоторые из этих недостатков находятся в противоречии с преимуществами, что объясняется спецификой предприятий и пользователей: кластерами трудно управлять без опыта; при большом размере кластера будет трудно обнаружить неисправность.

Проблема при поиске неисправности возникает, поскольку потребитель имеет дело с единой сущностью, и при обнаружении неисправности неясно, с каким из компонентов связана проблема.

К недостаткам кластерных вычислительных систем вычислений может быть также отнесено следующее обстоятельство [14]: не всем потребителям кластеры подходят для коммерческого и бизнес-использования, поскольку требуют специальных навыков программирования, знания систем и языков программирования, которые не используются широко в коммерческих целях. От персонала требуется обладание специальными техническими навыками для работы и администрирования.

⁵ Центр коллективного пользования сверхвысокопроизводительными вычислительными ресурсами МГУ имени М.В. Ломоносова. <https://parallel.ru/cluster>. Дата обращения 02.06.2025. [Center for Collective Use of Ultra-High-Performance Computing Resources at Lomonosov Moscow State University. <https://parallel.ru/cluster>. Accessed June 02, 2025 (in Russ.).]

⁶ Чернявцева В. Яндекс создал три мощнейших в России суперкомпьютера. <https://nplus1.ru/news/2021/11/15/chervonenkis>. Дата обращения 02.06.2025. [Chernyavtseva V. Yandex has created three of Russia's most powerful supercomputers. <https://nplus1.ru/news/2021/11/15/chervonenkis>. Accessed June 02, 2025 (in Russ.).]

⁷ Россия внезапно ворвалась в мировой топ самых мощных суперкомпьютеров. https://www.cnews.ru/news/top/2021-11-16_rossijskie_superkompyutery. Дата обращения 02.06.2025. [Russia suddenly burst into the world's top most powerful supercomputers. https://www.cnews.ru/news/top/2021-11-16_rossijskie_superkompyutery. Accessed June 02, 2025 (in Russ.).]

⁴ ParTec AG: *A More Efficient Supercomputer for the AI Revolution*. Frankfurt, Bloomberg; 2024. 43 p.

Большое число рассмотренных вычислительных кластеров средней и низкой стоимости создается на основе разного рода коммутаторов, в т.ч. коммутаторов Infiniband и Ethernet. В представленном на рис. 1 примере организации вычислительного кластера и его инфраструктуры трафики различных локальных сетей могут пересекаться, если это не затрудняет выполнение основной функции узлов кластера. Узлы кластера N_1-N_{16} обрабатывают пользовательскую нагрузку; U_1, U_2 – управляющие узлы, отслеживающие состояние аппаратного и программного обеспечения кластера и принимающие действия по его перенастройке в связи с каким-либо событием, происходящим в кластере; M_1, M_2 – общие резервные хранилища, в которых хранится информация, доступная всем узлам кластера и используемая ими для доступа к общим данным, в т.ч. к данным о вышедшем из строя узле, которыми может воспользоваться резервный узел; S_1, S_2 – серверы, доступные по общедоступной и клиентской сетям. Коммутатор уровня L_2 частной сети осуществляет обмен данными между узлами кластера, используя аппаратные MAC⁸-адреса. По частной сети передаются командные сообщения, используемые узлами для проверки работоспособности, перенастройки и синхронизации кластера.

Коммутатор уровня L_3 общедоступной сети осуществляет обмен данными, используя межсетевые IP⁹ или аппаратные MAC-адреса. На уровне общедоступной сети виртуализируется доступ к кластеру, как к единой системе. Локальная сеть, построенная на основе коммутатора уровня L_{2+} с добавленными функциями, обеспечивает доступ клиентов к кластеру. Наличие в инфраструктуре вычислительного кластера нескольких сетевых коммутаторов позволяет использовать три основных вида сетей: коммуникационный, транспортный и сервисный [15].

Для решения поставленных в настоящей работе актуальных задач – организации эффективной функциональной архитектуры кластеров за счет создания нового обеспечения прикладного класса и класса *middleware* важно ориентироваться на имеющееся развитое обеспечение: сервисы обработки сообщений – *message-oriented middleware*, сервисы, обеспечивающие аналитику больших данных и подключение к хранилищу данных – *data warehousing and big data analytics* и протоколы и продукты, обеспечивающие межпроцессные взаимодействия – *interprocess communications* [15].

⁸ Media access control – контроль доступа к среде.

⁹ Internet protocol address – уникальный числовой идентификатор устройства.

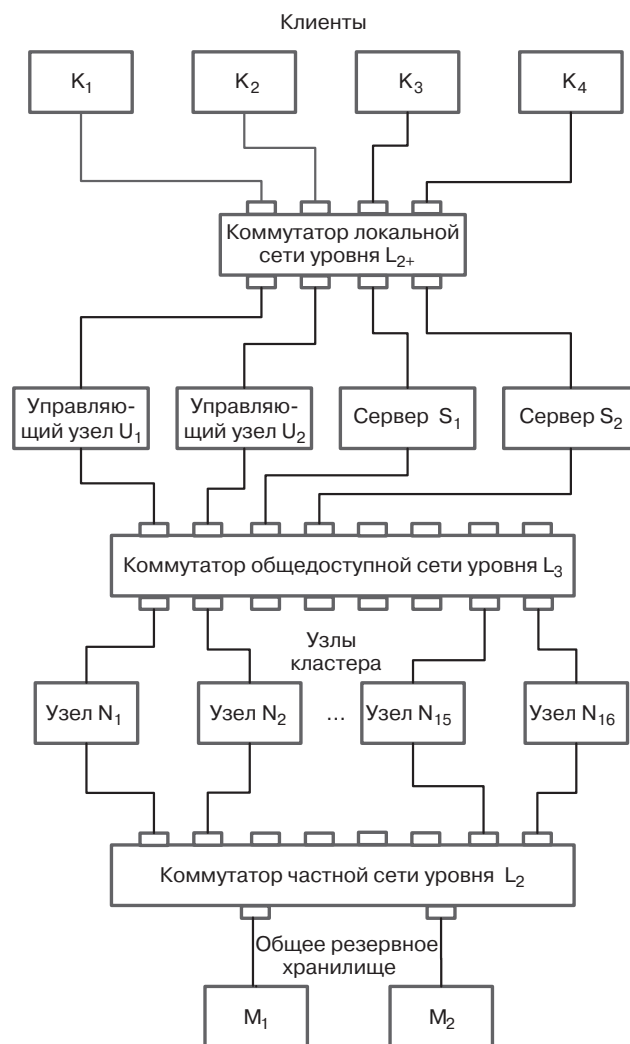


Рис. 1. Вариант организации вычислительного кластера и его инфраструктуры

1. АВТОМАТНЫЕ МОДЕЛИ КЛАСТЕРНЫХ ПРИЛОЖЕНИЙ ПРОМЕЖУТОЧНОГО УРОВНЯ

Вычислительная система в работе [1] определяется на абстрактном уровне как совокупность работающих во времени функциональных устройств. При оценке качества работы предлагается абстрагироваться от содержательной части выполняемых операций и учитывать работу функциональных устройств в системе отсчета времени. Поэтому для анализа функционирования вычислительных кластеров будет полезно строить формальные модели. Кроме того, как следует из курса «Вычислительное дело и кластерные системы» [15], «на практике не столько важны указанные производителем пиковые характеристики коммуникационной аппаратуры, сколько реальные показатели, достигаемые на уровне приложений пользователей». Из этого высказывания следует, что выбор системной и функциональной архитектуры вычислительного кластера должен

определяться в основном приложениями и режимами использования кластера, в т.ч. реализуемыми на промежуточном уровне *middleware*. Поэтому условно можно считать часть прикладного программного обеспечения и программного обеспечения промежуточного уровня системным программным обеспечением, определяющим функциональность всего кластера компьютеров.

Главным эффектом от интерпретации предлагаемых моделей является возможность их использования в качестве формализованных спецификаций при описании распараллеленных процессов в кластерных вычислительных системах и сетях на уровне задач, данных, алгоритмов и машинных инструкций, т.е. на основных уровнях абстракции – от концептуального представления до деталей реализации. Выбор приведенных далее примеров моделей, основанных на схемах программ, базируется на соблюдении высокого уровня общности: алгоритмы должны содержать все базовые алгоритмические конструкции, позволяющие реализовывать последовательности, ветвления и циклы; должна быть предусмотрена возможность переинтерпретации видов распараллеливания – на уровне задач, на уровне данных, на уровне алгоритмов и на уровне команд машинного уровня с возможностью чередования последовательных однопотоковых частей программы с многопотоковыми параллельными участками.

Однако исследовать реальную работу приложений можно только на работающем кластере. Разрешить проблему на предварительных этапах с меньшими затратами усилий и средств возможно при помощи использования исполнимых формальных моделей, на основе которых следует построить имитационные модели работы кластера. Указанные модели могут включать характерные или упрощенные фрагменты реальных приложений.

На данном этапе построения моделей не рассматривается семантика данных и операций, т.е. для сохранения общности моделей значения переменных и символов операций не интерпретированы. Предполагается, что методы создания и интерпретации моделей можно далее использовать при создании действующих интерпретированных приложений в случае, когда кластер будет введен в эксплуатацию. В этом случае формальные модели могли бы играть роль формализованных спецификаций.

Удобными моделями для последующего использования в этих целях являются: язык граф-схем алгоритмов (ГСА), конечные автоматы и логико-алгебраические модели на основе логики предикатов первого порядка. В настоящем подразделе предлагается использовать модель конечного

частичного автомата Мура¹⁰ [16]. Эта модель также хорошо известна по работам в области микропрограммирования [17, 18]. На рис. 2 и 3 представлены выбранные для иллюстрации создания моделей приложения примеры ГСА: ГСА₁ и ГСА₂. Основные критерии для выбора – обычные требования корректности ГСА и наличие последовательностей операторов и ветвлений. ГСА₁ (рис. 2) содержит операторные вершины (далее просто операторы) $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{16}, A_{27}, A_K$. Кроме того, ГСА₁ содержит параллельные фрагменты, представленные структурированными операторами C_1, C_2, \dots, C_8 , каждому из которых соответствует «внутренняя» копия ГСА₂ (рис. 3); каждая копия, или клон, содержит локальные операторы $A_{17}, A_{18}, A_{19}, \dots, A_{25}, A_{26}$.

Обе ГСА содержат условные вершины (далее – просто логические условия) x_1, x_2, \dots, x_5 (ГСА₁) и x_6, x_7, \dots, x_{10} (ГСА₂). Символы условий рассматриваются как имена унарных предикатов. Значения логических условий – 0 (истина, true) или 1 (ложь, false) вычисляются по завершении выполнения операторов, в т.ч. операторов ввода входных условий (входных сигналов, или входных символов, частичного автомата).

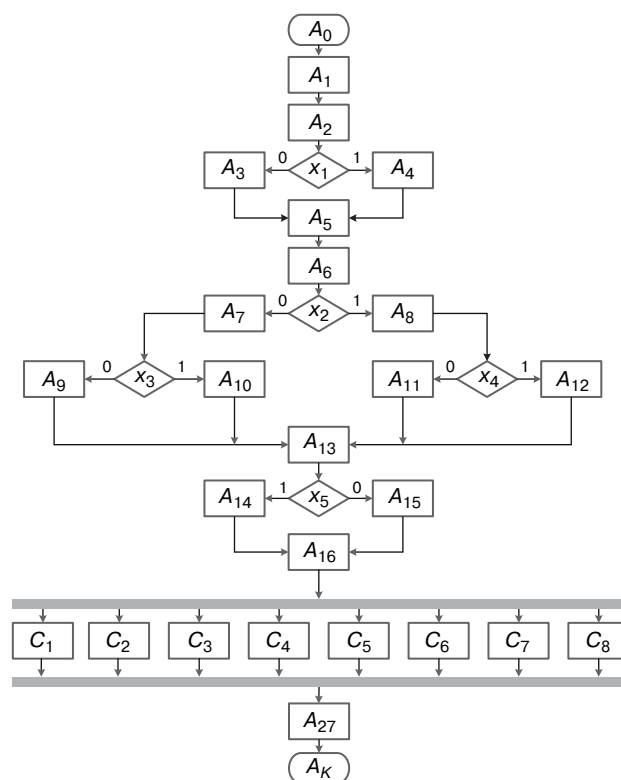


Рис. 2. Граф-схема алгоритма ГСА₁ работы приложения для кластера

¹⁰ Гуренко В.В. *Введение в теорию автоматов*. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013. <https://rusist.info/book/10028635?ysclid=mf5p2z07v616437010>. Дата обращения 02.06.2025. [Gurenko V.V. *Introduction to Automata Theory*. Moscow: Bauman Moscow State Technical University; 2013. <https://rusist.info/book/10028635?ysclid=mf5p2z07v616437010>. Accessed June 02, 2025 (in Russ.).]

Построение и исследование автоматных моделей будут проведены для методов SPMD (Single Program, Multiple Data – одиночная («клонированная») программа, множественный поток данных). В дальнейших подразделах будут построены другие исполнимые модели на основе логико-алгебраического подхода: MPMD (Multiple Programs, Multiple Data – множественный поток программ, множественный поток данных) и MPSD (Multiple Programs, Single Data – множественный поток программ, одиночный поток данных) [1]. Последний метод больше всего подходит к конвейерной обработке данных. Все эти методы используются для достижения параллелизма. Существует ряд вариантов реализации перечисленных методов, используемых в вычислительных кластерах.

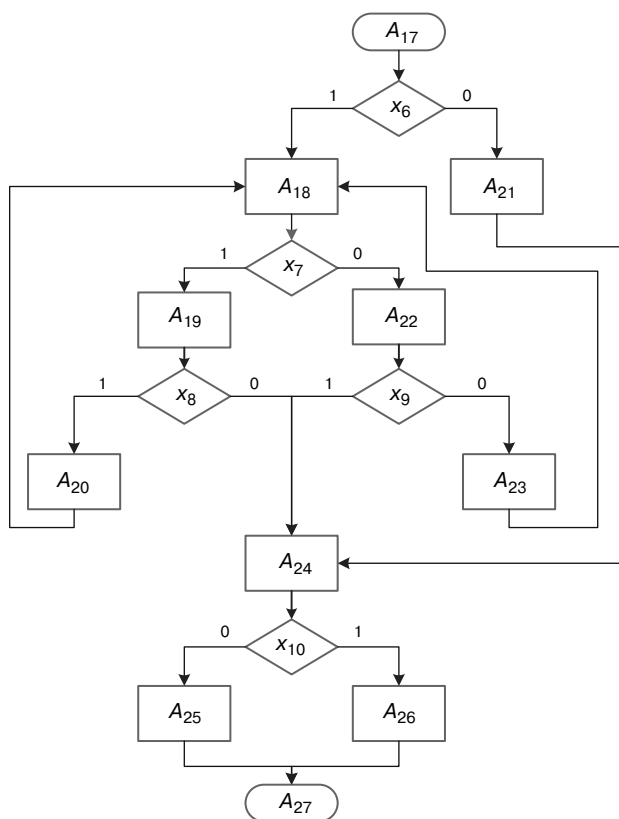


Рис. 3. Граф-схема алгоритма ГСА₂ для одной копии параллельного участка приложения для кластера

В качестве начального языка для задания частичных автоматов выбраны системы канонических уравнений (СКУ) [18, 19], которыми описываются переходы из одних состояний в другие. Допускаемые параллельные переходы соответствуют, например, представлению параллельных участков в модифицированных логических схемах алгоритмов, известному из работ по микропрограммированию [20]. В этих схемах параллельные участки считаются частными логическими схемами алгоритмов и допускают простую переинтерпретацию в графическую форму ГСА. Языки параллельных ГСА использовались

также в работах [21, 22]. Структуризация состояний иерархических автоматов была предложена ранее в ряде работ [23–25].

В предлагаемых далее автоматных СКУ-моделях использованы следующие понятия. Операторам поставлены во взаимно однозначное соответствие так называемые частные события, представленные унарными предикатами вида $A_i(t)$, определенными на множестве значений дискретного времени t . Частичные входные переменные, или входные условия, представлены унарными предикатами вида $x_j(t)$, также определенными на множестве значений дискретного времени t . Введены также унарные предикаты вида $z_k(t)$, которые могут принимать истинные значения только после того, как соответствующие им события вида $A_k(t)$ уже произошли, что соответствует тому факту, что оператор A_k завершил свою работу. Таким образом, при $z_k(t) = 0$ (ложь) событие $A_k(t)$ сохраняется, а при $z_k(t) = 1$ (истина) – не сохраняется. Первое условие для события $A_k(t)$ позволяет продлить его выполнение, а при выполнении второго, противоположного условия, событие $A_k(t)$ завершается. Условию зарождения события соответствует переход из предшествующего ему события. Остальные особенности построения СКУ удобно пояснить на примерах перехода от ГСА к СКУ.

На рис. 4 представлен граф переходов состояний автоматной модели последовательного приложения, построенный путем перехода от ГСА₁ и ГСА₂; выделен участок C_0 , предназначенный для последующего клонирования при переходе к моделированию приложения, соответствующего режиму работы кластера SPMD. Данный граф, как потребуются в дальнейшем, может также рассматриваться как последовательная композиция двух частичных автоматов: первому автомату соответствуют состояния 1–16, а второму – 17–27.

На рис. 2 и 3 использованы общепринятые для ГСА обозначения для логических условий: x_1, x_2, \dots, x_{10} , также рассматриваемые в языке начального уровня СКУ для задания частичных конечных автоматов как имена унарных предикатов. На рис. 4 и далее на рис. 5 использованы другие имена для трех входных переменных, также удобные в дальнейшем при тестировании приложений при помощи анализа частичных автоматов: x (значение $x = \text{true}$ после окончания работы любого оператора без вычисления или без ввода значения условия), nx (значение $nx = \text{true}$, если после окончания работы оператора вычислено или введено ложное значение условия, в противном случае $nx = \text{false}$), ux (значение $ux = \text{true}$, если после окончания работы оператора вычислено или введено истинное значение условия, в противном случае $ux = \text{false}$). Места вычисления и проверки этих переменных однозначно

определяются местом оператора, что при необходимости может быть использовано для обычной нумерации логических условий x_1, x_2, \dots, x_{10} и использовано далее при составлении СКУ и логико-алгебраических выражений. На рис. 4 первое состояние обозначено как начальное, стартовое (Start), а 28-е – как конечное, завершающее (End).

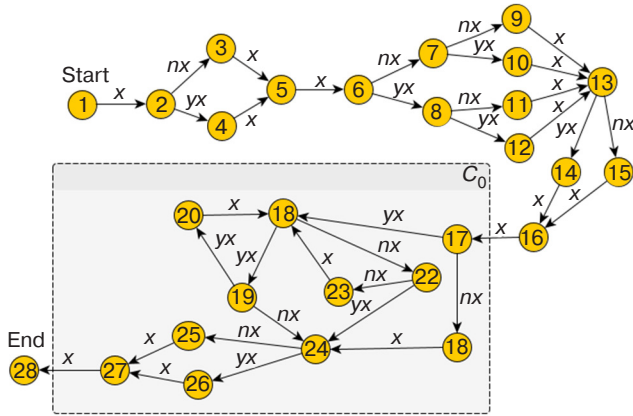


Рис. 4. Граф переходов состояний автоматной модели последовательного приложения; выделен участок C_0 , предназначенный для последующего клонирования при переходе к режиму SPMD

Систему канонических уравнений возможно считать системой продукционных правил, предназначенной для представления знаний в автоматных моделях. Продукции возможно использовать для представления знаний, которые могут принимать формы правил вида «*посылка* → *заключение*, *условие* → *действие*». Левая часть правила называется антецедентом, правая – консеквентом. Антецедент – это посылка правила (условная часть), состоит из элементарных высказываний, использующих логические символы И, ИЛИ, НЕ; консеквент (заключение) включает одно или несколько предложений, которые выражают либо некоторый факт, либо указание на определенное действие, подлежащее исполнению [26–28]. Набор продукций образует *продукционную систему*, для которой задаются специальные процедуры выбора продукций и выполнение той или иной продукции из числа выбранных.

Отличительной особенностью СКУ, рассматриваемой в качестве разновидности продукционной системы, является размещение условной части (антецедента) справа, а действия, или заключения (консеквента) – слева и, следовательно, направление вывода – справа налево. Это по большей части связано с теорией и практикой синтеза микропрограммных автоматов и с представлением наряду с каноническими уравнениями функций возбуждения элементарных автоматов (D -триггеров, или элементов задержек) при унитарном кодировании состояний конечного частичного автомата [17, 18, 29].

В дальнейшем понятие «продукция» будет использовано также и при построении логико-алгебраических моделей систем кластерного типа.

2. АВТОМАТНАЯ СКУ-МОДЕЛЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ ЧАСТИ ПРИЛОЖЕНИЯ

На рис. 4 представлен граф переходов состояний автоматной модели последовательного приложения. Часть состояний $a_1, a_2, \dots, a_{16}, a_{28}$ получена путем разметки состояний автомата Мура на ГСА₁, представленной на рис. 2. Остальная часть состояний $a_{17}, a_{18}, \dots, a_{27}$ принадлежит подграфу C_0 , который построен путем разметки состояний автомата Мура на ГСА₂.

На данном этапе рекуррентные предикатные уравнения СКУ SP_{Seq} для ГСА₁ составлены без учета структурированных операторов C_1, C_2, \dots, C_8 и, соответственно, без структурированных состояний $a_{17}, a_{18}, \dots, a_{27}$ автомата, т.е. модель пока охватывает только операторы A_0, A_1, \dots, A_{16} :

$$\begin{aligned} A_0(t+1) &= A_0(t) \& \neg x_0(t) \vee x_{begin}(t); \\ A_1(t+1) &= A_0(t) \& x_0(t) \vee A_1(t) \& \neg z_1(t); \\ A_2(t+1) &= A_1(t) \& z_1(t) \vee A_2(t) \& \neg z_2(t); \\ A_3(t+1) &= A_2(t) \& z_2(t) \& \neg x_1(t) \vee A_3(t) \& \neg z_3(t); \\ A_4(t+1) &= A_2(t) \& z_2(t) \& x_1(t) \vee A_4(t) \& \neg z_4(t); \\ A_5(t+1) &= A_3(t) \& z_3(t) \vee A_4(t) \& z_4(t) \vee A_5(t) \& \neg z_5(t); \\ A_6(t+1) &= A_5(t) \& z_4(t) \vee A_6(t) \& \neg z_6(t); \\ A_7(t+1) &= A_6(t) \& z_6(t) \& \neg x_2(t) \vee A_7(t) \& \neg z_7(t); \\ A_8(t+1) &= A_6(t) \& z_6(t) \& x_2(t) \vee A_8(t) \& \neg z_8(t); \\ A_9(t+1) &= A_7(t) \& z_7(t) \& \neg x_3(t) \vee A_9(t) \& \neg z_9(t); \\ A_{10}(t+1) &= A_7(t) \& z_7(t) \& x_3(t) \vee A_{10}(t) \& \neg z_{10}(t); \\ A_{11}(t+1) &= A_8(t) \& z_8(t) \& \neg x_4(t) \vee A_{11}(t) \& \neg z_{11}(t); \\ A_{12}(t+1) &= A_8(t) \& z_8(t) \& x_4(t) \vee A_{12}(t) \& \neg z_{12}(t); \\ A_{13}(t+1) &= A_9(t) \& z_9(t) \vee A_{10}(t) \& z_{10}(t) \vee A_{11}(t) \& z_{11}(t) \vee A_{12}(t) \& z_{12}(t) \vee A_{13}(t) \& \neg z_{13}(t); \\ A_{14}(t+1) &= A_{13}(t) \& z_{13}(t) \& x_5(t) \vee A_{14}(t) \& \neg z_{14}(t); \\ A_{15}(t+1) &= A_{13}(t) \& z_{13}(t) \& \neg x_5(t) \vee A_{15}(t) \& \neg z_{15}(t); \\ A_{16}(t+1) &= A_{14}(t) \& z_{14}(t) \vee A_{15}(t) \& z_{15}(t) \vee A_{16}(t) \& \neg z_{16}(t), \end{aligned}$$

где $x_{begin}(t)$ – входная переменная («сигнал»).

Копии (или клоны) модуля приложения, составленного по СКУ SP_{Seq} для ГСА₁, загружаются на все вычислительные узлы кластера и выполняются в параллельном режиме, обрабатывая одни и те же данные или осуществляют ввод однотипных данных. Автоматная модель предполагает различные времена исполнения событий, соответствующих операторам приложения. При дальнейшем описании уравнений СКУ термины «событие» и «состояние» для сокращения описания будут рассматриваться как синонимы.

Ниже приведены описания некоторых ключевых уравнений из приведенной СКУ. Начальное уравнение имеет следующий вид:

$$A_0(t+1) = A_0(t) \& \neg x_0(t) \vee x_{\text{begin}}(t).$$

В соответствии с этим уравнением при появлении истинного значения входной переменной $x_{\text{begin}}(t) = \text{true}$ в автомате в следующем такте устанавливается начальное событие $A_0(t+1) = \text{true}$, что соответствует его зарождению. Это событие сохраняется до тех пор, пока истинно условие его сохранения $A_0(t) \& \neg x_0(t)$ при $A_0(t+1) = \text{true}$ и $x_0(t) = \text{false}$. Далее, при поступлении входного сигнала $x_0(t) = \text{true}$ в автомате формируется истинное условие $A_0(t) \& x_0(t)$ зарождения нового события $A_1(t+1)$:

$$A_1(t+1) = A_0(t) \& x_0(t) \vee A_1(t) \& \neg z_1(t).$$

Это событие сохраняется до тех пор, пока истинно условие $A_1(t) \& \neg z_1(t)$ его сохранения. Оно завершится ($A_1(t+1) = \text{false}$, т.е. это высказывание станет ложным) при выработке оператором A_1 признака $z_1(t) = \text{true}$ окончания своей работы. Как видно из рекуррентных предикатных уравнений данной СКУ SP_{Seq} , событие установления истинности antecedenta (правого высказывания) происходит в фиксированный момент времени t , а событие установления истинности консеквента (левого высказывания) происходит в следующий момент времени $(t+1)$.

3. АВТОМАТНАЯ СКУ-МОДЕЛЬ РАБОТЫ ОДНОГО ИЗ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ УЧАСТКОВ (КЛОНОВ) ПРИЛОЖЕНИЯ

На рис. 4 представлен граф переходов состояний автоматной модели последовательного приложения; выделен участок C_0 , предназначенный для последующего клонирования при переходе к режиму SPMD.

Рекуррентные предикатные уравнения СКУ MD_{Clon} для ГСА₂:

$$\begin{aligned} A_{17}(t+1) &= A_{16}(t) \& z_{16}(t) \vee A_{17}(t) \& \neg z_{17}(t); \\ A_{18}(t+1) &= A_{17}(t) \& z_{17}(t) \& x_6(t) \vee A_{20}(t) \& \\ &\quad \& z_{20}(t) \vee A_{23}(t) \& z_{23}(t) \vee A_{18}(t) \& \neg z_{18}(t); \\ A_{19}(t+1) &= A_{18}(t) \& z_{18}(t) \& x_7(t) \vee A_{19}(t) \& \neg z_{19}(t); \\ A_{20}(t+1) &= A_{19}(t) \& z_{19}(t) \& x_8(t) \vee A_{20}(t) \& \neg z_{20}(t); \\ A_{21}(t+1) &= A_{17}(t) \& z_{17}(t) \& \neg x_6(t) \vee A_{21}(t) \& \neg z_{21}(t); \\ A_{22}(t+1) &= A_{18}(t) \& z_{18}(t) \& \neg x_7(t) \vee A_{22}(t) \& \neg z_{22}(t); \\ A_{23}(t+1) &= A_{22}(t) \& z_{22}(t) \& \neg x_9(t) \vee A_{23}(t) \& \neg z_{23}(t); \\ A_{24}(t+1) &= A_{19}(t) \& z_{19}(t) \& \neg x_8(t) \vee A_{22}(t) \& z_{22}(t) \& \\ &\quad \& x_9(t) \vee A_{21}(t) \& \neg z_{21}(t) \vee A_{24}(t) \& \neg z_{24}(t); \\ A_{25}(t+1) &= A_{24}(t) \& z_{24}(t) \& \neg x_{10}(t) \vee A_{25}(t) \& \neg z_{25}(t); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{26}(t+1) &= A_{24}(t) \& z_{24}(t) \& x_{10}(t) \vee A_{26}(t) \& \neg z_{26}(t); \\ A_{27}(t+1) &= A_{25}(t) \& z_{25}(t) \vee A_{26}(t) \& z_{26}(t) \vee A_{27}(t) \& \\ &\quad \& \neg z_{27}(t). \end{aligned}$$

Совместно используемые автоматная СКУ-модель SP_{Seq} и одна копия СКУ-модели MD_{Clon} , взятые вместе, задают единую автоматную модель, обозначенную как $SP_{\text{Seq}} * MD_{\text{Clon}}$, где символ «*» обозначает операцию объединения двух СКУ в одну общую. Граф переходов состояний для этой модели представлен на рис. 4. Другая интерпретация, как было указано ранее, позволяет считать граф переходов состояний $SP_{\text{Seq}} * MD_{\text{Clon}}$ последовательной композицией частичных автоматов.

4. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО-ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ КОМПОЗИЦИЯ АВТОМАТОВ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ РАБОТУ КОМПЬЮТЕРОВ КЛАСТЕРА

Граф-схема алгоритма ГСА₁ на рис. 2 содержит параллельные участки, обозначенные сокращенно как структурированные операторы C_1, C_2, \dots, C_8 . При полном одноуровневом представлении каждый из этих операторов заменяется на ГСА₂ на рис. 3 и при программной реализации выполняется независимо от других на «своем» компьютере кластера. Полная сетевая СКУ-модель последовательно-параллельной сети автоматов представлена выражением следующего вида:

$$SP_{\text{Seq}} * (\text{ParReplicate}(1..8)MD_{\text{Clon}}),$$

где $\text{Replicate}(1..8)$ – включение СКУ в общую систему 8 раз подряд, Par – указание, что эти реплики надо выполнять параллельно.

Граф переходов состояний для данной сети частичных автоматов со структурированными состояниями C_1 – C_8 представлен на рис. 5. При построении сетевой СКУ-модели необходимо составить уравнения, включающие структурированные события. Каждое структурированное событие представляет вложенный частичный автомат. Использование иерархических конечных автоматов является принципиально важным способом проектирования программного обеспечения и соответствует понятию «подпрограмма».

Достоинством метода формализации алгоритмов с использованием СКУ является компактное логическое описание функций переходов [16, 17]. Аналогично структурированным состояниям C_1 – C_8 вводятся одноименные структурированные события. «Вложением» в каждое структурированное событие являются уже составленные автоматные СКУ MD_{Clon} .

Зарождение и продолжение событий C_1 – C_8 (инициирование и параллельная работа независимых друг от друга программных модулей) описываются следующей СКУ S_C :

$$\begin{aligned} C_1(t+1) &= A_{16}(t) \& z_{16}(t) \vee C_1(t) \& \neg w_1(t); \\ C_2(t+1) &= A_{16}(t) \& z_{16}(t) \vee C_2(t) \& \neg w_2(t); \\ C_3(t+1) &= A_{16}(t) \& z_{16}(t) \vee C_3(t) \& \neg w_3(t); \\ C_4(t+1) &= A_{16}(t) \& z_{16}(t) \vee C_4(t) \& \neg w_4(t); \\ C_5(t+1) &= A_{16}(t) \& z_{16}(t) \vee C_5(t) \& \neg w_5(t); \\ C_6(t+1) &= A_{16}(t) \& z_{16}(t) \vee C_6(t) \& \neg w_6(t); \\ C_7(t+1) &= A_{16}(t) \& z_{16}(t) \vee C_7(t) \& \neg w_7(t); \\ C_8(t+1) &= A_{16}(t) \& z_{16}(t) \vee C_8(t) \& \neg w_8(t). \end{aligned}$$

Каждое из событий C_1 – C_8 зарождается при истинности составного высказывания $A_{16}(t) \& z_{16}(t)$, т.е. является следствием успешного завершения события A_{16} . Каждое из этих событий C_i сохраняется, пока не будет выполнено завершающее условие $w_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, 8$. События C_1 – C_8 начинаются одновременно, но не обязательно заканчиваются одновременно, поскольку завершающие условия могут не зависеть друг от друга. Однако переход к событию A_{28} должен произойти только после завершения всех событий C_1 – C_8 . Поэтому далее в СКУ-модели должны следовать события, определяющие барьерную синхронизацию и состоящие в ожидании завершения событий C_1 – C_8 в каждой из ветвей и последующего зарождения и сохранения событий-индикаторов D_1 – D_8 завершения работы всех ветвей.

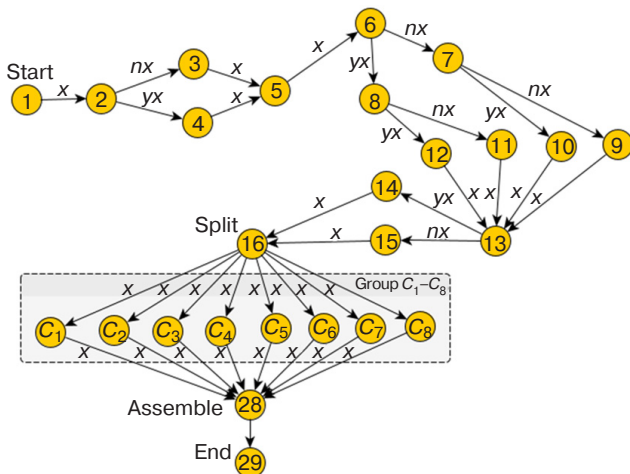


Рис. 5. Последовательно-параллельная сеть автоматов с вложенными состояниями выполнения приложения в кластере в режиме обработки SPMD

Система канонических уравнений S_D , описывающая зарождение и сохранение этих событий, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} D_1(t+1) &= C_1(t) \& w_1(t) \vee D_1(t) \& \neg D_9(t); \\ D_2(t+1) &= C_2(t) \& w_2(t) \vee D_2(t) \& \neg D_9(t); \\ D_3(t+1) &= C_3(t) \& w_3(t) \vee D_3(t) \& \neg D_9(t); \\ D_4(t+1) &= C_4(t) \& w_4(t) \vee D_4(t) \& \neg D_9(t); \\ D_5(t+1) &= C_5(t) \& w_5(t) \vee D_5(t) \& \neg D_9(t); \\ D_6(t+1) &= C_6(t) \& w_6(t) \vee D_6(t) \& \neg D_9(t); \\ D_7(t+1) &= C_7(t) \& w_7(t) \vee D_7(t) \& \neg D_9(t); \\ D_8(t+1) &= C_8(t) \& w_8(t) \vee D_8(t) \& \neg D_9(t). \end{aligned}$$

Следующее единственное уравнение, обозначенное дополнительно как система СКУ D_9 , описывает ожидание наступления всех событий-индикаторов D_1 – D_8 завершения параллельной работы всех ветвей:

$$D_9(t+1) = D_1(t) \& D_2(t) \& D_3(t) \& D_4(t) \& D_5(t) \& D_6(t) \& D_7(t) \& D_8(t) \vee D_9(t) \& \neg v_9(t).$$

Уравнения, описывающие переход к завершающим событиям A_{28} , A_{29} и далее – к событию A_1 управляющего модуля, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} A_{28}(t+1) &= D_9(t) \& v_9(t) \vee A_{28}(t) \& \neg z_{28}(t); \\ A_{29}(t+1) &= A_{28}(t) \& z_{28}(t) \vee A_{29}(t) \& \neg z_{29}(t); \\ A_1(t+1) &= A_{29}(t) \& z_{29}(t) \vee A_1(t) \& \neg z_1(t). \end{aligned}$$

В целях использования уравнений для событий A_{28} и A_{29} в объединенном выражении для сети частичных автоматов, они обозначены как отдельные СКУ A_{28} и A_{29} соответственно.

Для реализации детализированной сетевой СКУ-модели выполнения приложения в кластере в режиме последовательно-параллельной обработки SPMD все уравнения необходимо объединить в следующей последовательности:

$$\text{SPMD: } SP_{\text{Seq}} * S_C * S_D * D_9 * A_{28} * A_{29},$$

причем инициирование описанных ранее параллельных реплик **ParReplicate(1..8)MD_{Clon}** осуществляется при наступлении событий C_1 – C_8 , определяемых подсистемой СКУ S_C , а завершение выполнения этих реплик происходит при наступлении событий D_1 – D_8 , определяемых подсистемой СКУ S_D . При работе реплик расширяется диапазон изменения переменной t , отсчитывающей системное время.

Результирующая общая СКУ-модель сети автоматов выполнения приложения в кластере в режиме последовательно-параллельной обработки SPMD относится к классу исполнимых моделей. Она легко программируется на алгоритмических языках, содержащих операторы передачи сообщений, а также на языке ассемблера для микроконтроллеров и языке

микропрограммирования. На ее основе построена имитационная модель, позволяющую исследовать функционирование кластерной системы на микроуровне.

Рассматриваемые в настоящей работе сети частичных конечных автоматов состоят из автоматов, моделирующих связанные интерфейсом передачи сообщений по входам и выходам программные модули приложения вычислительного кластера. Каждый модуль может принять сообщение на входе, передающее управление с данными, обработать его и передать управляющее сообщение с данными следующему модулю. Предполагается, что другие виды межмодульного взаимодействия в кластере не рассматриваются. Поэтому здесь не рассматриваются вопросы композиции автоматов и другие способы построения сложных автоматов из простых [30].

Автоматное программирование в настоящее время предлагается считать одной из технологий, в существенной степени сокращающей сроки составления программ и упрощающей их тестирование [31]. Системы канонических уравнений также позволяют создавать на их основе программы прикладного, промежуточного и системного уровней.

Как известно, к нарушению корректности ГСА приводят следующие и другие конфигурации: взаимная блокировка, неоднозначность, зависание. Поэтому задачу проверки граф-схемы на корректность предлагается решать на абстрактной модели взаимодействий алгоритмов – на сетях Петри [32, 33]. Методики перехода от параллельной ГСА к сети Петри приведены, например, в работах [21, 22].

5. ФОРМАЛИЗАЦИЯ ЛОГИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ МОДЕЛЕЙ СЕТЕЙ ЧАСТИЧНЫХ АВТОМАТОВ, СОЗДАВАЕМЫХ НА ОСНОВЕ ЯЗЫКА СКУ

Вводится понятие логико-вероятностной модели «темпоральная вероятностная СКУ» (ТВСКУ), которая позволит получить наглядную формализацию и реализацию автоматных моделей и рабочих программ, характерных для кластерных и других приложений, например, с конвейерным параллелизмом, и в существенной степени сократить число «инкрементных» сложений при перечислении моментов дискретного времени:

$$ТВСКУ = (СКУ_0, S, X, T_X, W_{TX}, T_Z, W_{TZ}),$$

где сетевая $СКУ_0$ – исходная, принятая в качестве начального языка описания сети конечных автоматов СКУ, ограниченная описанием частичных автоматов и характерным для кластерных и конвейерных

вычислительных систем в основном последовательным выполнением событий во времени; дополнительно допускается только простой параллелизм событий без взаимодействия копий ветвей $СКУ_0$, завершающихся барьерной синхронизацией ветвей; S – конечное множество событий $\{S_0(t), S_1(t), \dots, S_n(t)\}$, заданных унарными предикатами; X – конечное множество входных событий, заданных унарными предикатами $\{X_0(t), X_1(t), \dots, X_m(t)\}$; T_X – конечное множество случайных временных интервалов $\{t_{x0}, t_{x1}, \dots, t_{xm}\}$ от текущих моментов до моментов наступления входных событий X ; W_{TX} – конечное множество функций распределения вероятностей вида $P\{t_{xk} = i\} = p_{ki}, i = 0, 1, \dots, i_k$, случайных временных интервалов из множества T_X ; T_Z – конечное множество случайных временных интервалов $\{t_{z0}, t_{z1}, \dots, t_{zn}\}$ сохранения, т.е. выполнения событий из множества S ; W_{TZ} – конечное множество функций распределения вероятностей вида $P\{t_{zr} = j\} = p_{rj}, j = 0, 1, \dots, j_r$, случайных временных интервалов из множества T_Z .

Случайные величины (в программных реализациях – псевдослучайные величины) t_x и t_z принимают только целые неотрицательные значения. Рассматриваются только конечные распределения вероятностей целочисленных случайных величин. Возможно также использование целочисленных констант в качестве значений величин $t_{xk}, k = 0, 1, \dots, m$ и $t_{zr}, r = 0, 1, \dots, n$.

Структура приложения, содержащего последовательные и независимые параллельные секции, образующие сеть автоматов, может допускать более глубокий уровень вложенности, что характерно для большинства кластерных вычислительных систем.

Исходная неинтерпретируемость модели ТВСКУ позволяет применять ее на уровне программ, модулей программ, операторов, вплоть до уровня машинных команд и микропрограмм.

Общий подход к разработке статистической исполнимой модели кластерного приложения состоит в следующем. Используется метод организации последовательности событий, при реализации которого чередуются периоды зарождения событий с периодами сохранения событий. Пусть, например, для последовательной секции приложения, формализованной, например, системой СКУ SP_{Seq} , выполняются действия, заданные следующими тремя уравнениями:

$$\begin{aligned} A_2(t+1) &= A_1(t) \& z_1(t) \vee A_2(t) \& \neg z_2(t); \\ A_3(t+1) &= A_2(t) \& z_2(t) \& \neg x_1(t) \vee A_3(t) \& \neg z_3(t); \\ A_4(t+1) &= A_2(t) \& z_2(t) \& x_1(t) \vee A_4(t) \& \neg z_4(t). \end{aligned}$$

Как было определено при построении какого-либо уравнения, зарождение очередного события,

например, события $A_2(t + 1)$, происходит в момент времени $(t + 1)$. Для того, чтобы это событие состоялось в указанный момент времени, необходимо, чтобы в предыдущий момент времени t были истинны высказывания $A_1(t)$ и $z_1(t)$ – т.е. событие $A_1(t)$ выполнялось бы последний раз в этот момент, на что указывало бы появление истинного значения высказывания $z_1(t)$ – окончания действия события $A_1(t)$. С момента времени $(t + 1)$ начинается действие события $A_2(t + 1)$, которое сохраняется до тех пор, пока будет ложно высказывание $z_2(t)$. Появление истинного значения высказывания $z_2(t)$ приведет к тому факту, что составное высказывание $A_2(t) \& \neg z_2(t)$ станет ложным и условие сохранения события $A_2(t)$ выполняться не будет. В следующий момент времени событие $A_2(t)$ состоится последний раз, и при истинности высказывания $A_2(t) \& z_2(t) \& \neg x_1(t)$ в следующий момент времени $(t + 1)$ начнет выполняться (зародится) событие $A_3(t + 1)$. «Продлить» сохранение события $A_2(t)$ возможно, перейдя к отметке времени $t = t + t_{z2}$ его окончания, где значение временного интервала t_{z2} определяется при помощи датчика псевдослучайных чисел с заданным законом распределения. Действуя аналогично, можно отсрочить зарождение события $A_3(t + 1)$, отсрочив действие входной переменной $x_1(t)$ на величину интервала времени t_{x1} путем перехода к временной отметке события $t = t + t_{x1}$, соответствующего активизации переменной $x_1(t)$. Значение переменной t_{x1} задается датчиком псевдослучайных чисел. Составное высказывание $A_2(t) \& z_2(t) \& \neg x_1(t)$ станет истинным, и далее произойдет зарождение события $A_3(t + 1)$ в следующий момент времени $(t + 1)$. Сохранение события A_3 , зарождение и сохранение события A_4 происходят аналогично. Так, путем перехода от события к событию реализуется логико-вероятностная модель кластерного приложения.

На рис. 5 представлена сетевая автоматная модель выполнения приложения в кластере в режиме последовательно-параллельной работы SPMD. При принятом режиме работы независимых параллельных программ в параллельной секции режима SPMD возможно при разработке общей сетевой автоматной модели использовать независимые автоматные SKU-модели вида MD_{Clon} для представления структурированных событий $C_1 - C_8$.

6. РЕЗУЛЬТАТЫ СТАТИСТИЧЕСКИХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ С МОДЕЛЯМИ КЛАСТЕРНЫХ СИСТЕМ В ПАРАЛЛЕЛЬНО-ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОМ РЕЖИМЕ SPMD

На основании автоматных вероятностных SKU-моделей построены имитационные статистические модели выполнения приложений. В таблице

представлены численные значения коэффициента ускорения выполнения выполняемого приложения в режиме SPMD на вычислительном кластере, полученные на построенной имитационной модели. За ускорение, следуя [1], взято отношение времени выполнения приложения на одном узле $(t_{\text{посл}} + Nt_N)$ к сумме $(t_{\text{посл}} + t_N)$ времени выполнения того же приложения в параллельном режиме на всех N узлах кластера t_N и времени $t_{\text{посл}}$ однократного выполнения последовательного участка приложения:

$$k = (t_{\text{посл}} + Nt_N) / (t_{\text{посл}} + t_N).$$

Предполагалось, что исполнение параллельных участков происходит независимо друг от друга. Поскольку времена выполнения последовательного и распараллеливаемого участка заранее неизвестны, их статистические характеристики определяются путем выполнения статистического эксперимента. Поэтому в приведенной формуле $t_{\text{посл}}$ и t_N – это оценки математических ожиданий этих интервалов времени. При моделировании полагалось, что время работы каждого оператора распределено равномерно от 1 до 9 мс. Переходы по условиям равновероятны (по 0.5).

Результаты сведены в таблицу. Записи в заголовках столбцов означают, что коэффициент ускорения k вычислен при указанном значении времени $T = t_{\text{посл}}$, выраженном в единицах модельного времени (здесь – в миллисекундах, мс).

Таблица. Оценки коэффициента ускорения вычислений k , определенные при помощи статистических моделей

N	$T = 0$	$T = 10$	$T = 20$	$T = 30$	$T = 40$	$T = 50$
1	1	1	1	1	1	1
2	2	1.98	1.96	1.94	1.92	1.9
4	4	3.88	3.77	3.67	3.57	3.48
8	8	7.46	7.0	6.6	6.25	5.93
16	16	13.8	12.25	11.0	10.0	9.25
32	32	24.2	19.6	16.5	14.3	12.6

Примеры зависимостей коэффициента ускорения k от числа узлов в кластере иллюстрирует рис. 6.

При $T = 0$ последовательного участка нет, поэтому значения коэффициента ускорения равны числу задействованных узлов. С ростом значения T эффект от распараллеливания менее выражен, т.к. на результат вычисления коэффициента ускорения время выполнения последовательного участка оказывает большее влияние.

Сложность решения задачи вызвана разветвленностью выбранного алгоритма, а также наличием

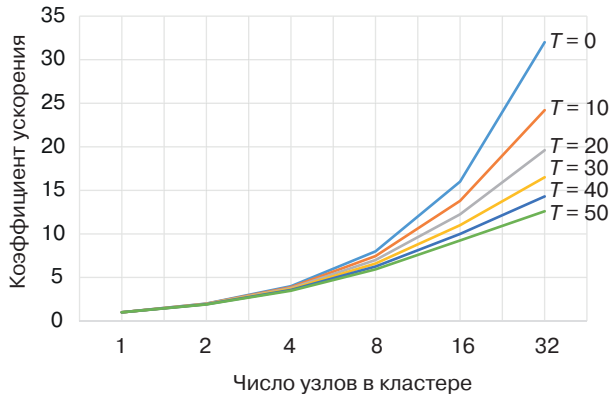


Рис. 6. Результаты статистических экспериментов с моделями кластера, выполняющего последовательно-параллельное приложение $L_{seq} * ParReplicate(i = 1..8)C_i$

циклов. Время выполнения разветвленных участков программы и число проходимых циклов зависят от вида вводимых условий и на практике могут быть определены при помощи детальной имитационной модели. Как автоматные СКУ-модели, так и модели на основе логико-алгебраических выражений являются моделями исполнимого типа, потому что для исследования свойств и динамического поведения моделируемого объекта нужно модель «выполнить», т.е. запустить ее на компьютере и исследовать процессы смены событий.

Вычисление коэффициента ускорения k проводилось на основе результатов статистического моделирования. Например, на рис. 7 приведена гистограмма распределения времени $t_{вып} = t_{посл} + Nt_N$ выполнения приложения без распараллеливания при $N = 1$.

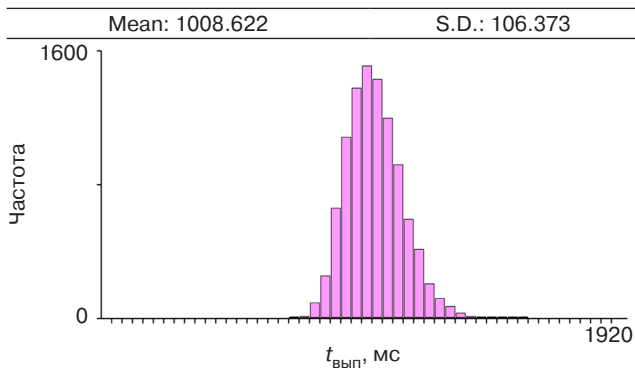


Рис. 7. Гистограмма распределения времени выполнения $t_{вып} = t_{посл} + 32t_{32}$ приложения при $N = 1$ без распараллеливания;

по оси абсцисс указаны границы частотных классов для гистограммы, шаг гистограммы – 40 мс; по оси ординат указано число попаданий в каждый частотный класс при объеме выборки – 10000

Здесь $Mean1 = t_{посл} + 32t_{32} = 1008.622$ мс – оценка математического ожидания времени выполнения приложения без распараллеливания.

На рис. 8 приведена гистограмма распределения времени выполнения приложения при $N = 32$ с последовательным участком и распараллеливанием. Здесь $Mean2 = t_{посл} + t_{32} = 80.266$ мс – оценка математического ожидания времени выполнения приложения с последовательным участком и распараллеливанием остальной части. Оценка времени выполнения последовательного участка определялась в этом же эксперименте и равна $t_{посл} = 49.991$ мс.

Тогда $k = (t_{посл} + 32t_{32}) / (t_{посл} + t_{32}) = 12.58$. Такой же результат дает вычисление коэффициента ускорения по известной формуле для второго закона Амдала [1]:

$$k = N / [\beta N + (1 - \beta)] = 12.61$$

при $N = 32$ с долей последовательных вычислений

$$\beta = t_{посл} / (t_{посл} + 32t_{32}) = 49.991 / 1008.622 = 0.04957.$$

Небольшая погрешность вызвана использованием метода статистического моделирования при оценивании временных параметров в модели вычислительного кластера.

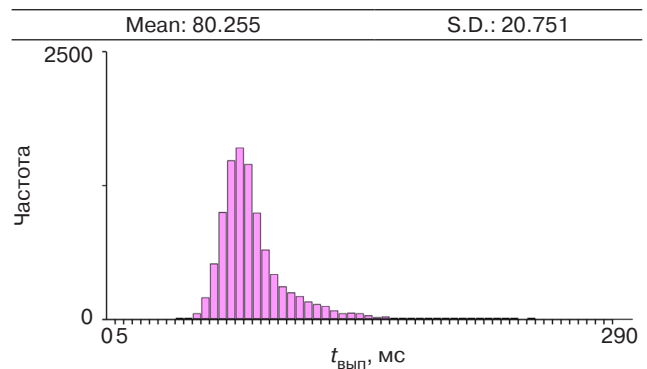


Рис. 8. Гистограмма распределения времени выполнения $t_{вып} = t_{посл} + t_{32}$ приложения при $N = 32$, с последовательным участком и распараллеливанием остальной части; по оси абсцисс указаны границы частотных классов для гистограммы, шаг гистограммы – 5 мс; по оси ординат указано число попаданий в каждый частотный класс при объеме выборки – 10000

7. ПЕРЕХОД ОТ АВТОМАТНЫХ МОДЕЛЕЙ К АСИНХРОННОМУ ЛОГИКО-АЛГЕБРАИЧЕСКИМ МОДЕЛЯМ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ КЛАСТЕРНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ НА ПРОМЕЖУТОЧНОМ УРОВНЕ MIDDLEWARE

В основе логико-алгебраических моделей лежат логические исчисления и алгебраические системы. К логическим исчислениям относятся исчисление высказываний и исчисление предикатов.

Аппарат логико-алгебраических операционных выражений (ЛАОВ), основанный на интеграции ряда

моделей, описан с позиций различных применений и обоснован в работах [34, 35]. Однако на заключительных этапах тестирования моделей при исследовании их динамики рекомендуется непосредственно использовать сети Петри, заменяя или убирая при этом «нововведения», касающиеся дополнительного использования логики предикатов первого порядка. Для сохранения преемственности в названиях модулей кластерного приложения для названий позиций выбраны имена операторных вершин в ГСА₁ (рис. 2) и ГСА₂ (рис. 3), а для индексации переходов автоматной сети Петри – двойные индексы.

На рис. 9 представлены примеры, иллюстрирующие переходы от ГСА к СКУ-модели частичного автомата и далее – к начальным логико-алгебраическим выражениям для сети Петри. Для фрагментов на рис. 9а и 9б составлены канонические уравнения, а для фрагмента на рис. 9в – логико-алгебраические выражения.

Система канонических уравнений для примеров рис. 9а и 9б имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} A_3(t+1) &= A_2(t) \& z_2(t) \vee A_3(t) \& \neg z_3(t); \\ A_4(t+1) &= A_3(t) \& z_3(t) \& \neg x_1(t) \vee A_4(t) \& \neg z_4(t); \\ A_5(t+1) &= A_3(t) \& z_3(t) \& x_1(t) \vee A_4(t) \& \neg z_4(t). \end{aligned}$$

Автоматная СКУ-модель имеет синхронный характер, и при моделировании приходится вести отсчет текущего времени выполнения событий, что замедляет работу моделирующей программы. Согласно введенным ранее обозначениям для входных переменных в частичных автоматах на рис. 4 и рис. 9б $x = \text{true}$, $\neg x = \neg x_1$ и $ux = x_1$.

Система асинхронных ЛАОВ для примера на рис. 9в представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned} T_{2,3}: & [M(A_2) \& \neg M(A_3)] (\{M(A_2) \rightarrow \text{false}, M(A_3) \rightarrow \text{true}\} \vee \text{Ret}); \\ T_{3,4}: & [M(A_3) \& \neg M(A_4) \& \neg X(A_3)] (\{X(A_3) \rightarrow \text{undef}, \\ & M(A_3) \rightarrow \text{false}, M(A_4) \rightarrow \text{true}\} \vee \text{Ret}); \\ T_{3,5}: & [M(A_3) \& \neg M(A_5) \& X(A_3)] (\{X(A_3) \rightarrow \text{undef}, \\ & M(A_3) \rightarrow \text{false}, M(A_5) \rightarrow \text{true}\} \vee \text{Ret}), \end{aligned}$$

где undef – неопределенное значение логического условия.

Приведенные выражения ЛАОВ в данном случае интерпретируются как правила срабатывания переходов логической сети Петри. Здесь M – унарный предикат, или функция разметки позиций, одноименных операторам исходной ГСА; $M(A_i)$ – высказывание, истинность которого соответствует наличию одной метки в позиции A_i , а ложность – отсутствию метки; X – унарный предикат, определяющий условия в исходной ГСА; $X(A_i)$ – высказывание, принимающее истинное, ложное или неопределенное значения, определяемые по результату выполнения оператора A_i . Оператор *Ret* усиливает процедурную составляющую ЛАОВ и осуществляет переход к его повторному выполнению при ложности условия, заключенного в квадратные скобки.

Логико-алгебраическая операционная модель, очевидно, может быть построена при использовании графа переходов состояний (рис. 9б), послужившего основой для построения сети Петри (рис. 9в), для чего необходимо соблюдать правило формирования условий операторами, в т.ч. операторами ввода условий.

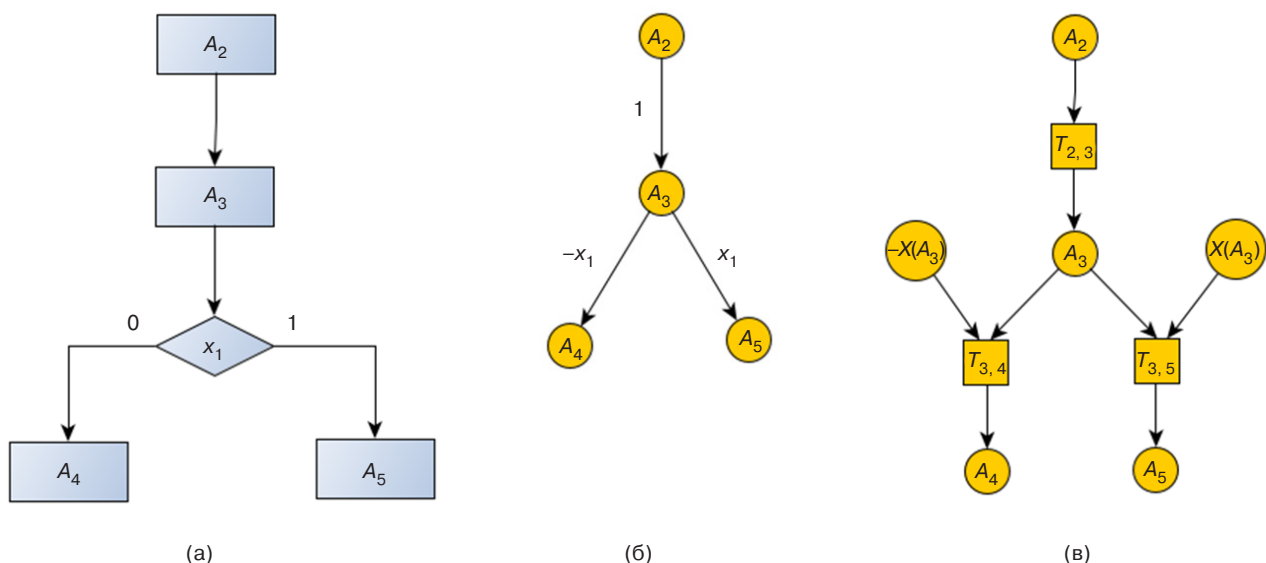


Рис. 9. Фрагменты ГСА (а), графа переходов частичного автомата (б) и сети Петри (в)

Правила срабатывания переходов могут далее модифицироваться или дополняться в соответствии с требованиями предметной области. Дополнительные события – передачи сообщений, приема сообщений, квитирования передач, определения длительности событий, представляемые операциями модификации бинарных или тернарных предикатов, могут не соответствовать общепринятым понятиям сетей Петри. Поэтому правила переходов могут приобрести вид более общих ЛАОВ, для чего привлекается другой аппарат, например, аппарат систем алгоритмических алгебр [36, 37], сетей абстрактных машин [38], реляционных исчислений и алгебр [39].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Основанием, поддерживающим актуальность решаемых в статье задач, является ограниченность простых однородных систем кластеров, что усложняет создание систем, обеспечивающих высокий уровень структурно-функциональной динамики. Новые подходы к проектированию системной и функциональной архитектуры вычислительных кластеров могут быть основаны на организации эффективного использования и управления работой кластера за счет лучшей проблемной ориентации путем создания приложений и программного обеспечения промежуточного уровня *middleware*.

2. Метод, предлагаемый и использованный в работе, основан на концепции проектирования архитектуры, определяемой исполнимыми моделями, являющейся разновидностью предметно-ориентированного проектирования.

3. Отличительной особенностью методов, предлагаемых в работе, является использование автоматного, сетевого автоматного и, в перспективе, логико-алгебраического подходов к определению системной и функциональной архитектуры, которые применяются практически на всех уровнях предметной ориентации кластерных вычислительных систем и обеспечивают реализацию концепции архитектуры, формируемой при создании модели кластерной системы на различных уровнях абстракции – от концептуального представления до деталей реализации.

4. Показано, что главным эффектом от интерпретации предлагаемых автоматных моделей и методик является возможность их использования в качестве формализованных спецификаций при описании распараллеленных процессов в кластерных вычислительных системах на уровне задач, данных, алгоритмов и машинных инструкций.

5. Результаты проведенных статистических экспериментов показывают правильность построения вероятностно-автоматных СКУ-моделей и логико-вероятностных моделей, а также возможность их использования в качестве формализованных спецификаций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воеводин В.В., Воеводин Вл.В. *Параллельные вычисления*. СПб.: БХВ-Петербург; 2002. 608 с.
2. Pleiter D. Supercomputer Architectures: Current State and Future Trends. *The AQTIVATE Project, European Union's HORIZON MSCA Doctoral Networks Programmer, Grant Agreement No. 101072344*. September 2023. 38 p.
3. Boldyrev A., Ratnikov F., Shevelev A. Approach to Finding a Robust Deep Learning Model. *IEEE Access*. 2025;13: 102390–102406. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2025.3578926>, <https://doi.org/10.48550/arXiv.2505.17254>
4. Мишенин Р.М., Костенецкий П.С. Моделирование потока задач вычислительного кластера НИУ ВШЭ с использованием SLURM Simulator. В сб.: *Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ'2025)*: сборник трудов XIX Всероссийской научной конференции с международным участием. М.: 2025. С. 324.
5. Promyslov G., Efremov A., Ilyasov Y., Pisarev V., Timofeev A. Efficiency of Machine Learning Tasks on HPC Devices. В сб.: *Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ'2025)*: сборник трудов XIX Всероссийской научной конференции с международным участием. М.; 2025. С. 56–81.
6. Kostenetskiy P.S., Kozyrev V.I., Chulkevich R.A., Raimova A.A. Enhancement of the Data Analysis Subsystem in the Task-Efficiency Monitoring System HPC TaskMaster for the cHARISMa Supercomputer Complex at HSE University. In: Sokolinsky L., Zymbler M., Voevodin V., Dongarra J. (Eds.). *Parallel Computational Technologies (PCT'2024)*. *Communications in Computer and Information Science*. Springer; 2024. V. 2241. P. 49–64. https://doi.org/10.1007/978-3-031-73372-7_4
7. Слаников С.А., Жукова Л.Ф., Семичаснов И.В. Приложение поиска, анализа и прогнозирования данных в социальных сетях. *Информационные технологии и вычислительные системы*. 2024;1:97–108. <https://doi.org/10.14357/20718632240110>
8. Kirdeev A., Burkin K., Vorobev A., Zbirovskaya E., Lifshits G., Nikolaev K., Zelenskaya E., Donnikov M., Kovalenko L., Urvantseva I., Poptsova M. Machine learning models for predicting risks of MACEs for myocardial infarction patients with different VEGFR2 genotypes. *Front. Med*. 2024;11:1452239. <https://doi.org/10.3389/fmed.2024.1452239>

9. Аль-Хулайди А.А., Садовой Н.Н. Анализ существующих программных пакетов в кластерных системах. *Вестник Донского государственного технического университета (Вестник ДГТУ)*. 2010;10(3-46):303–310. <https://elibrary.ru/mvsqql>
10. Ладыгин И.И., Логинов А.В., Филатов А.В., Яньков С.Г. *Кластеры на многоядерных процессорах*. М.: Издательский дом МЭИ; 2008. 112 с. ISBN 978-5-383-00142-4. <https://elibrary.ru/qmsnap>
11. Кокоц А.В. Разработка программной модели функционирования кластерной вычислительной системы. *Вычислительные сети. Теория и практика*. 2016;2(29):6.1. URL: <https://network-journal.mpei.ac.ru/>. Дата обращения 02.06.2025.
12. Kaur K., Rai A.K. A Comparative Analysis: Grid, Cluster and Cloud Computing. *Int. J. Adv. Res. Computer Commun. Eng.* 2014;3(3):5730–5734.
13. Omer S.M.I., Mustafa A.B.A., Alghali F.A.E. Comparative study between Cluster, Grid, Utility, Cloud and Autonomic computing. *IOSR Journal of Electrical and Electronics Engineering (IOSR-JEEE)*. 2014;9(6):61–67. <http://doi.org/10.9790/1676-09636167>
14. Kumar R. Comparison between Cloud Computing, Grid Computing, Cluster Computing and Virtualization. *Int. J. Mod. Computer Sci. Appl. (IJMCSA)*. 2015;3(1):42–47. <http://doi.org/10.13140/2.1.1759.7765>
15. Воеводин Вл.В., Жуматий С.А. *Вычислительное дело и кластерные системы*. М.: Изд-во МГУ; 2007. 150 с. ISBN 978-5-211-05440-0
16. Хопкрофт Д., Мотвани Р., Ульман Д. *Введение в теорию автоматов, языков и вычислений*: пер. с англ. М.: Вильямс; 2015. 528 с. ISBN 978-5-8459-1969-4
17. Баранов С.И. *Синтез микропрограммных автоматов (Граф-схемы и автоматы)*. Л.: Энергия; 1979. 231 с.
18. Вашкевич Н.П. *Синтез микропрограммных управляющих автоматов*. Пенза: Изд-во Пенз. политехн. ин-та; 1990. 115 с.
19. Вашкевич Н.П., Сибиряков М.А. Формальные автоматные модели алгоритмов обработки кэшируемой информации. *Современные наукоемкие технологии*. 2016;(8-2):205–213. <https://elibrary.ru/whksst>
20. Лазарев В.Г., Пийль Е.И., Турута Е.Н. *Построение программируемых управляющих устройств*. М.: Энергоатомиздат; 1984. 264 с.
21. Анишев П.А., Ачасова С.М., Бандман О.Л. *Методы параллельного программирования*. Новосибирск: Наука; 1981. 180 с.
22. Юдицкий С.А., Магергут В.З. *Логическое управление дискретными процессами. Модели, анализ, синтез*. М.: Машиностроение; 1987. 176 с.
23. Girault A., Lee E.A. Hierarchical finite state machines with multiple concurrency models. *IEEE Trans. Comput.-Aided Design Integr. Circuits Syst.* 1999;18(6):742–760. <https://doi.org/10.1109/43.766725>
24. Stefansson E., Johansson K.H. Hierarchical finite state machines for efficient optimal planning in large-scale systems. In: *2023 European Control Conference (ECC)*. June, Bucharest, Romania. IEEE; 2023. <https://doi.org/10.23919/ECC57647.2023.10178139>
25. Alur R., Yannakakis M. Model checking of hierarchical state machines. *ACM SIGSOFT Software Engineering Notes*. 1998;23(6):175–188. <http://doi.org/10.1145/503502.503503>
26. Болотова Л.С. *Системы искусственного интеллекта. Модели и технологии, основанные на знаниях*. М.: Финансы и статистика; 2012. 664 с. ISBN 978-5-279-03530-4
27. Тейз А., Грибомон П., Луи Ж. *Логический подход к искусственному интеллекту: от классической логики к логическому программированию*: пер. с франц. М.: Мир; 1990. 429 с. ISBN 5-03-001636-8
28. *Представление и использование знаний*; под ред. Х. Уэно, М. Исидзука. М.: Мир; 1989. 220 с. ISBN 5-03-000685-0
29. Евреинов Э.В., Косарев Ю.Г. *Однородные универсальные системы высокой производительности*. Новосибирск: Наука, Сибирское отд.; 1966. 308 с.
30. Белов В.В., Воробьев Е.М., Шаталов В.Е. *Теория графов*. М.: Высшая школа; 1976. 392 с.
31. Поликарпова Н.И., Шалыто А.А. *Автоматное программирование*: 2-е изд. СПб.: Питер; 2011. 176 с. ISBN 987-5-4237-0075-1
32. Питерсон Дж. *Теория сетей Петри и моделирование систем*: пер. с англ. М.: Мир; 1984. 368 с.
33. Котов В.Е. *Сети Петри*. М.: Наука; 1984. 160 с.
34. Волчихин В.И., Зинкин С.А. Логико-алгебраические модели и методы в проектировании функциональной архитектуры распределенных систем хранения и обработки данных. *Известия вузов. Поволжский регион. Технические науки*. 2012;2:3–16. <https://elibrary.ru/pfpgml>
35. Зинкин С.А. Элементы новой объектно-ориентированной технологии для моделирования и реализации систем и сетей хранения и обработки данных. *Информационные технологии*. 2008;10:20–27.
36. Андон Ф.И., Дорошенко А.Е., Цейтлин Г.Е., Яценко Е.А. *Алгеброалгоритмические модели и методы параллельного программирования*. Киев: Академперіодика; 2007. 634 с.
37. Ющенко Е.Л., Цейтлин Г.Е., Грицай В.П., Терзян Т.К. *Многоуровневое структурное проектирование программ. Теоретические основы, инструментарий*. М.: Финансы и статистика; 1989. 208 с. ISBN 5-279-00233-X
38. Gurevich Y. Abstract State Machines: An Overview of the Project. In: Seipel D., Turull-Torres J.M. (Eds.). *Foundations of Information and Knowledge Systems. Lecture Notes in Computer Science*. Springer; 2004. V. 2942. P. 6–13. https://doi.org/10.1007/978-3-540-24627-5_2
39. Мейер Д. *Теория реляционных баз данных*: пер. с англ. М.: Мир; 1987. 608 с.

REFERENCES

1. Voevodin V.V., Voevodin V.I. *Parallel'nye vychisleniya (Parallel Computing)*. St. Petersburg: BHV-Petersburg; 2002. 608 p. (in Russ.).
2. Pleiter D. Supercomputer Architectures: Current State and Future Trends. *The AQTIVATE Project, European Union's HORIZON MSCA Doctoral Networks Programmer, Grant Agreement No. 101072344*. September 2023. 38 p.
3. Boldyrev A., Ratnikov F., Shevelev A. Approach to Finding a Robust Deep Learning Model. *IEEE Access*. 2025;13: 102390–102406. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2025.3578926>, <https://doi.org/10.48550/arXiv.2505.17254>
4. Mishenin R.M., Kostenetskii P.S. Modeling the task flow of the HSE computing cluster using SLURM Simulator. In: *Parallel Computing Technologies (PCT'2025)*: Proceedings of the 19th All-Russian Scientific Conference with International Participation. Moscow; 2025. P. 324 (in Russ.).
5. Promyslov G., Efremov A., Ilyasov Y., Pisarev V., Timofeev A. Efficiency of Machine Learning Tasks on HPC Devices. In: *Parallel Computing Technologies (PCT'2025)*: Proceedings of the 19th All-Russian Scientific Conference with International Participation. Moscow; 2025. P. 56–81 (in Russ.).
6. Kostenetskiy P.S., Kozyrev V.I., Chulkevich R.A., Raimova A.A. Enhancement of the Data Analysis Subsystem in the Task-Efficiency Monitoring System HPC TaskMaster for the cHARISMa Supercomputer Complex at HSE University. In: Sokolinsky L., Zymbler M., Voevodin V., Dongarra J. (Eds.). *Parallel Computational Technologies (PCT'2024)*. *Communications in Computer and Information Science*. Springer; 2024. V. 2241. P. 49–64. https://doi.org/10.1007/978-3-031-73372-7_4
7. Slastnikov S.A., Zhukova L.F., Semichasnov I.V. Application for data retrieval, analysis, and forecasting in social networks. *Informatsionnye tekhnologii i vychislitel'nye sistemy = Journal of Information Technologies and Computing Systems*. 2024;1:97–108 (in Russ.). <https://doi.org/10.14357/20718632240110>
8. Kirdeev A., Burkin K., Vorobev A., Zbirovskaya E., Lifshits G., Nikolaev K., Zelenskaya E., Donnikov M., Kovalenko L., Urvantseva I., Poptsova M. Machine learning models for predicting risks of MACEs for myocardial infarction patients with different VEGFR2 genotypes. *Front. Med*. 2024;11:1452239. <https://doi.org/10.3389/fmed.2024.1452239>
9. Al-Khulaidi A., Sadovoy N. Analysis of existing software packages in the cluster systems. *Vestnik Donskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta = Vestnik of Don State Technical University*. 2010;10(3):303–310 (in Russ.). <https://elibrary.ru/mvsqql>
10. Ladygin I.I., Loginov A.V., Filatov A.V., Yankov S.G. *Klastery na mnogoyadernnykh protsessorakh (Clusters on Multi-Core Processors)*. Moscow: MPEI Publ.; 2008. 112 p. (in Russ.). ISBN 978-5-383-00142-4. <https://elibrary.ru/qmsnap>
11. Kokots A.V. Development of a software model of an effective cluster computing system *Vychislitel'nye seti. Teoriya i praktika = Network Journal. Theory and Practice*. 2016;2(29):6.1. Available from URL: <https://network-journal.mpei.ac.ru/> (in Russ.). Accessed June 02, 2025.
12. Kaur K., Rai A.K. A Comparative Analysis: Grid, Cluster and Cloud Computing. *Int. J. Adv. Res. Computer Commun. Eng*. 2014;3(3):5730–5734.
13. Omer S.M.I., Mustafa A.B.A., Alghali F.A.E. Comparative study between Cluster, Grid, Utility, Cloud and Autonomic computing. *IOSR Journal of Electrical and Electronics Engineering (IOSR-JEEE)*. 2014;9(6):61–67. <http://doi.org/10.9790/1676-09636167>
14. Kumar R. Comparison between Cloud Computing, Grid Computing, Cluster Computing and Virtualization. *Int. J. Mod. Computer Sci. Appl. (IJMCSA)*. 2015;3(1):42–47. <http://doi.org/10.13140/2.1.1759.7765>
15. Voevodin V.I., Zhumatii S.A. *Vychislitel'noe delo i klasternye sistemy (Computing and Cluster Systems)*. Moscow: MSU Press; 2007. 150 p. (in Russ.). ISBN 978-5-211-05440-0
16. Hopcroft J.D., Motwani R., Ulman J.D. *Vvedenie v teoriyu avtomatov, yazykov i vychislenii (Introduction to Automata Theory, Languages, and Computations)*; transl. from Engl. Moscow: Vil'yams; 2015. 528 p. (in Russ.). ISBN 978-5-8459-1969-4 [Hopcroft J.E., Motwani R., Ulman J.D. *Introduction to Automata Theory, Languages and Computation*. Boston, etc.: Addison-Wesley Publ. Comp.; 2001. 521 p.]
17. Baranov S.I. *Sintez mikroprogrammnykh avtomatov (Graf-skhemy i avtomaty) (Synthesis of Microprogrammed Automata (Graph-Schemes and Automata))*. Leningrad: Energiya; 1979. 231 p. (in Russ.).
18. Vashkevich N.P. *Sintez mikroprogrammnykh upravlyayushchikh avtomatov (Synthesis of Microprogram Control Automata)*. Penza; 1990. 115 c. (in Russ.).
19. Vashkevich N.P., Sibiryakov M.A. The formal automatic models of algorithms of processing of cached data. *Sovremennye naukoemkie tekhnologii = Modern High Technologies*. 2016;(8-2):205–213 (in Russ.). <https://elibrary.ru/whksst>
20. Lazarev V.G., Pii' E.I., Turuta E.N. *Postroenie programmirovemykh upravlyayushchikh ustroystv (Construction of Programmable Control Devices)*. Moscow: Energoatomizdat; 1984. 264 p. (in Russ.).
21. Anishev P.A., Achasova S.M., Bandman O.L. *Metody parallel'nogo programmirovaniya (Methods of Parallel Programming)*. Novosibirsk: Nauka; 1981. 180 p. (in Russ.).
22. Yuditskii S.A., Magergut V.Z. *Logicheskoe upravlenie diskretnymi protsessami. Modeli, analiz, sintez (Logical Control of Discrete Processes. Models, Analysis, Synthesis)*. Moscow: Mashinostroenie; 1987. 176 p. (in Russ.).
23. Girault A., Lee E.A. Hierarchical finite state machines with multiple concurrency models. *IEEE Trans. Comput.-Aided Design Integr. Circuits Syst*. 1999;18(6):742–760. <https://doi.org/10.1109/43.766725>
24. Stefansson E., Johansson K.H. Hierarchical finite state machines for efficient optimal planning in large-scale systems. In: *2023 European Control Conference (ECC)*. June, Bucharest, Romania. IEEE; 2023. <https://doi.org/10.23919/ECC57647.2023.10178139>

25. Alur R., Yannakakis M. Model checking of hierarchical state machines. *ACM SIGSOFT Software Engineering Notes*. 1998;23(6):175–188. <http://doi.org/10.1145/503502.503503>
26. Bolotova L.S. *Sistemy iskusstvennogo intellekta. Modeli i tekhnologii, osnovannye na znaniyakh (Artificial Intelligence Systems. Models and Technologies Based on Knowledge)*. Moscow: Finansy i statistika; 2012. 664 p. (in Russ.). ISBN 978-5-279-03530-4
27. Thayse A., Gribomont P., Louis J. *Logicheskii podkhod k iskusstvennomu intellektu: ot klassicheskoi logiki k logicheskomu programmirovaniyu (Logical Approach to Artificial Intelligence: From Classical Logic to Logical Programming)*: transl. from French. Moscow: Mir; 1990. 429 p. (in Russ.). ISBN 5-03-001636-8
28. Ueno H., Ishizuka M. (Eds.). *Predstavlenie i ispol'zovanie znaniy (Representation and Use of Knowledge)*: transl. from Japan. Moscow: Mir; 1989. 220 p. (in Russ.). ISBN 5-03-000685-0
29. Evreinov E.V., Kosarev Yu.G. *Odnorodnye universal'nye sistemy vysokoi proizvoditel'nosti (Homogeneous Universal Systems of High Productivity)*. Novosibirsk: Nauka; 1966. 308 p. (in Russ.).
30. Belov V.V., Vorob'ev E.M., Shatalov V.E. *Teoriya grafov (Graph Theory)*. Moscow: Vysshaya shkola; 1976. 392 p. (in Russ.).
31. Polikarpova N.I., Shalyto A.A. *Avtomatnoe programmirovaniye (Automata Programming)*: 2nd ed. St. Petersburg: Piter; 2011. 176 p. (in Russ.). ISBN 987-5-4237-0075-1
32. Peterson J. *Teoriya setei Petri i modelirovaniye system (Petri Net Theory and the Modeling of Systems)*: transl. from Engl. Moscow: Mir; 1984. 368 p. (in Russ.).
[Peterson J.L. *Petri Net Theory and the Modeling of Systems*. NY: Prentice-Hall; 1981. 310 p.]
33. Kotov V.E. *Seti Petri (Petri Nets)*. Moscow: Nauka; 1984. 160 p. (in Russ.).
34. Volchikhin V.I., Zinkin S.A. Logic and algebraic models and methods in designing functional architecture of distributed data storage and processing systems. *Izvestiya vuzov. Povolzhskii region. Tekhnicheskie nauki = University Proceedings. Volga Region. Technical Sciences*. 2012;2:3–16 (in Russ.). <https://elibrary.ru/pfpgml>
35. Zinkin S.A. Elements of a new object-oriented technology for modeling and implementing systems and networks for storing and processing data. *Informatsionnye tekhnologii = Information Technologies*. 2008;10:20–27 (in Russ.).
36. Andon F.I., Doroshenko A.E., Tseitlin G.E., Yatsenko E.A. *Algebroalgoritmicheskie modeli i metody parallel'nogo programmirovaniya (Algebraic Algorithmic Models and Methods of Parallel Programming)*. Kiev: Akademperiodika; 2007. 634 p. (in Russ.).
37. Yushchenko E.L., Tseitlin G.E., Gritsai V.P., Terzyan T.K. *Mnogourovnevoe strukturnoe proektirovaniye programm. Teoreticheskie osnovy, instrumentarii (Multilevel structural design of programs. Theoretical foundations, tools)*. Moscow: Finansy i statistika; 1989. 208 p. (in Russ.). ISBN 5-279-00233-X
38. Gurevich Y. Abstract State Machines: An Overview of the Project. In: Seipel D., Turull-Torres J.M. (Eds.). *Foundations of Information and Knowledge Systems. Lecture Notes in Computer Science*. Springer; 2004. V. 2942. P. 6–13. https://doi.org/10.1007/978-3-540-24627-5_2
39. Maier D. *Teoriya relyatsionnykh baz dannykh (The Theory of Relational databases)*: transl. from Engl. Moscow: Mir; 1987. 608 p. (in Russ.).
[Maier D. *The Theory of Relational databases*: 1st ed. Computer Sci. Press; 1983. 656 p.]

Об авторе

Петушков Григорий Валерьевич, проректор, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: petushkov@mirea.ru. SPIN-код РИНЦ 4985-4344, <https://orcid.org/0009-0006-0801-429X>

About the Author

Grigory V. Petushkov, Vice-Rector, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: petushkov@mirea.ru. RSCI SPIN-code 4985-4344, <https://orcid.org/0009-0006-0801-429X>

УДК 004.387

<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-6-25-46>

EDN XEUFSE



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Подход к выявлению оптимального набора кубит квантовых вычислительных устройств на примере модели генерации случайных двоичных последовательностей

А.В. Корольков,
А.А. Крючков[@]

МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, 119454 Россия

[@] Автор для переписки, e-mail: kryuchkov_a@mirea.ru

• Поступила: 23.12.2024 • Доработана: 15.05.2025 • Принята к опубликованию: 06.10.2025

Резюме

Цели. Отсутствие квантовых компьютеров, устойчивых к ошибкам, а также невозможность обеспечить беспрепятственный и полнофункциональный физический доступ к облачным квантовым системам поднимает актуальный вопрос о необходимости разработки методов оценки и верификации облачных квантовых компьютеров. Авторам видится перспективным использование подхода к анализу возможностей квантового процессора в контексте его применимости для решения некоторых задач, возникающих при оценке систем защиты информации. Одним из примеров теста квантового вычислительного устройства (КВУ) на предмет выявления уровня производительности и качества вычислений может послужить модель генерации случайной двоичной последовательности, анализ которой предоставляет информацию о корректности и надежности исследуемого квантового регистра. Цель работы заключается в разработке программного комплекса, с помощью которого представляется возможным моделирование работы КВУ в режиме квантового генератора случайных чисел.

Методы. Программная реализация по взаимодействию с облачными квантовыми компьютерами выполнена с использованием библиотеки Qiskit. Интерфейс программного комплекса реализован средствами Qt5, кроссплатформенного набора инструментов и виджетов для создания графических приложений. Анализ генерируемой двоичной последовательности выполнен статистическими тестами NIST STS¹.

Результаты. Разработан программный комплекс, предоставляющий пользователю в графическом режиме возможность выполнения опционального исследования некоторых облачных квантовых компьютеров на предмет выявления оптимального и наиболее устойчивого к ошибкам набора кубит. Приведены результаты экспериментов на трех облачных КВУ.

¹ The National Institute of Standards and Technology, Statistical Test Suite – Национальный институт стандартов и технологий США, набор статистических тестов.

Выводы. В условиях накладываемых ограничений на вычислительные мощности и время использования облачных КВУ предложенный подход отличается минимальными требованиями к производительности устройства, предоставляет наглядные и однозначно-интерпретируемые сведения об исследуемых технических характеристиках квантового компьютера, является воспроизводимым, легко масштабируемым и универсальным.

Ключевые слова: квантовый компьютер, квантовое вычислительное устройство, генератор случайных чисел, оценка производительности

Для цитирования: Корольков А.В., Крючков А.А. Подход к выявлению оптимального набора кубит квантовых вычислительных устройств на примере модели генерации случайных двоичных последовательностей. *Russian Technological Journal*. 2025;13(6):25–46. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-6-25-46>, <https://www.elibrary.ru/XEUFSE>

Прозрачность финансовой деятельности: Авторы не имеют финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

RESEARCH ARTICLE

Approach for identifying the optimal set of qubits of quantum computing devices based on a model for generating binary random sequences

Andrey V. Korolkov,
Andrey A. Kryuchkov[@]

MIREA – Russian Technological University, Moscow, 119454 Russia

[@] Corresponding author, e-mail: kryuchkov_a@mirea.ru

• Submitted: 23.12.2024 • Revised: 15.05.2025 • Accepted: 06.10.2025

Abstract

Objectives. The absence of error-resistant quantum computers, coupled with the challenges associated with providing unrestricted and fully operational physical access to cloud quantum computing systems, prompts a critical examination of the necessity to develop universal and independent methods for evaluating and verifying cloud quantum computers. A promising approach involves evaluating the capabilities of a quantum computer in relation to its effectiveness in addressing specific challenges encountered in the assessment of information security systems. A potential test for ascertaining the performance and computational quality of a quantum computing device (QCD) is based on a model designed to generate a random binary sequence. By analyzing this sequence, insights can be obtained into the accuracy and reliability of the quantum register under study. The paper presents a software program developed for simulating the operation of a quantum random number generator.

Methods. The software implementation for interacting with cloud quantum computers was performed using the Qiskit open-source software kit. The graphical user interface of the software package was developed using a Qt5 cross-platform set of tools and widgets for creating applications. The analysis of the generated binary sequence was performed using a set of statistical tests NIST STS².

² The National Institute of Standards and Technology, Statistical Test Suite.

Results. The developed software package provides users with a graphical interface for conducting an analysis of a cloud QCD to identify the optimal and most error-resistant set of qubits. The findings from experiments conducted on three cloud quantum computing devices are reported.

Conclusions. The proposed approach, which is constrained by limitations of computing power and duration of access to cloud-based QCD, imposes minimal demands on the productive capabilities of the quantum system. It offers clear and unequivocally interpretable insights into the technical characteristics of a cloud quantum computer, while also being reproducible, easily scalable, and universally applicable.

Keywords: quantum computer, quantum computer device, random number generator, benchmarking

For citation: Korolkov A.V., Kryuchkov A.A. Approach for identifying the optimal set of qubits of quantum computing devices based on a model for generating binary random sequences. *Russian Technological Journal*. 2025;13(6):25–46. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-6-25-46>, <https://www.elibrary.ru/XEUFSE>

Financial disclosure: The authors have no financial or proprietary interest in any material or method mentioned.

The authors declare no conflicts of interest.

ВВЕДЕНИЕ

На протяжении нескольких последних лет квантовые процессоры демонстрируют устойчивый рост собственных вычислительных и технологических показателей. В связи с этим возникает очевидная необходимость в наличии простого и эффективного метода отслеживания и фиксации изменений между промежуточными версиями и этапами развития квантовой вычислительной техники. Одним из таких механизмов (самостоятельно или в составе расширенного набора тестов) может послужить подход к использованию квантовых вычислительных устройств (КВУ) для решения задач генерации случайных чисел (ГСЧ), что может являться надежным и интуитивно понятным механизмом при оценке производительности и надежности исследуемого устройства.

ОЦЕНКА ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ КВУ

В международном научном сообществе на текущий момент не предложен универсальный свод правил по технике проведения анализа вычислительных возможностей КВУ. Однако известно о выполнении подобных работ усилиями Института инженеров и электротехники³, а также об инициативе Управления перспективных исследований Министерства обороны США⁴. Оба проекта начали реализовываться в 2021 г., и в ближайшее время ожидаются публикации предварительных результатов.

³ P7131. Standard for Quantum Computing Performance Metrics & Performance Benchmarking. IEEE. 2021. <https://sagroups.ieee.org/7131/>. Дата обращения 06.10.2025. / Accessed October 06, 2025.

⁴ Quantifying Utility of QC, DARPA. 2021. <https://www.darpa.mil/news-events/2021-04-02>. Дата обращения 06.10.2025. / Accessed October 06, 2025.

Причина отсутствия единого стандарта объясняется относительной молодостью индустрии квантовых вычислений (первый облачный квантовый компьютер на 1 кубит был предложен в 2016 г.), а также обновлением практически значимых результатов «на ходу»: с каждым годом техники тестирования КВУ корректируются, дополняются и расширяются в зависимости от актуальных показателей и степени соответствия конкретной метрики уровню готовности технологии. К примеру, долгое время используемая метрика «Квантовый объем» (quantum volume) утратила свою значимость в современных устройствах и перестала отражать реальные возможности произвольного КВУ, найдя свое продолжение в обновленных показателях качества и производительности квантового процессора. Более подробно о технологиях и истории становления методов исследования КВУ можно узнать в работах [1–4].

В рамках подтверждения актуальности вопроса и в целях выявления применимости модели ГСЧ в контексте анализа возможностей КВУ определим некоторые ключевые аспекты общепринятых методов оценки их вычислительного потенциала.

Квантовые компьютеры делятся на 4 эпохи технологического развития, на сегодняшний день актуальная из которых имеет наименование *noisy intermediate-scale quantum systems (NISQ)* – низший уровень в иерархии, что соответствует устройствам с малым количеством кубит на процессоре, предполагает отсутствие кодов коррекции ошибок и подразумевает сильную подверженность квантовой системы помехам, вызванным взаимодействием с окружающей средой.

Второй принципиальный аспект анализа квантового компьютера – технология исполнения. Современные квантовые процессоры могут быть

выполнены на основе фотонов, ионов, на сверхпроводниках и нейтральных атомах. «Элементная база» квантового компьютера имеет принципиальное значение при сравнении устройств между собой в рамках различных физических принципов. К примеру, сверхпроводниковые КВУ работают значительно быстрее ионных, что в некоторых случаях предполагает бесперспективность сравнения производительности соответствующих устройств по скорости выполнения квантовой схемы. Однако при фиксации скоростных характеристик в контексте единой физической реализации, пусть и в разных версиях исполнения, сохраняется информативность, демонстрируя степень влияния вносимых в КВУ изменений на скорость обработки квантовой схемы (рис. 1).

Методы исследования КВУ могут различаться в зависимости от области применения: рассматривая систему целиком (например, метрика *circuit layer operation per second (CLOPS)* [6] – количество обрабатываемых слоев квантовой схемы в секунду), ее отдельные функциональные аспекты (например, метрика *error per layer gate (EPLG)* [7] – количество ошибок на один слой квантовой схемы), или анализируя самостоятельные элементы на уровне устройства (например, некоторые вентили в связке с конкретными кубитами [8], где к квантовым состояниям применяется определенный набор вентиля для анализа качества узлов квантовой цепи).

Отдельное внимание следует уделить постановке вопроса о сертификации квантовых компьютеров или верификации вычисляемого результата. Главный парадокс заключается в том, что, находясь в классическом мире (класс сложности BPP, *bounded-error probabilistic polynomial time* – полиномиальное время с ограничением вероятности ошибок), процесс оценки достоверности выполнения квантового алгоритма из квантового мира (класс сложности BQP, *bounded-error quantum polynomial time* – квантово-полиномиальное время с ограничением вероятности ошибок) становится неоднозначной задачей. Вопрос заключается в том, каким образом можно подтвердить, что программа, отправленная на выполнение квантовому компьютеру, была решена квантовым устройством верно (другими словами, как проверить полученный в ходе квантовых вычислений классический результат). Если в некоторых задачах ответ может быть заранее известен (например, алгоритм Шора [9]) и двоякое толкование итогового результата исключено, до конца непонятно, как следует поступить в тех случаях, когда получаемые вычисления уникальны и не поддаются классической

симуляции для сопоставления с ожидаемыми данными.

Оценка производительности и верификация квантовых компьютеров в NISQ-эру должны удовлетворять трем взаимно-дополняющим императивам: качество, скорость, масштабируемость. К примеру, метрика «квантовый объем» утратила свою актуальность именно по причине невозможности соблюдения требования масштабируемости, в связи с чем вендоры квантового оборудования исключили ее из обязательного перечня индикаторов-показателей вычислительного потенциала КВУ.

Завершающим и в то же время фундаментальным аспектом анализа квантовых компьютеров является подход к рассмотрению квантового процессора как устройства в целом. В каноническом виде процесс выполнения квантовой схемы делится на 3 этапа: инициализация квантового регистра, выполнение квантовой схемы, анализ результатов (классическая информация в двоичной форме записи).

Имеющиеся в настоящий момент КВУ для рядовых пользователей доступны исключительно через облачные сервисы. В связи с этим встает вопрос: каким образом независимый исследователь, имея фактический доступ исключительно к результатам работы измерительного аппарата удаленного квантового компьютера (т.е. «черного ящика»), имеет возможность проверить, что в качестве облачного устройства ему не «подсовывается» классический симулятор КВУ?

На первый взгляд, справедливо предположение, что не существует классического устройства (или вычислительного комплекса), способного успешно симулировать работу многозарядной квантовой программы со значительной глубиной квантовой схемы. Однако, во-первых, в некотором смысле это все же является допущением, а не правилом, во-вторых, отсутствие физического доступа к облачному КВУ и имеющиеся трудности верификации классической информации как результата работы квантового компьютера накладывают ряд ограничений и открывают поле для дальнейших рассуждений (местами, необоснованных фантазий) о характеристиках и свойствах используемого устройства, заявляемого как квантовый компьютер.

Учитывая вышеизложенное, авторы считают целесообразным провести исследование по моделированию генерации случайных двоичных последовательностей на облачных квантовых компьютерах для получения первичной и оперативной информации о производительных мощностях и технических возможностях рассматриваемых устройств.

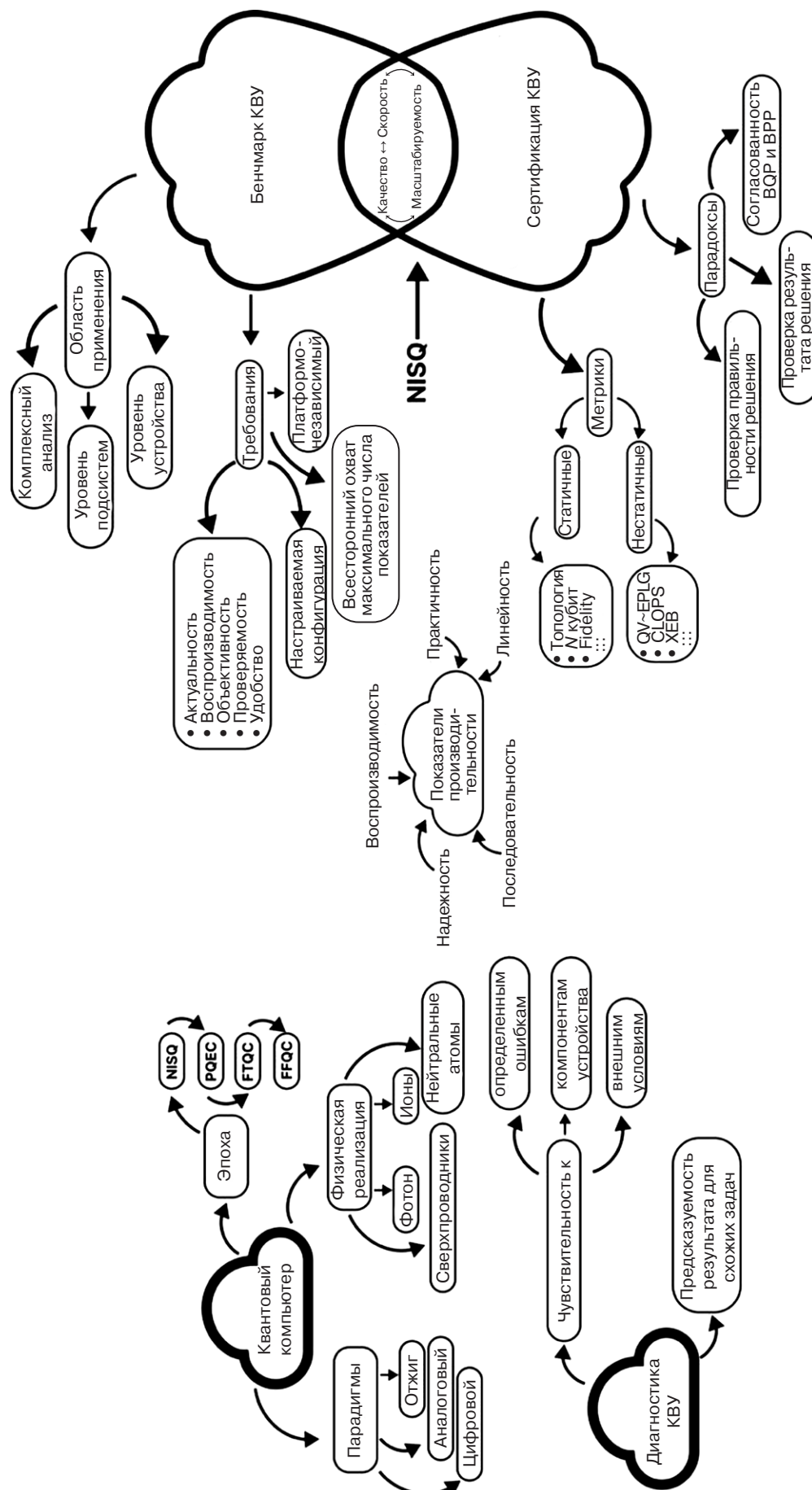


Рис. 1. Структурная схема инструментов оценки производительности КВУ [5]. PQEC (partially quantum error corrected) – частичная коррекция ошибок, возникающих на КВУ; FTQC (fault tolerant quantum computers) – отказоустойчивые КВУ; FFQC (fully functional quantum computers) – полнофункциональные КВУ; XEB (cross-entropy benchmarking) – кросс-энтропийный бенчмаркинг

ПОДХОД К МОДЕЛИРОВАНИЮ ГСЧ НА КВАНТОВОМ КОМПЬЮТЕРЕ

На сегодняшний день качество и достоверность результатов, получаемых в рамках решения прикладных задач современными КВУ, все еще в значительной степени подвержено влиянию окружающей среды, воздействие которой необходимо минимизировать, а также внутренним ошибкам аппаратной реализации оборудования, что обусловлено несовершенством технологии исполнения и суммарной сложностью настройки квантовой системы в целом. Тем не менее, несмотря на все несовершенство современных квантовых компьютеров, авторам видится перспективным проведение анализа вычислительных возможностей и квантовых свойств КВУ в рамках моделирования процесса генерации случайных последовательностей (СП).

Генерация двоичных СП наравне с оценкой технического обеспечения квантового компьютера несет в себе дополнительный практический интерес. Очевидно, что в задачах обеспечения криптографической защиты информации последовательность, сгенерированную на облачном устройстве (независимо от его природы), использовать строго запрещено. Однако проверка самой возможности применения КВУ в задачах ГСЧ может послужить заделом для последующих исследований в период, когда уровень готовности технологий откроет новые возможности по локализации квантовых систем. На текущий момент полученные значения в рамках ГСЧ на облачных КВУ имеет смысл использовать исключительно в исследовательских задачах, например, при моделировании некоторых случайных процессов.

Современные ГСЧ делятся на три основных класса, разделяющие генераторы по технической реализации и способу их исполнения: программные, физические и комбинированные. Программные ГСЧ являются наименее надежной реализацией процесса генерации в виду возможности возникновения периода в выдаваемых псевдослучайных последовательностях (ПСП), а также из-за уязвимости, вызванной наличием инициализирующего вектора, обладание которым может привести к компрометации двоичных данных. Физические и комбинированные ГСЧ зачастую не обладают должным математическим доказательством природы случайности получаемой на выходе информации. Более того, такие генераторы могут быть подвержены условиям окружающей среды, будь то температурный режим, магнитное излучение или влияние радиоволн.

Однако, совершенно иные вводные имеются у квантовых генераторов случайных чисел (КГСЧ), относящихся к классу физических ГСЧ, но имеющих

формальное математическое обоснование случайности генерируемых СП. Примеры устройств КГСЧ можно найти в работах [10–12].

Сравнивая портативный КГСЧ и квантовый компьютер в качестве ГСЧ следует отметить, что самостоятельное квантовое устройство генерации СП имеет явное преимущество в виду безопасности генерируемой последовательности (в случае использования КГСЧ в «контролируемой зоне»), но в то же время оно подвержено возможному воздействию окружающей среды, из-за чего выдаваемая битовая строка может качественно терять в свойствах случайности. В свою очередь, облачный квантовый компьютер в идеальных условиях находится в строго изолированной среде, исключающей возникновение побочных шумов и помех, сохраняя физическую природу квантовых вычислений, однако, учитывая удаленное расположение КВУ, ни о какой безопасности в данном случае речи не идет.

Перейдем к описанию моделирования генерации случайного бита классической информации на квантовом компьютере в условиях отсутствия негативного воздействия на КВУ от аппаратного обеспечения и физического окружения устройства. С некоторыми исследованиями в данной предметной области можно ознакомиться в работах [13–16].

Фундаментальной единицей произвольного квантового процессора является кубит, представляющий собой единичный вектор в двумерном комплексном векторном пространстве, базис которого задается ортогональными векторами $|0\rangle$ и $|1\rangle$.

$$|\psi\rangle = c_1|0\rangle + c_2|1\rangle, \quad (1)$$

где c_1, c_2 – произвольные комплексные числа, амплитуды вероятностей квантового состояния такие, что:

$$|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1. \quad (2)$$

Для получения случайного бита, оперируя одним кубитом квантового процессора, необходимо и достаточно установить единичный вектор в состояние суперпозиции, когда по результатам измерения вероятность получения «0» и «1» будет равняться 0.5. Таким образом, к квантовому состоянию следует применить преобразование Уолша – Адамара, описываемое следующей матрицей:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

В результате применения вентилля Адамара к одиночному кубиту будет получена суперпозиция квантового состояния, которая задается следующим выражением:

$$\begin{aligned} H: |0\rangle &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \\ H: |1\rangle &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle). \end{aligned} \quad (4)$$

Как можно видеть из (4), не имеет значения, с какого состояния начинается моделирование ГСЧ, независимо от того, находится кубит в состоянии $|0\rangle$, либо $|1\rangle$. В результате будет получено состояние суперпозиции, равновероятно обращающее после измерения квантовый бит в классический – «0» или «1». Для того чтобы получить СП заданной длины, необходимо запустить операцию (4) в цикле на необходимое количество тактов с последующим сохранением результатов в единую двоичную битовую строку.

Предложенная модель КГСЧ представляет собой идеализированный процесс генерации СП, проводимый в «безупречных» условиях, где в результате должна быть получена СП с равновероятным распределением «0» и «1». Однако на практике воссоздать такие условия, по крайней мере на сегодняшний день, не представляется возможным. В первую очередь это обусловлено технологическим несовершенством квантового оборудования, находящегося в распоряжении производителей квантовых процессоров в эпоху NISQ-устройств.

Заметим, что преодолению возникающих технических ограничений, вызванных несовершенством аппаратной части и внешним воздействием окружающей среды, уделяется пристальное внимание со стороны разработчиков квантового оборудования. На сегодняшний день в целях улучшения качества работы квантовых алгоритмов предлагается

использовать коды коррекции ошибок, которые подразумевают под собой использование нескольких *физических* кубитов в качестве одного *логического*.

К примеру, работая с одним логическим кубитом, построенным на трех физических, при передаче квантового состояния $|0\rangle$ получатель должен принять закодированное состояние $|000\rangle$ (кодовое слово). В случае, если один из битов был инвертирован (bit-flip), например, первый – $|100\rangle$, пользователь обнаружит ошибку. Если же количество искаженных бит (bit-flip) будет больше двух, выявление несоответствия в итоговом результате не представляется возможным. Таким образом, в приведенном случае необходимо внимательно подходить к выбору кодового расстояния $d = 2t + 1$, где d – количество ошибок, которое не может быть обнаружено, t – количество детектируемых ошибок.

В настоящее время к наиболее известным кодам коррекции квантовых ошибок относят следующие⁵: код повторений, код Шора, поверхностный код, код Стина (Steane), код Хастингса (Hastings – Naah).

В то же время, в контексте поставленной задачи применение кодов коррекции ошибок нецелесообразно, т.к. для генерации (предполагаемо) истинно СП необходимо работать с квантовыми состояниями непосредственно на физическом уровне.

Современные квантовые компьютеры имеют ряд параметров, по которым возможно предварительно оценить вычислительные возможности и технические характеристики исследуемого устройства. В табл. 1 представлены параметры, свойственные квантовым процессорам, реализованным на основе сверхпроводниковой технологии (в дальнейшем эксперименты будут проводиться на квантовых

Таблица 1. Влияние параметров сверхпроводящих КВУ на этап выполнения квантовой схемы

Этап выполнения квантовой схемы	Параметр КВУ											
	T_1	T_2	Frequency	Anharmonicity	Readout length	Readout error	meas0 prep1	meas1 prep0	(ID) error	(Pauli-X) error	(sx) error	ECR error
Инициализация кубит	–	–	–	–	–	–	+	+	–	–	–	–
Выполнение квантовой схемы	+	+	+	+	–	–	–	–	+	+	+	+
Измерение регистра	–	–	–	–	+	+	–	–	–	–	–	–

Примечание: T_1 , T_2 – время релаксации и дефазировки состояний; Frequency, Anharmonicity – частота, ангармоника (разница в энергии между первым и вторым возбужденными состояниями кубита, выраженная в Гц); Readout error/length – ошибка/время чтения кубита; meas0/1 prep1/0 – ошибка инициализации; (ID) error, (Pauli-X) error, (sx) error – ошибки вентиля инициализации, инверсии, суперпозиции кубита; ECR error – ошибка двухкубитного вентиля.

⁵ Introduction to quantum error correction. Microsoft Quantum Azure. 2024. <https://learn.microsoft.com/en-us/azure/quantum/concepts-error-correction>. Дата обращения 06.10.12025. / Accessed October 06, 2025.

процессорах компании IBM, реализованных на сверхпроводниках⁶).

Значения из табл. 1 не распространяются целиком на все три упомянутых ранее этапа выполнения программы на квантовом компьютере, а оказывают свое влияние лишь на определенном промежутке работы квантовой схемы на удаленном устройстве. Более того, не все из них должны учитываться при предварительной оценке качества исследуемого кубита. Для того чтобы понимать, какие из параметров могут быть опущены, следует построить квантовую схему, из которой станет очевидно, какой набор характеристик по отношению к выбранным кубитам должен быть взят в расчет.

Генератор СП на квантовом компьютере может быть реализован так, как это показано на рис. 2. В то время как рис. 2а отображает квантовую схему, изначально запрограммированную пользователем, рис. 2б отображает ту же схему после процесса компиляции программы и разложения ее на новую в рамках базовых вентилей («native gates»), свойственных тому квантовому компьютеру, на котором происходит моделирование и запуск пользовательской программы. К примеру, та же схема, выполненная на КВУ иной физической природы с другим набором базовых вентилей, может принципиально отличаться от искомой.

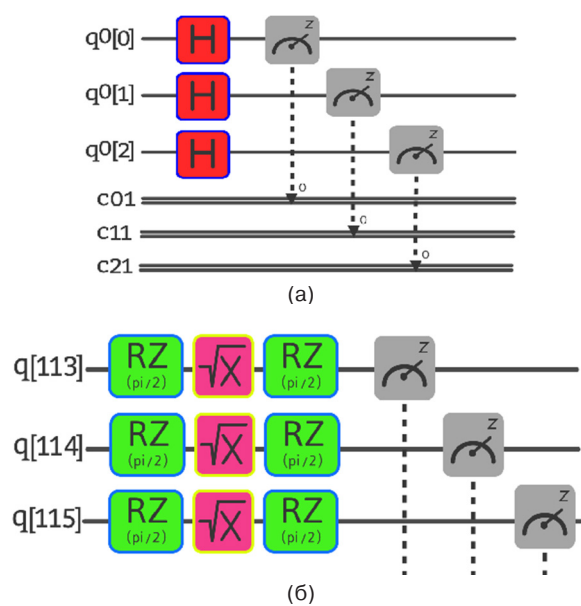


Рис. 2. Схема КГСЧ на трех кубитах для сверхпроводящего КВУ: (а) представление на высоком уровне, (б) разложение на базовые вентили КВУ (низкий уровень представления). q0[0], q0[1], q0[2], q[113], q[114], q[115] – кубит; c11, c12, c21 – классический бит; H – вентили Адамара;

«спидометр» – операция измерения кубита;

RZ – вращение квантового состояния (на угол $\pi/2$); \sqrt{X} – одна из составляющих операций Адамара [17]

⁶ IBM Quantum Platform. <https://quantum.ibm.com/>. Дата обращения 15.05.2025. / Accessed May 15, 2025.

Учитывая квантовую схему после компиляции (рис. 2б), а также имеющиеся параметры КВУ (табл. 1), можно сделать вывод, что параметрами, которые необходимо брать в расчет, будут являться следующие: T_1 , T_2 , Readout error, (sx) error.

Забегая вперед, скажем, что характеристики Frequency, Anharmonicity, Readout length опускаются умышленно по причине малого отличия наблюдаемых значений для всего набора кубит, который использовался в рамках исследовательских экспериментов. Параметры meas0 prep1 и meas1 prer0 в контексте задачи не имеют смысла – вентиль «H» применяется к кубитам на «холостом ходу», без предварительной инициализации. Более того, в соответствии с (4) предполагается, что результат работы программируемой схемы не зависит от исходного состояния кубита⁷. Наконец, из оставшегося блока ошибок, влияющих на задействованные кубиты, актуальным будет только (sx) error, что следует из схемы на рис. 2б. Вентиль, отвечающий за поворот квантового состояния (rz), по сведениям производителя используемых облачных КВУ, имеет нулевое значение ошибки и также не учитывается.

Сформулировав модель генерации СП и определив, на какие параметры облачного КВУ следует обратить внимание при интерпретации результатов, проведем практическую серию экспериментов КГСЧ на облачном квантовом компьютере.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ КГСЧ НА ОБЛАЧНОМ КВУ

Для выполнения серии опытов использовались квантовые компьютеры IBM, предоставленные пользователям в свободном доступе через облачные сервисы компании.

В целях повышения эффективности, автономности, вариативности и удобства работы с квантовыми устройствами авторами разработано приложение с использованием библиотеки с открытым исходным кодом Qiskit, реализованное с помощью графической оболочки фреймворка Qt5. Внешний вид главного окна программы, получившей название QIS (Quantum Information Security) [18], представлен на рис. 3.

При запуске программы для установления удаленного соединения с облачным КВУ (область 1) оператору необходимо ввести инициализирующие данные, указав персональный API⁸-токен, уникальный для каждого пользователя. Следующий

⁷ Как правило, по умолчанию квантовый регистр «сброшен» в состояние $|00\dots0\rangle$. [As a rule, the quantum register is “reset” to the state $|00\dots0\rangle$ by default.]

⁸ Application programming interface – программный интерфейс приложений.

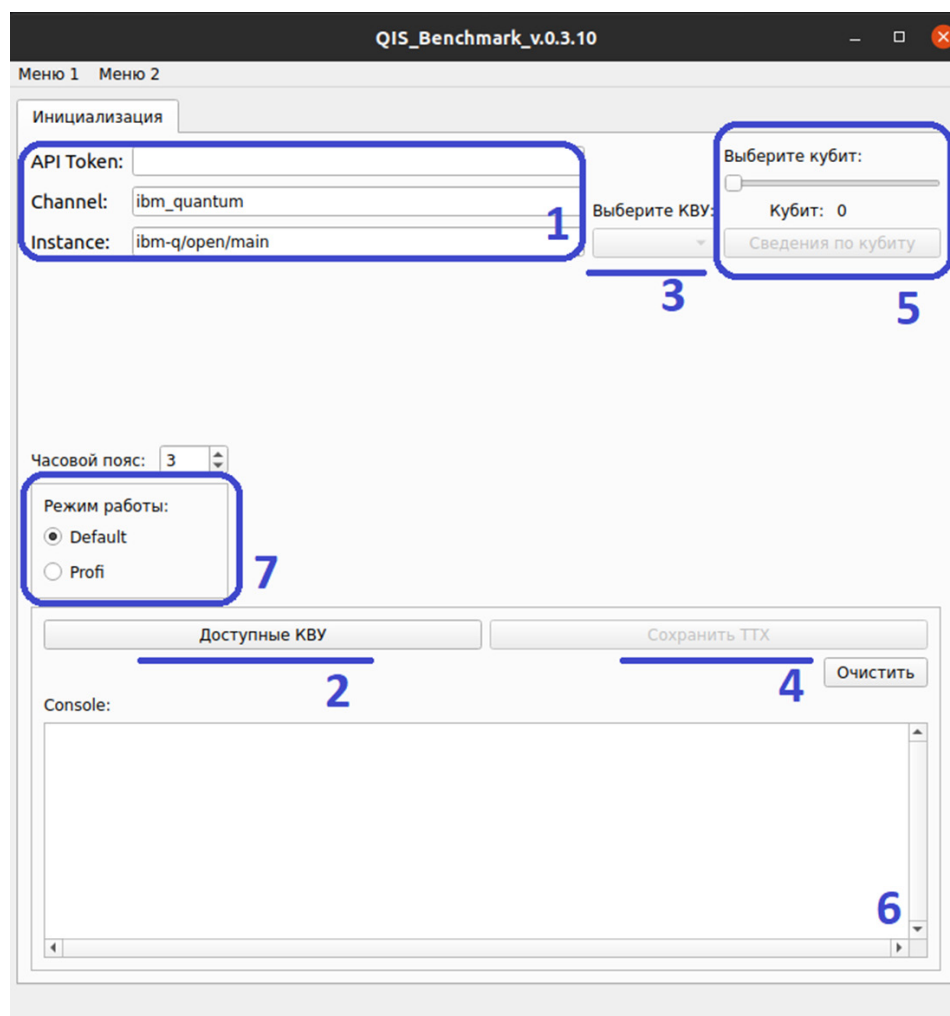


Рис. 3. Главное окно программы Q/S. ТТХ – тактико-технические характеристики

шаг – получение информации о доступных облачных КВУ (область 2). На сегодняшний день компания IBM предлагает возможность запуска квантовых схем на 12 устройствах, 9 из которых являются коммерческими. В связи с этим, при отсутствии платной подписки проводить исследования возможно только на 3 облачных системах. После получения информации об имеющихся в распоряжении пользователя КВУ будет заполнен выпадающий список (область 3) и активирована возможность получения общей (область 4) и детальной (область 5) информации по выбранному КВУ или конкретному кубиту, соответственно.

Текстовое окно предназначено для отражения хода выполнения программы (область 6). Выбор режима работы (область 7) для менее подготовленных пользователей призван упростить работу как с самим приложением, так и с облачным квантовым компьютером.

После перехода в режим Profi программа раскрывает дополнительные окна, внешний вид которых представлен на рис. 4.

Режим INIT-IDLE⁹ (рис. 4, слева) преследует цель «точечного» исследования кубит. После выбора КВУ (область 3) пользователь определяет, какие кубиты следует задействовать (область 4), к каким состояниям необходимо применить вентиль инициализации (область 5) и вентиль Адамара (область 6). Следующим шагом задаются инструкции для квантового компьютера, и схема отправляется на выполнение (область 7). Дополнительно реализована возможность скачивания результатов программы по идентификатору JobID в случае, если у пользователя отсутствует возможность дождаться завершения работы КВУ в режиме онлайн (область 8). Текстовое окно отображает ход выполнения программы (область 9).

⁹ INIT – Initialization (инициализация); IDLE – на «холостом» ходу (инициализация). Режим «INIT-IDLE» в данной работе рассмотрен не будет. [INIT is initialization; IDLE stands for on “idle” (initialization). The “INIT-IDLE” mode is not considered in the paper.]

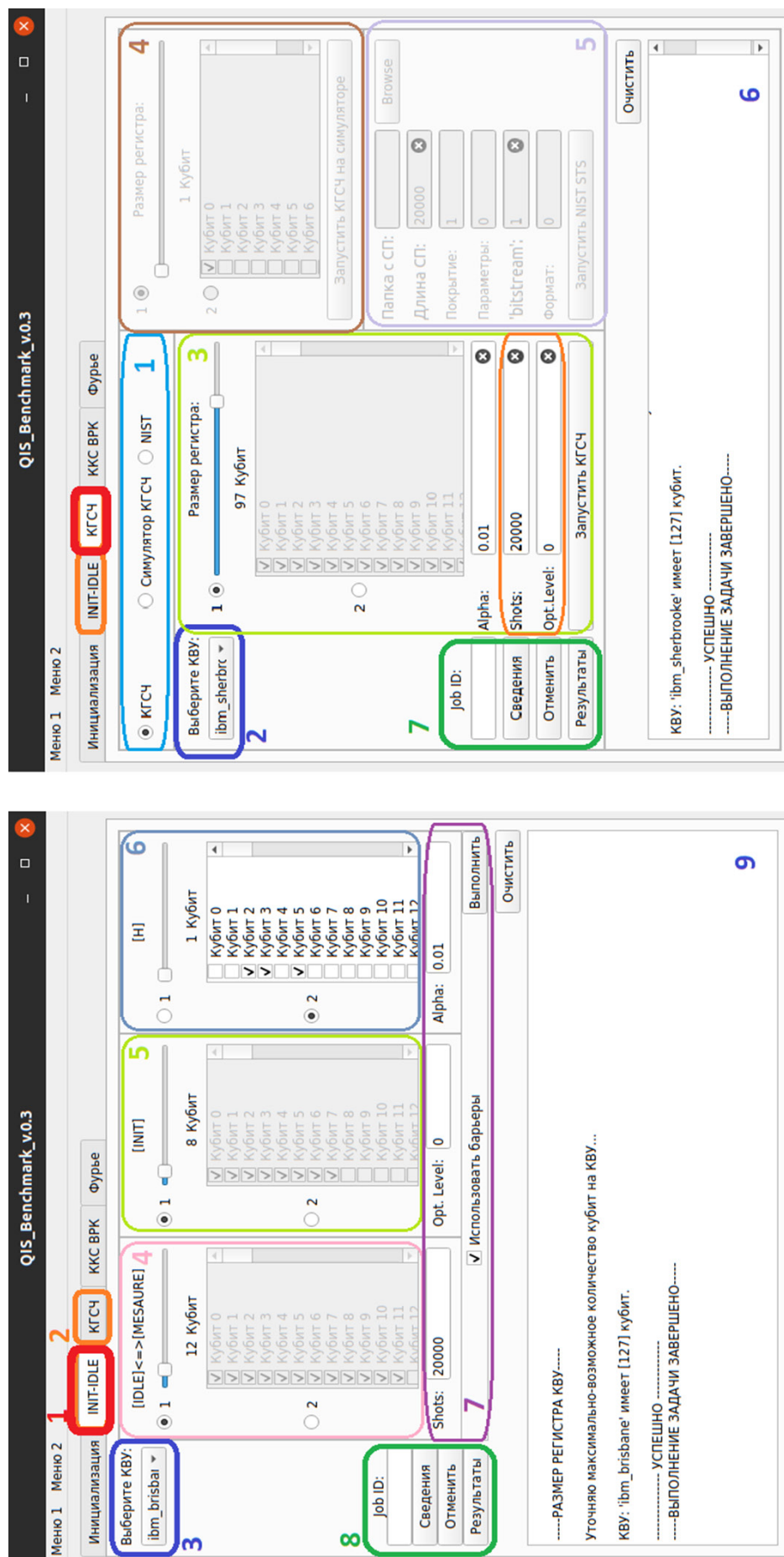


Рис. 4. Интерфейс вкладок INIT-IDLE и КГСЧ приложения QISs. ККС ВРК - квантовые криптографические системы выработки и распределения ключа; NIST (National Institute of Standards and Technology) – Национальный институт стандартов и технологий США

Режим КГСЧ (рис. 4, справа) предоставляет несколько функциональных возможностей (область 1), где выбор облачного КВУ нужен только для блока по настройке КГСЧ (область 3). В качестве тренировки процесса генерации квантовой схемы и анализа информации имеется возможность выполнения КГСЧ на симуляторе квантового компьютера (область 4). Область 5 отвечает за проведение тестирования сгенерированных СП и ПСП на предмет наличия статистической зависимости в двоичных строках. Вкладка КГСЧ также предполагает возможность сохранения полученных результатов в режиме офлайн (область 7). Все этапы работы приложения отображаются в текстовом поле 6.

Отдельно отметим один из наиболее важных параметров – Alpha (уровень значимости). При ГСЧ последовательность с каждого кубита исследуется на предмет соответствия полученного распределения «0» и «1» равномерному закону. В этих целях приложение проводит частотный побитовый тест, входящий в набор статистических тестов NIST STS¹⁰ по исследованию бинарных последовательностей¹¹. В результате тестирования пользователь получает рассчитанное статистическими методами значение P_{value} , находящееся в диапазоне от 0 (наблюдается сильное смещение) до 1 (распределение «0» и «1» равновероятно). Отметим, что не всегда значение P_{value} принимает граничные положения, в результате чего решение о случайности (равномерности распределения) СП отдается на усмотрение пользователя, который самостоятельно выбирает уровень значимости Alpha, используемый для сравнения со статистическими метриками.

В документации к тестам NIST STS рекомендуется использовать Alpha на уровне 0.001–0.01 – превышение значением P_{value} уровня значимости ($P_{\text{value}} > \alpha$) предполагает, что полученная последовательность случайна с уровнем доверия 99.9% и 99% соответственно. Выбранное значение Alpha отвечает за ошибки 1-го рода – ложноположительное заключение и ошибочное отклонение нулевой гипотезы. Так, при $\alpha = 0.01$ одна из 100 СП будет неверно отклонена.

В программе *QISs* частотный побитовый тест используется для просеивания квантовых состояний на два множества: «плохие» и «хорошие» кубиты, где пользователь для классификации квантовых состояний определяет граничное значение «Alpha».

Разделение кубит, пусть и весьма условное, однако в некоторых случаях – наглядное и необходимое.

Для проведения частотного побитового теста двоичной последовательности $\{x\}_{i=1}^n$ подсчитывается наблюдаемая статистика количества «0» и «1» по следующему правилу:

$$s_{\text{obs}} = \frac{|S_n|}{\sqrt{n}}, \quad (5)$$

где при $X_i = 2x_i - 1$:

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i. \quad (6)$$

По результатам найденного значения через дополнительную функцию ошибок, имеющую вид:

$$\text{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt, \quad (7)$$

вычисляется значение P_{value} :

$$P_{\text{value}} = \text{erfc}\left(\frac{s_{\text{obs}}}{\sqrt{2}}\right). \quad (8)$$

Если рассчитанное значение P_{value} оказывается меньше выбранного пользователем уровня значимости Alpha, заключается, что СП не удовлетворяет условию случайности¹². В противном случае, когда P_{value} больше уровня значимости, СП считается качественной, а кубит – устойчивым и пригодным для его применения в задачах ГСЧ.

Представив описание и базовые функциональные возможности программы *QISs*, а также определив, по какому принципу будет осуществляться выявление устойчивых и надежных кубит из общего числа квантовых состояний регистра КВУ, выполним генерацию СП на облачном квантовом компьютере. Для этого:

1. На вкладке КГСЧ в выпадающем списке выберем КВУ `ibm_brisbane` и дождемся, когда с облачным устройством будет установлена связь.
2. Отметим весь квантовый регистр КВУ с помощью элемента интерфейса `slider`, `ibm_brisbane` имеет 127 кубит. Выберем все 127 квантовых состояний для КГСЧ.
3. Присвоим уровню значимости «Alpha» значение 0.01.

¹⁰ The National Institute of Standards and Technology, Statistical Test Suite – Национальный институт стандартов и технологий США, набор статистических тестов.

¹¹ NIST SP 800-22. <https://csrc.nist.gov/projects/random-bit-generation/documentation-and-software>. Дата обращения 15.05.2025. / Accessed May 15, 2025.

¹² Очевидно, что частотный тест является необходимым, но недостаточным условием случайности СП. [The frequency test is clearly an essential step in assessing the randomness of the RS, though on its own, it remains insufficient to fully establish randomness.]

4. Зададим количество повторений квантовой схемы в размере 20000 (предельное доступное на момент проведения исследований). Таким образом, с каждого кубита будет получена СП длиной $2 \cdot 10^4$ бит. Суммарная длина возможного ключа составит $254 \cdot 10^4$ бит, что приблизительно равняется ~ 0.3 МБ (из расчета 127 кубит на КВУ с максимальным числом запусков квантовой схемы $2 \cdot 10^4$).
5. Уровень оптимизации квантовой схемы для поставленной задачи не имеет значения. Оставим параметр равным 0.
6. Все настройки выполнены. Запустим процесс КГСЧ.

АНАЛИЗ И ИНТЕРПРЕТАЦИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ

Этап 1. Сбор статистики

После завершения работы квантового компьютера в домашней директории пользователя будут сохранены полученные результаты (рис. 5).

Каталоги под цифрами «1» и «2» хранят файлы со СП с каждого кубита, но уже после просеивания квантовых состояний на «хорошие» и «плохие». В папках «3» и «4» содержатся файлы, полученные в результате конкатенации всех СП из каталогов «1» и «2» соответственно. Замысел авторов заключается в получении итогового случайного двоичного ключа с кубит, которые были определены как устойчивые, пригодные для реализации

процесса КГСЧ. Финальный «плохой» ключ создается для возможности оценки и сравнения полученных ключей, а, следовательно, и кубит, друг с другом. На рис. 5 снизу представлено содержимое файла с итоговой статистикой отдельного эксперимента, подсчитанной для «хороших» кубит КВУ.

Учитывая вероятностную природу вычислительного процесса квантовых компьютеров очевидно, что одного запуска может быть недостаточно. В связи с этим программа *QISs* предполагает накопление статистической информации о выполненных ранее проектах. На рис. 6 представлены собранные сведения по запуску КГСЧ на двух КВУ компании IBM.

Такой подход призван предоставить возможность наглядного прослеживания изменения в количестве и качестве кубит квантового регистра облачного устройства. Однако в данном случае нужно быть осторожным с интерпретацией результатов. В некоторых случаях незначительные колебания на считанные значения в соотношении «0» и «1» могут автоматически присвоить кубиту статус «ненадежный» (ложное срабатывание), в то время как на самом деле ориентировочное количество нулей и единиц практически не изменилось. В связи с этим нужно понимать, какую именно цель преследует пользователь:

1. Получение случайного двоичного ключа с наилучшими характеристиками исходя из возможностей КВУ (строгие требования к Alpha, увеличение параметра в зависимости от качества генерируемой СП).

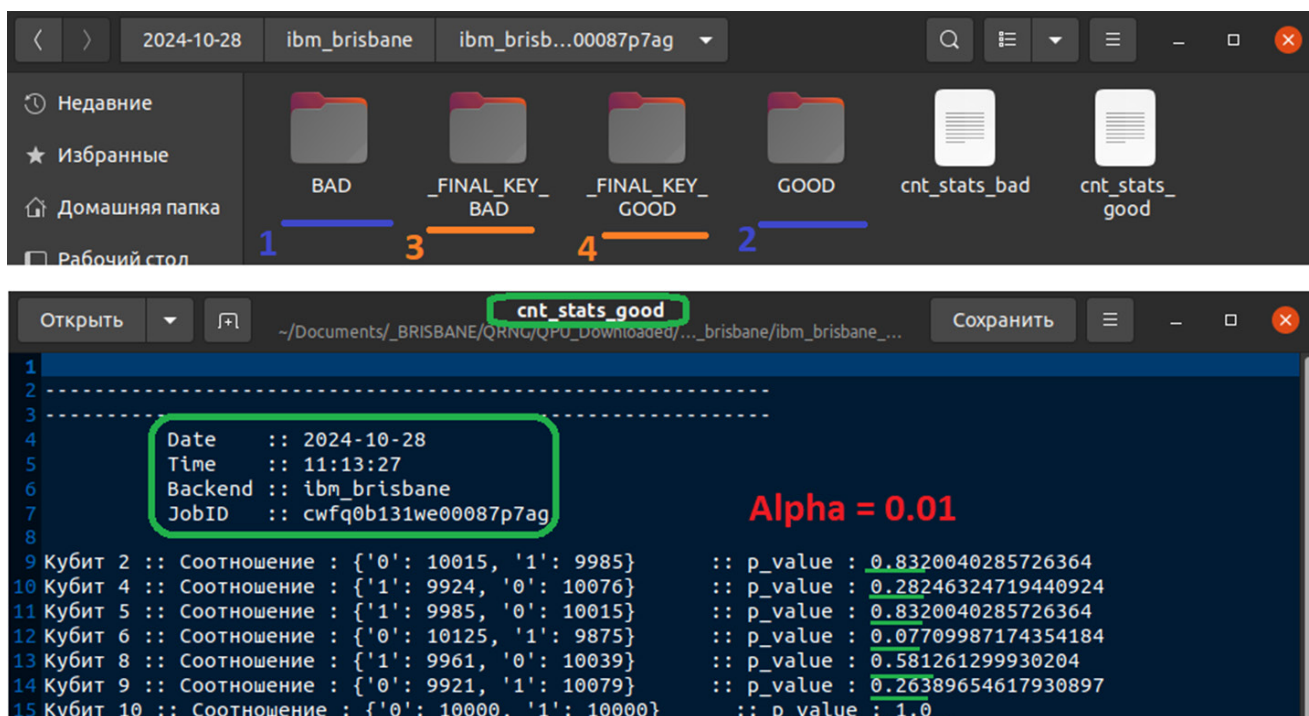


Рис. 5. Результаты работы программы *QISs* (режим КГСЧ)

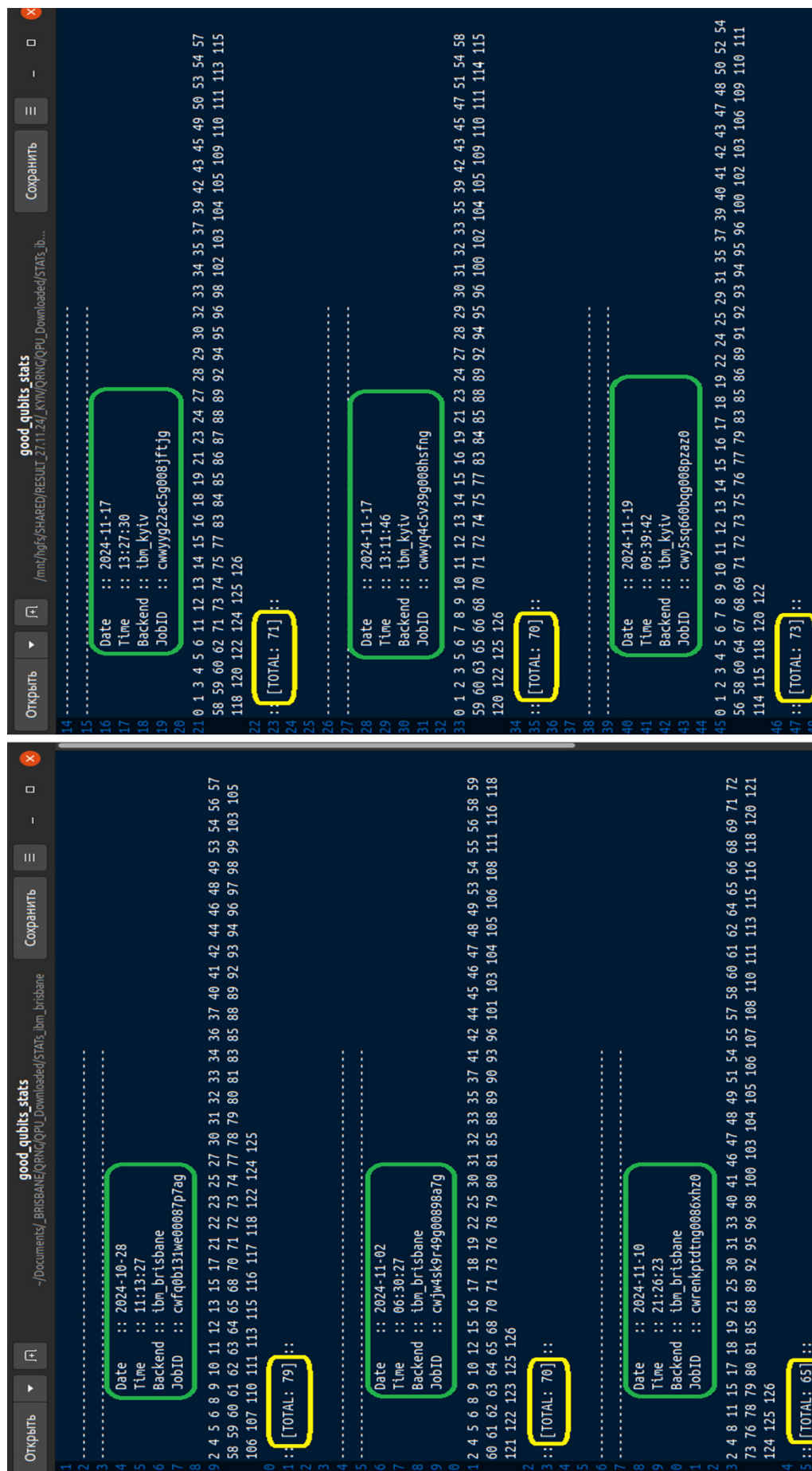


Рис. 6. Статистика по кубитам трех облачных КВУ в задачах КГСЧ

2. Оценка квантового регистра КВУ в целях определения наиболее стабильных и устойчивых кубит для выбора оптимального набора квантовых состояний в рамках будущих экспериментов (ложные требования к Alpha, допускается уменьшение до необходимого уровня).

С учетом вышесказанного можно заключить: во-первых, необходимо тщательно продумывать, какой уровень значимости следует выбрать для просеивания кубит по частотному признаку; во-вторых, важно всегда сверяться с итоговой статистикой отдельного эксперимента (рис. 5), где прописаны все значения «0» и «1» по каждому кубиту. Возможно, в некоторых случаях понадобится «ослабить» параметр Alpha. Но следует быть аккуратным – при желании получить надежную СП такой подход может привести к «набеганию» незначительных отклонений с каждого кубита в существенные разрывы между «0» и «1» в итоговом ключе после конкатенации полученных файлов.

Этап 2. Корреляционный анализ

Без проведения предварительного корреляционного анализа полученных результатов даже с «хороших» кубит не рекомендуется проводить конкатенацию сгенерированных файлов с двоичными последовательностями.

В некотором смысле, отправляя схему по реализации КГСЧ на квантовый компьютер, можно заключить, что сам КВУ не является самостоятельным ГСЧ – в нашем случае весь квантовый компьютер делится на множество более мелких генераторов СП, в качестве которых выступают отдельные кубиты облачного устройства.

Тогда возникает закономерный вопрос: можно ли в таком случае считать каждый кубит независимым источником случайных данных? Ответ напрямую влияет на то, имеются ли серьезные обоснования в пользу положительного решения о выполнении объединения малых СП друг с другом в один итоговый ключ с двух и более кубит.

Цель проверки на корреляцию СП – определить, являются ли выбранные кубиты независимыми источниками случайных чисел как по отношению к самим себе, так и в сопоставлении с другими состояниями квантового регистра.

Для двух двоичных СП $\{x\}_{i=1}^n, \{z\}_{i=1}^n$ длины $n \in \mathbb{N}$ корреляционная функция сгенерированных последовательностей задается выражением:

$$F_{\text{corr}(i)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n s_j, i = (0, n), \quad (9)$$

где $s_j = 1$, если $\overline{x \oplus z(i)} = 1$; и $s_j = -1$, в случае $x \oplus z(i) = 0$. Другими словами, s_j выполняет побитовое

сложение по модулю 2 двух последовательностей, но в контексте сравнения двоичных строк анализ выполняется с циклическим сдвигом. Инверсия применяется в целях наглядности графической интерпретации результатов – для получения единицы в случае сравнения двух идентичных последовательностей.

На данный момент текущая версия приложения *QISs* не содержит автоматического предварительного анализа получаемых СП на корреляцию, однако, на конференции «РАДИОИНФОКОМ», прошедшей в ноябре 2024 г. [19], были представлены результаты такого анализа. Итог предварительных исследований показал, что корреляция между «хорошими» кубитами не превышает порядкового значения в 10^{-3} , в то время как кубиты, генерирующие менее устойчивые и надежные последовательности, имели определенное смещение функции корреляции в пределах, достигающих значений в $4 \cdot 10^{-2}$.

Этап 3. Проверка на статистическую независимость

Наконец, завершающим этапом проверки сгенерированных СП является их исследование на статистическую независимость. Одним из возможных инструментов такой проверки может выступить набор тестов NIST STS, который включен в программу *QISs* для автономной и настраиваемой пользователем проверки СП (рис. 4, справа, область 5).

Непосредственный интерес представляет анализ итоговой СП, полученной в результате объединения двоичных строк с «хороших» кубит. Однако исследование отдельно взятой последовательности не всегда является информативным, в связи с чем более закономерным будет сравнение итоговых последовательностей, полученных за определенный промежуток времени, что позволит проследить особенности в работе квантового устройства на дистанции (длина итогового ключа, количество (не)пройденных тестов, ...).

На рис. 7 представлены данные, полученные при анализе СП с квантового компьютера *ibm_brisbane* с разницей в один месяц.

В ходе экспериментов количество устойчивых кубит незначительно изменялось, в то же время на начало и конец месяца их количество сохранилось на уровне 79 кубит. Результаты прохождения тестов не претерпели существенных изменений за исключением теста на длину последовательности подряд идущих «1», который был успешно пройден во втором случае.

Аналогичные исследования проведены для КВУ *ibm_kyvi* с разницей в 2 недели (рис. 8а) и *ibm_sherbrooke* с интервалом в 7 дней (рис. 8б).

28.10.24 // 1.580.000 бит													
RESULTS FOR THE UNIFORMITY OF P-VALUES AND THE PROPORTION OF PASSING SEQUENCES													
generator is </home/and/Documents/QISs/NIST/ResultTest_2024-11-29_16:20:15/KEY.txt>													
C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	P-VALUE	PROPORTION	STATISTICAL TEST	
3	1	2	1	1	0	1	0	1	0	0.534146	8/10	Frequency	Frequency
4	1	0	2	1	0	0	1	0	1	0.122325	9/10	BlockFrequency	BlockFrequency
4	1	0	2	1	1	0	0	1	0	0.122325	8/10	CumulativeSums	CumulativeSums
4	1	1	2	1	0	1	0	0	0	0.122325	8/10	CumulativeSums	CumulativeSums
9	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0.000000 *	3/10	Runs	Runs
4	2	1	0	2	0	1	0	0	0	0.066882	10/10	LongestRun	LongestRun
1	2	0	1	1	1	1	0	2	1	0.911413	10/10	Rank	Rank
0	3	2	1	0	0	1	1	1	1	0.534146	10/10	FFT	FFT
3	1	1	2	1	0	1	0	1	0	0.534146	10/10	NonOverlappingTemplate	NonOverlappingTemplate
2	1	2	2	1	0	0	1	1	0	0.739918	10/10	NonOverlappingTemplate	NonOverlappingTemplate
1	1	1	2	0	1	2	0	2	0.739918	10/10	NonOverlappingTemplate	NonOverlappingTemplate	
1	1	3	3	0	1	0	1	0	0	0.213309	10/10	NonOverlappingTemplate	NonOverlappingTemplate
2	1	2	1	1	0	0	1	1	1	0.911413	10/10	NonOverlappingTemplate	NonOverlappingTemplate
1	0	0	1	1	0	2	3	1	1	0.534146	10/10	NonOverlappingTemplate	NonOverlappingTemplate
1	0	1	1	1	2	1	0	1	2	0.911413	9/10	NonOverlappingTemplate	NonOverlappingTemplate
2	2	2	1	1	1	1	0	0	0	0.739918	10/10	NonOverlappingTemplate	NonOverlappingTemplate

26.11.24 // 1.580.000 бит													
RESULTS FOR THE UNIFORMITY OF P-VALUES AND THE PROPORTION OF PASSING SEQUENCES													
generator is </home/and/Documents/QISs/NIST/ResultTest_2024-11-29_16:21:10/KEY.txt>													
C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	P-VALUE	PROPORTION	STATISTICAL TEST	
8	3	2	1	1	1	0	0	1	0	1	0.534146	8/10	Frequency
9	1	2	2	0	1	0	2	2	0	0	0.534146	10/10	BlockFrequency
10	3	3	0	1	0	1	0	2	0	0	0.122325	8/10	CumulativeSums
11	5	0	0	0	1	0	1	1	2	0	0.008879	8/10	CumulativeSums
12	4	2	0	2	0	1	0	0	1	0	0.066882	8/10	Runs
13	3	1	1	2	1	0	2	0	0	0	0.350485	9/10	LongestRun
14	1	1	1	2	0	2	1	0	2	0	0.739918	10/10	Rank
15	0	0	2	1	3	1	1	1	0	1	0.534146	10/10	FFT
16	0	1	1	1	3	2	2	0	0	0	0.350485	10/10	NonOverlappingTemplate
17	2	2	2	1	0	1	1	0	0	1	0.739918	10/10	NonOverlappingTemplate
18	1	2	1	2	0	2	1	0	0	1	0.739918	10/10	NonOverlappingTemplate
19	0	1	0	2	2	1	2	0	0	2	0.534146	10/10	NonOverlappingTemplate
20	0	0	2	0	0	1	3	1	2	1	0.350485	10/10	NonOverlappingTemplate
21	1	0	0	2	0	2	1	1	2	1	0.739918	10/10	NonOverlappingTemplate
22	2	0	1	1	1	2	3	0	0	0	0.350485	10/10	NonOverlappingTemplate
23	2	0	1	1	0	3	1	0	2	0	0.350485	10/10	NonOverlappingTemplate

Рис. 7. Результаты проверки итоговой СП с КВУ ibm_brisbane

05.11.24 // 1.180.000 bit														
RESULTS FOR THE UNIFORMITY OF P-VALUES AND THE PROPORTION OF PASSING SEQUENCES														
generator is </home/amd/Documents/QISS/NIST/ResultTest_2024-11-29_16:24:08/KEY.txt>														
C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	P-VALUE	PROPORTION	STATISTICAL TEST		
9	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0.000000	*	Frequency	8/10	
5	2	0	0	1	0	1	1	0	0	0.008879		BlockFrequency	10/10	
8	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0.000000	*	CumulativeSums	8/10	
8	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0.000000	*	CumulativeSums	7/10	
3	4	0	1	0	0	1	1	0	0	0.035174		Runs	10/10	
2	1	0	0	0	1	2	0	2	2	0.534146		LongestRun	9/10	
1	0	0	1	1	3	0	1	1	2	0.534146		Rank	10/10	
2	2	1	0	2	0	0	0	2	1	0.534146		FFT	9/10	
2	2	1	1	1	2	0	0	0	0	0.739918		NonOverlappingTemplate	9/10	
1	1	0	2	2	1	1	0	1	1	0.911413		NonOverlappingTemplate	10/10	
4	1	0	1	1	0	1	0	0	2	0.122325		NonOverlappingTemplate	10/10	
1	0	2	1	2	0	1	0	2	1	0.739918		NonOverlappingTemplate	10/10	

(a)

24.11.24 // 1.280.000 bit														
RESULTS FOR THE UNIFORMITY OF P-VALUES AND THE PROPORTION OF PASSING SEQUENCES														
generator is </home/amd/Documents/QISS/NIST/ResultTest_2024-11-29_16:24:58/KEY.txt>														
C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	P-VALUE	PROPORTION	STATISTICAL TEST		
8	7	1	2	0	0	0	0	0	0	0.000001	*	Frequency	4/10	
9	3	1	1	1	0	1	1	1	0	0.739918		BlockFrequency	9/10	
10	7	0	1	1	1	0	0	0	0	0.000003	*	CumulativeSums	4/10	
11	7	2	0	1	0	0	0	0	0	0.000001	*	CumulativeSums	4/10	
12	5	1	0	0	0	1	1	0	2	0.008879		Runs	8/10	
13	1	0	2	1	0	1	1	3	1	0.534146		LongestRun	10/10	
14	0	3	0	1	1	0	1	2	1	0.534146		Rank	10/10	
15	2	2	0	0	0	2	0	0	3	0.213309		FFT	10/10	
16	1	1	0	1	0	3	2	0	1	0.534146		NonOverlappingTemplate	10/10	
17	3	0	2	1	2	0	0	0	1	0.350485		NonOverlappingTemplate	10/10	
18	4	1	2	0	1	1	0	1	0	0.122325		NonOverlappingTemplate	9/10	
19	0	1	0	1	3	1	0	2	0	0.350485		NonOverlappingTemplate	10/10	

(b)

06.11.24 // 1.040.000 bit														
RESULTS FOR THE UNIFORMITY OF P-VALUES AND THE PROPORTION OF PASSING SEQUENCES														
generator is </home/amd/Documents/QISS/NIST/ResultTest_2024-11-29_16:22:32/KEY.txt>														
C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10	P-VALUE	PROPORTION	STATISTICAL TEST		
7	2	0	0	1	0	0	0	0	0	0.000001	*	Frequency	7/10	
0	3	2	0	1	1	2	0	0	1	0.350485		BlockFrequency	10/10	
8	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0.000000	*	CumulativeSums	7/10	
8	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0.000000	*	CumulativeSums	7/10	
1	2	3	0	1	1	0	1	1	0	0.534146		Runs	10/10	
0	2	0	0	3	3	0	1	0	1	0.122325		LongestRun	10/10	
1	2	1	0	0	1	1	1	3	0	0.534146		Rank	10/10	
1	1	0	0	0	2	2	2	1	1	0.739918		FFT	10/10	
1	1	0	3	1	1	0	1	1	0	0.739918		NonOverlappingTemplate	10/10	
3	1	0	2	1	0	0	1	1	1	0.534146		NonOverlappingTemplate	10/10	
2	1	0	2	2	0	1	1	1	0	0.739918		NonOverlappingTemplate	9/10	
2	1	1	2	1	1	0	0	1	1	0.911413		NonOverlappingTemplate	9/10	

Таблица 2. Результаты выполнения исследований процесса КГСЧ на облачных КВУ

Дата	КВУ	Кол-во «хороших» кубит / длина СП	Не пройденные тесты NIST STS ¹³	Время работы схемы, с	Лучшее / Худшее соотношение «0»–«1» на всем регистре КВУ
28.10.2024	ibm_brisbane	79 / 158 · 10 ⁴	«Runs» 1 тест «RandomExcursions» 8 тестов «RandomExcursionsVariant» 18 тестов	7	10.000–10.000 / 12.684–7.316
26.11.2024	ibm_brisbane	79 / 158 · 10 ⁴	«RandomExcursions» 8 тестов «RandomExcursionsVariant» 18 тестов	8	9.999–10.001 / 7.498–12.502
05.11.2024	ibm_kyvi	59 / 118 · 10 ⁴	«Frequency» 1 тест «CumulativeSums» 2 теста	13	9.998–10.002 / 13.029–6.971
24.11.2024	ibm_kyvi	64 / 128 · 10 ⁴	«Frequency» 1 тест «CumulativeSums» 2 теста «RandomExcursions» 8 тестов «RandomExcursionsVariant» 18 тестов	14	9.999–10.001 / 15.143–4.857
06.11.2024	ibm_sherbrooke	52 / 104 · 10 ⁴	«Frequency» 1 тест «CumulativeSums» 2 теста «RandomExcursions» 8 тестов «RandomExcursionsVariant» 18 тестов	9	9.997–10.003 / 13.404–6.596
12.11.2024	ibm_sherbrooke	52 / 104 · 10 ⁴	«Frequency» 1 тест «CumulativeSums» 2 теста «RandomExcursions» 8 тестов «RandomExcursionsVariant» 18 тестов	8	9.984–10.016 / 12.596–7.404

Характер прохождения тестов для двух приведенных на рис. 8 КВУ заслуживает отдельного внимания. В то время как по отдельности СП с каждого «хорошего» кубита выбранного КВУ длиной $2 \cdot 10^4$ бит успешно проходят частотный побитовый тест, в обоих случаях конкатенация этих строк в итоговые СП (размером немногим больше 0.1 МБ) проваливают идентичные испытания, связанные с поиском соотношения «0» и «1» в исследуемой СП. Причина наблюдаемого явления – суммарное «набегание» разницы между уровнем встречаемости нулей и единиц в итоговой двоичной строке, что, в т.ч. может объясняться низкими требованиями к уровню значимости предварительного «просеивания» кубит (Alpha = 0.01). В то же время КВУ ibm_brisbane с аналогичным уровнем значимости продемонстрировал лучшие результаты.

В табл. 2 представлены итоги выполненных экспериментов.

В период исследований при уровне значимости 0.01 для каждого КВУ наименьшее и наибольшее соотношение числа устойчивых кубит составило соответственно: ibm_brisbane – 65/81, ibm_kyvi – 59/73, ibm_sherbrooke – 52/62.

Полученные результаты не являются исчерпывающими и не отражают полную детальную информацию о вычислительных возможностях исследуемых квантовых устройств. Тем не менее, на конкретном

примере авторы показали, что подход к использованию квантовых компьютеров в качестве ГСЧ может отразить некоторые качественные аспекты вычислительной системы, которые могут быть полезны в качестве предварительного анализа КВУ при оценке потенциала выбранного компьютера, а также в рамках выбора оптимального набора квантовых состояний (с наилучшими характеристиками) для решения поставленных пользователем прикладных задач.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

По результатам выполненной работы подведем следующие итоги, которые могут послужить отправными точками для предстоящих исследований.

1. Исходя из технических характеристик КВУ, оказывающих воздействие на квантовое состояние, а, следовательно, и на результат генерации СП, встает вопрос о способе определения формальной математической постановки задачи о степени зависимости между актуальными калибровочными параметрами квантового процессора по отношению к ожидаемым результатам процесса КГСЧ. Для примера, в табл. 3 для каждого эксперимента из табл. 2 представлены актуальные характеристики квантового состояния лучшего и худшего кубита всего квантового регистра.

¹³ Универсальный тест Маурера не учитывается – недостаточный объем данных. [Maurer's universal test is not taken into account due to a lack of adequate information.]

Таблица 3. Характеристики «крайних» кубит облачных КВУ компании IBM

Дата	КВУ/кубит	Соотношение «0»–«1»	T_1 , мкс	T_2 , мкс	Readout, err	(sx), err
28.10.2024	brisbane/10	10.000–10.000	290.18	276.91	0.018	$1 \cdot 10^{-4}$
	brisbane/86	12.684–7.316	90.85	115.17	0.113	$1.45 \cdot 10^{-2}$
26.11.2024	brisbane/55	9.999–10.001	243.83	120.25	0.01	$2 \cdot 10^{-4}$
	brisbane/24	7.498–12.502	226.79	98.47	0.14	$2 \cdot 10^{-4}$
05.11.2024	kyvi/5	9.998–10.002	347.03	331.96	0.008	$2 \cdot 10^{-4}$
	kyvi/90	13.029–6.971	43.91	22.84	0.114	$3.3 \cdot 10^{-3}$
24.11.2024	kyvi/122	9.999–10.001	211.81	173.1	0.002	$2 \cdot 10^{-4}$
	kyvi/65	15.143–4.857	201.52	126.32	0.092	$2 \cdot 10^{-3}$
06.11.2024	sherbr-ke/23	9.997–10.003	220.73	24.85	0.009	$4 \cdot 10^{-4}$
	sherbr-ke/56	13.404–6.596	173.46	16.9	0.033	$3 \cdot 10^{-4}$
12.11.2024	sherbr-ke/63	9.984–10.016	217.35	133.31	0.035	$2 \cdot 10^{-4}$
	sherbr-ke/9	12.596–7.404	469.69	70.2	0.035	$2 \cdot 10^{-4}$

Некоторые результаты являются неочевидными. Однако авторы высказывают предположение, что часть кубит может выдавать плохие результаты, в т.ч. при активации соседних квантовых состояний, оказывающих побочное воздействие на искомый кубит. Проверка сформулированного допущения, а также составление математической модели зависимости тактико-технических характеристик КВУ с результатами работы схемы КГСЧ являются следующими возможными направлениями исследования.

2. При использовании всего квантового процессора максимальная длина СП может составить $254 \cdot 10^4$ бит, что дает выборку в ~ 0.3 МБ при разрядности в 127 кубит и $\max_shots = 20.000$ (количество запусков квантовой схемы). В таком случае, учитывая время обработки квантовой схемы, самым быстрым КВУ является *ibm_brisbane* (7 секунд), что в идеальном случае предлагает скорость ГСЧ ~ 44 кБ/сек. Очевидно, такая скорость накладывает ограничения на области применения КВУ в качестве КГСЧ. Более того, как показывают эксперименты, около половины кубит окажется непригодным для получения устойчивой СП. Однако при должном масштабировании разрядности квантовых процессоров и нивелировании существующих ошибок и помех оборудования имеющиеся ограничения могут быть преодолены,

что откроет новые возможности применения КВУ в задачах обеспечения информационной безопасности.

3. Тесты NIST STS предложены в 2010 г. и в определенном смысле являются несколько устаревшим способом проверки СП. Авторам видится целесообразным проведение дополнительного исследования генерируемых СП иными, более современными методиками, которые смогут установить не только статистическую (не)зависимость данных, но и характер и природу самого ГСЧ, определив, насколько близко он соответствует свойствам истинно физического КГСЧ.

4. Предложенный подход может войти в расширенный состав набора тестов и программ по оценке технических характеристик исследуемого КВУ. С минимальными временными затратами можно получить предварительную информацию о скорости выполнения квантовых схем на выбранном КВУ. Результат КГСЧ предоставляет сведения об оптимальном наборе кубит, которые могут быть в дальнейшем учтены пользователем при проектировании более сложных и требовательных к техническим ресурсам квантовых схем.

5. В настоящее время многочисленными исследователями ведутся работы, направленные на разработку методов по преодолению свойств декогерентности квантовых состояний [20–22]. Предлагаемые

подходы в большинстве случаев сводятся к применению схем коррекции ошибок и к использованию абстрактного объекта – логического кубита, под которым следует понимать множество физических кубит, совокупно отражающих работу единичного квантового состояния. Однако в контексте задачи КГСЧ, ни применение корректирующих кодов, ни переход к логическим кубитам не видится целесообразным, т.к. идея генерации СП на квантовом компьютере обоснована исключительно при работе с кубитами, выступающими в роли независимых физических ГСЧ.

Авторы планируют включить задачу КГСЧ на облачных КВУ в набор тестов по исследованию вычислительного потенциала квантовых компьютеров для профильных специалистов по информационной безопасности. Программный комплекс будет включать в себя 3 типовых теста: КГСЧ, симуляция протокола ККС ВРК, выполнение квантового преобразования Фурье. Разрабатываемый алгоритм тестирования будет быстрым, простым, доступным с точки зрения затрачиваемых ресурсов КВУ, воспроизводимым, масштабируемым и однозначно интерпретируемым.

С актуальной версией программного кода приложения *QISs*, а также с результатами исследований, можно ознакомиться в репозитории проекта на платформе GitHub¹⁴.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках проведенного исследования авторами разработано приложение, предлагающее возможность проектирования и удаленного выполнения квантовых схем по ГСЧ на облачных КВУ. В целях определения потенциальной (нежелательной) зависимости между квантовыми состояниями, выступающими в качестве самостоятельных КГСЧ, приложение предлагает дополнительный функционал по корреляционному анализу сгенерированных СП.

По результатам работы программы с помощью частотного побитового теста и на основании выбранного пользователем уровня значимости приложение предоставляет сведения о наиболее и наименее стабильных кубитах с точки зрения надежности и качества применения к квантовым состояниям преобразования Уолша – Адамара.

Для формирования сведений о случайности распределения нулей и единиц в сгенерированных последовательностях в программе предусмотрена возможность проверки полученных СП набором статистических тестов NIST STS.

Предложенный в статье подход может оказаться полезным инструментом в руках исследователей при решении следующих задач: выявление оптимального набора кубит квантового процессора, генерация двоичных СП на квантовых компьютерах, определение некоторых технических возможностей исследуемых квантовых устройств.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы выражают благодарность студенту РТУ МИРЭА К.Е. Комогорову за оперативную помощь в подготовке bash-скрипта, первичную апробацию программных возможностей приложения *QISs* и предоставление собственного репозитория GitHub для размещения разработанной программы в открытом доступе.

ACKNOWLEDGMENTS

The authors thank K.E. Komogorov, a student at RTU MIREA, for his prompt assistance in preparing the bash script, initial testing of the QISs application software capabilities, and providing his own GitHub repository for hosting the developed program in the public domain.

Вклад авторов

Все авторы в равной степени внесли свой вклад в исследовательскую работу.

Authors' contribution

All authors contributed equally to the research work.

¹⁴ GitHub / QISs. <https://github.com/cyberravenman/QISs>. Дата обращения 15.05.2025. / Accessed May 15, 2025.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Proctor T., Young K., Baczewski A.D., Blume-Kohout R. Benchmarking quantum computers: *arXiv*. 2024. arXiv:2407.08828. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2407.08828>
2. Amico M., Zhang H., Jurcevic P., et al. Defining Standard Strategies for Quantum Benchmarks. *IBM Publications*. 2023. URL: <https://research.ibm.com/publications/defining-standard-strategies-for-quantum-benchmarks>. Дата обращения 15.05.2025.
3. Acuaviva A., Aguirre D., Pena R., Sanz M. Benchmarking Quantum Computers: Towards a Standard Performance Evaluation Approach: *arXiv*. 2024. arXiv:2407.10941. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2407.10941>
4. Eisert J., Hangleiter D., Walk N., et al. Quantum certification and benchmarking. *Nat. Rev. Phys.* 2020;2:382–390. <https://doi.org/10.1038/s42254-020-0186-4>
5. Крючков А.А. О необходимости принятия единого стандарта по оценке производительности и сертификации квантовых вычислительных устройств. *Информационно-экономические аспекты стандартизации и технического регулирования. Сборник научных трудов участников I Научно-практической конференции «Стандартизация: траектория науки», посвященной 100-летию деятельности ФГБУ «Институт стандартизации»*. 2024;6(81):43–49.
6. Wack A., Paik H., Javadi-Abhari A., Jurcevic P., Faro I., Gambetta J.M., Johnson B.R. Scale, Quality, and Speed: three key attributes to measure the performance of near-term quantum computers. *arXiv*. 2021. arXiv:2110.14108. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2110.14108>
7. McKay D.C., Hincks I., Pritchett E.J., Carroll M., Govia L.C.G., Merkel S.T. Benchmarking Quantum Processor Performance at Scale. *arXiv*. 2023. arXiv:2311.05933. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2311.05933>
8. Amico M., Zhang H., Jurcevic P., Bishop L.S., Nation P., Wack A., McKay D.C. Defining Standard Strategies for Quantum Benchmarks. *arXiv*. 2023. arXiv:2303.02108 <https://doi.org/10.48550/arXiv.2303.02108>
9. Shor P.W. Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring. In: *Proceedings 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*. IEEE; 1994. P. 124–134. <https://doi.org/10.1109/SFCS.1994.365700>
10. Балыгин К.А., Кулик С.П., Молотков С.Н. Реализация квантового генератора случайных чисел: экстракция доказуемо случайных битовых последовательностей из коррелированных марковских цепочек. *Письма в ЖЭТФ*. 2024;119(7):533–544. <https://doi.org/10.31857/S1234567824070115>
11. Гайдаш А.А., Гончаров Р.К., Козубов А.В., Яковлев П.В. Математическая модель квантового генератора случайных чисел на основе флуктуации вакуума. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления*. 2024;20(2):136–153. <https://doi.org/10.21638/spbu10.2024.202>
12. Петренко А.А., Ковалев А.В., Бугров В.Е. Генерация случайных чисел с использованием массива связанных лазеров на основе микростолбиков с квантовыми точками. *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*. 2021;21(6):962–968. <https://doi.org/10.17586/2226-1494-2021-21-6-962-968>
13. Орлов М.А., Нечаев К.А., Резниченко С.А. Оценка статистических свойств и криптографической стойкости случайных последовательностей, полученных квантовым компьютером IBM. *Безопасность информационных технологий*. 2023;30(1):14–26. <http://doi.org/10.26583/bit.2023.1.01>
14. Li Y., Fei Y., Wang W., et al. Quantum random number generator using a cloud superconducting quantum computer based on source-independent protocol. *Sci Rep.* 2021;11:23873. <https://doi.org/10.1038/s41598-021-03286-9>
15. Salehi R., Razaghi M., Fotouhi B. Hybrid Hadamard and Controlled-Hadamard Based Quantum Random Number Generators in IBM QX. *Physica Scripta*. 2022;97(6):065101. <https://doi.org/10.1088/1402-4896/ac698b>
16. Yadav A., Mishra S., Pathak A. Partial loopholes free device-independent quantum random number generator using IBM's quantum computers. *Physica Scripta*. 2024;99(11):115103. <https://doi.org/10.1088/1402-4896/ad7c02>
17. Feynman R.P. Quantum Mechanical Computers. *Optics News*. 1985;11(2):11–20. URL: https://www.optica-opn.org/home/articles/on/volume_11/issue_2/features/quantum_mechanical_computers/. Дата обращения 15.05.2025. / Accessed May 15, 2025.
18. Крючков А.А. *QISs v.0.3.9: свидетельство о государственной регистрации Программы для ЭВМ RU 2025613655 РФ*. Заявка № 2025611456; заявл. 28.01.2025; опубл. 13.02.2025. Бюл. № 2.
19. Крючков А.А., Комогоров К.Е. Моделирование процесса генерации случайных чисел на квантовых вычислительных устройствах. В сб.: *Материалы VIII НПК «Актуальные проблемы и перспективы радиотехнических и инфокоммуникационных систем»* (18–22 ноября 2024 г., Москва). М.: РТУ МИРЭА; 2024. С. 501–506.
20. Acharya R., Abanin D.A., Aghababaie-Beni L., et al. Quantum error correction below the surface code threshold. *Nature*. 2025;638:920–926. <https://doi.org/10.1038/s41586-024-08449-y>
21. Verma S., Kumari S.S., Kumar R.S. Topological quantum error correction with semions. *Int. J. Phys. Math.* 2024;6(2):44–47. <https://doi.org/10.33545/26648636.2024.v6.i2a.95>
22. Webster M., Browne D. Engineering Quantum Error Correction Codes Using Evolutionary Algorithms. *IEEE Trans. Quantum Eng.* 2025;6:3100514. <https://doi.org/10.1109/TQE.2025.3538934>

REFERENCES

1. Proctor T., Young K., Baczewski A.D., Blume-Kohout R. Benchmarking quantum computers. *arXiv*. 2024. arXiv:2407.08828. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2407.08828>
2. Amico M., Zhang H., Jurcevic P., et al. Defining Standard Strategies for Quantum Benchmarks. *IBM Publications*. 2023. Available from URL: <https://research.ibm.com/publications/defining-standard-strategies-for-quantum-benchmarks>. Accessed May 15, 2025.

3. Acuaviva A., Aguirre D., Pena R., Sanz M. Benchmarking Quantum Computers: Towards a Standard Performance Evaluation Approach. *arXiv*. 2024. arXiv:2407.10941. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2407.10941>
4. Eisert J., Hangleiter D., Walk N., et al. Quantum certification and benchmarking. *Nat. Rev. Phys.* 2020;2:382–390. <https://doi.org/10.1038/s42254-020-0186-4>
5. Kryuchkov A.A. On the need to adopt a single standard for evaluating the performance and certification of quantum computers. *Informatsionno-ehkonomicheskie aspekty standartizatsii i tekhnicheskogo regulirovaniya = Information and Economic Aspects of Standardization and Technical Regulation*. 2024;6(81):43–49 (in Russ.).
6. Wack A., Paik H., Javadi-Abhari A., Jurcevic P., Faro I., Gambetta J.M., Johnson B.R. Scale, Quality, and Speed: three key attributes to measure the performance of near-term quantum computers. *arXiv*. 2021. arXiv:2110.14108. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2110.14108>
7. McKay D.C., Hincks I., Pritchett E.J., Carroll M., Govia L.C.G., Merkel S.T. Benchmarking Quantum Processor Performance at Scale. *arXiv*. 2023. arXiv:2311.05933. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2311.05933>
8. Amico M., Zhang H., Jurcevic P., Bishop L.S., Nation P., Wack A., McKay D.C. Defining Standard Strategies for Quantum Benchmarks. *arXiv*. 2023. arXiv:2303.02108 <https://doi.org/10.48550/arXiv.2303.02108>
9. Shor P.W. Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring. In: *Proceedings 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*. IEEE; 1994. P. 124–134. <https://doi.org/10.1109/SFCS.1994.365700>
10. Balygin K.A., Kulik S.P., Molotkov S.N. Implementation of a Quantum Generator of Random Numbers: Extraction of Provably Random Bit Sequences from Correlated Markov Chains. *Jetp. Lett.* 2024;119(7):538–548. <https://doi.org/10.1134/S0021364024600575>
[Original Russian Text: Balygin K.A., Kulik S.P., Molotkov S.N. Implementation of a Quantum Generator of Random Numbers: Extraction of Provably Random Bit Sequences from Correlated Markov Chains. *Pis'ma v Zhurnal eksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki (Pis'ma v ZHEHTF)*. 2024;119(7):533–544 (in Russ.). <https://doi.org/10.31857/S1234567824070115>]
11. Gaidash A.A., Goncharov R.K., Kozubov A.V., Yakovlev P.V. Mathematical model of random number generator based on vacuum fluctuations. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Prikladnaya matematika. Informatika. Protssy upravleniya = Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*. 2024;20(2):136–153 (in Russ.). <https://doi.org/10.21638/spbu.10.2024.202>
12. Petrenko A.A., Kovalev A.V., Bougrov V.E. Random number generation with arrays of coupled quantum-dot micropillar lasers. *Nauchno-tekhnicheskii vestnik informatsionnykh tekhnologii, mekhaniki i optiki = Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*. 2021;21(6):962–968 (in Russ.). <https://doi.org/10.17586/2226-1494-2021-21-6-962-968>
13. Orlov M.A., Nechaev K.A., Reznichenko S.A. Evaluation of statistical properties and cryptographic strength of random sequences obtained by an IBM quantum computer. *Bezopasnost' informatsionnykh tekhnologii = IT Security (Russia)*. 2023;30(1):14–26 (in Russ.). <http://doi.org/10.26583/bit.2023.1.01>
14. Li Y., Fei Y., Wang W., et al. Quantum random number generator using a cloud superconducting quantum computer based on source-independent protocol. *Sci Rep.* 2021;11:23873. <https://doi.org/10.1038/s41598-021-03286-9>
15. Salehi R., Razaghi M., Fotouhi B. Hybrid Hadamard and Controlled-Hadamard Based Quantum Random Number Generators in IBM QX. *Physica Scripta*. 2022;97(6):065101. <https://doi.org/10.1088/1402-4896/ac698b>
16. Yadav A., Mishra S., Pathak A. Partial loopholes free device-independent quantum random number generator using IBM's quantum computers. *Physica Scripta*. 2024;99(11):115103. <https://doi.org/10.1088/1402-4896/ad7c02>
17. Feynman R.P. Quantum Mechanical Computers. *Optics News*. 1985;11(2):11–20. Available from URL: https://www.optica-opn.org/home/articles/on/volume_11/issue_2/features/quantum_mechanical_computers/. Accessed May 15, 2025.
18. Kryuchkov A.A. *QISs_v.0.3.9*: Computer Program RU2025613655 RF. Publ. 13.02.2025 (in Russ.).
19. Kryuchkov A.A., Komogorov K.E. Simulation of the random number generation process on quantum computing devices. In: *Proceedings of the 8th Scientific and Practical Conference "Actual Problems and Prospects of Radio Engineering and Infocommunication Systems."* Moscow: RTU MIREA; 2024. P. 501–506 (in Russ.).
20. Acharya R., Abanin D.A., Aghababaie-Beni L., et al. Quantum error correction below the surface code threshold. *Nature*. 2025;638:920–926. <https://doi.org/10.1038/s41586-024-08449-y>
21. Verma S., Kumari S.S., Kumar R.S. Topological quantum error correction with semions. *Int. J. Phys. Math.* 2024;6(2):44–47. <https://doi.org/10.33545/26648636.2024.v6.i2a.95>
22. Webster M., Browne D. Engineering Quantum Error Correction Codes Using Evolutionary Algorithms. *IEEE Trans. Quantum Eng.* 2025;6:3100514. <https://doi.org/10.1109/TQE.2025.3538934>

Об авторах

Корольков Андрей Вячеславович, к.т.н., член-корреспондент Академии криптографии Российской Федерации, член-корреспондент Академии Инженерных наук им. А.М. Прохорова Российской Федерации, заведующий кафедрой информационной безопасности, Институт искусственного интеллекта, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет», (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: korolkov@mirea.ru. SPIN-код РИНЦ 3849-6868, <https://orcid.org/0009-0003-4862-4816>

Крючков Андрей Андреевич, старший преподаватель, кафедра информационной безопасности, Институт искусственного интеллекта, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: kryuchkov_a@mirea.ru. SPIN-код РИНЦ 7117-7238, <https://orcid.org/0009-0002-4750-6204>

About the Authors

Andrey V. Korolkov, Cand. Sci. (Eng.), Corresponding Member of the Academy of Cryptography of the Russian Federation, Corresponding Member of the A.M. Prokhorov Academy of Engineering Sciences of the Russian Federation, Head of the Department of Information Security, Institute of Artificial Intelligence, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: korolkov@mirea.ru. RSCI SPIN-code 3849-6868, <https://orcid.org/0009-0003-4862-4816>

Andrey A. Kryuchkov, Senior Lecturer, Department of Information Security, Institute of Artificial Intelligence, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: kryuchkov_a@mirea.ru. RSCI SPIN-code 7117-7238, <https://orcid.org/0009-0002-4750-6204>

УДК 654.1

<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-6-47-62>

EDN EYOGWG



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Максимально правдоподобные оценки угла прихода детерминированных и случайных сигналов в многоэлементных антенных решетках различной конфигурации

О.В. Болховская[@]

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, 603950 Россия

[@] Автор для переписки, e-mail: obol@rf.unn.ru

• Поступила: 02.04.2025 • Доработана: 23.05.2025 • Принята к опубликованию: 02.10.2025

Резюме

Цели. Целью работы является исследование свойств максимально правдоподобных (МП) оценок углов прихода детерминированных и случайных сигналов в многоэлементных антенных решетках, разработка эффективных алгоритмов нахождения МП-оценок и определение точных значений пороговых отношений сигнал/шум, ниже которых возникают аномально большие ошибки, существенно превышающие теоретически минимальные значения, определяемые границами Крамера – Рао.

Методы. Теория оптимального приема сигналов, численное моделирование системы обработки сигналов в многоэлементных антенных решетках на основе разработанных алгоритмов нахождения МП-оценок, сравнение среднеквадратичных ошибок полученных оценок с теоретически минимальными границами Крамера – Рао, найденными аналитически.

Результаты. В широком интервале значений отношений сигнал/шум выполнено численное исследование характеристик МП-оценок угла прихода детерминированных и случайных сигналов в многоэлементных линейных и круговых антенных решетках. Предложена методика определения с высокой точностью пороговых значений отношений сигнал/шум, ниже которых возникают аномально большие ошибки измерений. С помощью численного моделирования показано, что когерентная и некогерентная обработка сигналов дают одинаковые предельно достижимые точности при одинаковых отношениях сигнал/шум, превышающих пороговые значения. В то же время, на величину порога существенно влияют вид полезного сигнала и метод его обработки. Выявлены общие закономерности между этими пороговыми значениями, конфигурациями антенных решеток, типом обрабатываемого сигнала и используемым алгоритмом оценивания.

Выводы. Полученные численные и аналитические результаты дают возможность выработать рекомендации по выбору конфигураций многоэлементных антенных решеток и основных параметров систем высокоточного пеленгования источников излучения различных сигналов, что позволит избежать возникновения аномально больших ошибок измерений. Результаты могут быть использованы непосредственно при расчете характеристик проектируемых систем.

Ключевые слова: многоэлементные антенны, оценка угла прихода сигнала, точность оценивания, граница Крамера – Рао, пороговые значения отношений сигнал/шум

Для цитирования: Болховская О.В. Максимально правдоподобные оценки угла прихода детерминированных и случайных сигналов в многоэлементных антенных решетках различной конфигурации. *Russian Technological Journal*. 2025;13(6):47–62. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-6-47-62>, <https://www.elibrary.ru/EYOGWG>

Прозрачность финансовой деятельности: Автор не имеет финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

RESEARCH ARTICLE

Maximum likelihood estimates of the angle-of-arrival of deterministic and random signals in multielement antenna arrays of various configurations

Olesya V. Bolkhovskaya[@]

National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, 603950 Russia

[@] Corresponding author, e-mail: obol@rf.unn.ru

• Submitted: 02.04.2025 • Revised: 23.05.2025 • Accepted: 02.10.2025

Abstract

Objectives. The purpose of this work is to study in detail the properties of maximum likelihood (ML) estimates of the angles-of-arrival of deterministic and random signals in multielement antenna arrays, to develop effective algorithms for finding ML estimates and to determine the exact values of threshold signal-to-noise ratios (SNR), below which abnormally large errors occur significantly in excess of the theoretically minimum values determined by the Cramér–Rao bounds.

Methods. The methods used include: the theory of optimal signal detection; intensive numerical simulation of the signal processing system in multielement antenna arrays based on the developed algorithms for finding ML estimates; and comparison of the standard errors of the estimates obtained by means of the theoretically minimal analytically established Cramér–Rao bounds.

Results. Numerical study of the characteristics of ML estimates of the direction of arrival for deterministic and random signals was performed over a wide range of SNRs in multielement linear and circular antenna arrays. The study proposes a method for high-precision determination of threshold SNR values, below which anomalously large measurement errors occur. Numerical simulations demonstrate that coherent and incoherent signal processing yield the same ultimately achievable accuracy at the same SNR values above the threshold. At the same time, the threshold value is significantly influenced by the type of signal and the processing method. The general relationships between these threshold values, antenna array configurations, the type of signal processed, and the estimation algorithm used were identified.

Conclusions. The numerical and analytical results obtained allow recommendations to be developed relating to the choice of multielement antenna arrays configurations and the main parameters of systems for high-precision bearing of radiation sources of various signals. These enable abnormally large measurement errors to be avoided. The results can be directly utilized in the calculation of characteristics of systems under design.

Keywords: multielement antennas, estimation of the signal arrival angle, estimation accuracy, Cramér–Rao lower bound, CRLB, thresholds of signal-to-noise ratio

For citation: Bolkhovskaya O.V. Maximum likelihood estimates of the angle-of-arrival of deterministic and random signals in multielement antenna arrays of various configurations. *Russian Technological Journal*. 2025;13(6):47–62. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-6-47-62>, <https://www.elibrary.ru/EYOGWG>

Financial disclosure: The author has no financial or proprietary interest in any material or method mentioned.

The author declares no conflicts of interest.

ВВЕДЕНИЕ

Задача оптимального обнаружения и оценивания направления на источник сигнала, находящийся в дальней зоне многоэлементной антенной решетки (АР), возникает во многих областях, например, в радиолокации, радиосвязи, гидролокации, гидроакустике, навигации, сейсмологии и радиоастрономии. В силу большой практической значимости решению этой задачи при различных предположениях о временной структуре сигнала, геометрии АР, параметрах волнового фронта, количестве источников излучения и т.д., посвящено большое число публикаций, например, [1–8]. Среди имеющихся в этой области исследований можно также выделить ряд строгих математических работ, в которых при различных предположениях найдены теоретические пределы для оценок угла прихода полезного сигнала, основанные на максимально правдоподобном (МП) подходе [9–16].

Основная причина широкого использования метода максимального правдоподобия в общей теории оптимального оценивания параметров сигналов заключается в том, что при определенных условиях регулярности функции правдоподобия, больших отношениях сигнал/шум и больших объемах выборки максимально правдоподобные оценки (МП-оценки) являются асимптотически несмещенными, и их дисперсии достигают теоретически минимальной величины, определяемой нижней границей Крамера – Рао (Cramér–Rao low bound, CRLB) [17, 18].

В то же время известно, что при оценивании параметров сигналов МП-методом в области малых отношений сигнал/шум ниже некоторого порогового значения возникают аномально большие ошибки, существенно превышающие CRLB. Следует отметить, что пороговый эффект в теории МП-оценивания был обнаружен достаточно давно. Описание и первоначальное исследование этого эффекта выполнено в ряде классических монографий, посвященных теории оптимального оценивания параметров сигналов, например, в [19, 20].

Попытки создания аналитического аппарата для анализа точности МП-оценок параметров сигналов

при малых отношениях сигнал/шум сделаны в известных математических работах [21–23], в которых были найдены и исследованы более точные нижние границы для дисперсий МП-оценок в области малых отношений сигнал/шум. Наиболее полный обзор подходов, используемых в этих работах, и полученных в них результатов можно найти в [13, 14, 24]. К сожалению, проведенные исследования не увенчались крупными прорывами в этой области в силу большой сложности аналитического описания возникающих при этом существенно нелинейных задач, специфических для каждого сценария построения системы оценивания и реализации алгоритма нахождения МП-оценок.

Несмотря на это, в силу большой практической важности общей задачи повышения точности оценивания параметров сигналов, изучение пороговых эффектов и методов снижения пороговых значений отношений сигнал/шум, при которых начинают возникать аномально большие ошибки, продолжает оставаться актуальным. Это следует из ряда научных статей зарубежных и российских авторов, опубликованных в последние годы по этой тематике [25–32].

Одним из перспективных методов исследования поведения МП-оценок в области малых и пороговых отношений сигнал/шум является прямое численное моделирование систем обработки сигналов [14]. Современная вычислительная техника позволяет провести достаточно большое количество численных экспериментов по обработке сигналов при разных значениях отношений сигнал/шум, определить с высокой точностью сами пороговые значения и достижимые точности МП-оценок угла прихода в области малых значений отношений сигнал/шум для различных конфигураций многоэлементных АР и видов принимаемых сигналов [15, 16, 33–40].

В представленной статье выполнено детальное численное исследование точности МП-оценок углов прихода детерминированных и случайных сигналов в многоэлементных АР. Анализ проведен для наиболее распространенных конфигураций эквидистантных АР – линейной и круговой с различным числом элементов.

1. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ ВОЛНОВОГО ФРОНТА ДЛЯ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ И СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ

Рассмотрим задачу оценивания угла прихода θ сигнала с плоским волновым фронтом от источника, находящегося в дальней зоне, многоэлементной АР с линейной и круговой конфигурацией. Будем полагать, что расстояние d между антенными элементами в обоих случаях составляет половину длины волны ($\lambda/2$). На рис. 1 изображены схемы приема сигналов рассматриваемыми АР и соответствующие им диаграммы направленности.

Будем полагать, что АР состоит из M элементов и для них выполняется условие узкополосности, т.е. время распространения сигнала на апертуре решетки много меньше времени корреляции комплексной амплитуды сигнала. Тогда комплексный вектор отсчетов наблюдаемых сигналов $\mathbf{x}[n] = (x_1[n], \dots, x_M[n])^T$ размерности M можно записать в виде:

$$\mathbf{x}[n] = a[n]\mathbf{s} + \boldsymbol{\xi}[n], \quad (1)$$

где $a[n]$ – комплексная амплитуда полезного сигнала, излучаемого источником, одинаковая на всех элементах АР; $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_M)^T$ – неизвестный вектор плоского волнового фронта (вектор-фазор) принимаемого полезного сигнала, зависящий от угла прихода сигнала по отношению к нормали к апертуре антенны θ ; знак «Т» означает транспонирование; $\boldsymbol{\xi}[n] = (\xi_1[n], \dots, \xi_M[n])^T$ – комплексный гауссовский вектор независимых собственных шумов в антенных элементах с нулевыми средними значениями и дисперсиями σ^2 ; $\boldsymbol{\xi}[n] \sim CN(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$, где n – дискретные моменты времени взятия выборок; CN – комплексное нормальное распределение; \mathbf{I} – единичная матрица.

Предполагается, что оценивание угла прихода сигнала осуществляется на основании обработки N отсчетов наблюдаемого вектора $\mathbf{x}[n]$, $n = 1 - N$. Далее мы будем рассматривать две наиболее часто используемые модели излучаемого источником сигнала $a[n]$:

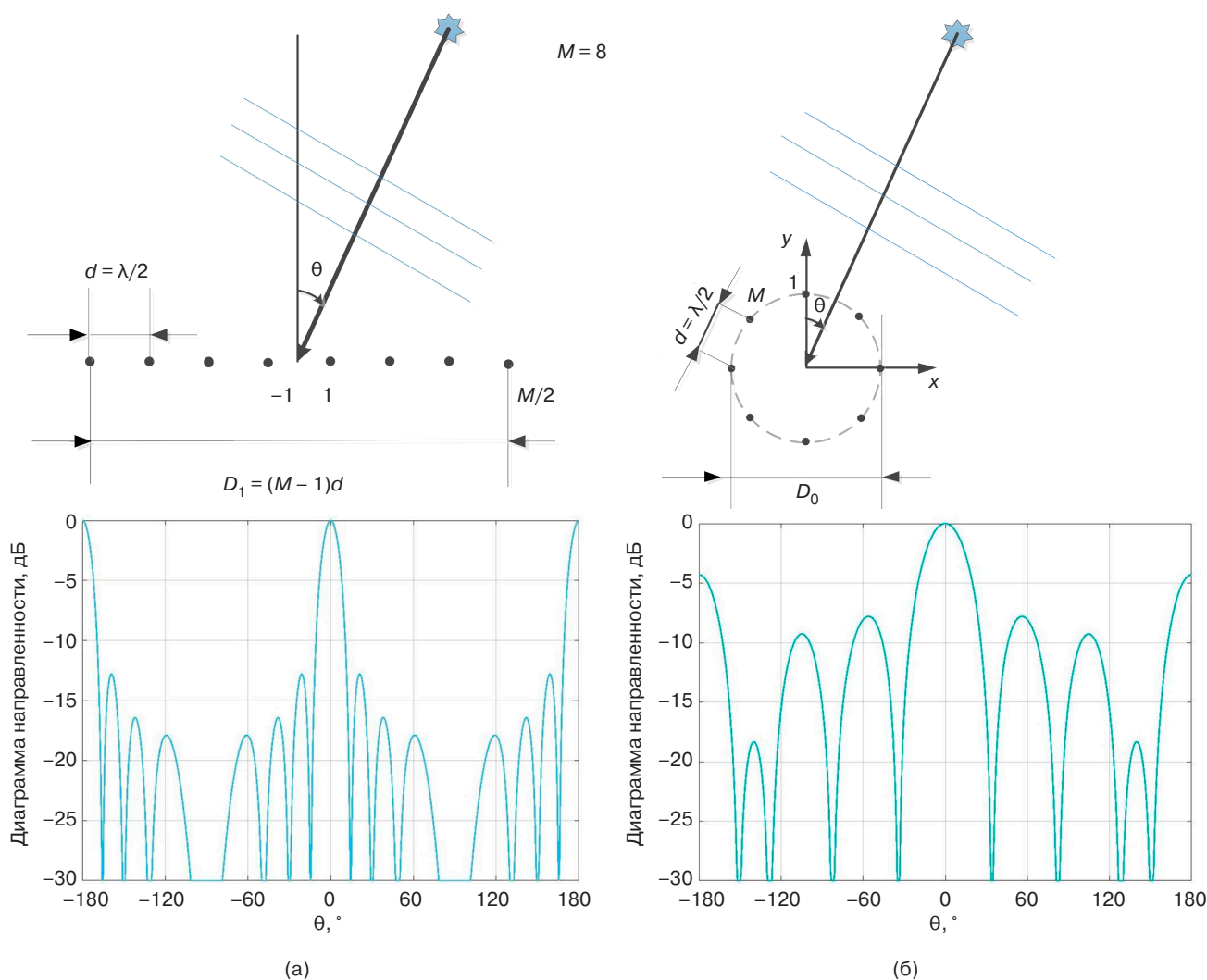


Рис. 1. Примеры схем приема сигналов M -элементными эквидистантными АР и соответствующие им диаграммы направленности для $M = 8$: (а) линейной АР с апертурой D_1 , (б) круговой АР с апертурой D_0

Детерминированный известный сигнал.

В этом случае предполагается, что $a[n]$ – априори известная на приемнике функция времени, выражающая закон модуляции полезного сигнала в момент времени n . Эта модель, например, достаточно хорошо описывает случай определения угла прихода сигнала мобильного устройства на базовую станцию, передающего обусловленные стандартом преамбулы в системах сотовой связи или беспроводного широкополосного доступа в Интернет (Wi-Fi) [10, 41, 42].

Случайный неизвестный сигнал. В этом случае предполагается, что $a[n]$ – комплексный стационарный гауссовский сигнал с некоррелированными отсчетами, имеющий нулевое среднее значение $\langle a[n] \rangle = 0$, где знак $\langle \cdot \rangle$ означает усреднение по статистическому ансамблю, и неизвестную мощность $v = \langle |a^2[n]| \rangle$. Эта модель адекватно описывает случай определения угла прихода сигнала от источника с неизвестными характеристиками, находящегося в дальней зоне АР [11, 29].

После того, как решена задача начального обнаружения узкополосного полезного сигнала в приемной M -элементной АР и принято решение о наличии сигнала, на следующем этапе решается задача оптимального оценивания неизвестных параметров полезного сигнала, в рассматриваемом случае мощности и угла прихода волнового фронта¹.

Для обеих моделей полезного сигнала (детерминированной или случайной) вектор-фазор волнового фронта \mathbf{s} рассматривается как неизвестный детерминированный вектор, зависящий от начальной фазы сигнала, угла прихода сигнала θ и геометрии антенны. Для произвольной геометрии АР его можно записать в виде:

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}(\varphi_0, \theta) = e^{j\varphi_0} \cdot [e^{j\varphi_1} \quad e^{j\varphi_2} \quad \dots \quad e^{j\varphi_M}]^T, \quad (2)$$

где φ_0 – начальная фаза сигнала (на одном из элементов АР или в центре антенны), а фаза сигнала на m -м элементе АР определяется как сумма начальной фазы φ_0 и соответствующего набега фазы сигнала φ_m по отношению к начальной фазе. Следует отметить, что такая модель не учитывает возможных

флуктуаций фаз и амплитуд вектора-фазора сигнала, обусловленных средой распространения, положением антенных элементов, угловым положением удаленного источника полезного сигнала, что, например, характерно для моделей гидроакустических каналов [7, 8].

Для оценки неизвестных параметров волнового вектора \mathbf{s} будем использовать метод максимального правдоподобия, согласно которому в качестве оценки следует взять то значение $\hat{\mathbf{s}}$ из области его допустимых значений, для которого функция правдоподобия $W(\mathbf{x}[1], \dots, \mathbf{x}[N]|\mathbf{s})$ для наблюдаемых значений выборки векторов $\mathbf{x}[1], \dots, \mathbf{x}[N]$ принимает наибольшее возможное значение. При условии гауссовского распределения наблюдаемых векторов $\mathbf{x}[n]$ функция правдоподобия может быть представлена в следующем виде:

$$W(\mathbf{x}[1], \dots, \mathbf{x}[N]|\mathbf{s}) = \frac{1}{\pi^{MN} \det(\mathbf{R})^N} e^{-\sum_{i=1}^N (\mathbf{x}[n]-\boldsymbol{\mu})^H \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{x}[n]-\boldsymbol{\mu})}, \quad (3)$$

где знак «H» означает эрмитово сопряжение, $\mathbf{R} = \langle \mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n] \rangle$, $\boldsymbol{\mu}$ – ковариационная матрица и вектор средних значений гауссовского распределения наблюдаемого вектора \mathbf{x} , соответственно.

Для каждой из рассматриваемых моделей полезного сигнала ковариационная матрица и вектор средних значений, входящие в функцию правдоподобия (3), находятся следующим образом:

- для детерминированного полезного сигнала

$$\mathbf{R} = \sigma^2 \mathbf{I}, \boldsymbol{\mu} = a[n]\mathbf{s}. \quad (4)$$

Будем считать, что ковариационная матрица вектора собственного шума является единичной, что эквивалентно знанию уровня собственных шумов (калибровке). Это приводит к функции правдоподобия вида

$$W(\mathbf{x}|\mathbf{s}) = \frac{1}{\pi^{MN}} e^{-\sum_{n=1}^N (\mathbf{x}[n]-a[n]\mathbf{s})^H (\mathbf{x}[n]-a[n]\mathbf{s})}; \quad (5)$$

- для случайного полезного сигнала

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}, \mathbf{R} = \mathbf{I} + v\mathbf{s}\mathbf{s}^H, \quad (6)$$

что приводит к функции правдоподобия вида

$$W(\mathbf{x}|\mathbf{s}) = \pi^{-MN} \det(\mathbf{R})^{-N} e^{-N\text{tr}(\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{R}^{-1}\hat{\mathbf{R}}))}, \quad (7)$$

где tr – след матрицы.

¹ Согласно строгой статистической теории задача обнаружения и оценивания неизвестных параметров полезного сигнала должна решаться совместно на основе обобщенного отношения правдоподобия (generalized likelihood ratio test, GLRT) [14]. Эффективность GLRT-метода в применении к рассматриваемой здесь задаче была достаточно подробно исследована в статьях авторов [28, 29, 43]. [According to strict statistical theory, the problem of detection and estimation of the unknown parameters of the useful signal should be resolved jointly based on the Generalized Likelihood Ratio Test (GLRT) [14]. The effectiveness of the GLRT method applied to the problem considered here has been thoroughly investigated in [28, 29, 43].]

Для детерминированного сигнала, находя максимум функции правдоподобия (5), несложно показать, что максимально правдоподобная оценка вектора-фазора (без учета априорной информации о плоской форме волнового фронта полезного сигнала) определяется выражением:

$$\hat{\mathbf{s}} = \sum_{n=1}^N a^*[n] \mathbf{x}[n] = \mathbf{y}, \quad (8)$$

где знак «*» означает комплексное сопряжение, а вектор \mathbf{y} представляет собой сигналы на выходах M параллельных корреляторов (или согласованных фильтров), осуществляющих первоначальную оптимальную обработку сигналов с M антенных элементов.

Для случайного сигнала в общем случае произвольного волнового фронта МП-оценка вектора $\hat{\mathbf{s}}$ выражается через первый собственный вектор $\hat{\psi}_1$, соответствующий максимальному собственному числу $\hat{\lambda}_1$ выборочной ковариационной матрицы сигналов на элементах АР, следующим образом [28]:

$$\hat{\psi}_1 = \hat{\mathbf{s}} / \sqrt{M}. \quad (9)$$

Однако, когда источник полезного сигнала находится в дальней зоне антенны, его волновой фронт является плоской волной с одинаковой амплитудой сигналов на элементах АР. Для того, чтобы учесть эту важную априорную информацию при нахождении МП-оценки волнового фронта сигнала рассмотрим две основные конфигурации АР – линейную и круговую.

Для линейной эквидистантной АР набеги фаз φ_m относительно ее геометрического центра можно записать как

$$\varphi_m = \Delta\varphi \cdot m = 2\pi \frac{d}{\lambda} \sin(\theta) \cdot m, \quad (10)$$

где $\Delta\varphi$ – набег фаз между соседними элементами.

Когда отсчет набега фаз φ_m ведется от геометрического центра АР и нумерация антенных элементов m осуществляется симметрично относительно этого центра, то для нечетного числа элементов индекс элемента $m = -\frac{M-1}{2}, \dots, -1, 0, 1, \dots, \frac{M-1}{2}$, а для четного числа элементов $m = -\frac{M-1}{2}, \dots, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{M-1}{2}$.

Для круговой АР набеги фаз φ_m относительно ее геометрического центра определяются как

$$\varphi_m = 2\pi \frac{R}{\lambda} \cos\left(\theta - \frac{2\pi(m-1)}{M}\right), \quad (11)$$

где $m = 1, \dots, M$; R – радиус круговой АР.

Очевидно, что задача оценивания вектора-фазора плоского волнового фронта \mathbf{s} для обеих

конфигураций АР (линейной и круговой) сводится только к оценке начальной фазы и угла прихода полезного сигнала, поэтому МП оценка $\hat{\mathbf{s}}$ находится путем решения задачи максимизации скалярного произведения:

- для детерминированного сигнала между вектором сигналов \mathbf{y} на выходах согласованных фильтров и «пробным» (trial) вектором-фазором плоской волны $\tilde{\mathbf{s}}$, фазы которого определяются выражением (10) для линейной АР и (11) для круговой АР;
- для случайного сигнала между собственным вектором $\hat{\psi}_1 = \hat{\mathbf{s}} / \sqrt{M}$ и «пробным» (trial) вектором-фазором плоской волны $\tilde{\mathbf{s}}$.

Различные алгоритмы нахождения МП-оценок параметров плоского волнового фронта для линейной АР подробно рассматривались в работах [26, 41, 42] для известного детерминированного сигнала и в [29, 43] для случайного сигнала. В этих работах были предложены эффективные двухэтапные алгоритмы нахождения МП-оценок. При этом на первом этапе находится грубая оценка волнового фронта полезного сигнала путем сканирования сектора пространства возможных углов прихода полезного сигнала. Такое сканирование для эквидистантных АР обычно осуществляется с использованием дискретного преобразования Фурье (ДПФ) от вектора сигналов, наблюдаемых на элементах АР. На втором этапе грубая оценка уточняется путем нахождения поправки к оценке волнового вектора, найденного на первом шаге. При этом используется или регрессионный алгоритм, или итерационный, а круговая АР заменяется на виртуальную линейную неэквидистантную АР [41]. Для удобства сравнения этапы нахождения МП-оценок вектора-фазора плоского волнового фронта детерминированных и случайных сигналов приведены в табл. 1.

Таблица 1. Этапы нахождения МП оценок вектора-фазора плоского волнового фронта детерминированных и случайных сигналов

Этапы	Детерминированный сигнал	Случайный сигнал
МП оценка в случае произвольного волнового фронта	$\hat{\mathbf{s}} = \sum_{n=1}^N a^*[n] \mathbf{x}[n] = \mathbf{y}$	$\hat{\mathbf{s}} = \sqrt{M} \hat{\psi}_1$
Грубая оценка в случае плоского волнового фронта (ДПФ с пересемплированием)	$\hat{\mathbf{s}} = \arg \max_{\varphi_0, \Delta\varphi} \hat{\mathbf{s}}^H \mathbf{y} $	$\hat{\mathbf{s}} = \arg \max_{\varphi_0, \Delta\varphi} \hat{\mathbf{s}}^H \hat{\psi}_1 $
Уточнение оценки с помощью линейной регрессии	$\hat{\varphi}_m = \varphi_0 + \Delta\varphi(m-1)$	$\hat{\varphi}_m = \varphi_0 + \Delta\varphi(m-1)$

2. ТОЧНОСТЬ ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ ВОЛНОВОГО ФРОНТА СИГНАЛОВ

Эффективность разработанных алгоритмов нахождения МП-оценок угла прихода плоского волнового фронта сигнала определялась путем сравнения дисперсий оценок, получаемых в численных экспериментах, с минимально возможными, определяемыми неравенствами Крамера – Рао [11, 13, 14]. При этом в случае детерминированного полезного сигнала при исследовании вопроса о предельно достижимых точностях оценки параметров плоского волнового фронта необходимо рассматривать задачу совместного оценивания начальной фазы и угла прихода сигнала. Поэтому рассмотрим сначала общий случай определения нижних границ Крамера – Рао для произвольного числа оцениваемых параметров, которые удобно записать в виде вектора $\boldsymbol{\eta}$. Тогда дисперсия i -го оцениваемого параметра η_i удовлетворяет неравенству

$$\sigma^2(\hat{\eta}_i) = \left\langle (\hat{\eta}_i - \eta_i)^2 \right\rangle \geq [\mathbf{CRB}(\boldsymbol{\eta})]_{ii}, \quad (12)$$

где $\boldsymbol{\eta}$ – вектор оцениваемых параметров, $\hat{\eta}_i$ – оценка i -го параметра, $\langle \cdot \rangle$ – знак усреднения, а $\mathbf{CRB}(\boldsymbol{\eta})$ – корреляционная матрица оценок параметров (Cramér–Rao bound, CRB), обратная к информационной матрице Фишера (Fisher information matrix, FIM):

$$\mathbf{CRB}(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{FIM}^{-1}(\boldsymbol{\eta}).$$

В соответствии с общей методологией нахождения границ Крамера – Рао [11] при оценивании точности нескольких параметров (вектора параметров $\boldsymbol{\eta}$) необходимо сначала найти выражение для информационной матрицы Фишера через производные от функции правдоподобия, элементы которой в общем случае выражаются в виде:

$$[\mathbf{FIM}(\boldsymbol{\eta})]_{i,j} = - \left\langle \left\{ \frac{\partial^2 \ln(W(\mathbf{y}|\boldsymbol{\eta}))}{\partial \eta_i \partial \eta_j} \right\} \right\rangle. \quad (13)$$

Для модели наблюдений с аддитивным гауссовским шумом (1) выражение для информационной матрицы Фишера записывается в виде [16]:

$$[\mathbf{FIM}(\boldsymbol{\eta})]_{i,j} = \text{tr} \left\{ \mathbf{R}^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \eta_i} \mathbf{R}^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \eta_j} \right\} + 2 \text{Re} \left\{ \frac{\partial \boldsymbol{\mu}^H}{\partial \eta_i} \mathbf{R}^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\mu}}{\partial \eta_j} \right\}, \quad (14)$$

где $\text{Re}\{\cdot\}$ – действительная часть выражения.

2.1. Детерминированный полезный сигнал

В случае, когда наблюдается детерминированный сигнал с неизвестным волновым фронтом вида (2) в гауссовском шуме, корреляционная матрица шума \mathbf{R} (4) не зависит от оцениваемых параметров φ_0 и θ и поэтому первое слагаемое в выражении (14) будет равно нулю. Для рассматриваемой задачи вектор оцениваемых параметров $\boldsymbol{\eta} = [\theta, \varphi_0]$ и с учетом (4) матрица Фишера (14) может быть представлена в виде:

$$\mathbf{FIM}(\boldsymbol{\eta})_{i,j} = 2N \cdot \text{SNR} \cdot \text{Re} \left\{ \frac{\partial \mathbf{S}(\boldsymbol{\eta})^H}{\partial \eta_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{S}(\boldsymbol{\eta})}{\partial \eta_j} \right\}, \quad (15)$$

где $\text{SNR} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |a[n]|^2 / \sigma^2$ – отношение сигнал/шум на одном антенном элементе, равное отношению средней мощности принятого полезного сигнала на одном элементе к мощности шума.

Для линейной АР в случае, когда начальная фаза сигнала φ_0 оценивается в геометрическом центре антенны, матрица Фишера (15) становится диагональной и имеет следующий вид [36]:

$$\mathbf{FIM}(\boldsymbol{\eta}) = 2N \cdot \text{SNR} \times \begin{bmatrix} \left(2\pi \frac{d}{\lambda}\right)^2 \cos^2 \theta \frac{M(M^2-1)}{12} & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Это позволяет легко найти обратную ей корреляционную матрицу для оценок угла прихода и начальной фазы сигнала:

$$\mathbf{C}(\theta, \varphi_0) = \mathbf{FIM}^{-1}(\theta, \varphi_0). \quad (17)$$

У этой матрицы размерности 2×2 недиагональные элементы равны нулю, а диагональные элементы являются минимально возможными дисперсиями оценок угла прихода θ и начальной фазы φ_0 полезного сигнала:

$$\text{CRB}(\theta) = \frac{1}{(2\pi d/\lambda)^2} \cdot \frac{1}{N \cdot \text{SNR} \cdot \cos^2 \theta} \cdot \frac{6}{M(M^2-1)}, \quad (18)$$

$$\text{CRB}(\varphi_0) = \frac{1}{2N \cdot \text{SNR}} \cdot \frac{1}{M}. \quad (19)$$

Для круговой АР в случае, когда фаза сигнала оценивается в геометрическом центре антенны,

матрица Фишера (15) также становится диагональной и записывается в следующем виде [41]:

$$\mathbf{FIM}(\boldsymbol{\eta}) = 2N \cdot \text{SNR} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2\pi^2 R_0^2}{\lambda^2} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Это позволяет легко найти обратную ей корреляционную матрицу оценок угла прихода θ и начальной фазы полезного сигнала φ_0 , диагональные элементы которой равны:

$$\text{CRB}(\theta) = \frac{1}{N \cdot \text{SNR}} \cdot \frac{1}{M \cdot 4\pi^2 \cdot R_0^2 / \lambda^2}, \quad (21)$$

$$\text{CRB}(\varphi_0) = \frac{1}{2N \cdot \text{SNR}} \cdot \frac{1}{M}, \quad (22)$$

а недиагональные элементы равны нулю.

2.2. Случайный полезный сигнал

В случае, когда полезный сигнал является случайным гауссовским процессом, корреляционная матрица \mathbf{R} наблюдаемого вектора $\mathbf{x}[n]$ зависит от оцениваемых параметров φ_0 и θ , а вектор средних значений $\boldsymbol{\mu}$ равен нулю (6). Поэтому первое слагаемое в выражении для матрицы Фишера (14) не равно нулю, а второе слагаемое равно нулю.

Однако оценивание начальной фазы φ_0 в векторе-фазоре не имеет смысла, т.к. комплексная амплитуда $a[n]$ случайного полезного сигнала $\mathbf{s}[n] = a[n]\mathbf{s}$ на каждом отсчете имеет случайную фазу, равномерно распределенную в интервале $[-\pi, \pi]$. В этом случае нахождение первого слагаемого в выражении (14):

$$\mathbf{FIM}(\boldsymbol{\eta})_{i,j} = \text{tr} \left\{ \mathbf{R}^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \eta_i} \mathbf{R}^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \eta_j} \right\} \quad (23)$$

приводит к тому, что все элементы матрицы Фишера, кроме одного, оказываются равными нулю. Поэтому в рассматриваемом случае можно оценить только один параметр – угол прихода полезного сигнала θ . С учетом выражения (6) для корреляционной матрицы \mathbf{R} можно найти ее обратную матрицу

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{I} - \frac{\nu}{1 + \nu M} \mathbf{s} \mathbf{s}^H \quad (24)$$

и, подставляя (6) и (24) в первое слагаемое формулы (14), получить выражение для нужного элемента матрицы Фишера:

$$\begin{aligned} \text{FIM}(\theta) &= \frac{2 \cdot N \cdot M \cdot \sigma_s^4}{\sigma_n^2 (\sigma_n^2 + M \sigma_s^2)} \times \\ &\times \left(\frac{\partial \mathbf{s}(\boldsymbol{\eta})^H}{\partial \theta} \frac{\partial \mathbf{s}(\boldsymbol{\eta})}{\partial \theta} - \frac{1}{M} \frac{\partial \mathbf{s}(\boldsymbol{\eta})^H}{\partial \theta} \mathbf{s}(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{s}(\boldsymbol{\eta})^H \frac{\partial \mathbf{s}(\boldsymbol{\eta})}{\partial \theta} \right) = \\ &= \left(2\pi \frac{d}{\lambda} \right)^2 \cos^2 \theta \frac{M(M^2 - 1)}{12}. \end{aligned} \quad (25)$$

где σ_s^2 и σ_n^2 – дисперсии сигнала и шума соответственно.

Для линейной АР, подставляя в выражение для матрицы Фишера (25) вектор-фазор с фазами, определяемыми формулой (10), легко найти нижнюю границу для дисперсии оценки угла прихода в виде:

$$\begin{aligned} \text{CRB}(\theta) = \text{FIM}^{-1}(\theta) &= \frac{1}{(2\pi d/\lambda)^2} \times \\ &\times \frac{1 + M \cdot \text{SNR}}{N \cdot \text{SNR}^2 \cos^2 \theta} \cdot \frac{6}{M^2 (M^2 - 1)}. \end{aligned} \quad (26)$$

Для круговой АР нижнюю границу для дисперсии оценки угла прихода случайного сигнала можно найти аналогичным образом. Для этого следует подставить в выражение для матрицы Фишера (25) вектор-фазор с фазами, определяемыми формулой (11). В результате получим

$$\text{CRB}(\theta) = \text{FIM}^{-1}(\theta) = \frac{1 + M \cdot \text{SNR}}{N \cdot M^2 \cdot \text{SNR}^2 \cdot 4\pi^2 \cdot R_0^2 / \lambda^2}. \quad (27)$$

Для удобства сравнения все найденные нижние границы для дисперсий оценок угла прихода сигнала линейной и круговой АР приведены в табл. 2 где $\text{CRB}(\theta)$ обозначены соответственно буквой L для линейной АР, и буквой C – для круговой, а индексы det и rand соответствуют детерминированному и случайному сигналам соответственно.

Из приведенных в табл. 2 формул следует, что отношения нижних границ Крамера – Рао для дисперсий оценок угла прихода для случайного и детерминированного сигналов оказывается одинаковым для линейной и для круговой АР, и равными

$$\frac{L_{\text{rand}}}{L_{\text{det}}} = \frac{1 + M \cdot \text{SNR}}{M \cdot \text{SNR}} = \frac{C_{\text{rand}}}{C_{\text{det}}}. \quad (28)$$

Причем из выражения (28) следует, что при увеличении отношения сигнал/шум и числа антенных элементов (при произведении $M \cdot \text{SNR} \gg 1$) границы Крамера – Рао для дисперсий оценок угла прихода случайного и детерминированного сигналов становятся одинаковыми. Так, в случае $M = 8$ разница между CRB для случайного

Таблица 2. Итоговые формулы для CRB(θ) для различных типов сигнала и конфигурация AP

Решетка	Детерминированный полезный сигнал	Случайный полезный сигнал
Линейная AP	$L_{\text{det}} = \frac{1}{(2\pi d/\lambda)^2} \cdot \frac{1}{N \cdot \text{SNR} \cdot \cos^2 \theta} \cdot \frac{6}{M(M^2 - 1)}$	$L_{\text{rand}} = \frac{1}{(2\pi d/\lambda)^2} \cdot \frac{1 + M \cdot \text{SNR}}{N \cdot \text{SNR}^2 \cos^2 \theta} \cdot \frac{6}{M^2(M^2 - 1)}$
Круговая AP	$C_{\text{det}} = \frac{1}{N \cdot \text{SNR}} \cdot \frac{1}{M \cdot 4\pi^2 \cdot R_0^2/\lambda^2}$	$C_{\text{rand}} = \frac{1 + M \cdot \text{SNR}}{N \cdot M^2 \cdot \text{SNR}^2 \cdot 4\pi^2 \cdot R_0^2/\lambda^2}$

Примечание. Значения границ Крамера – Рао в табл. 2 даны для произвольного радиуса круговой антенны. В случае, когда расстояние между соседними элементами круговой антенны равно половине длины волны, отношение $R_0^2/\lambda^2 = \frac{1}{16\sin^2(\pi/M)}$.

и детерминированного сигналов становится меньше 10% уже при $\text{SNR} > 0.8$ дБ, а в случае $M = 16$ – при $\text{SNR} > -2.2$ дБ, что также подтверждается результатами численных экспериментов, приведенными на рис. 2 и рис. 3 в следующем разделе.

3. ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК АЛГОРИТМОВ, РЕАЛИЗУЮЩИХ МП ОЦЕНКИ УГЛА ПРИХОДА ПОЛЕЗНОГО СИГНАЛА

Сравнительный анализ характеристик рассмотренных выше алгоритмов оценивания углов прихода полезного сигнала был проведен на примерах линейных и круговых AP с разным числом антенных элементов в условиях однолучевого канала с аддитивным гауссовским шумом (1). Для всех конфигураций AP расстояние между антенными элементами бралось равным половине длины волны ($d = \lambda/2$). В качестве полезного детерминированного сигнала $a[n]$ использовался сигнал с псевдослучайной двоичной фазовой манипуляцией (0, π) с постоянной амплитудой, известный на приемнике, а в качестве полезного случайного сигнала – комплексная гауссовская последовательность независимых отсчетов такой же длины N .

Как отмечалось выше, в работах [9, 16] была теоретически доказана неэффективность алгоритмов МП-оценивания угла прихода полезного случайного сигнала при конечном объеме выборки N , что приводит к недостижимости границы Крамера – Рао только за счет увеличения величины SNR при фиксированном размере выборки. Однако подробные численные исследования этого факта, проведенные в работе [29], показали, что при достаточно больших отношениях сигнал/шум предельные значения дисперсий МП-оценок углов прихода превышают границу Крамера – Рао на относительную величину порядка $\sim 1/(N - 1)$, которой, очевидно, на практике можно пренебречь при больших N . Поэтому,

в представленных ниже численных экспериментах, чтобы избежать учета конечности выборки, объем выборки был выбран достаточно большим ($N = 64$) для обеих моделей полезного сигнала, детерминированной и случайной.

Для определения пороговых уровней отношений сигнал/шум SNR_{th} (ниже которых возникают anomalously большие ошибки) предложена следующая методика. Пороговые значения SNR_{th} находились как значения, при которых среднее квадратичное отклонение (СКО) оценок углов прихода полезного сигнала превышали теоретические нижние границы Крамера – Рао (CRLB) на заданное количество процентов. Несомненным достоинством данной методики является то, что нижние границы Крамера – Рао легко рассчитываются по аналитическим формулам, приведенным в табл. 2 для линейной и круговой AP. Уровень превышения теоретических значений выбран равным 10% на основе результатов предварительных численных экспериментов, показывающих, что с одной стороны при $\text{SNR} < \text{SNR}_{\text{th}}$ происходит быстрый, почти скачкообразный, рост СКО оценок, а с другой стороны, измерение такого 10%-го смещения возможно выполнить с большой точностью порядка 1% при разумном числе экспериментов (порядка 1 млн).

При этом исследовались среднее квадратичные ошибки МП-оценок углов прихода плоского волнового фронта, получаемых с применением алгоритмов, описанных в разделе 2 и приведенных в табл. 1 для обеих моделей полезного сигнала. Для каждого алгоритма, конфигурации AP и модели сигнала СКО оценок углов прихода сигналов находились по $2 \cdot 10^5$ численным экспериментам, в каждом из которых обрабатывался сигнал длиной в N отсчетов ($N = 64$).

Для линейных AP (uniform linear array, ULA) на рис. 2 приведены графики среднее квадратичных ошибок $\sigma_{\sin \theta}$ оценок синусов углов прихода для детерминированного и случайного сигналов

в зависимости от отношения сигнал/шум, измеряемого на одном антенном элементе. При этом угол прихода полезного сигнала задавался в каждом эксперименте случайным и равномерно распределенным в интервале $\pm 60^\circ$. Штриховыми линиями соответствующих цветов изображены нижние границы Крамера – Рао для детерминированного сигнала в соответствии с формулой (18) и случайного сигнала в соответствии с формулой (26).

Из представленных на рис. 2 результатов видно, что СКО оценок для обеих моделей сигналов при увеличении SNR стремятся к одинаковым предельным значениям, зависящим от числа антенных элементов M . При удвоении числа антенных элементов СКО оценок уменьшается приблизительно в 2.83 раза, что находится в хорошем соответствии с аналитическими выражениями, приведенными в табл. 2. Интересно также отметить, что для того, чтобы добиться такого же уменьшения СКО оценок при фиксированном числе антенных элементов M , необходимо увеличить отношение сигнал/шум приблизительно на 10 дБ. В то же время пороговые значения сигнала/шум SNR_{th} , при превышении которых СКО оценок практически достигают границ Крамера – Рао, существенно зависят от вида полезного сигнала. Для детерминированных сигналов пороговые значения сигнала/шум оказываются существенно меньше, чем для случайных сигналов.

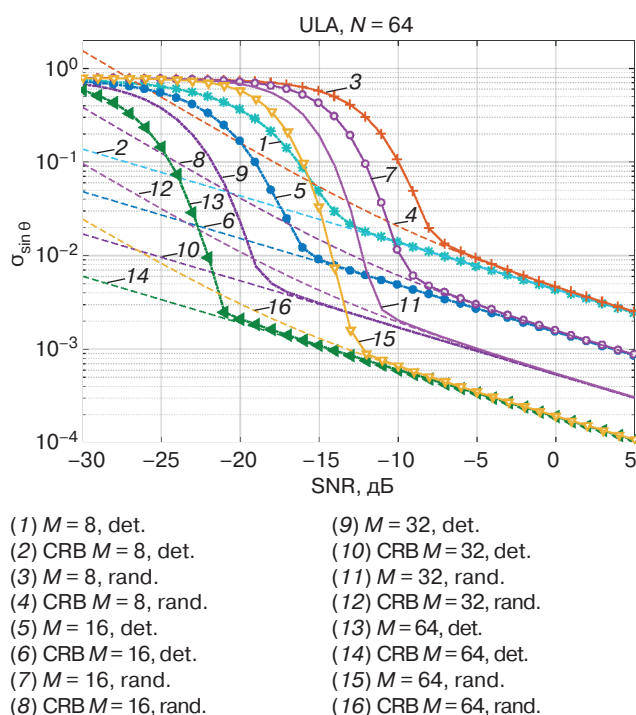


Рис. 2. СКО оценок синусов углов прихода для детерминированного (det) и случайного (rand) сигналов в зависимости от отношения сигнал/шум для линейной АР при разном числе антенных элементов M

Для круговых АР (uniform circular array, UCA) на рис. 3 приведены аналогичные графики среднеквадратичных ошибок σ_θ оценок углов прихода для детерминированного и случайного сигналов в зависимости от отношения сигнал/шум на одном антенном элементе. При этом угол прихода полезного сигнала задавался случайным равномерно распределенным в интервале от 0° до $180^\circ/M$ (в силу радиальной M симметрии задачи это распределение эквивалентно равномерному распределению от 0° до 360°). Штриховыми линиями соответствующих цветов изображены границы Крамера – Рао для детерминированного сигнала в соответствии с формулой (21) и случайного сигнала в соответствии с формулой (27). Из представленных результатов видно, что для круговой АР, как и для линейной АР, СКО оценок углов для обеих моделей сигналов при увеличении SNR стремятся к одинаковым предельным значениям, зависящим от числа антенных элементов M , а пороговые значения сигнала/шум SNR_{th} , при превышении которых СКО оценок практически достигают границ Крамера – Рао, существенно зависят от вида полезного сигнала. При этом для детерминированных сигналов пороговые значения сигнала/шум также оказываются ниже, чем для случайных сигналов.

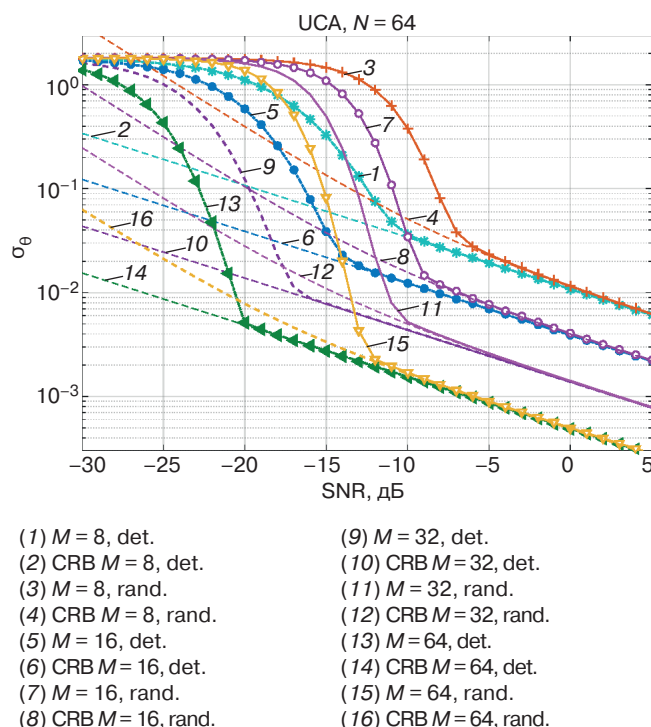


Рис. 3. СКО оценок углов прихода для детерминированного (det) и случайного (rand) сигналов в зависимости от отношения сигнал/шум для круговой АР при разном числе антенных элементов M

Из сравнения двух рассмотренных геометрий АР видно, что поведение зависимостей СКО оценок углов приходов сигналов от числа антенных элементов M и отношения сигнал/шум имеет одинаковый характер в области больших SNR (превышающих SNR_{th}). В то же время, при равном количестве антенных элементов и расстоянии между ними, СКО оценок для линейной АР (в случае нулевого угла прихода сигнала с направления перпендикулярного апертуре АР) оказываются приблизительно в 2.5 раза меньше, чем для круговой. Очевидно, что это связано с приблизительно в 3 раза меньшим размером апертуры круговой АР по сравнению с линейной АР. Однако несложно показать, что это преимущество линейной АР над круговой АР в точности оценивания углов прихода сигнала сохраняется только в секторе $\pm 67^\circ$, при больших углах круговая АР имеет более высокую точность оценивания, чем линейная АР. Кроме того из полученных результатов (аналитических и численных) следует, что точность оценивания круговой АР при больших отношениях сигнал/шум ($\text{SNR} > \text{SNR}_{\text{th}}$) вообще не зависит от углов прихода полезного сигнала.

Во второй серии численных экспериментов для всех рассмотренных выше конфигураций АР и моделей сигналов проведено более детальное исследование достигаемых точностей оценивания углов прихода сигнала в наиболее интересных интервалах значений отношений сигнал/шум вблизи пороговых SNR_{th} . Для этого количество численных экспериментов для каждого SNR вблизи SNR_{th} было увеличено до 10^6 и при нахождении уточненных

пороговых значений использовалась линейная интерполяция.

Для модели детерминированного полезного сигнала в табл. 3 представлены уточненные значения SNR_{th} для линейной и круговой АР (даны с точностью до 0.1 дБ), соответствующие им СКО оценок углов прихода $\sigma_{\sin\theta}/\sin\theta$ (даны с точностью до 3 значащих цифр) и предельные нижние границы Крамера – Рао $(\sqrt{L_{\text{det}}}/\sqrt{C_{\text{det}}})$, рассчитанные с помощью аналитических выражений, приведенных в табл. 2. Контрольные величины относительного 10%-го превышения СКО над границами Крамера – Рао $(\delta_{\sin\theta}/\delta_{\sigma\theta})$ приведены в нижней строчке таблицы (даны с точностью до 3 значащих цифр).

Для модели случайного полезного сигнала в табл. 4 аналогичным образом представлены уточненные значения SNR_{th} для линейной и круговой АР, соответствующие им СКО оценок углов прихода $\sigma_{\sin\theta}/\sin\theta$ и предельные нижние границы Крамера – Рао $(\sqrt{L_{\text{rand}}}/\sqrt{C_{\text{rand}}})$, рассчитанные также с помощью формул, приведенных в табл. 2. Контрольные величины относительного 10%-го превышения СКО над границами Крамера – Рао приведены в нижней строчке табл. 4.

Для более наглядного сравнения численных результатов, приведенных в табл. 3 и 4, на рис. 4 на одном графике представлены рассчитанные уточненные пороговые значения отношений сигнал/шум (SNR_{th}) для всех конфигураций АР и моделей полезного сигнала.

Таблица 3. Значения SNR_{th} для линейной и круговой АР для детерминированного сигнала

M	8		16		32		64	
	ULA	UCA	ULA	UCA	ULA	UCA	ULA	UCA
SNR_{th} , дБ	-13.3	-10.3	-15.5	-13.6	-17.5	-16.8	-20.0	-20.1
$\sigma_{\sin\theta}/\sin\theta$	$2.20 \cdot 10^{-2}$	$3.92 \cdot 10^{-2}$	$9.95 \cdot 10^{-3}$	$2.03 \cdot 10^{-2}$	$4.44 \cdot 10^{-3}$	$1.04 \cdot 10^{-2}$	$2.09 \cdot 10^{-3}$	$5.43 \cdot 10^{-3}$
$\sqrt{L_{\text{det}}}/\sqrt{C_{\text{det}}}$	$2.00 \cdot 10^{-2}$	$3.53 \cdot 10^{-2}$	$9.04 \cdot 10^{-3}$	$1.85 \cdot 10^{-2}$	$4.04 \cdot 10^{-3}$	$9.49 \cdot 10^{-3}$	$1.90 \cdot 10^{-3}$	$4.94 \cdot 10^{-3}$
$\delta_{\sin\theta}/\delta_{\sigma\theta}$	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100

Таблица 4. Значения SNR_{th} для линейной и круговой АР для случайного сигнала

M	8		16		32		64	
	ULA	UCA	ULA	UCA	ULA	UCA	ULA	UCA
SNR_{th} , дБ	-7.3	-6.4	-9.1	-9.0	-10.7	-10.3	-12.2	-12.2
$\sigma_{\sin\theta}/\sin\theta$	$1.42 \cdot 10^{-2}$	$3.07 \cdot 10^{-2}$	$5.90 \cdot 10^{-3}$	$1.48 \cdot 10^{-2}$	$2.37 \cdot 10^{-3}$	$5.76 \cdot 10^{-3}$	$9.55 \cdot 10^{-4}$	$2.45 \cdot 10^{-3}$
$\sqrt{L_{\text{rand}}}/\sqrt{C_{\text{rand}}}$	$1.29 \cdot 10^{-2}$	$2.79 \cdot 10^{-2}$	$5.36 \cdot 10^{-3}$	$1.35 \cdot 10^{-2}$	$2.15 \cdot 10^{-3}$	$5.23 \cdot 10^{-3}$	$8.68 \cdot 10^{-4}$	$2.23 \cdot 10^{-3}$
$\delta_{\sin\theta}/\delta_{\sigma\theta}$	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100

Из приведенных на рис. 4 графиков можно сделать важные практические выводы. Во-первых, пороговые значения отношений сигнал/шум сильно зависят от вида принимаемого сигнала, так для детерминированных сигналов они оказываются приблизительно на 6–7 дБ ниже, чем для случайных сигналов. Во-вторых, пороговые значения отношений сигнал/шум очень слабо зависят от конфигурации АР и при большом числе антенных элементов ($M > 16$) практически совпадают для рассмотренных в работе линейных и круговых АР. При этом при удвоении количества антенных элементов значения SNR_{th} уменьшаются приблизительно на 2 дБ.

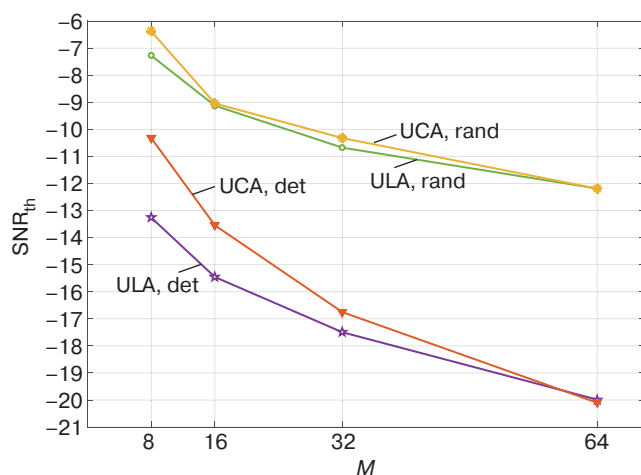


Рис. 4. Зависимости уточненных пороговых значений отношений сигнал/шум (SNR_{th}) от числа антенных элементов для всех конфигураций АР и моделей полезного сигнала

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведено численное исследование точности МП-оценок угла прихода сигнала с плоским волновым фронтом, принимаемого линейной и круговой АР. Проведен анализ двух моделей полезного сигнала – детерминированного с априори известной формой и случайного – гауссовского шума с некоррелированными отсчетами.

В ходе численного эксперимента показано, что, в соответствии с теорией оптимальных оценок,

при увеличении отношения сигнал/шум и больших объемах выборки среднеквадратичные ошибки МП-оценок для обеих моделей сигнала стремятся к одинаковым теоретически предельным значениям (границам Крамера – Рао), зависящим только от числа антенных элементов M и конфигурации АР.

В работе предложен метод строгого определения пороговых значений отношений сигнал/шум (ниже которых возникают аномально большие ошибки) на основе заданного относительного превышения СКО оценок максимального правдоподобия теоретически предельных нижних границ Крамера – Рао, найденных аналитически. Проведенное численное моделирование позволило найти с высокой точностью такие пороговые значения для детерминированных и случайных моделей сигналов.

Выявлены достаточно простые закономерности между основными характеристиками системы оценивания: геометрией АР, числом антенных элементов, типом обрабатываемого сигнала и используемым алгоритмом. Эти закономерности на основе интерполяции и аппроксимации уже представленных в работе результатов (без проведения дополнительного численного моделирования), позволяют определять пороговые значения отношений сигнал/шум для двух базовых моделей сигналов (детерминированной и случайной) в линейных и круговых АР практически с любым количеством антенных элементов, большим четырех.

Таким образом, одним из основных результатов работы является доказательство с помощью численного моделирования того факта, что когерентная и некогерентная обработка сигналов дает одинаковые предельно достижимые точности при одинаковых отношениях сигнал/шум больше пороговых значений ($\text{SNR} > \text{SNR}_{\text{th}}$). В то же время, вид полезного сигнала и метод его обработки существенно влияют на величину пороговых значений SNR_{th} , ниже которых возникают аномально большие ошибки.

Полученные в работе результаты могут быть практически использованы на начальном этапе проектирования и определения архитектуры систем высокоточного пеленгования и локализации источников излучения различных сигналов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Skolnik M.I. *Radar Handbook*. 3rd ed. New York: McGraw-Hill Professional; 2008. 1328 p.
2. Ширман Я.Д., Манжос В.Н. *Теория и техника обработки радиолокационной информации на фоне помех*. М.: Радио и связь; 1981. 416 с.
3. Richards M.A. *Fundamentals of Radar Signal Processing*. New York: McGraw-Hill; 2014. 640 p.
4. Vaughan R., Andersen J.B. *Channels, Propagation and Antennas for Mobile Communications*. London: The Institution of Engineering and Technology; 2003. 784 p. <https://doi.org/10.1049/PBEW050E>

5. Sand S., Dammann A., Mensing C. *Positioning in Wireless Communications Systems*. Chichester: John Wiley & Sons; 2014. 280 p.
6. Krim H., Viberg M. Two decades of array signal processing research: the parametric approach. *IEEE Signal Processing Mag.* 1996;13(4):67–94. <https://doi.org/10.1109/79.526899>
7. Dosso S.E., Wilmot M.J. Maximum-likelihood and other processors for incoherent and coherent matched-field localization. *J. Acoust. Soc. Am.* 2012;132(4):2273–2285. <https://doi.org/10.1121/1.4730978>
8. Малеханов А.И., Смирнов А.В. Пространственная обработка частично-когерентных сигналов в больших антенных решетках: анализ, моделирование и оценки возможностей оптимизации. *Известия вузов. Радиофизика*. 2023;66(12):1094–1121. https://doi.org/10.52452/00213462_2023_66_12_1094
9. Stoica P., Nehorai A. MUSIC, maximum likelihood, and Cramér–Rao bound. *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process.* 1989;37(5):720–741. <https://doi.org/10.1109/29.17564>
10. Li J., Compton R.T. Maximum likelihood angle estimation for signals with known waveforms. *IEEE Trans. Signal Process.* 1993;41(9):2850–2862. <https://doi.org/10.1109/78.236507>
11. Kay S.M. *Fundamentals of Statistical Signal Processing. Volume 1. Estimation Theory*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall; 1993. 625 p.
12. Viberg M., Ottersten B., Nehorai A. Performance analysis of direction finding with large arrays and finite data. *IEEE Trans. Signal Process.* 1995;43(2):469–477. <https://doi.org/10.1109/78.348129>
13. Van Trees H.L. *Detection, Estimation, and Modulation Theory, Part I: Detection, Estimation, and Linear Modulation Theory*. New York, NY: Wiley; 2001. 716 p.
14. Van Trees H.L., Bell K.L. *Detection, Estimation, and Modulation Theory, Part IV: Optimum Array Processing*. Hoboken, NJ: Wiley; 2002. 1480 p.
15. Renaux A., Foster P., Chaumette E., Larzabal P. On the high-SNR conditional maximum-likelihood estimator full statistical characterization. *IEEE Trans. Signal Process.* 2006;54(12):4840–4843. <https://doi.org/10.1109/TSP.2006.882072>
16. Renaux A., Forster P., Boyer E., Larzabal P. Unconditional maximum likelihood performance at finite number of samples and high signal-to-noise ratio. *IEEE Trans. Signal Process.* 2007;55(5):2358–2364. <https://doi.org/10.1109/TSP.2007.893205>
17. Cramer H. *Mathematical Methods of Statistics*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press; 1946. 589 p.
18. Rao C.R. *Linear Statistical Inference and Its Applications*. New York: Wiley; 1946. 660 p.
19. Тихонов В.И. *Оптимальный прием сигналов*. М.: Радио и связь; 1983. 320 с.
20. Трифонов А.П., Шинаков Ю.С. *Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех*. М.: Радио и связь; 1986. 264 с.
21. Barankin E.W. Locally best unbiased estimates. *Ann. Math. Statist.* 1949;20(4):477–501. <https://doi.org/10.1214/aoms/1177729943>
22. Bhattacharyya A. On some analogues of the amount of information and their use in statistical estimation. *Sankhyā*. 1946;8(1):201–218. URL: <https://www.jstor.org/stable/25047921>
23. Bell K.L., Ephraim Y., Van Trees H.L. Ziv-Zakai lower bounds in bearing estimation. In: *Proceedings of the 1995 International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)*. 1995 May 9–12; Detroit, MI, USA. IEEE. P. 2852–2855. <https://doi.org/10.1109/ICASSP.1995.479888>
24. Athley F. Threshold Region Performance of Maximum Likelihood Direction of Arrival Estimators. *IEEE Trans. Signal Process.* 2005;53(4):1359–1373. <https://doi.org/10.1109/TSP.2005.843717>
25. Чернояров О.В., Розанов А.Е., Сальникова А.В. Квазиправдоподобная оценка времени прихода случайного импульса с огибающей произвольной формы и неточно известной длительностью. *Радиотехника*. 2013;10:65–70.
26. Bolkhovskaya O., Maltsev A., Sergeev V. The wavefront estimation and signal detection in multi-element antenna arrays at low SNR. In: *Proceedings 2018 2nd European Conference on Electrical Engineering and Computer Science (EECS)*. 2018 Dec 20–22; Bern, Switzerland. IEEE. P. 497–501. <https://doi.org/10.1109/EECS.2018.00097>
27. Трифонов А.П., Корчагин Ю.Э., Титов К.Д. Эффективность обнаружения одного класса сверхширокополосных сигналов в условиях параметрической априорной неопределенности. *Журнал технической физики*. 2018;88(8):1235–1240. <https://doi.org/10.21883/JTF.2018.08.46315.2552>
28. Bolkhovskaya O., Maltsev A., Sergeev V. Joint detection and the AoA estimation of noncoherent signals in multi-element antennas. In: *Proceedings 2019 International Symposium on Performance Evaluation of Computer and Telecommunication Systems (SPECTS)*. 2019 Jul 22–24; Berlin, Germany. IEEE. P. 1–6. <https://doi.org/10.23919/SPECTS.2019.8823557>
29. Bolkhovskaya O., Maltsev A., Sergeev V., Keusgen W., Peter M. Investigation of theoretical limits for unconditional AoA estimations in multi-element antenna arrays by simulations. In: *Proceedings 2020 IEEE International Conference on Industrial Technology (ICIT)*. 2020 Feb 26–28; Buenos Aires, Argentina. IEEE. P. 663–668. <https://doi.org/10.1109/ICIT45562.2020.9067150>
30. Fateev A.A., Tokarev A.B., Chernoyarov O.V., Salnikova A.V. Influence of the radiation pattern errors for the correlation interferometer. *J. Phys.: Conf. Ser.* 2021;2094(2):022054. <http://doi.org/10.1088/1742-6596/2094/2/022054>
31. Serbes A., Qaraqe K.A. Threshold regions in frequency estimation. *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.* 2022;58(5):4850–4856. <https://doi.org/10.1109/TAES.2022.3166063>
32. Болховская О.В., Мальцев А.А., Сергеев В.А. Система пассивного обнаружения и измерения расстояния до источника на основе оценки волнового фронта сигнала. *Радиотехника*. 2022;86(9):98–112. <https://doi.org/10.18127/j00338486-202209-11>

33. Beshara-Flynn K., Adhikari K. Effects of signal and array parameters on MSE and CRB in DOA estimation. In: *2022 IEEE 13th Annual Ubiquitous Computing, Electronics & Mobile Communication Conference (UEMCON)*. 2022 Oct 26–29; New York, NY, USA. IEEE. P. 373–379. <https://doi.org/10.1109/UEMCON54665.2022.9965625>
34. Чуманкин Ю.Е., Фидельман В.Р., Морозов О.А. Метод оценки изменения направлений главных максимумов диаграммы направленности многолучевой антенны в задаче пассивной пеленгации. *Известия вузов. Радиофизика*. 2022;65(9):689–697. https://doi.org/10.52452/00213462_2022_65_09_758
35. Щукин А.А., Павлов А.Е. Параметризация пользовательских функций в цифровой обработке сигналов для получения углового сверхразрешения. *Russ. Technol. J.* 2022;10(4):38–43. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2022-10-4-38-43>
36. Bolkhovskaya O., Sergeev V., Maltsev A. Cramér–Rao lower bounds for the task of joint estimation of signal initial phase and AoA in multi-element antenna arrays. In: *2023 Wave Electronics and its Application in Information and Telecommunication Systems (WECONF)*. 2023 Jun 5–9; St. Petersburg, Russian Federation. IEEE. P. 1–6. <https://doi.org/10.1109/WECONF57201.2023.10148023>
37. Xu Y., Cao N., Jin H., et al. Robust beamforming design for integrated sensing and communication systems. *IEEE J. Sel. Areas Sens.* 2024;1:114–123. <https://doi.org/10.1109/JSAS.2024.3421391>
38. Корчагин Ю.Э., Титов К.Д., Воловач В.И., Кондратович П.А., Завалишина О.Н. Квазиправдоподобная оценка времени прихода сверхширокополосного квазирadiосигнала с неизвестными амплитудой и начальной фазой. *Радиотехника*. 2024;88(9):112–122. <https://doi.org/10.18127/j00338486-202409-10>
39. Ермолаев В.Т., Семенов В.Ю., Флакман А.Г. Пространственно-временная обработка сигналов в автомобильном радаре в условиях активных помех. *Известия вузов. Радиофизика*. 2024;67(3):292–301. https://doi.org/10.52452/00213462_2024_67_03_292
40. Mazor Y., Berman I.E., Routtenberg T. On the limitations of the Bayesian Cramér–Rao bound for mixed-resolution data. *IEEE Signal Process. Lett.* 2025;32:446–450. <https://doi.org/10.1109/LSP.2024.3519804>
41. Болховская О.В., Сергеев В.А., Мальцев А.А. Обнаружение и определение положения источника сигнала в ближней зоне круговой антенной решетки. *Антенны*. 2023;5:23–37. <https://doi.org/10.18127/j03209601-202305-03>
42. Сергеев В.А. Оптимизация размера круговой антенной решетки в задаче определения направления на источник излучения в дальней зоне. *Антенны*. 2023;5:13–22. <https://doi.org/10.18127/j03209601-202305-02>
43. Bolkhovskaya O., Maltsev A., Sergeev V., Keusgen W., Peter M. Accurate iterative algorithm for detection and the signal AoA estimation in low SNR region. In: *2019 4th International Conference on Computing, Communications and Security (ICCCS)*. 2019 Oct 10–12; Rome, Italy. IEEE. P. 89–95. <https://doi.org/10.1109/CCCS.2019.8888112>

REFERENCES

1. Skolnik M.I. *Radar Handbook*. 3rd ed. New York: McGraw-Hill Professional; 2008. 1328 p.
2. Shirman Ya.D., Manzhos V.N. *Teoriya i tekhnika obrabotki radiolokatsionnoi informatsii na fone pomekh (Theory and Technique of Radar Information Processing Against the Background of Interference)*. Moscow: Radio i svyaz; 1981. 416 p. (in Russ.).
3. Richards M.A. *Fundamentals of Radar Signal Processing*. New York: McGraw-Hill; 2014. 640 p.
4. Vaughan R., Andersen J.B. *Channels, Propagation and Antennas for Mobile Communications*. London: The Institution of Engineering and Technology; 2003. 784 p. <https://doi.org/10.1049/PBEW050E>
5. Sand S., Dammann A., Mensing C. *Positioning in Wireless Communications Systems*. Chichester: John Wiley & Sons; 2014. 280 p.
6. Krim H., Viberg M. Two decades of array signal processing research: the parametric approach. *IEEE Signal Processing Mag.* 1996;13(4):67–94. <https://doi.org/10.1109/79.526899>
7. Dosso S.E., Wilmut M.J. Maximum-likelihood and other processors for incoherent and coherent matched-field localization. *J. Acoust. Soc. Am.* 2012;132(4):2273–2285. <https://doi.org/10.1121/1.4730978>
8. Malekhanov A.I., Smirnov A.V. Large-Array Processing of Coherence-Degraded Signals: Analytical Study, Modeling, and Estimations of Optimization Possibilities. *Radiophys. Quantum El.* 2023;66(12):988–1011. <https://doi.org/10.1007/s11141-024-10346-3>
[Original Russian Text: Malekhanov A.I., Smirnov A.V. Large-Array Processing of Coherence-Degraded Signals: Analytical Study, Modeling, and Estimations of Optimization Possibilities. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Radiofizika*. 2023;66(12):1094–1121 (in Russ.). https://doi.org/10.52452/00213462_2023_66_12_1094]
9. Stoica P., Nehorai A. MUSIC, maximum likelihood, and Cramér–Rao bound. *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process.* 1989;37(5):720–741. <https://doi.org/10.1109/29.17564>
10. Li J., Compton R.T. Maximum likelihood angle estimation for signals with known waveforms. *IEEE Trans. Signal Process.* 1993;41(9):2850–2862. <https://doi.org/10.1109/78.236507>
11. Kay S.M. *Fundamentals of Statistical Signal Processing. Volume 1. Estimation Theory*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall; 1993. 625 p.
12. Viberg M., Ottersten B., Nehorai A. Performance analysis of direction finding with large arrays and finite data. *IEEE Trans. Signal Process.* 1995;43(2):469–477. <https://doi.org/10.1109/78.348129>
13. Van Trees H.L. *Detection, Estimation, and Modulation Theory, Part I: Detection, Estimation, and Linear Modulation Theory*. New York, NY: Wiley; 2001. 716 p.

14. Van Trees H.L., Bell K.L. *Detection, Estimation, and Modulation Theory, Part IV: Optimum Array Processing*. Hoboken, NJ: Wiley; 2002. 1480 p.
15. Renaux A., Foster P., Chaumette E., Larzabal P. On the high-SNR conditional maximum-likelihood estimator full statistical characterization. *IEEE Trans. Signal Process.* 2006;54(12):4840–4843. <https://doi.org/10.1109/TSP.2006.882072>
16. Renaux A., Forster P., Boyer E., Larzabal P. Unconditional maximum likelihood performance at finite number of samples and high signal-to-noise ratio. *IEEE Trans. Signal Process.* 2007;55(5):2358–2364. <https://doi.org/10.1109/TSP.2007.893205>
17. Cramer H. *Mathematical Methods of Statistics*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press; 1946. 589 p.
18. Rao C.R. *Linear Statistical Inference and Its Applications*. New York: Wiley; 1946. 660 p.
19. Tikhonov V.I. *Optimal'nyi priem signalov (Optimal Signal Detection)*. Moscow: Radio i svyaz; 1983. 320 p. (in Russ.).
20. Trifonov A.P., Shinakov Yu.S. *Sovmestnoe razlichenie signalov i otsenka ikh parametrov na fone pomekh (Joint Discrimination of Signals and Estimation of Their Parameters Against the Background of Interference)*. Moscow: Radio i svyaz; 1986. 264 p. (in Russ.).
21. Barankin E.W. Locally best unbiased estimates. *Ann. Math. Statist.* 1949;20(4):477–501. <https://doi.org/10.1214/aoms/1177729943>
22. Bhattacharyya A. On some analogues of the amount of information and their use in statistical estimation. *Sankhyā*. 1946;8(1):201–218. Available from URL: <https://www.jstor.org/stable/25047921>
23. Bell K.L., Ephraim Y., Van Trees H.L. Ziv-Zakai lower bounds in bearing estimation. In: *Proceedings of the 1995 International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)*; 1995 May 9–12; Detroit, MI, USA. IEEE. P. 2852–2855. <https://doi.org/10.1109/ICASSP.1995.479888>
24. Athley F. Threshold Region Performance of Maximum Likelihood Direction of Arrival Estimators. *IEEE Trans. Signal Process.* 2005;53(4):1359–1373. <https://doi.org/10.1109/TSP.2005.843717>
25. Chernoyarov O.V., Rozanov A.E., Salnikova A.V. Quasi-likelihood appearance time estimate of the random pulse with free-form envelope shape and inaccurately known duration. *Radiotekhnika = Radioengineering*. 2013;10:65–70 (in Russ.).
26. Bolkhovskaya O., Maltsev A., Sergeev V. The wavefront estimation and signal detection in multi-element antenna arrays at low SNR. In: *Proceedings 2018 2nd European Conference on Electrical Engineering and Computer Science (EECS)*; 2018 Dec 20–22; Bern, Switzerland. IEEE. P. 497–501. <https://doi.org/10.1109/EECS.2018.00097>
27. Trifonov A.P., Korchagin Yu.E., Titov K.D. Efficiency of the Detection of a Specific Wideband Signal under a Priori Parametric Uncertainty. *Tech. Phys.* 2018;63(8):1199–1204. <https://doi.org/10.1134/S1063784218080212>
[Original Russian Text: Trifonov A.P., Korchagin Yu.E., Titov K.D. Efficiency of the Detection of a Specific Wideband Signal under a Priori Parametric Uncertainty. *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki*. 2018;88(8):1235–1240 (in Russ.). <https://doi.org/10.21883/JTF.2018.08.46315.2552>]
28. Bolkhovskaya O., Maltsev A., Sergeev V. Joint detection and the AoA estimation of noncoherent signals in multi-element antennas. In: *Proceedings 2019 International Symposium on Performance Evaluation of Computer and Telecommunication Systems (SPECTS)*. 2019 Jul 22–24; Berlin, Germany. IEEE. P. 1–6. <https://doi.org/10.23919/SPECTS.2019.8823557>
29. Bolkhovskaya O., Maltsev A., Sergeev V., Keusgen W., Peter M. Investigation of theoretical limits for unconditional AoA estimations in multi-element antenna arrays by simulations. In: *Proceedings 2020 IEEE International Conference on Industrial Technology (ICIT)*. 2020 Feb 26–28; Buenos Aires, Argentina. IEEE. P. 663–668. <https://doi.org/10.1109/ICIT45562.2020.9067150>
30. Fateev A.A., Tokarev A.B., Chernoyarov O.V., Salnikova A.V. Influence of the radiation pattern errors for the correlation interferometer. *J. Phys.: Conf. Ser.* 2021;2094(2):022054. <http://doi.org/10.1088/1742-6596/2094/2/022054>
31. Serbes A., Qaraqe K.A. Threshold regions in frequency estimation. *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.* 2022;58(5):4850–4856. <https://doi.org/10.1109/TAES.2022.3166063>
32. Bolkhovskaya O.V., Maltsev A.A., Sergeev V.A. A passive system for source detection and distance measurement based on signal wavefront estimation. *Radiotekhnika = Radioengineering*. 2022;86(9):98–112 (in Russ.). <https://doi.org/10.18127/j00338486-202209-11>
33. Beshara-Flynn K., Adhikari K. Effects of signal and array parameters on MSE and CRB in DOA estimation. In: *2022 IEEE 13th Annual Ubiquitous Computing, Electronics & Mobile Communication Conference (UEMCON)*. 2022 Oct 26–29; New York, NY, USA. IEEE. P. 373–379. <https://doi.org/10.1109/UEMCON54665.2022.9965625>
34. Chumankin Yu.E., Fidelman V.R., Morozov O.A. A Method for Estimating the Changes in the Directions of the Main Maxima of the Directional Pattern of a Multibeam Antenna in the Problem of Passive Direction Finding. *Radiophys. Quantum El.* 2022;65(9):689–697. <https://doi.org/10.1007/s11141-023-10249-9>
[Original Russian Text: Chumankin Yu.E., Fidelman V.R., Morozov O.A. A Method for Estimating the Changes in the Directions of the Main Maxima of the Directional Pattern of a Multibeam Antenna in the Problem of Passive Direction Finding. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Radiofizika*. 2022;65(9):758–767 (in Russ.). https://doi.org/10.52452/00213462_2022_65_09_758]
35. Shchukin A.A., Pavlov A.E. Parameterization of user functions in digital signal processing for obtaining angular superresolution. *Russ. Technol. J.* 2022;10(4):38–43. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2022-10-4-38-43>
36. Bolkhovskaya O., Sergeev V., Maltsev A. Cramér–Rao lower bounds for the task of joint estimation of signal initial phase and AoA in multi-element antenna arrays. In: *2023 Wave Electronics and its Application in Information and Telecommunication Systems (WECONF)*. 2023 Jun 5–9; St. Petersburg, Russian Federation. IEEE. P. 1–6. <https://doi.org/10.1109/WECONF57201.2023.10148023>

37. Xu Y., Cao N., Jin H., et al. Robust beamforming design for integrated sensing and communication systems. *IEEE J. Sel. Areas Sens.* 2024;1:114–123. <https://doi.org/10.1109/JSAS.2024.3421391>
38. Korchagin Yu.E., Titov K.D., Volovach V.I., Kondratovich P.A., Zavalishina O.N. Quasi-likelihood estimation of the arrival time of an ultra-wideband quasi-radio signal with unknown amplitude and initial phase. *Radiotekhnika = Radioengineering.* 2024;88(9):112–122 (in Russ.). <https://doi.org/10.18127/j00338486-202409-10>
39. Ermolaev V.T., Semenov V.Yu., Flaksman A.G. Spatiotemporal signal processing in automotive radar subject to active interference. *Radiophys. Quantum El.* 2024;67(3):261–269. <https://doi.org/10.1007/s11141-025-10371-w>
[Original Russian Text: Ermolaev V.T., Semenov V.Yu., Flaksman A.G. Spatiotemporal signal processing in automotive radar subject to active interference. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Radiofizika.* 2024;67(3):292–301 (in Russ.). https://doi.org/10.52452/00213462_2024_67_03_292]
40. Mazor Y., Berman I.E., Routtenberg T. On the limitations of the Bayesian Cramér–Rao bound for mixed-resolution data. *IEEE Signal Process. Lett.* 2025;32:446–450. <https://doi.org/10.1109/LSP.2024.3519804>
41. Bolkhovskaya O.V., Sergeev V.A., Maltsev A.A. Detection and position determination of the signal source in the near-field zone of the circular antenna array. *Antenny = Antennas.* 2023;5:23–37 (in Russ.). <https://doi.org/10.18127/j03209601-202305-03>
42. Sergeev V.A. Optimization of the size of the circular antenna array in the problem of determining the direction to the radiation source in the far-field zone. *Antenny = Antennas.* 2023;5:13–22 (in Russ.). <https://doi.org/10.18127/j03209601-202305-02>
43. Bolkhovskaya O., Maltsev A., Sergeev V., Keusgen W., Peter M. Accurate iterative algorithm for detection and the signal AoA estimation in low SNR region. In: *2019 4th International Conference on Computing, Communications and Security (ICCCS)*. 2019 Oct 10–12; Rome, Italy. IEEE. P. 89–95. <https://doi.org/10.1109/CCCS.2019.8888112>

Об авторе

Болховская Олеся Викторовна, к.ф.-м.н., доцент, кафедра статистической радиофизики и мобильных систем связи, Радиофизический факультет, ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского» (603950, Россия, Нижний Новгород, пр-т Гагарина, д. 23). E-mail: obol@rf.unn.ru. Scopus Author ID 56373874700, ResearcherID AAQ-4264-2020, SPIN-код РИНЦ 4240-6246, <https://orcid.org/0000-0002-6679-9295>

About the Author

Olesya V. Bolkhovskaya, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor, Department of Statistical Radiophysics and Mobile Communication Systems, Faculty of Radiophysics, National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (23, Gagarina pr., Nizhny Novgorod, 603950 Russia). E-mail: obol@rf.unn.ru. Scopus Author ID 56373874700, ResearcherID AAQ-4264-2020, RSCI SPIN-code 4240-6246, <https://orcid.org/0000-0002-6679-9295>

УДК 629.3.066

<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-6-63-77>

EDN FGTHOC



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Устройство вызова экстренных оперативных служб для обеспечения голосовой связи водителя двухколесного транспортного средства и оператора системы «ЭРА-ГЛОНАСС»

В.В. Никитин ¹, С.У. Увайсов ², Д.В. Басов ^{2, @}

¹ ООО «ФИКОМ-ИТ», Москва, 129128 Россия

² МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, 119454 Россия

@ Автор для переписки, e-mail: d_basov@mail.ru

• Поступила: 29.01.2025 • Доработана: 24.06.2025 • Принята к опубликованию: 09.10.2025

Резюме

Цели. Целью исследования является повышение безопасности дорожного движения за счет разработки устройства вызова экстренных оперативных служб для водителей двухколесных транспортных средств, как наиболее уязвимых участников дорожного движения, и улучшения их технической оснащенности.

Методы. В ходе исследования проанализированы характеристики канала передачи акустического сигнала и процессов, сопровождающих его распространение. При исследовании параметров голосовой связи применялись методы шумоподавления, эхоподавления и эхокомпенсации, а также алгоритмы преобразования акустической информации, реализованные в аппаратно-программной части устройства.

Результаты. В ходе проектирования устройства учтены особенности управления двухколесным транспортным средством, влияние внешних воздействующих факторов и климатических условий. Предложена реализация интерфейса взаимодействия водителя двухколесного транспортного средства с оператором системы «ЭРА-ГЛОНАСС», учитывающая специфику его использования. Приведены структурные схемы эхокомпенсатора и детектора двойного речевого сигнала с использованием адаптивного фильтра. Описана процедура автоматической регулировки усиления акустического сигнала речевого диапазона. Рассмотрены алгоритмы, реализующие эти процессы, и возможность их адаптации к задачам устройства вызова экстренных оперативных служб. Показаны результаты практической реализации опытного образца устройства: конструкция, его интеграция в приборную панель двухколесного транспортного средства. Приведены структурная схема тестового стенда, программное обеспечение для качественного анализа акустического сигнала, оценена эффективность предложенного решения.

Выводы. Результаты исследования по конструированию устройства вызова экстренных оперативных служб показали, что применение алгоритмов аналоговой и цифровой обработки речевого сигнала, реализуемых в кодеке и модеме устройства, позволит обеспечить качественный уровень голосовой связи водителя с оператором экстренных оперативных служб.

Ключевые слова: двухколесное транспортное средство, акустический сигнал, дуплексная голосовая связь, алгоритм эхокомпенсации, алгоритм шумоподавления, нормализованный алгоритм наименьших квадратов, цифровой сигнальный процессор, алгоритм LMS, алгоритм NLMS

Для цитирования: Никитин В.В., Увайсов С.У., Басов Д.В. Устройство вызова экстренных оперативных служб для обеспечения голосовой связи водителя двухколесного транспортного средства и оператора системы «ЭРА-ГЛОНАСС». *Russian Technological Journal*. 2025;13(6):63–77. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-6-63-77>, <https://www.elibrary.ru/FGTHOC>

Прозрачность финансовой деятельности: Авторы не имеют финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

RESEARCH ARTICLE

A device for calling emergency operational services to provide voice communication between the driver of a two-wheeled vehicle and the operator of the ERA-GLONASS system

Vasily V. Nikitin ¹, Saygid U. Uvaysov ², Dmitry V. Basov ^{2, @}

¹ FICOM-IT, Moscow, 129128 Russia

² MIREA – Russian Technological University, Moscow, 119454 Russia

@ Corresponding author, e-mail: d_basov@mail.ru

• Submitted: 29.01.2025 • Revised: 24.06.2025 • Accepted: 09.10.2025

Abstract

Objectives. The aim of the study is to improve road safety by developing an emergency call device for drivers of two-wheeled vehicles, as the most vulnerable road users, and improving their technical equipment.

Methods. In the course of the study, the characteristics of the acoustic signal transmission channel and the processes accompanying its propagation were analyzed. When studying the parameters of voice communication, noise reduction, echo cancellation and echo compensation methods were used, as well as algorithms for converting acoustic information implemented in the hardware and software of the device.

Results. The results of practical implementation are presented: the design of a prototype device, its integration into the dashboard of a two-wheeled vehicle. During the design of the device, the control features of a two-wheeled vehicle, the influence of external factors and climatic conditions were taken into account. An implementation of the interface of interaction between the driver of a two-wheeled vehicle and the operator of the ERA-GLONASS system is proposed, taking into account the specifics of its use. Structural schemes of an echo compensator and a dual speech signal detector using an adaptive filter are presented. The algorithms implementing these processes and the possibility of their adaptation to the tasks of the emergency call device are considered. The procedure for automatically adjusting the amplification of the acoustic signal of the speech range is described, an analytical description of the technical problem and the applied methods of digital processing are given. A structural diagram of the test stand, software for qualitative analysis of the acoustic signal, visualization of the test results of the prototype are presented, and the effectiveness of the proposed solution is evaluated.

Conclusions. The results of a study on the design of an emergency call device have shown that the use of analog and digital speech signal processing algorithms implemented in the device's codec and modem will ensure a high-quality level of voice communication between the driver and the emergency services operator.

Keywords: two-wheeled vehicle, acoustic signal, duplex voice communication, echo cancellation algorithm, noise reduction algorithm, normalized least squares algorithm, digital signal processor, LMS algorithm, NLMS

For citation: Nikitin V.V., Uvaysov S.U., Basov D.V. A device for calling emergency operational services to provide voice communication between the driver of a two-wheeled vehicle and the operator of the ERA-GLONASS system. *Russian Technological Journal*. 2025;13(6):63–77. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-6-63-77>, <https://www.elibrary.ru/FGTHOC>

Financial disclosure: The authors have no financial or proprietary interest in any material or method mentioned.

The authors declare no conflicts of interest.

ВВЕДЕНИЕ

Обеспечение безопасности дорожного движения всегда являлось актуальной и важной задачей, острота и сложность которой не снижается в современных условиях развития дорожной сети и инфраструктуры, характеризующейся увеличением многообразия и численности транспортных средств (ТС), ежедневно передвигающихся по автотрассам. Важным аспектом обеспечения безопасности дорожного движения является понимание характера произошедшего дорожно-транспортного происшествия (ДТП), информации о количестве пострадавших, полученных травмах для наиболее эффективного оказания помощи. Дорожно-транспортные происшествия с участием двухколесных ТС являются наиболее тяжелыми, т.к. водитель данного ТС не защищен кузовом, в отличие от водителя автомобиля. Поэтому кроме подтверждения самого факта аварии с помощью автоматических алгоритмов, ценную информацию могут дать свидетели ДТП, а также, при возможности, непосредственные участники. Для этого двухколесные ТС необходимо оснащать устройствами вызова экстренных оперативных служб (УВЭОС) с возможностью двухсторонней голосовой связи с оператором.

Особенности человеко-технической системы (водитель и двухколесное ТС) накладывают определенные ограничения на исполнение УВЭОС. При его разработке необходимо учитывать значительно меньшие массогабаритные параметры ТС по сравнению с автомобилем, наличие шлема на водителе, который заглушает речь, а в случае ДТП не всегда есть возможность его снять, всепогодное исполнение, расстояние от динамика и микрофона говорящего, которое может изменяться в достаточно широких пределах, а также высокий уровень шума дорожной обстановки.

Для качественного голосового соединения с оператором экстренных служб необходимо обеспечить высокопроизводительную аналого-цифровую

обработку речевой информации (ГОСТ 34788-2021¹), погасить шумы, убрать эхо, обеспечить корректный уровень автоматической регулировки усиления микрофона и динамика в зависимости от окружающих условий (ГОСТ 33468-2015²).

Известно, что цифровая обработка вносит задержку в распространение сигнала, поэтому необходимо соблюдать баланс между качеством обработки и временем прохождения сигнала [1].

Современные алгоритмы обработки речевого сигнала, как правило, реализуются на основе цифрового сигнального процессора, модема сотовой связи. Для улучшения качества обработки сигнала и снижения задержки целесообразно отдельные вычисления перенести на другие части схемы, например, на кодек и микроконтроллер.

ОСНОВНЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ КАЧЕСТВА ДВУХСТОРОННЕЙ ГОЛОСОВОЙ СВЯЗИ

В УВЭОС для связи с оператором экстренных служб на стороне абонента используется способ дуплексной громкой связи. Для четкого понимания

¹ ГОСТ 34788-2021. Межгосударственный стандарт. *Автомобильные транспортные средства. Системы вызова экстренных оперативных служб. Качество громкоговорящей связи. Технические требования и методы испытаний*. М.: Российский институт стандартизации; 2021. 20 с. [GOST 34788-2021. Interstate Standard. *Motor vehicles. Call emergency services systems. Speakerphone quality. Technical requirements and test methods*. Moscow: Russian Institute of Standardization; 2021. 20 p. (in Russ.).]

² ГОСТ 33468-2015. Межгосударственный стандарт. *Глобальная навигационная спутниковая система. Система экстренного реагирования при авариях. Методы испытаний устройства/системы вызова экстренных оперативных служб на соответствие требованиям к качеству громкоговорящей связи в кабине транспортного средства*. М.: Стандартинформ, 2016. 74 с. [GOST 33468-2015. Interstate Standard. *Global navigation satellite system. Road accident emergency response system. In-vehicle emergency call device/system. General technical requirements*. Moscow: Standartinform; 2016. 74 p. (in Russ.).]

речевой информации терминальное оборудование должно обеспечивать следующие характеристики [2]:

- 1) достаточный уровень превышения сигнала динамика над общим уровнем шума,
- 2) достаточный уровень превышения сигнала микрофона над общим уровнем шума,
- 3) широкий динамический диапазон микрофона, обеспечивающий стабильную работу в шумной обстановке дороги общего пользования,
- 4) низкие собственные внутриканальные шумы,
- 5) автоматическую регулировку усиления,
- 6) шумоподавление,
- 7) эхокомпенсацию,
- 8) добавление комфортного шума в канал связи.

Пункты 1–4 обеспечиваются схемотехническим решением, которое включает динамик необходимой мощности, усилитель звуковой частоты, чувствительный микрофон с широким динамическим диапазоном и собственным трактом усиления, а также полосовой фильтр, который обеспечивает пропускание только полезного речевого диапазон сигнала (300–3400 Гц) и фильтры, подавляющие узкополосные помехи (гармоники от электрооборудования, GSM³).

Пункты 5–8 обеспечиваются алгоритмами цифровой обработки речевого сигнала. В зависимости от конструктивного исполнения УВЭОС цифровой сигнальный процессор может быть установлен отдельно или входить в состав модема сотовой связи.

Конструкция устройства реализуется в виде печатного узла, разработанного с использованием специализированных систем автоматизированного проектирования.

АВТОМАТИЧЕСКАЯ РЕГУЛИРОВКА УСИЛЕНИЯ РЕЧЕВОГО СИГНАЛА

Реализация автоматической регулировки усиления на основе цифровой обработки сигналов является технически сложной задачей, поэтому в большинстве случаев этот метод представляет собой перенос алгоритмов аналоговой схемотехники на цифровой сигнал. Тем не менее, современные системы обработки речевого сигнала используют преимущества цифровой обработки сигналов в системах автоматической регулировки усиления благодаря расчетам на основе аналитического сигнала. Любой отсчет цифрового аналитического сигнала $x(n)$ представляет собой комплексное число:

$$x(n) = \operatorname{Re}\{x(n)\} + i\operatorname{Im}\{x(n)\},$$

где n – номер отсчета.

³ Global system for mobile communications – стандарт мобильной связи второго поколения. [Global System for Mobile Communication (GSM) is the second-generation mobile communication standard.]

Нормализованная форма цифрового сигнала имеет вид:

$$x_{\text{норм}}[n] = \frac{x(n)}{|x(n)|}. \quad (1)$$

Если сигнал представляет собой смесь гармонического колебания и шума либо он является суммой гармонических колебаний, то нормализация приведет к искажению сигнала. Поэтому для выравнивания сигнала в формуле (1) в знаменателе указывают не модуль отсчета, а усредненное значение огибающей сигнала. Усреднение огибающей сигнала можно произвести с помощью фильтра с конечной импульсной характеристикой, применяя усреднение не к самому сигналу, а к его модулю. Тогда формула нормализации примет следующий вид:

$$x_{\text{норм}}(n) = \frac{x(n)}{x_{\text{cp}}(n)},$$

где $x_{\text{cp}}(n)$ – усредненное значение модуля сигнала, полученное с помощью скользящего среднего:

$$\dot{x}_{\text{cp}}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |\dot{x}(n-k)|,$$

где N – длина окна усреднения, k – индекс суммирования.

При использовании этого метода для речевого сигнала необходимо учесть следующие особенности. В речевом сигнале присутствуют паузы между отдельными слогами и фразами. Оцифрованный звуковой сигнал всегда имеет шумы, состоящие из внутриканальных шумов, обусловленных электрической схемой, внешних шумов и шумов квантования. Эти шумы будут усиливаться в паузах до номинального уровня выходного сигнала. Для борьбы с этим эффектом применяют два способа. Первый – блокирование автоматической регулировки усиления в паузах с помощью детектора речевого сигнала. Второй – добавление к усредненной огибающей постоянной составляющей, значения параметров которой выше максимальных абсолютных значений шума в паузах речевого сигнала. В этом случае формула усреднения примет следующий вид:

$$x_{\text{норм}}(n) = \frac{x(n)}{x_{\text{cp}}(n) + L}.$$

Константа L подбирается опытным путем во время настройки системы под конкретные шумовые сценарии.

ШУМОПОДАВЛЕНИЕ

Речевой сигнал, принимаемый оператором системы «ЭРА-ГЛОНАСС», зашумлен. Так как двухколесное ТС не имеет закрытой кабины, окружающий шум может иметь значительную интенсивность, и его наличие может сильно исказить результаты анализа и распознавания речи. Для удаления шума используют различные методы шумоподавления. В данном случае возможно применять методы, работающие в реальном времени и вносящие минимальную задержку в обрабатываемый сигнал. Значительным усложнением процедуры шумоподавления является изменение громкости и характера шума (спектральных составляющих) с течением времени. Наибольшее распространение получили методы шумоподавления, основанные на предположении, что речевой сигнал и шум взаимно некоррелированы [3].

Пусть речевой сигнал $x(n)$ искажается аддитивным шумом $v(n)$. Тогда зашумленный сигнал $y(n)$ можно представить следующим образом:

$$y(n) = x(n) + v(n).$$

Общая задача шумоподавления заключается в восстановлении сигнала $\hat{x}(n)$, максимально близкого к исходному $x(n)$, из наблюдаемого зашумленного сигнала $y(n)$. Для этого разработаны адаптивные алгоритмы, основанные на оценке шума и его подавлении.

В случае разбиения сигнала на окна длительностью от 10 до 30 мс можно утверждать, что речевой сигнал и шум становятся стационарными, поэтому методы шумоподавления реализуются исходя из этого утверждения [4, 5]. В цифровых сигнальных процессорах современных модемов для оценки шума наиболее широко применяются алгоритмы Кохена – Бердуга MCRA (minima controlled recursive averaging или рекурсивное усреднение с контролем минимумов), квантильного оценивания и различных вариантов на их основе [6, 7]. Непосредственно для шумоподавления используется одна из современных модификаций винеровской фильтрации.

ЭХОКОМПЕНСАЦИЯ

В телефонии различают два типа эха:

- акустическое, обусловленное отражением звуковых волн и акустической связью между громкоговорителем и микрофоном;
- электрическое, возникающее из-за проблем в согласовании линий (в настоящее время практически не встречается).

В случае с УВЭОС необходимо подавить акустическое эхо, возникающее у оператора связи и обусловленное акустической связью между микрофоном и динамиком блока интерфейса пользователя (БИП), а также отражением акустических волн от ближайших предметов.

Алгоритмы эхокомпенсации разделяются на алгоритмы во временной и частотной областях [8, 9]. Для низкочастотных сигналов, к которым относятся сигналы в телефонной линии, наиболее эффективными с точки зрения использования вычислительных ресурсов показали себя алгоритмы во временной области.

Адаптивный алгоритм эхокомпенсации включает следующие шаги [6]:

1. Моделирование эхо-тракта.

Формируется адаптивная модель, описывающая истинные характеристики акустического тракта θ . Модель представляет собой фильтр с вектором регулируемых коэффициентов $\hat{\theta}$.

2. Оценка эхо-сигнала.

На каждом шаге n вычисляется оценка эха $\hat{z}(n)$ путем свертки вектора x опорного сигнала с вектором $\hat{\theta}$ коэффициентов модели:

$$\hat{z}(n) = \hat{\theta}^T \cdot x,$$

где T – знак транспонирования, а размерность векторов определяется длиной цифрового фильтра.

3. Адаптация параметров модели.

Параметры модели $\hat{\theta}$ непрерывно корректируются на основе анализа сигнала ошибки $e(n)$, который отражает разницу между реальным эхо-сигналом $z(n)$ и его оценкой $\hat{z}(n)$. Процесс адаптации минимизирует эту ошибку, используя алгоритм подстройки коэффициентов.

4. Компенсация эхо-сигнала.

Окончательный выходной эхокомпенсированный сигнал формируется путем вычитания оценки эха $\hat{z}(n)$ из общего сигнала микрофона $m(n)$:

$$y(n) = m(n) - \hat{z}(n),$$

где $m(n) = \omega(n) + z(n)$, $\omega(n)$ – полезный сигнал ближнего абонента, $z(n)$ – реальный эхо-сигнал.

Схема работы эхокомпенсатора показана на рис. 1. Сигнал дальнего конца (far-end) соответствует голосу оператора, а сигнал ближнего конца (near-end) – голосу пользователя, передаваемому через систему громкой связи.

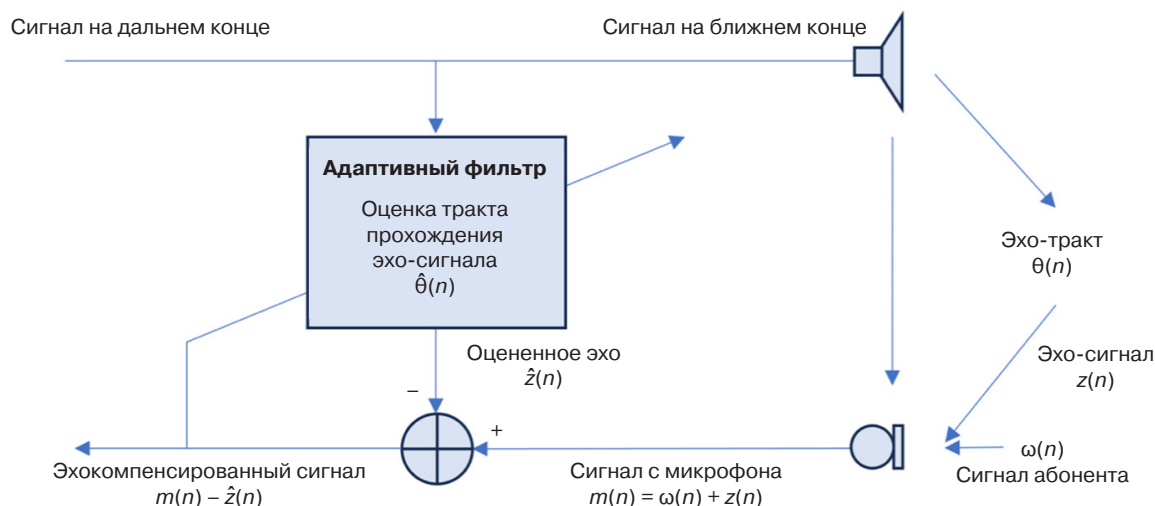


Рис. 1. Схема эхокомпенсатора с использованием адаптивного фильтра

АЛГОРИТМ НАИМЕНЬШИХ СРЕДНИХ КВАДРАТОВ

Алгоритм Уидроу – Хоффа [10], известный как алгоритм наименьших средних квадратов (least mean squares, LMS), по сей день является одним из лучших алгоритмов адаптивной фильтрации. Он широко используется при реализации систем эхоподавления. Алгоритм корректирует коэффициенты $\hat{\theta}$ фильтра, чтобы уменьшить среднеквадратичную ошибку между желаемым (целевым) сигналом и выходным сигналом фильтра. Этот алгоритм получил широкое распространение, в т.ч. из-за его вычислительной простоты.

НОРМАЛИЗОВАННЫЙ АЛГОРИТМ НАИМЕНЬШИХ СРЕДНИХ КВАДРАТОВ

Нормализованный алгоритм наименьших средних квадратов (normalized least mean squares, NLMS) [11] выводится из алгоритма LMS. Если мощность входного сигнала адаптивного фильтра изменяется со временем, то размер шага между двумя соседними коэффициентами фильтра также изменится и повлияет на скорость сходимости. Из-за низкого уровня сигнала скорость сходимости замедлится, при высоком уровне сигнала скорость сходимости увеличится и даст ошибку. Для решения этой проблемы необходимо сделать зависимым размер шага от уровня входного сигнала. Такой размер шага будет называться нормализованным.

ДЕТЕКТОР ДВОЙНОГО РАЗГОВОРА

При акустическом подавлении эха ключевой проблемой становится устранение эффекта двойного разговора (double-talk, dt) [12], который возникает, когда

одновременно активны речевые сигналы на дальнем конце и ближнем конце. В этом случае сигнал удаленного абонента искажается из-за наложения локальной речи. Для решения данной проблемы в систему интегрируют детектор двойного разговора, задача которого заключается в том, чтобы приостановить этап адаптации во время работы алгоритма фильтрации, когда на ближнем конце присутствует речевой сигнал, и, тем самым, избежать расхождения в адаптивном алгоритме.

Реализация детектора двойного разговора (double-talk detector, DTD) совместно с адаптивным фильтром представлена на рис. 2. В данной схеме DTD анализирует 3 ключевых параметра:

- 1) сигнал дальнего конца $x(n)$ – опорный сигнал эха;
- 2) сигнал ближнего конца $m(n)$ – смесь полезного сигнала и эха;
- 3) сигнал ошибки $e(n) = m(n) - \hat{z}(n)$, где $\hat{z}(n)$ – оценка эха, сформированная адаптивным фильтром.

Сигнал ошибки $e(n)$, по сути, представляет собой эхокомпенсированный сигнал, получаемый после вычитания смоделированного эха из входного сигнала микрофона. Этот сигнал возникает в двух основных случаях:

- когда адаптивный фильтр еще не достиг сходимости (в начальный период работы);
- при изменении акустических характеристик помещения (например, перемещении микрофона)

Детектор DTD оценивает уровень сигналов $x(n)$, $m(n)$ и $e(n)$, затем анализирует соотношение сигнал/эхо и принимает решение об обновлении коэффициентов фильтра, разрешает адаптацию при отсутствии двойного разговора или блокирует обновление при обнаружении одновременной речи [13].

Существует несколько алгоритмов DTD, но наиболее распространенные из них алгоритм Гейтеля

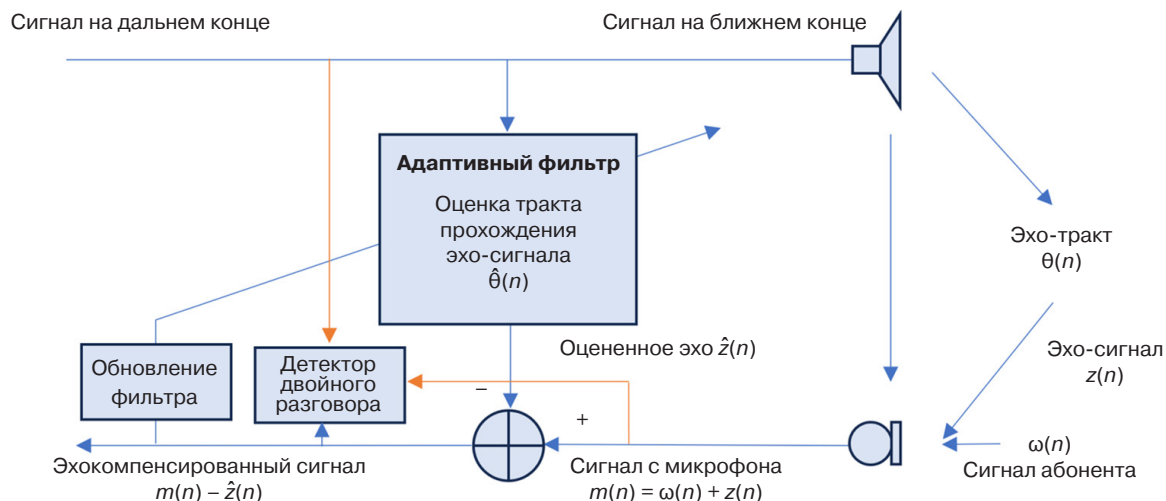


Рис. 2. Схема включения детектора двойного разговора совместно с адаптивным фильтром

и алгоритмы на основе вычисления взаимной корреляции (Benesty и нормализованной взаимной корреляции (normalized cross-correlation, NCC)) [14].

Суть алгоритма Гейгеля заключается в сравнении мощностей двух сигналов: принимаемого сигнала микрофона (содержащего возможное эхо и/или речь ближнего абонента) и опорного сигнала дальнего конца (передаваемого на громкоговоритель). Когда в микрофоне присутствует только эхо-сигнал (без речи ближнего абонента), его мощность оказывается пропорционально меньше мощности опорного сигнала из-за затухания в акустическом тракте. Если же к эху добавляется речь ближнего абонента, общая мощность сигнала микрофона существенно возрастает. Это различие позволяет алгоритму надежно детектировать факт двойного разговора.

В отличие от энергетического подхода Гейгеля, алгоритм Benesty использует нормированный коэффициент взаимной корреляции между сигналом дальнего конца (опорным сигналом эха) и сигналом микрофона (смесью эха и речи ближнего абонента). Высокое значение корреляции указывает на доминирование эха в сигнале микрофона, тогда как снижение корреляции свидетельствует о появлении речи ближнего абонента. Такой подход обеспечивает более точное детектирование по сравнению с простым сравнением мощностей.

Алгоритм нормализованной взаимной корреляции вычисляет статистику принятия решения, анализируя соотношение между сигналом микрофона и сигналом ошибки (разностью между фактическим и оцененным эхо-сигналом). В основе лежит оценка дисперсии сигнала ближнего абонента (полезного сигнала) и взаимной корреляции между сигналом ошибки и сигналом микрофона. Нормализация по мощности сигналов делает алгоритм устойчивым

к изменениям уровня сигналов, что особенно важно в условиях переменного акустического окружения.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ОПЫТНОГО ОБРАЗЦА ИНТЕРФЕЙСА ПОЛЬЗОВАТЕЛЯ

Для моделирования и тестирования алгоритмов был разработан опытный образец БИП. Внешний вид устройства представлен на рис. 3.



Рис. 3. Внешний вид проектируемого устройства

Устройство располагается на руле двухколесного ТС в зоне доступности водителя. Оно содержит микрофон, динамик, кнопку «SOS» вызова экстренных оперативных служб, индикатор состояния устройства и крышку, предотвращающую случайное нажатие. Способ размещения устройства и составные части БИП показаны на рис. 4.



Рис. 4. Размещение УВЭОС на двухколесном ТС

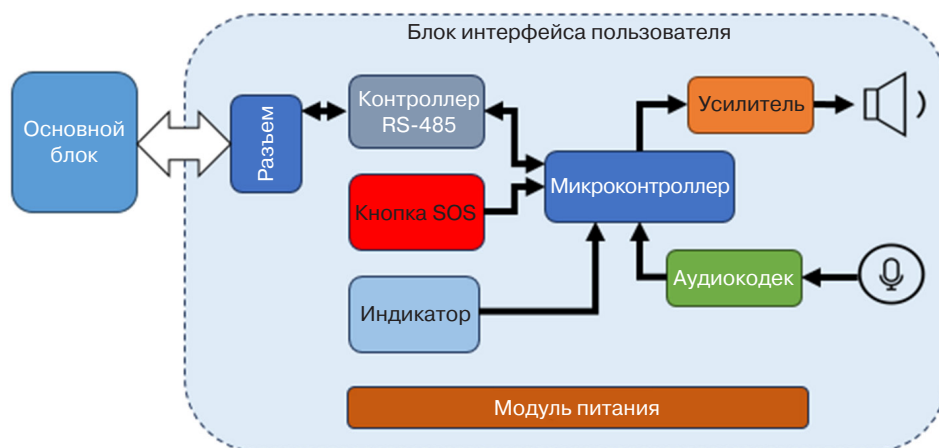


Рис. 5. Функциональная схема БИП

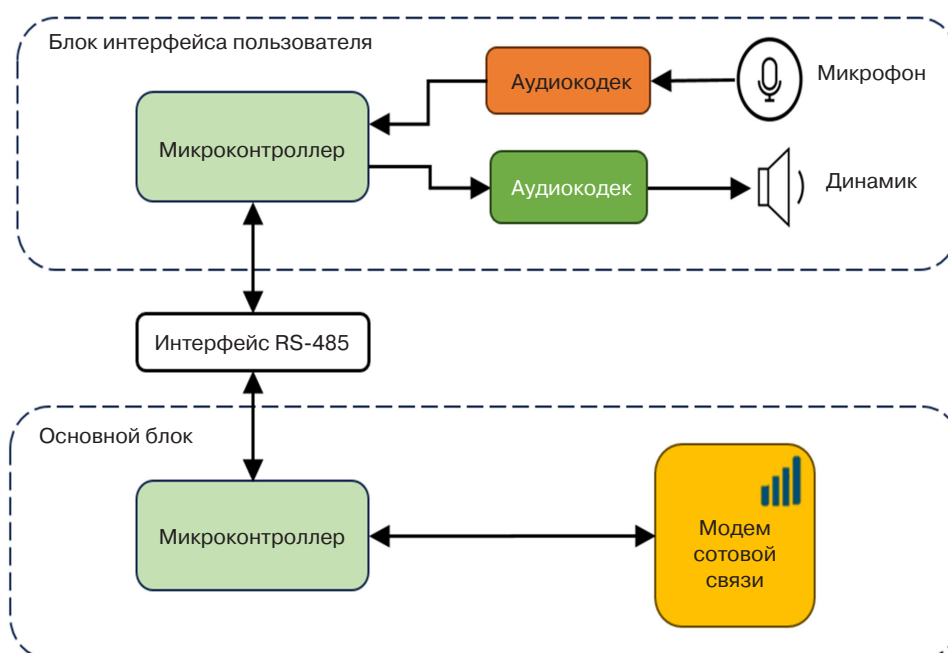


Рис. 6. Схема тракта прохождения акустического сигнала в БИП

Поскольку динамик и микрофон находятся в одном корпусе в непосредственной близости друг от друга, то эффект акустического эха будет выражен очень сильно [15]. Для его подавления предложено применить цифровой сигнальный процессор модема, а для вспомогательных вычислений – микроконтроллер основного блока. Функциональная схема БИП показана на рис. 5.

Тракт прохождения акустического речевого сигнала в БИП показан на рис. 6. В кодеке, расположенном в БИП, осуществляется преобразование

аналогового сигнала микрофона/динамика в цифровой, здесь же реализуется обратная процедура (интерфейс I²S⁴). Далее по интерфейсу RS-485⁵ сигнал поступает в основной блок, главная задача которого – обеспечение помехоустойчивости. Затем в микроконтроллере основного блока сигнал передается на интерфейс I²S и подается в модем. Поскольку интерфейс I²S поддерживает передачу только на короткие расстояния, использование интерфейса RS-485 в данном случае весьма оправдано [16].

⁴ I²S (inter-integrated circuit sound) – стандарт интерфейса электрической последовательной шины для соединения цифровых аудиоустройств. [I²S (Inter-Integrated Circuit Sound) is a standardized electrical serial bus interface for connecting digital audio devices.]

⁵ Recommended standard 485 – стандарт физического уровня для асинхронного интерфейса. [Recommended Standard 485 is the physical layer standard for an asynchronous interface.]



Рис. 7. Структурная схема тестового стенда УВЭОС

Основной блок УВЭОС имеет в составе модем Telit LE910 (Telit Cinterion, Италия) и кодек NAU8810 (Nuvoton Technology Corporation, Тайвань). Модем реализован на базе чипсета Qualcomm и имеет встроенный цифровой сигнальный процессор этого же производителя. Настройка параметров цифрового процессора осуществляется посредством пользовательского интерфейса программного обеспечения (ПО) *Qualcomm QACT* (Qualcomm, США).

ТЕСТИРОВАНИЕ УСТРОЙСТВА

Структурная схема тестового стенда для настройки и анализа качества голосовой связи представлена на рис. 7. Устройство вызова экстренных оперативных служб, установленное на двухколесном ТС, соединяется с радиокommunikационным тестером посредством сотовой связи. Звуковой вход тестера подключается к компьютеру с установленным ПО *HEAD Analyzer ACQUA* (HEAD Acoustics GmbH, Германия), в составе которого имеется набор звуковых тестов для проверки качественных показателей речевого сигнала. Алгоритм работы ПО позволяет тестировать качество связи, как со стороны оператора, так и со стороны водителя ТС.

При тестировании на стороне оператора калиброванные звуковые сигналы передаются в радиокommunikационный тестер, затем – на модем УВЭОС и по речевому тракту – в динамик БИП. Далее они принимаются искусственным слуховым аппаратом манекена и оцениваются с помощью ПО *HEAD Analyzer ACQUA*.

При тестировании на стороне водителя ТС калиброванные звуковые сигналы из искусственного речевого аппарата манекена через микрофон БИП

передаются по речевому тракту УВЭОС в модем, затем через радиокommunikационный тестер – в ПО для соответствующего анализа.

Рабочее место управления шумовыми сценариями служит для имитации уличного окружающего шума в условиях заглушенной камеры, в которой проводятся испытания.

В результате настроек цифрового сигнального процессора и алгоритмов микроконтроллера удалось добиться показателей речевой связи оператора экстренных оперативных служб и водителя ТС, удовлетворяющих ГОСТ 33464-2015⁶. Методы этого стандарта ориентированы на испытания в салоне автомобиля, но их можно использовать и для двухколесных ТС. Тесты наиболее важных показателей приведены ниже.

ЗАТУХАНИЕ В КАНАЛЕ ПЕРЕДАЧИ В РЕЖИМЕ ДВУСТОРОННЕГО РАЗГОВОРА

При одновременном разговоре абонентов максимально допустимое затухание $A_{H,S,dT}$ вносимое УВЭОС в канал передачи S , нормируется ГОСТ 33464-2015 и проверяется методами, описанными в ГОСТ 33468-2015 п. 7.9.2. Затухание зависит от типа производительности (класса качества) УВЭОС для дуплексной связи и должно соответствовать значению, приведенному в таблице.

⁶ ГОСТ 33464-2015. Межгосударственный стандарт. Глобальная навигационная спутниковая система. Система экстренного реагирования при авариях. Устройство/система вызова экстренных оперативных служб. Общие технические требования. М.: Стандартинформ, 2017. 86 с. [GOST 33464-2015. Interstate standard. Global navigation satellite system. Road accident emergency response system. In-vehicle emergency call device/system. General technical requirements. Moscow: Standartinform; 2017. 86 p. (in Russ.).]

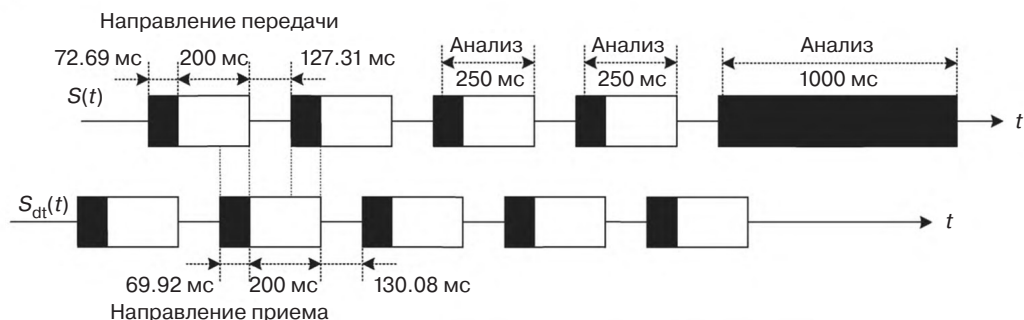


Рис. 8. Тестовые сигналы для определения диапазона затухания в направлении передачи во время одновременного разговора ($S(t)$ – сигнал в направлении передачи, $S_{dt}(t)$ – сигнал в направлении приема)

Таблица. Параметры типа производительности УВЭОС для дуплексной связи

Параметр	Класс качества				
	1	2a	2b	2c	3
	Полная дуплексная связь	Частичная дуплексная связь			Полу-дуплексная связь
$A_{H, S, dt}$, дБ	≤ 3	≤ 6	≤ 9	≤ 12	> 12

Требования должны выполняться как при номинальных уровнях сигналов приема и передачи, так и при дисбалансе этих уровней. Необходимо проверить две комбинации уровней сигналов:

- номинальные уровни сигналов на прием и передачу;
- уровень сигнала на передачу выше на 6 дБ, уровень сигнала на прием ниже на 6 дБ.

При тестировании используются две последовательности некоррелированных CSS (composite source signal – составной сигнал) сигналов, которые подаются в канал передачи и приема одновременно с частичным перекрытием во времени для создания эффекта одновременного разговора.

Начальный участок каждого периода CSS-сигнала (вокализованный звук, показан на рис. 8 черным цветом), идущего в одном направлении, пересекается с конечным участком каждого периода CSS-сигнала (псевдошум, показан белым цветом), идущего в противоположном направлении. Анализ проводится в моменты активного сигнала в направлении передачи.

Перед началом тестирования эхокомпенсатор должен быть настроен на максимальное эхоподавление с помощью тренировочной последовательности в канале приема, состоящей из женских и мужских голосовых записей длительностью 10 с каждая.

Уровень сигнала в канале передачи оценивается во временной области с постоянной времени интегрирования 5 мс. Строится зависимость уровня сигнала

от времени. Ослабление сигнала в канале передачи оценивается между уровнем сигнала во время одновременного двухстороннего разговора и уровнем сигнала во время одностороннего разговора (в паузах сигнала приема) при условии полной активации канала передачи. Анализ проводится для всей тестовой последовательности, начиная со второго периода CSS-сигнала.

Результаты измерения приведены на рис. 9 и 10. Рисунок 9 представляет собой наложенные на одну временную шкалу записи ближнего абонента в тишине и в присутствии сигнала дальнего абонента (через динамик системы громкоговорящей связи). На рис. 10 уровень громкости имеет линейный масштаб, значения приведены в вольтах, потому что записаны после вокодера измерительной системы. Это рисунок показывает отношение сигналов на рис. 9, т.к. сигнал ближнего абонента в присутствии дальнего абонента всегда будет тише сигнала ближнего абонента в тишине. Значения кривой имеют отрицательные знаки.

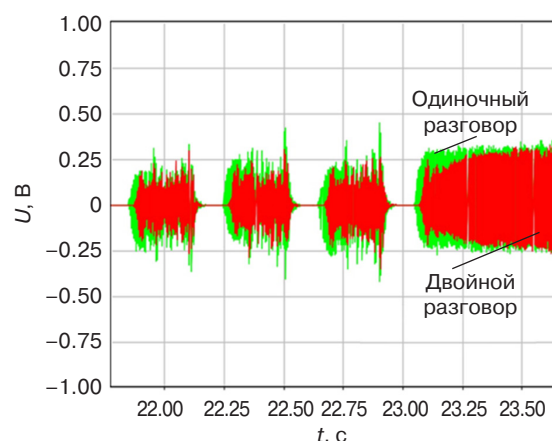


Рис. 9. Зависимость уровня сигнала от времени в направлении передачи для одностороннего разговора и двустороннего разговора в присутствии сигнала дальнего абонента, проинтегрированные с постоянной времени интегрирования 5 мс

В качестве финальной оценки высчитывается значение максимально допустимого затухания:

$$A_{H,S,dt} = \frac{5}{t_{\text{end}} - t_{\text{start}}} \int_{t_{\text{start}}}^{t_{\text{end}}} |L_{dB}(t)| dt,$$

где $L_{dB}(t)$ – мгновенное значение затухания в момент времени t (в дБ), $(t_{\text{end}} - t_{\text{start}})$ – длительность временного интервала, 5 мс – шаг дискретизации.

Затухание равно среднему значению площади под кривой, полученной в результате интегрирования сигнала с постоянной времени 5 мс, и рассчитывается как отношение суммарной площади по всем интервалам к количеству отсчетов интегрирования (рис. 10). При этом сама кривая уровня уже интегрирована с постоянной времени 5 мс, что уменьшает вероятность искажения результатов за счет случайных кратковременных выбросов.

Полученные результаты, проанализированные с помощью ПО *HEAD Analyzer ACQUA*, соответствуют классу 2а, что удовлетворяет требованиям ГОСТ 33464-2015.

Аналогичные испытания были проведены для случая, когда «уровень сигнала на передачу выше на 6 дБ, уровень сигнала на прием ниже на 6 дБ», т.е. когда громкость звука ближнего абонента на 6 дБ больше, а громкость звука дальнего абонента (сигнал дальнего абонента воспроизводится через динамик устройства) на 6 дБ меньше. При номинальных уровнях громкости измеренные характеристики оставались в пределах допустимых значений.

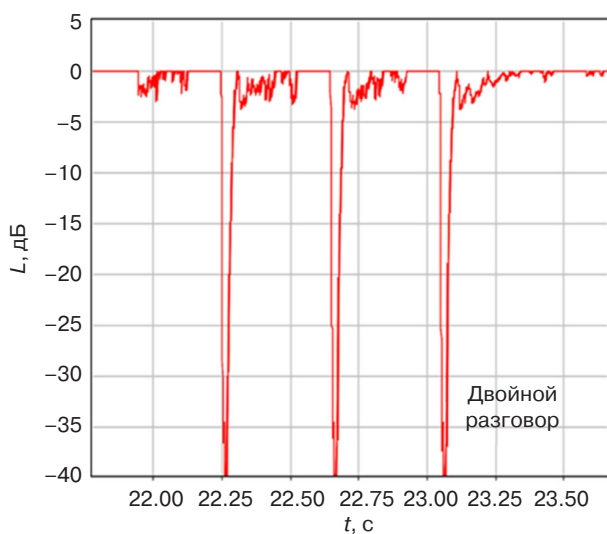


Рис. 10. Зависимости отношения сигнала в направлении передачи для ситуации двустороннего разговора к сигналу в направлении передачи для ситуации одностороннего разговора от времени, проинтегрированные с постоянной времени 5 мс

СТАБИЛЬНОСТЬ ОСЛАБЛЕНИЯ ЭХО-СИГНАЛОВ ОТ ВРЕМЕНИ

При подаче в канал приема УВЭОС комбинированного тестового сигнала и тестового сигнала искусственного голоса номинального уровня ослабление эхо-сигналов в канале передачи УВЭОС в течение длительного времени измерения не должно снижаться более, чем на 6 дБ от своего максимального значения (согласно требованиям ГОСТ 33464-2015 и методу проверки, изложенному в ГОСТ 33468-2015, п. 7.7.3).

Первый тестовый сигнал представляет собой периодически повторяемый комбинированный сигнал CSS. Проверка проводится для двух средних уровней сигнала –5 дБм0 и –25 дБм0.

Второй тестовый сигнал представляет собой одну последовательность для мужского голоса и одну последовательность для женского голоса длительностью 10 с со средним уровнем –16 дБм0. Анализ проводится на протяжении всего сигнала.

Зависимость степени подавления эхо-сигналов от времени строится в виде графика. Постоянная времени интегрирования при оценке уровней исходного сигнала и эхо-сигнала составляет 35 мс, что позволяет сгладить случайные флуктуации и минимизировать влияние кратковременных помех на результаты измерений.

Для сигнала CSS график представляет собой кривую отношения уровня записанного сигнала в направлении передачи к уровню воспроизведенного сигнала в направлении приема. Важно отметить, что один из сигналов отношения должен быть смещен во времени из-за физической и программной задержек обработки и распространения акустических сигналов. К ним относятся задержки времени распространения звукового сигнала T_{SSND} (S – signal (сигнал), SND – sound (звук)), задержки, связанные с программной обработкой звукового сигнала S в речевом кодеке T_{SCOD} (индексы: S – signal (сигнал), COD – codec (кодек)), и задержки, связанные с программной обработкой сигнала при передаче по сети системы связи T_{SYS} (SYS – system (система)). Полная задержка распространения сигнала в канале передачи $T_{SSUM} = T_{SSND} + T_{SCOD} + T_{SYS}$ должна быть измерена как время распространения сигнала от точки измерения уровня звукового давления, расположенной на расстоянии 25 мм перед губами человека или излучающим кольцом устройства «искусственный рот» (mouth reference point, MRP) – акустический речевой сигнал до эталонной точки подключения и измерения электрических уровней сигналов в каналах приема и передачи симулятора системы мобильной связи (point of interface, POI) – электрический речевой сигнал после декодирования, как показано на рис. 11.

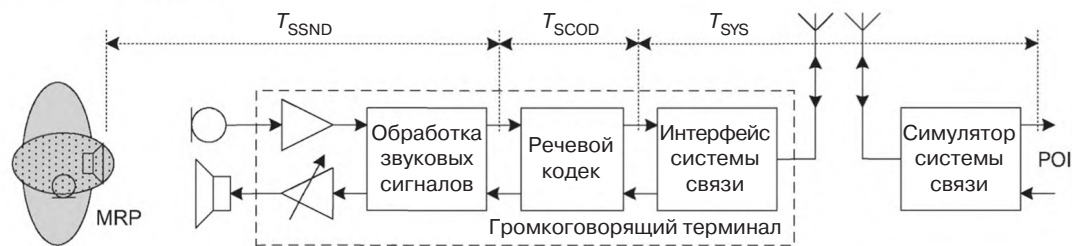


Рис. 11. Задержки обработки и распространения акустических сигналов

Для сигнала CSS зависимость степени подавления эхосигналов от времени представлена на рис. 12. Ввиду того, что к большому воспроизводимому сигналу дальнего абонента относится малый по уровню эхо-сигнал, общий уровень кривой очень малый. С точки зрения стабильности подавления эхо-сигналов от времени система считается стабильной, если разница между минимальным и максимальным значениями за время оценки не превысит 6 дБ. Стоит отметить, что оценка проводится только на восьми участках CSS-сигнала, исключая паузы, поэтому вид измерительной маски имеет зубчатый характер. По оценке ПО *HEAD Analyzer ACQUA* этот тест стабильности ослабления эхо-сигналов от времени пройден.

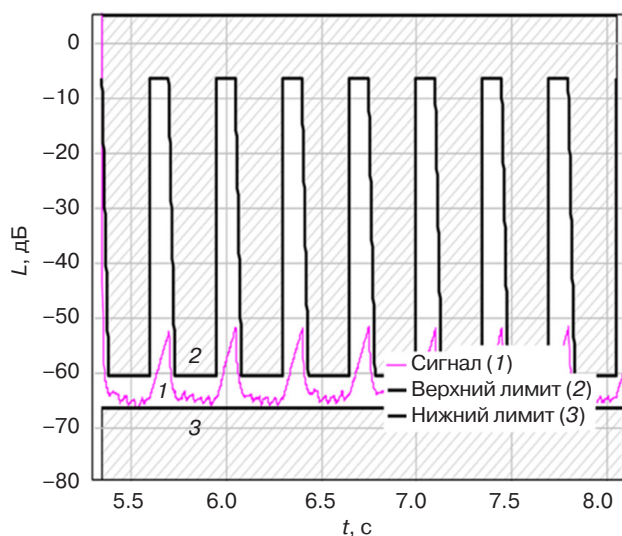


Рис. 12. Зависимость степени подавления эхо-сигналов CSS от времени с постоянной времени интегрирования 35 мс

Для сигнала искусственного голоса зависимость уровня эхосигналов от времени представлена на рис. 13. Сигнал искусственного голоса не сравнивается с воспроизводимым сигналом дальнего абонента, а оценивается стабильность сигнала передачи (эхо-сигнал – кривая 1) при воспроизведении сигналов искусственного голоса, мужского и женского (кривая 2), на стороне дальнего абонента. Система считается стабильной, если разница между

минимальным и максимальным значениями за время оценки не превышает 6 дБ.

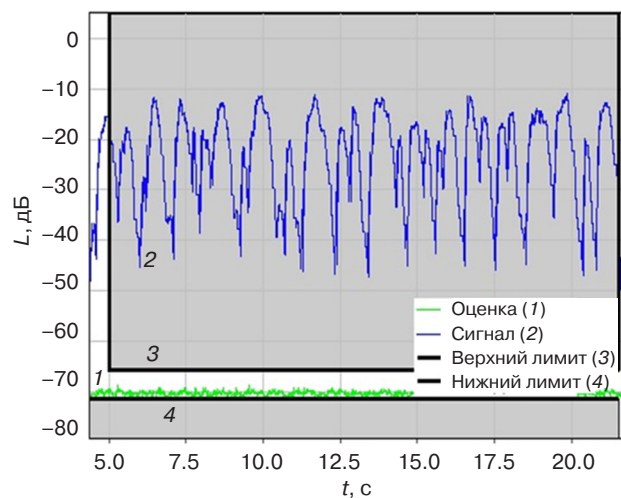


Рис. 13. Зависимость уровня эхо-сигналов искусственного голоса от времени с постоянной времени интегрирования 35 мс

РАБОТА КАНАЛА ПЕРЕДАЧИ В АКУСТИЧЕСКИХ ШУМАХ

Для речевого сигнала ближнего абонента ТС в условиях фоновых акустических шумов отношение сигнал/шум на выходе канала передачи должно быть не ниже 6 дБ. Рекомендуемое значение отношения сигнал/шум – 12 дБ (требования ГОСТ 33464-2015, методика ГОСТ 33468-2015, п. 7.10.1).

Фоновые акустические шумы вокруг двухколесного ТС воспроизводились для обычной и наихудшей шумовых ситуаций.

При испытании в шумах с уровнем более 50 дБ(А) выходной уровень речевых сигналов должен быть повышен на 3 дБ для каждых 10 дБ прироста уровня шума, усредненного за длительное время. Это отражает эффект, когда человек в условиях окружающего шума повышает громкость своего голоса. Максимальное приращение составляет 8 дБ.

Входной акустический тестовый сигнал в виде искусственного голоса подавался через

искусственный рот манекена. Использовалась одна последовательность для мужского голоса и одна последовательность для женского голоса с паузами.

Анализируемый сигнал снимался с электрического выхода речевого кодера радиокommunikационного тестера. Постоянная времени интегрирования при оценке уровней сигнала и шума составляла 35 мс. После расчета огибающей уровня сигнала и шума паузы оценивалось отношение сигнал/шум в канале передачи.

Результатом измерения является график огибающей уровня сигнала и шума паузы в канале передачи. Для активных участков речи проводится интегральная оценка:

$$S_s = \int_{t_{s_{\text{start}}}}^{t_{s_{\text{end}}}} L_{\text{dB}}(t) dt,$$

где $L_{\text{dB}}(t)$ – уровень сигнала в децибелах, $t_{s_{\text{start}}}$, $t_{s_{\text{end}}}$ – временные границы речевого сегмента.

Она равна площади под кривой на рис. 14, соответствующей всем активным участкам речи.

Это значение относится к значению оценки:

$$S_n = \int_{t_{n_{\text{start}}}}^{t_{n_{\text{end}}}} L_{\text{dB}}(t) dt,$$

где $t_{n_{\text{start}}}$, $t_{n_{\text{end}}}$ – временные границы шума речевой паузы. Значение оценки равно площади под кривой на рис. 14, соответствующей всем шумовым участкам. Обе оценки проводятся с учетом постоянной времени интегрирования 35 мс, чтобы исключить случайные изменения сигнала. Работа канала передачи в акустических шумах считается удовлетворительной, если отношение интегральных оценок превышает 6 дБ. На практике это значение соответствует слабо различимому на слух сигналу, особенно при работе в стандарте GSM с полосой акустических частот 300–3400 Гц, поэтому рекомендуется достигать уровней отношения сигнал/шум в 12 дБ. Также логично, что для наихудшей шумовой ситуации оценка будет меньше, ввиду большего уровня фонового шума, что накладывает дополнительные требования к испытываемой системе.

Канал передачи данных УВЭОС тестировался при различных шумовых сценариях, которые генерируются на основе записей шума окружающей среды. Для теста была взята запись уличного шума громкостью 68 дБ. После соответствующей настройки усиления микрофона, динамика и алгоритмов

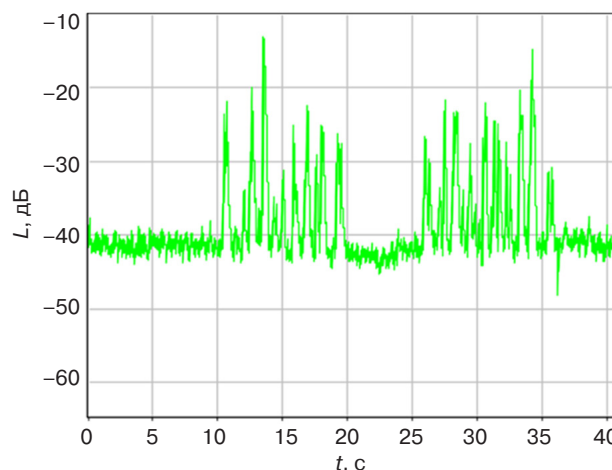


Рис. 14. Уровень огибающей сигнала и шума паузы в направлении передачи с постоянной времени интегрирования 35 мс

цифрового сигнального процессора получено соотношение сигнал/шум на уровне 11 дБ, что отвечает требованиям ГОСТ 33464-2015.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках реализуемого проекта разработан опытный образец УВЭОС, предназначенный для установки на двухколесном ТС и призванный обеспечить голосовую связь водителя с оператором системы «ЭРА-ГЛОНАСС» при возникновении нештатной ситуации или ДТП. При проектировании устройства была проанализирована специфика взаимодействия в системе «человек – двухколесное ТС», ее отличия от других динамических систем, обеспечивающих передвижение в рамках созданной дорожно-транспортной сети. Учтены системные факторы, особенности эксплуатации и ограничения, которые накладываются на разрабатываемое устройство, в т.ч. массогабаритные характеристики, установочные размеры, локализация на приборной панели.

При проектировании устройства особое внимание уделялось вопросам обработки акустического сигнала для обеспечения надежной и качественной голосовой связи. Поскольку в проектируемом устройстве динамик и микрофон размещены в непосредственной близости друг от друга, то вопросы устранения и компенсации акустических эффектов, сопровождающих голосовой сигнал в канале связи, стояли очень остро. Для решения этих задач были проанализированы алгоритмы шумоподавления, эхоподавления, эхокомпенсации с точки зрения возможности применения их для проектируемой системы. Дальнейшие испытания и тестирование показали, что применение алгоритмов аналоговой

и цифровой обработки речевого сигнала, реализуемых в кодеке и модеме проектируемой системы, позволит обеспечить качественный уровень голосовой связи водителя с оператором экстренных оперативных служб.

Вклад авторов

Все авторы в равной степени внесли свой вклад в исследовательскую работу.

Authors' contribution

All authors contributed equally to the research work.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чучупал В.Я., Чичагов А.С., Маковкин К.А. *Цифровая фильтрация зашумленных речевых сигналов*. М.: ВЦ РАН; 1998. 52 с.
2. Кропотов Ю., Парамонов А. *Методы проектирования алгоритмов обработки информации телекоммуникационных систем аудиообмена*. М.: Директ-Медиа; 2015. 228 с. ISBN 978-5-4475-4106-4
3. Вишняков И.Э., Масыгин М.М., Одинцов О.А., Слюсарь В.В. Методы и алгоритмы шумоочистки звука в реальном времени. *Известия высших учебных заведений. Электроника*. 2021;26(2):184–196. <https://doi.org/10.24151/1561-5405-2021-26-2-184-196>
4. Лялин С.Г. Метод шумоподавления в речевых сигналах с помощью нейронной сети. *Adv. Sci.* 2019;2:32–38. <https://doi.org/10.25730/VSU.0536.19.021>
5. Тихонов В.И., Харисов В.Н. *Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем*. М.: Радио и связь; 1991. 608 с. ISBN 5-256-00789-0
6. Азаров И.С., Вашкевич М.И., Лихачев Д.С., Петровский А.А. Алгоритм очистки речевого сигнала от сложных помех путем фильтрации в модуляционной области. *Цифровая обработка сигналов*. 2013;4:25–31. <https://elibrary.ru/rvwqdz>
7. Железняк В.К., Раханов К.Я., Адамовский Е.Р. Оценка информационных показателей шума квантования аналого-цифрового преобразования речевого сигнала. *Доклады БГУИР*. 2023;21(2):32–40. <http://doi.org/10.35596/1729-7648-2023-21-2-32-40>
8. Nguyen H.N., Dowlatnia M., Sarfraz A. *Implementation of the LMS and NLMS algorithms for Acoustic Echo Cancellation in teleconference system using MATLAB*. Vaxjoe: MSI Växjö University; 2009. 69 p. URL: https://www.academia.edu/94741525/Implementation_of_the_LMS_and_NLMS_algorithms_for_Acoustic_Echo_Cancellationin_teleconference_systemusing_MATLAB
9. Carline M.J., Diana D.C. An Investigation on Adaptive Algorithms for Echo Cancellation of Acoustic Signals. In: *2nd Int. Conf. Sustain. Comput. Data Commun. Syst. ICSCDS 2023 – Proc.* 2023. P. 960–966. <https://doi.org/10.1109/ICSCDS56580.2023.10105081>
10. Haykin S. *Adaptive Filter Theory*: 5th ed. New York: Pearson; 2014. 960 p.
11. La Rosa A.B., Pereira P.T.L., Ücker P., Paim G., da Costa E.A.C., Bampi S., Almeida S. Exploring NLMS-Based Adaptive Filter Hardware Architectures for Eliminating Power Line Interference in EEG Signals. *Circuits, Systems, and Signal Processing*. 2021;40(5):3305–3337. <https://doi.org/10.1007/s00034-020-01620-6>
12. Zhang H., Tan K., Wang D.L. Deep learning for joint acoustic echo and noise cancellation with nonlinear distortions. In: *Proceedings of INTERSPEECH*. 2019. P. 4255–4259. <http://doi.org/10.21437/Interspeech.2019-2651>
13. Zhang H., Wang D.L. Deep learning for acoustic echo cancellation in noisy and double-talk scenarios. In: *Proceedings of INTERSPEECH*. 2018. P. 3239–3243. <http://doi.org/10.21437/Interspeech.2018-1484>
14. Hänsler E., Schmidt G. *Acoustic Echo and Noise Control: A Practical Approach*. Wiley-IEEE Press; 2005. 472 p. ISBN 978-0-471-67839-7
15. Constantini G., Casali D. *New Advances in Audio Signal Processing*. MDPI Books; 2024. 206 p. ISBN 978-3-7258-1059-8.
16. Демиденко А.В. *Микроконтроллеры для начинающих: Интерфейсы и управление*. ЛитРес; 2025. 100 с.

REFERENCES

1. Chuchupal V.Ya., Chichagov A.S., Makovkin K.A. *Tsifrovaya fil'tratsiya zashumlennykh rechevykh signalov (Digital Filtering of Noisy Speech Signals)*. Moscow: Vychislitel'nyi tsentr RAN; 1998; 1998. 52 p. (in Russ.).
2. Kropotov Y.U., Paramonov A. *Metody proektirovaniya algoritmov obrabotki informatsii telekommunikatsionnykh sistem audioobmena (Methods of Designing Algorithms for Information Processing of Telecommunication Audio Exchange Systems)*. Moscow: Direct-Media; 2015. 228 p. (in Russ.). ISBN 978-5-4475-4106-4.
3. Vishnyakov I.E.H., Masyagin M.M., Odintsov O.A., Slyusar V.V. Methods and algorithms for real time voice noise cleaning. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Elektronika = Proceedings of Universities. Electronics*. 2021;26(2): 184–196 (in Russ.). <https://doi.org/10.24151/1561-5405-2021-26-2-184-196>
4. Lyalin S.G. Noise reduction method in speech signals using neural network. *Adv. Sci.* 2019;2:32–38 (in Russ.). <https://doi.org/10.25730/VSU.0536.19.021>
5. Tikhonov V.I., Kharisov V.N. *Statisticheskii analiz i sintez radiotekhnicheskikh ustroystv i sistem (Statistical Analysis and Synthesis of Radio Engineering Devices and Systems)*. Moscow: Radio i svyaz'; 1991. 608 p. (in Russ.). ISBN 5-256-00789-0

6. Azarov I.S., Vashkevich M.I., Likhachev D.S., Petrovsky A.A. Reducing complex noises in speech using filtering in modulation domain. *Tsifrovaya obrabotka signalov = Digital Signal Processing*. 2013;4:25–31 (in Russ.). <https://elibrary.ru/rvwqdz>
7. Zheleznyak V.K., Rahanov K.J., Adamovskiy Y.R. Evaluation of Information Indicators of Quantization Noise Generated by Speech Signal Analogue-Digital Conversion. *Doklady BGUIR*. 2023;21(2):32–40 (in Russ.). <http://doi.org/10.35596/1729-7648-2023-21-2-32-40>
8. Nguyen H.N., Dowlatnia M., Sarfraz A. *Implementation of the LMS and NLMS algorithms for Acoustic Echo Cancellation in teleconference system using MATLAB*. Vaxjoe: MSI Växjö University; 2009. 69 p. Available from URL: https://www.academia.edu/94741525/Implementation_of_the_LMS_and_NLMS_algorithms_for_Acoustic_Echo_Cancellationin_teleconference_systemusing_MATLAB
9. Carline M.J., Diana D.C. An Investigation on Adaptive Algorithms for Echo Cancellation of Acoustic Signals. In: *2nd Int. Conf. Sustain. Comput. Data Commun. Syst. ICSCDS 2023 – Proc.* 2023. P. 960–966. <https://doi.org/10.1109/ICSCDS56580.2023.10105081>
10. Haykin S. *Adaptive Filter Theory*: 5th ed. New York: Pearson; 2014. 960 p.
11. La Rosa A.B., Pereira P.T.L., Ücker P., Paim G., da Costa E.A.C., Bampi S., Almeida S. Exploring NLMS-Based Adaptive Filter Hardware Architectures for Eliminating Power Line Interference in EEG Signals. *Circuits, Systems, and Signal Processing*. 2021;40(5):3305–3337. <https://doi.org/10.1007/s00034-020-01620-6>
12. Zhang H., Tan K., Wang D.L. Deep learning for joint acoustic echo and noise cancellation with nonlinear distortions. In: *Proceedings of INTERSPEECH*. 2019. P. 4255–4259. <http://doi.org/10.21437/Interspeech.2019-2651>
13. Zhang H., Wang D.L. Deep learning for acoustic echo cancellation in noisy and double-talk scenarios. In: *Proceedings of INTERSPEECH*. 2018. P. 3239–3243. <http://doi.org/10.21437/Interspeech.2018-1484>
14. Hänsler E., Schmidt G. *Acoustic Echo and Noise Control: A Practical Approach*. Wiley-IEEE Press; 2005. 472 p. ISBN 978-0-471-67839-7
15. Constantini G., Casali D. *New Advances in Audio Signal Processing*. MDPI Books; 2024. 206 p. ISBN 978-3-7258-1059-8.
16. Demidenko A.V. *Mikrokontrollery dlya nachinayushchikh: Interfeisy i upravleniye (Microcontrollers for Beginners: Interfaces and Control)*. LitRes; 2022. 100 p. (in Russ.).

Об авторах

Никитин Василий Валерьевич, генеральный директор ООО «ФИКОМ-ИТ» (129128, Россия, Москва, пр-т Мира, д. 188б, к. 4). E-mail: nvv@ficom-it.ru. <https://orcid.org/0009-0009-4204-7302>

Увайсов Сайгид Увайсович, д.т.н., профессор, заведующий кафедрой конструирования и производства радиоэлектронных средств, Институт радиоэлектроники и информатики, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: uvajsov@mirea.ru. Scopus Author ID 55931417100, ResearcherID H-6746-2015, SPIN-код РИНЦ 3801-4816, <https://orcid.org/0000-0003-1943-6819>

Басов Дмитрий Владимирович, к.т.н., доцент, кафедра конструирования и производства радиоэлектронных средств, Институт радиоэлектроники и информатики, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: d_basov@mail.ru. <https://orcid.org/0009-0003-3599-579X>

About the Authors

Vasily V. Nikitin, General Director, FIKOM-IT (188b/4, Mira pr., Moscow, 129128 Russia). E-mail: nvv@ficom-it.ru. <https://orcid.org/0009-0009-4204-7302>

Saygid U. Uvaysov, Dr. Sci. (Eng.), Professor, Head of the Department of Design and Production of Radioelectronic Devices, Institute of Radio Electronics and Informatics, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: uvajsov@mirea.ru. Scopus Author ID 55931417100, ResearcherID H-6746-2015, RSCI SPIN-code 3801-4816, <https://orcid.org/0000-0003-1943-6819>

Dmitry V. Basov, Cand. Sci. (Eng.), Associate Professor, Department of Design and Production of Radioelectronic Devices, Institute of Radio Electronics and Informatics, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: d_basov@mail.ru. <https://orcid.org/0009-0003-3599-579X>

УДК 621.391

<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-6-78-85>

EDN GBSHAL



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Метод ограничения пик-фактора с дополнительным сигналом компенсации в системе с ортогональным частотным разделением каналов при применении регрессии для выбора параметров

О.В. Тихонова[@], А.И. Стариковский, Фам Тхань Туан

МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, 119454 Россия

[@] Автор для переписки, e-mail: o_tikhonova@inbox.ru

• Поступила: 17.04.2025 • Доработана: 04.06.2025 • Принята к опубликованию: 08.10.2025

Резюме

Цели. Целью статьи является исследование разработанного авторами метода ограничения пик-фактора с дополнительным сигналом в системе связи с мультиплексированием с ортогональным частотным разделением каналов (orthogonal frequency division multiplexing, OFDM) при использовании полиномиальной регрессии для выбора параметров метода.

Методы. В работе использованы методы статистической радиотехники, математического моделирования для аппроксимации зависимости вероятности битовой ошибки от величины уровня ограничения и числа дополнительных сигналов при использовании полиномиальной регрессии.

Результаты. Разработан алгоритм выбора параметров метода ограничения пик-фактора с дополнительным сигналом в системе связи с мультиплексированием с ортогональным частотным разделением каналов на основе полиномиальной регрессии, позволяющий оперативно оценивать характеристики системы без дополнительных затрат времени на математическое моделирование. Это значительно упрощает выбор оптимального уровня ограничения и числа дополнительных сигналов без выполнения полного цикла моделирования для каждой конфигурации. Моделирование и аналитические расчеты подтвердили, что увеличение уровня ограничения способствует снижению вероятности битовой ошибки, а увеличение числа дополнительных сигналов улучшает точность ограничения, однако вызывает рост вычислительных затрат. Оптимальный выбор параметров позволяет достичь компромисса между снижением пик-фактора и сохранением качества сигнала. Также установлено, что при фиксированном уровне ограничения существует оптимальное значение числа дополнительных сигналов, обеспечивающее наилучшее соотношение между вероятностью ошибки и снижением пиковых значений.

Выводы. Предложенный подход позволяет сократить время расчетов более чем в 5 раз, обеспечивая гибкость и адаптивность при проектировании OFDM-систем с ограничением пиковых значений.

Ключевые слова: метод ограничения с дополнительным сигналом, OFDM-сигнал, пик-фактор, метод снижения пик-фактора, полиномиальная регрессия

Для цитирования: Тихонова О.В., Стариковский А.И., Фам Т.Т. Метод ограничения пик-фактора с дополнительным сигналом компенсации в системе с ортогональным частотным разделением каналов при применении регрессии для выбора параметров. *Russian Technological Journal*. 2025;13(6):78–85. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-6-78-85>, <https://www.elibrary.ru/GBSHAL>

Прозрачность финансовой деятельности: Авторы не имеют финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

RESEARCH ARTICLE

Method of peak factor reduction with compensation signal in OFDM system using regression for parameter selection

Olga V. Tikhonova [@], Anatoly I. Starikovskiy, Pham Thanh Tuan

MIREA – Russian Technological University, Moscow, 119454 Russia

[@] Corresponding author, e-mail: o_tikhonova@inbox.ru

• Submitted: 17.04.2025 • Revised: 04.06.2025 • Accepted: 08.10.2025

Abstract

Objectives. The article aims to investigate the authors' developed peak-to-average power ratio (PAPR) reduction method using an additional compensation signal in orthogonal frequency-division multiplexing (OFDM) systems, employing polynomial regression for method parameter selection.

Methods. The study utilizes statistical radio technique methods and mathematical modeling to approximate the relationship between bit error rate (BER) versus clipping threshold level and number of additional signals using polynomial regression analysis.

Results. We developed an algorithm for parameter selection in the PAPR reduction method with an additional compensation signal for OFDM systems using polynomial regression. This approach enables rapid system performance evaluation without additional computational overhead for mathematical modeling. The method significantly simplifies the optimization of clipping threshold and number of additional signals, eliminating the need for complete simulation cycles for each configuration. Both simulation and analytical calculations confirm that increasing the clipping threshold reduces BER, while increasing the number of additional signals improves clipping accuracy at the cost of higher computational complexity. Optimal parameter selection achieves a compromise between PAPR reduction and signal quality preservation. Furthermore, we established that for a fixed clipping threshold, there exists an optimal number of additional signals providing the best trade-off between error probability and peak value reduction.

Conclusions. An algorithm for selecting the parameters of the clipping method with an additional compensation signal based on polynomial regression has been developed. This algorithm enables real-time evaluation of system characteristics without additional computational costs associated with repeated mathematical modeling. The proposed approach reduces calculation time by more than a factor of five, offering flexibility and adaptability in the design of OFDM systems with PAPR reduction.

Keywords: method of peak factor reduction with compensation additional signal, OFDM signal, peak-to-average power ratio, PAPR reduction method, polynomial regression

For citation: Tikhonova O.V., Starikovskiy A.I., Pham Th.T. Method of peak factor reduction with compensation signal in OFDM system using regression for parameter selection. *Russian Technological Journal*. 2025;13(6):78–85. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-6-78-85>, <https://www.elibrary.ru/GBSHAL>

Financial disclosure: The authors have no financial or proprietary interest in any material or method mentioned.

The authors declare no conflicts of interest.

ВВЕДЕНИЕ

В беспроводных системах связи модуляция является важной составляющей, необходимой для эффективной передачи информации и уменьшения влияния помех. Одним из современных и широко используемых методов модуляции является мультиплексирование с ортогональным частотным разделением каналов (orthogonal frequency division multiplexing, OFDM) [1–5]. Данный метод модуляции решает ключевые проблемы, обеспечивая высокую скорость передачи данных, снижение вероятности битовой ошибки (bit error rate, BER) [6, 7] и эффективное использование полосы пропускания. Однако одной из основных проблем OFDM является высокое отношение пиковой мощности сигнала к средней (peak-to-average power ratio, PAPR). Разработка эффективных методов снижения PAPR крайне важна для повышения производительности и удобства использования системы. Одним из таких методов является метод ограничения пик-фактора дополнительным сигналом (МОДС), разработанный авторами. Этот метод имеет два основных параметра: заданный уровень ограничения C и число дополнительных сигналов m , значения которых влияют на эффективность метода. Исследование и оценка этих параметров крайне важны для применения МОДС в конкретных случаях.

В данной статье рассматривается выбор параметров МОДС при использовании полиномиальной регрессии.

СИГНАЛ OFDM

Дискретный OFDM-сигнал может быть математически представлен в виде:

$$L_{\text{OFDM}}(v) = \frac{1}{H} \sum_{g=0}^{H-1} K(g) e^{j2\pi gv/H}, \quad v = \overline{0, H-1}, \quad (1)$$

где H – количество поднесущих, $K(g)$ – передаваемая информация на g -й поднесущей, v – номер отсчета сигнала OFDM, j – мнимая единица.

Для сигнала OFDM с дискретным временем определим величину пик-фактора как отношение

максимальной мощности сигнала к его средней мощности [8–12], что можно представить в виде:

$$\text{PAPR}(L_{\text{OFDM}}(v)) = \frac{P_{\text{макс}} \{ |L_{\text{OFDM}}(v)|^2 \}}{P_{\text{сред}} \{ |L_{\text{OFDM}}(v)|^2 \}}, \quad (2)$$

где $P_{\text{макс}} \{ |L_{\text{OFDM}}(v)|^2 \}$ – максимальная мощность OFDM-сигнала, $P_{\text{сред}} \{ |L_{\text{OFDM}}(v)|^2 \}$ – средняя мощность OFDM-сигнала, $|L_{\text{OFDM}}(v)|$ – амплитуда v -го отсчета OFDM-сигнала.

При использовании этого метода амплитуда сигнала OFDM ограничивается определенным пороговым значением, при этом сохраняется исходная фаза каждого рассматриваемого отсчета, что можно выразить как:

$$L_{\text{огр}}(v) = \begin{cases} L_{\text{исх}}(v) & \text{при } |L_{\text{исх}}(v)| \leq C, \\ C e^{j\phi_n} & \text{при } |L_{\text{исх}}(v)| > C, \end{cases} \quad (3)$$

где C – уровень ограничения, $|L_{\text{исх}}(v)|$ – амплитуда исходного отсчета сигнала, ϕ_n – фазовый угол исходного отсчета сигнала.

Для сигнала $L_{\text{OFDM}}(v)$ проводится поиск тех позиций (номера позиций обозначим q), где амплитуда сигнала больше, чем уровень ограничения C . При передаче данных с ограничением сигнала таким образом в некоторых его позициях происходит потеря информации. Для компенсации этих потерь передаваемый сигнал $L_{\text{огр}}$ дополняется отсчетами, в которые заносится информация о позиции q и добавляются сигналы $L_{\text{доп}}(q)$ – разности между исходными и ограниченными сигналами [13–15]:

$$L_{\text{доп}}(q) = L_{\text{исх}}(q) - L_{\text{огр}}(q). \quad (4)$$

Таким образом, в передаваемом сигнале $L_{\text{огр}}$ отсутствуют отсчеты, амплитуда которых превосходит пороговое значение C , но потери информации не происходит, т.к. имеется возможность восстановить исходные отсчеты, зная их номера q и дополнительные данные $L_{\text{доп}}(q)$. Число

дополнительных отсчетов, зарезервированных для передачи номеров позиций q и значений $L_{\text{доп}}(q)$, обозначим m .

ВЫБОР ПАРАМЕТРОВ ПРИ ПРИМЕНЕНИИ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ РЕГРЕССИИ

В методе ограничения пик-фактора с дополнительным сигналом вероятность битовой ошибки зависит не только от отношения сигнал-шум (signal-to-noise ratio, SNR), но и от параметров метода – уровня ограничения C и количества зарезервированных дополнительных отсчетов m [16]. Оптимизацию этих параметров путем математического моделирования можно упростить, аппроксимируя результаты моделирования полиномиальными кривыми, построенными на основе предварительно полученных данных.

Полиномиальная регрессия n -й степени описывается выражением [17]:

$$z = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n, \quad (5)$$

где $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$ – коэффициенты регрессии, подлежащие определению.

Процедура определения коэффициентов включает следующие этапы:

Шаг 1. Формирование исходного набора данных – пар точек $(x_1, z_1), (x_2, z_2), \dots, (x_k, z_k)$, принадлежащих графику, полученному методом математического моделирования.

Шаг 2. Определение степени полинома n в соответствии с выражением (5).

Шаг 3. Построение системы уравнений.

Система линейных уравнений формируется на основе исходных данных для нахождения коэффициентов. Каждая точка данных порождает уравнение вида:

$$\begin{cases} b_0 + b_1x_1 + b_2x_1^2 + \dots + b_nx_1^n = z_1, \\ b_0 + b_1x_2 + b_2x_2^2 + \dots + b_nx_2^n = z_2, \\ \dots \\ b_0 + b_1x_k + b_2x_k^2 + \dots + b_nx_k^n = z_k. \end{cases} \quad (6)$$

В матричной форме система уравнений записывается как:

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & x_1^n \\ 1 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & x_k^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_k \end{pmatrix}, \quad (7)$$

или $\mathbf{G} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{z}$.

Шаг 4. Решение системы уравнений для определения коэффициентов $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$.

Решение находится методом наименьших квадратов:

$$\mathbf{b} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{z}. \quad (8)$$

На рис. 1 представлена зависимость BER от уровня ограничения C при SNR = 10 дБ и $m = 16$, полученная в результате моделирования.

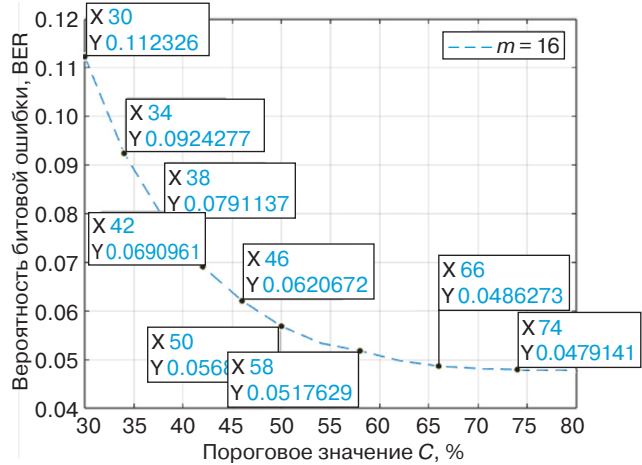


Рис. 1. Численные значения зависимости BER от уровня ограничения C при SNR = 10 дБ и $m = 16$ (метод моделирования)

Анализ графика демонстрирует снижение величины BER с увеличением уровня ограничения C .

На рис. 2 представлены кривая BER и данные, полученные методом полиномиальной регрессии:

$$p(C) = 0.5609 - 0.0287 \cdot C + 6.1966 \cdot 10^{-4} \cdot C^2 - 6.0957 \cdot 10^{-6} \cdot C^3 + 2.2886 \cdot 10^{-8} \cdot C^4.$$

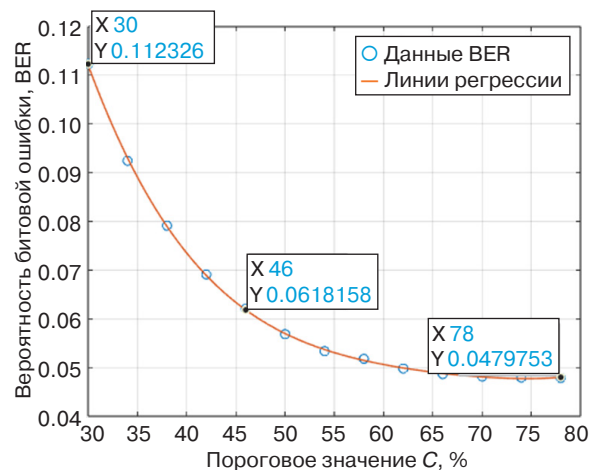


Рис. 2. Численные значения зависимости BER от уровня ограничения C (метод регрессии)

Анализ рис. 1 и 2 подтверждает полное соответствие между результатами моделирования и аппроксимации. Использование предварительно рассчитанных коэффициентов полиномиальной регрессии позволяет существенно сократить объем вычислительных операций при анализе параметров МОДС.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

А. Отношение сигнал-шум равно 5 дБ

На рис. 3 показаны зависимости BER от уровня ограничения C при SNR = 5 дБ для различных значений m , полученные моделированием.

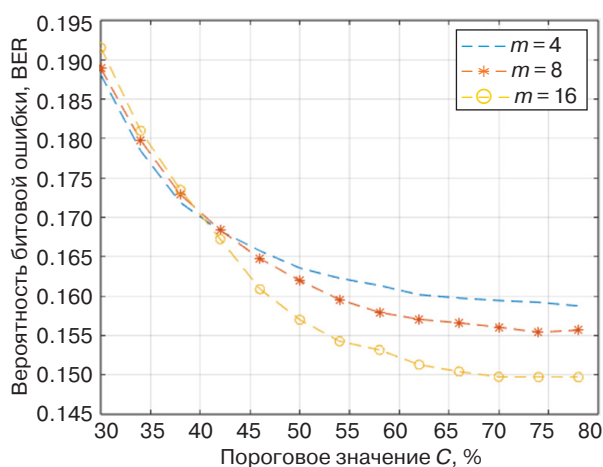


Рис. 3. Зависимость BER от уровня ограничения C (моделирование)

На рис. 4 представлены соответствующие зависимости, рассчитанные методом регрессии.

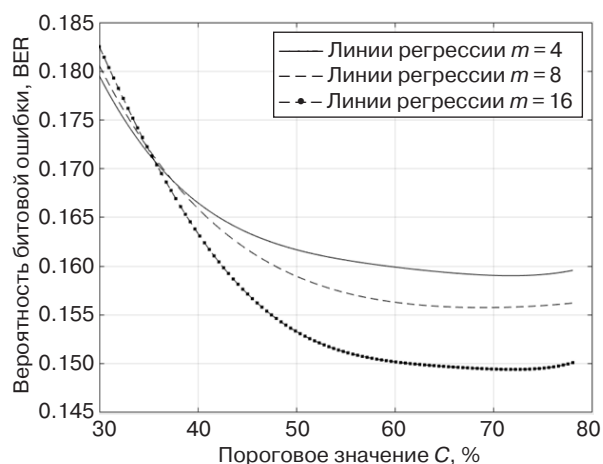


Рис. 4. Зависимость BER от уровня ограничения C (метод регрессии)

Уравнения регрессионных кривых для $m = 4, 8, 16$:

$$p_1(C) = 0.4517 - 0.018 \cdot C + 4.2528 \cdot 10^{-4} \cdot C^2 - 4.5383 \cdot 10^{-6} \cdot C^3 + 1.8219 \cdot 10^{-8} \cdot C^4,$$

$$p_2(C) = 0.3818 - 0.0121 \cdot C + 2.543 \cdot 10^{-4} \cdot C^2 - 2.4828 \cdot 10^{-6} \cdot C^3 + 9.3811 \cdot 10^{-9} \cdot C^4,$$

$$p_3(C) = 0.4517 - 0.018 \cdot C + 4.2528 \cdot 10^{-4} \cdot C^2 - 4.5383 \cdot 10^{-6} \cdot C^3 + 1.8219 \cdot 10^{-8} \cdot C^4.$$

Б. Отношение сигнал-шум равно 10 дБ

На рис. 5 изображены зависимости BER от уровня ограничения C при SNR = 10 дБ для различных m , полученные моделированием.

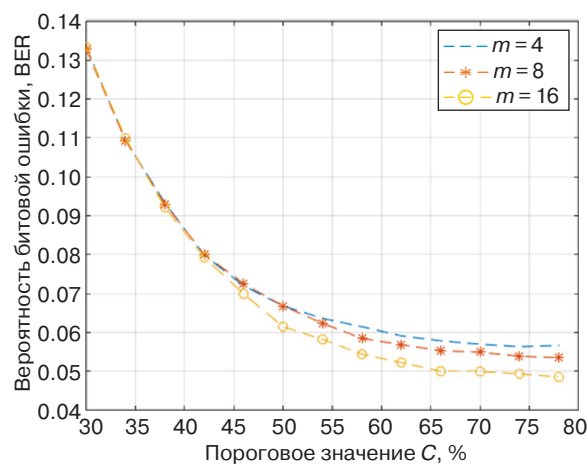


Рис. 5. Зависимость BER от уровня ограничения C (моделирование)

Соответствующие регрессионные зависимости представлены на рис. 6.

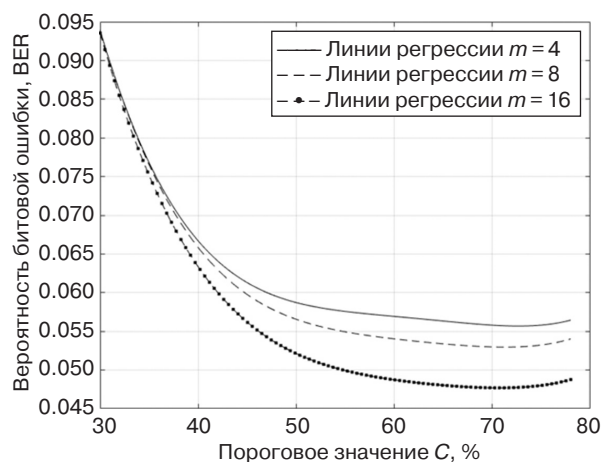


Рис. 6. Зависимость BER от уровня ограничения C (метод регрессии)

Уравнения регрессионных кривых для $m = 4, 8, 16$:

$$p_1(C) = 0.741356 - 0.03974 \cdot C + 8.8787 \cdot 10^{-4} \cdot C^2 - 8.973 \cdot 10^{-6} \cdot C^3 + 3.355 \cdot 10^{-8} \cdot C^4,$$

$$p_2(C) = 0.67576 - 0.0348 \cdot C + 7.5598 \cdot 10^{-4} \cdot C^2 - 7.4855 \cdot 10^{-6} \cdot C^3 + 2.8257 \cdot 10^{-8} \cdot C^4,$$

$$p_3(C) = 0.61 - 0.0289 \cdot C + 5.701 \cdot 10^{-4} \cdot C^2 - 5.1075 \cdot 10^{-6} \cdot C^3 + 1.744 \cdot 10^{-8} \cdot C^4.$$

В. Отношение сигнал-шум равно 15 дБ

На рис. 7 и 8 показаны зависимости BER для $\text{SNR} = 15$ дБ, полученные соответственно моделированием и методом регрессии.

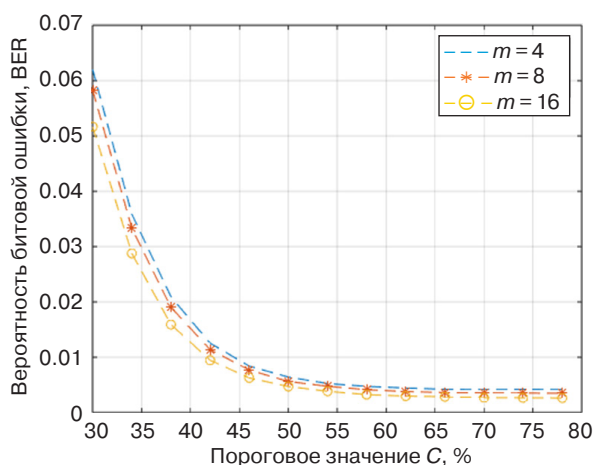


Рис. 7. Зависимость BER от уровня ограничения C (моделирование)

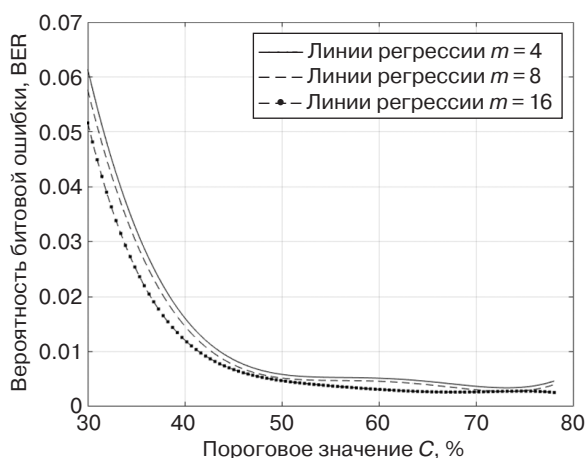


Рис. 8. Зависимость BER от уровня ограничения C (метод регрессии)

Уравнения регрессионных кривых:

$$p_1(C) = 0.8899 - 0.0584 \cdot C + 0.0014 \cdot C^2 - 1.5618 \cdot 10^{-5} \cdot C^3 + 6.3155 \cdot 10^{-8} \cdot C^4,$$

$$p_2(C) = 0.859 - 0.0567 \cdot C + 0.0014 \cdot C^2 - 1.5295 \cdot 10^{-5} \cdot C^3 + 6.2075 \cdot 10^{-8} \cdot C^4,$$

$$p_3(C) = 0.8003 - 0.0533 \cdot C + 0.0013 \cdot C^2 - 1.4625 \cdot 10^{-5} \cdot C^3 + 5.9732 \cdot 10^{-8} \cdot C^4.$$

Сравнительный анализ рис. 3–8 подтверждает идентичность результатов, полученных методами моделирования и полиномиальной регрессии при различных значениях SNR.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное исследование параметров метода ограничения пик-фактора с дополнительным сигналом в OFDM-системах показало, что эффективность метода существенно зависит от оптимального выбора уровня ограничения C и количества дополнительных сигналов m , причем эти параметры взаимозависимы.

При заданном SNR применение полиномиальной регрессии позволяет осуществлять оценку и оптимизацию параметров C и m посредством аппроксимационных кривых без проведения полномасштабного моделирования. Данный подход значительно сокращает временные затраты на проектирование и повышает гибкость настройки системы. Оптимизация параметров C и m обеспечивает эффективное снижение пик-фактора системы.

Перспективными направлениями дальнейших исследований являются разработка адаптивных алгоритмов выбора параметров в зависимости от характеристик канала и требований к качеству передачи, а также сравнительный анализ с современными методами оптимизации.

Вклад авторов

О.В. Тихонова – идея исследования, консультации по вопросам проведения всех этапов исследования.

А.И. Стариковский – обработка результатов.

Т.Т. Фам – проведение компьютерных расчетов.

Authors' contributions

O.V. Tikhonova – the research idea, consultations on the issues of conducting all stages of the study.

A.I. Starikovskiy – processing the results.

Th.T. Pham – conducting computer calculations.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ковалев В.В., Селецкая О.Ю., Покаместов Д.А. Формирование и обработка OFDM сигналов. *Молодой ученый*. 2016;14(118):151–154. URL: <https://moluch.ru/archive/118/32800/>. Дата обращения 17.12.2023.
2. Галустов Г.Г., Мелешкин С.Н. *Мультиплексирование с ортогональным частотным разделением сигналов: учебное пособие*. Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ; 2012. 80 с.
3. Van Nee R., Prasad R. *OFDM for Wireless Multimedia Communications*. Boston; London: Artech House; 2000. 260 p.
4. Wu Y., Zou W.Y. Orthogonal frequency division multiplexing: A multi-carrier modulation scheme. *IEEE Trans. Consumer Electronics*. 1995;41(3):392–399.
5. Луферчик П.В., Конев А.Н., Богатырев Е.В., Галеев Р.Г. Методы повышения энергетической эффективности OFDM модемов в каналах связи с частотно-селективными замираниями. *Сибирский аэрокосмический журнал*. 2022;23(2):189–196. <https://doi.org/10.31772/2712-8970-2022-23-2-189-196>
6. Склар Б. *Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение*: пер. с англ. М.: Вильямс; 2017. 1104 с.
7. Проакис Дж. *Цифровая связь*: пер. с англ.; под ред. Д.Д. Кловского. М.: Радио и связь; 2000. 800 с.
8. Hassan G.M., Mukred M., Gumaei A.H. Modified Method of PAPR Reduction using Clipping and Filtering for Image Transmission with OFDM. *Al-Mustansiriyah Journal of Science*. 2023;34(4):75–86. <https://doi.org/10.23851/mjs.v34i4.1400>
9. Shatrughna P.Y., Subhash C.B. PAPR Reduction using Clipping and Filtering Technique for Nonlinear Communication Systems. In: *International Conference on Computing, Communication and Automation*. IEEE; 2015. P. 1220–1225. <https://doi.org/10.1109/CCAA.2015.7148590>
10. Tripathi V., Patel P., Jain P.K., Shukla S. Peak-to-average power ratio reduction of orthogonal frequency division multiplexing signals using improved salp swarm optimization-based partial transmit sequence model. *ETRI Journal*. 2025;47(2):256–269. <https://doi.org/10.4218/etrij.2023-0347>
11. Пукса А.О. Уменьшение пик-фактора OFDM-сигнала с помощью методов, основанных на ограничении сигналов. *Международный научно-исследовательский журнал*. 2017;12(66):124–127. <https://doi.org/10.23670/IRJ.2017.66.145>
12. Oman B.O., Majeed Y.E., Ahmad I. Peak to average power ratio reduction in spectrally efficient FDM using repeated clipping and filtering. *Indonesian J. Electric. Eng. Computer Sci*. 2023;30(2):993–1001. <http://doi.org/10.11591/ijeecs.v30.i2.pp993-1001>
13. Фам Т.Т., Тихонова О.В. Метод ограничения пик-фактора с дополнительным сигналом компенсации в системе с ортогональным частотным разделением каналов для гауссовского канала. *Russ. Technol. J*. 2024;12(5):42–49. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-5-42-49>
14. Фам Т.Т., Тихонова О.В. Метод ограничения с дополнительным сигналом для уменьшения значения пик-фактора в системе с ортогональным частотным разделением каналов. *Вопросы электромеханики. Труды ВНИИЭМ*. 2023;193(2):34–38.
15. Фам Т.Т., Тихонова О.В. Метод ограничения пик-фактора сигнала OFDM с дополнительным сигналом. В сб.: *Актуальные проблемы и перспективы развития радиотехнических и инфокоммуникационных систем. «Радиоинфоком-2023»*: Сборник научных статей VII Международной научно-практической конференции. М.: РТУ МИРЭА; 2023. С. 140–142.
16. Фам Т.Т., Тихонова О.В. Алгоритм выбора параметров метода ограничения с дополнительным сигналом в системе с ортогональным частотным разделением каналов. *Вопросы электромеханики. Труды ВНИИЭМ*. 2024;199(2):52–55.
17. Шорохова И.С., Кисляк Н.В., Мариев О.С. *Статистические методы анализа*. Саратов, Екатеринбург: Изд-во Профобразование, Уральский федеральный университет; 2024. 298 с. ISBN 978-5-4488-0520-2, 978-5-7996-2853-6

REFERENCES

1. Kovalev V.V., Seletskaya O.Yu., Pokamestov D.A. Formation and processing of OFDM signals. *Molodoi uchenyi = Young scientist*. 2016;14(118):151–154. Available from URL: <https://moluch.ru/archive/118/32800/>. Accessed December 17, 2023 (in Russ.).
2. Galustov G.G., Meleshkin S.N. *Mul'tipleksirovanie s ortogonal'nym chastotnym razdeleniem signalov (Multiplexing with Orthogonal Frequency Division of Signals)*: Textbook. Taganrog: TTI SFU Publ.; 2012. 80 p. (in Russ.).
3. Van Nee R., Prasad R. *OFDM for Wireless Multimedia Communications*. Boston; London: Artech House; 2000. 260 p.
4. Wu Y., Zou W.Y. Orthogonal frequency division multiplexing: A multi-carrier modulation scheme. *IEEE Trans. Consumer Electronics*. 1995;41(3):392–399.
5. Luferchik P.V., Konev A.N., Bogatyrev E.V., Galeev R.G. Methods for improving the energy characteristics of OFDM modems in frequency selective fading communication channels. *Sibirskii aerokosmicheskii zhurnal = Siberian Aerospace Journal*. 2022;23(2):189–196 (in Russ.). <https://doi.org/10.31772/2712-8970-2022-23-2-189-196>
6. Sklar B. *Tsifrovaya svyaz'. Teoreticheskie osnovy i prakticheskoe primeneniye (Digital Communication. Theoretical Foundations and Practical Application)*: transl. from Engl. Moscow: Vil'yams; 2017. 1100 p (in Russ.). [Sklar B. *Digital Communication: Fundamentals and Applications*. Prentice-Hall PTR; 2001. 1079 p.]
7. Proakis J. *Tsifrovaya svyaz' (Digital Communication)*: transl. from Engl. Moscow: Radio i svyaz'; 2000. 800 p. (in Russ.). [Proakis J. *Digital Communications*. N.Y.: McGraw-Hill Publ.; 1995. 928 p.]
8. Hassan G.M., Mukred M., Gumaei A.H. Modified Method of PAPR Reduction using Clipping and Filtering for Image Transmission with OFDM. *Al-Mustansiriyah Journal of Science*. 2023;34(4):75–86. <https://doi.org/10.23851/mjs.v34i4.1400>

9. Shatrughna P.Y., Subhash C.B. PAPR Reduction using Clipping and Filtering Technique for Nonlinear Communication Systems. In: *International Conference on Computing, Communication and Automation*. IEEE; 2015. P. 1220–1225. <https://doi.org/10.1109/CCAA.2015.7148590>
10. Tripathi V., Patel P., Jain P.K., Shukla S. Peak-to-average power ratio reduction of orthogonal frequency division multiplexing signals using improved salp swarm optimization-based partial transmit sequence model. *ETRI Journal*. 2025;47(2):256–269. <https://doi.org/10.4218/etrij.2023-0347>
11. Puksa A.O. Reduction of peak-factor of OFDM signal by methods based on signal limitation. *Mezhdunarodnyi nauchno-issledovatel'skii zhurnal = Int. Res. J.* 2017;12(66):124–127 (in Russ.). <https://doi.org/10.23670/IRJ.2017.66.145>
12. Oman B.O., Majeed Y.E., Ahmad I. Peak to average power ratio reduction in spectrally efficient FDM using repeated clipping and filtering. *Indonesian J. Electric. Eng. Computer Sci.* 2023;30(2):993–1001. <http://doi.org/10.11591/ijeecs.v30.i2.pp993-1001>
13. Pham Th.T., Tikhonova O.V. Method for limiting the peak factor using an additional compensation signal in a system with orthogonal frequency division multiplexing for a Gaussian channel. *Russ. Technol. J.* 2024;12(5):42–49. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-5-42-49>
14. Pham Th.T., Tikhonova O.V. Limitation method with an additional signal to PAPR reduction in the system with orthogonal frequency division of channels. *Voprosy elektromekhaniki. Trudy VNIIEМ = Electromechanical Matters. VNIIEМ Studies*. 2023;193(2):34–38 (in Russ.).
15. Pham Th.T., Tikhonova O.V. Method for limiting the peak factor of an OFDM signal with an additional signal. In: *Actual Problems and Prospects for the Development of Radio Engineering and Infocommunication Systems*. Radioinfocom-2023: Collection of the 7th International Scientific and Practical Conference. Moscow: RTU MIREA; 2023. P. 140–142 (in Russ.).
16. Pham Th.T., Tikhonova O.V. Algorithm for selecting parameters of the limiting method with an additional signal in an orthogonal frequency division system. *Voprosy elektromekhaniki. Trudy VNIIEМ = Electromechanical Matters. VNIIEМ Studies*. 2024;199(2):52–55 (in Russ.).
17. Shorokhova I.S., Kislyak N.V., Mariev O.S. *Statisticheskie metody analiza (Statistical Methods of Analysis)*. Saratov, Yekaterinburg: Profobrazovanie, Ural Federal University; 2024. 298 p. ISBN 978-5-4488-0520-2, 978-5-7996-2853-6

Об авторах

Тихонова Ольга Вадимовна, д.т.н., старший научный сотрудник, профессор кафедры радиоэлектронных систем и комплексов, Институт радиоэлектроники и информатики, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: o_tikhonova@inbox.ru. Scopus Author ID 57208923772, SPIN-код РИНЦ 3362-9924, <https://orcid.org/0009-0009-4013-9182>

Стариковский Анатолий Иванович, к.т.н., доцент, профессор кафедры радиоэлектронных систем и комплексов, Институт радиоэлектроники и информатики, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: starikovski@mirea.ru. Scopus Author ID 57208926243, ResearcherID AAH-2239-2020, SPIN-код РИНЦ 1126-4471, <https://orcid.org/0000-0003-4040-3843>

Фам Тхань Туан, аспирант, кафедра радиоэлектронных систем и комплексов, Институт радиоэлектроники и информатики, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: anhsequayve.ru@gmail.com. SPIN-код РИНЦ 1885-7798, <https://orcid.org/0009-0000-7430-1779>

About the Authors

Olga V. Tikhonova, Dr. Sci. (Eng.), Senior Researcher, Professor, Department of Radio Electronic Systems and Complexes, Institute of Radio Electronics and Informatics, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: o_tikhonova@inbox.ru. Scopus Author ID 57208923772, RSCI SPIN-code 3362-9924, <https://orcid.org/0009-0009-4013-9182>

Anatoly I. Starikovskiy, Cand. Sci. (Eng.), Associate Professor, Professor, Department of Radio Electronic Systems and Complexes, Institute of Radio Electronics and Informatics, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: starikovski@mirea.ru. Scopus Author ID 57208926243, ResearcherID AAH-2239-2020, RSCI SPIN-code 1126-4471, <https://orcid.org/0000-0003-4040-3843>

Pham Thanh Tuan, Postgraduate Student, Department of Radio Electronic Systems and Complexes, Institute of Radio Electronics and Informatics, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: anhsequayve.ru@gmail.com. RSCI SPIN-code 1885-7798, <https://orcid.org/0009-0000-7430-1779>

УДК 621.382

<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-6-86-94>

EDN KOATTE



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Влияние встраивания поверхностных состояний на стойкость мощных металлооксидных полупроводниковых полевых транзисторов к электростатическому разряду

Д.М. Бакеренкова[®], А.С. Петров

АО «Научно-исследовательский институт приборов», Лыткарино, 140080 Россия

[®] Автор для переписки, e-mail: arzamasceva.diana@mail.ru

• Поступила: 16.05.2025 • Доработана: 24.06.2025 • Принята к опубликованию: 06.10.2025

Резюме

Цели. Целью исследования является проверка гипотезы о том, что стойкость мощных металлооксидных полупроводниковых полевых транзисторов (МОПТ) к электростатическому разряду (ЭСР) после гамма-облучения определяется концентрацией встроившихся в процессе облучения поверхностных состояний (ПС). Причиной такой зависимости является деградация коэффициента усиления паразитного биполярного транзистора в структуре мощных МОПТ при накоплении ПС. Как следствие, для включения паразитного биполярного транзистора и последующего выхода из строя МОПТ требуется все большее напряжение импульса ЭСР.

Методы. Теоретическое описание физического механизма накопления ПС и его влияния на стойкость мощных МОПТ к ЭСР. Экспериментальные исследования, включающие определение стойкости к ЭСР двух типов необлученных МОПТ с помощью специально разработанного генератора ЭСР, облучение гамма-квантами ⁶⁰Со в активном электрическом режиме до нескольких уровней поглощенной дозы и последующее определение стойкости облученных образцов к ЭСР.

Результаты. Разработан метод, позволяющий численно рассчитать зависимости тока стока от напряжения затвор-исток для любых значений плотности накопленного радиационно-индуцированного заряда и концентрации встроившихся ПС. Показано, что для 1-го типа МОПТ при облучении до уровня поглощенной дозы в 3 крад встраивание ПС не происходило, и также не наблюдалось изменение пробивного напряжения при воздействии ЭСР или наблюдалось его незначительное снижение. Для 2-го типа МОПТ наблюдалось встраивание ПС при облучении до уровня поглощенной дозы в 2 и 4 крад, а также увеличение пробивного напряжения при воздействии ЭСР.

Выводы. Показана связь между концентрацией встроившихся ПС и изменением стойкости мощных МОПТ к ЭСР. Полученные результаты могут быть использованы при оценке времени безотказной работы устройств, работающих в условиях одновременного воздействия радиационных и импульсных электрических нагрузок.

Ключевые слова: электростатический разряд, радиационные эффекты, поверхностные состояния, мощные МОП-транзисторы

Для цитирования: Бакеренкова Д.М., Петров А.С. Влияние встраивания поверхностных состояний на стойкость мощных металлооксидных полупроводниковых полевых транзисторов к электростатическому разряду. *Russian Technological Journal*. 2025;13(6):86–94. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-6-86-94>, <https://www.elibrary.ru/KOATTE>

Прозрачность финансовой деятельности: Авторы не имеют финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

RESEARCH ARTICLE

Interface traps build-up and its influence on electrostatic discharge robustness of high-power metal-oxide-semiconductor field-effect transistor

Diana M. Bakerenkova[@], Aleksandr S. Petrov

Research Institute of Scientific Instruments, Lytkarino, 140080 Russia

[@] Corresponding author, e-mail: arzamasceva.diana@mail.ru

• Submitted: 16.05.2025 • Revised: 24.06.2025 • Accepted: 06.10.2025

Abstract

Objectives. The aim of the study is to confirm that the robustness of high-power metal–oxide–semiconductor field-effect transistor (MOSFET) to electrostatic discharge (ESD) after gamma irradiation is determined by the concentration of built-up interface traps (IT). The reason for such dependence is the degradation of the gain of the parasitic bipolar transistor in the structure of high-power MOSFETs during accumulation of IT. As a result, higher ESD pulse voltage is required to activate the parasitic bipolar transistor and cause the subsequent catastrophic failure of MOSFET.

Methods. The study describes the physical mechanism of the influence of IT accumulation on the robustness of high-power MOSFETs to ESD. Experimental studies included determination of ESD robustness for two types of high-power MOSFETs before irradiation, ⁶⁰Co gamma irradiation to several levels of total ionizing dose, and subsequent determination of the ESD robustness of irradiated samples.

Results. The study developed a method for calculating IT concentration and radiation-induced charge density from subthreshold drain-gate characteristics. It was also shown that for the first type of MOSFET, when irradiated to total ionizing dose level of 3 krad, the build-up IT did not occur, nor was any change or insignificant decrease in the breakdown voltage observed when exposed to ESD. For the second type of MOSFET, build-up IT was observed when irradiated to total ionizing dose level of 2 and 4 krad and an increase in the breakdown voltage was also observed when exposed to ESD.

Conclusions. The study shows the relationship between the IT concentration and the change in the breakdown voltage when exposed to ESD. The results obtained can be used to assess the failure-free operation time of devices operating under conditions of ionizing radiation and electrostatic discharges.

Keywords: electrostatic discharge, radiation effects, interface traps, high-power MOSFETs

For citation: Bakerenkova D.M., Petrov A.S. Interface traps build-up and its influence on electrostatic discharge robustness of high-power metal-oxide-semiconductor field-effect transistor. *Russian Technological Journal*. 2025;13(6):86–94. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-6-86-94>, <https://www.elibrary.ru/KOATTE>

Financial disclosure: The authors have no financial or proprietary interest in any material or method mentioned.

The authors declare no conflicts of interest.

Глоссарий

Электростатический разряд (electrostatic discharge) – импульсный перенос электростатического заряда между телами с разными электростатическими потенциалами.

Поглощенная доза (total ionizing dose) – величина энергии ионизирующего излучения, поглощенная веществом в единицу массы.

Дозовые эффекты (total ionizing dose effects) – эффекты, обусловленные потерей ионизирующим излучением в веществе энергии на ионизацию.

Вторичный пробой (secondary breakdown) – явление резкого спада напряжения коллектор-эмиттер, обусловленное развитием тепловой неустойчивости либо лавинной инжекцией.

Поверхностные состояния (interface traps) – энергетические состояния (уровни энергии) электронов проводимости, локализованные вблизи поверхности твердого тела.

Структурные эффекты (displacement damage) – эффекты, обусловленные потерей ионизирующим излучением в веществе энергии на создание структурных повреждений.

Область пространственного заряда (space charge region) – электрически заряженный слой, который образуется на границе n - и p -областей.

Радиационно-индуцированный заряд (radiation-induced charge) – положительный заряд, который накапливается в подзатворном диэлектрике транзисторов под действием ионизирующего излучения.

ВВЕДЕНИЕ

Исследования влияния радиационных нагрузок на пробивное напряжение p - n -переходов активно возобновились сравнительно недавно [1–3], поскольку ранее не наблюдалось критического изменения пробивного напряжения p - n -переходов после радиационного воздействия до уровня поглощенной дозы в $4 \cdot 10^4$ рад(Si) [4, 5]. Однако воздействие электростатических разрядов (ЭСР) и последующий пробой p - n -переходов проявляются более сложным механизмом, чем пробой при подаче статического или линейно нарастающего напряжения.

Одна из первых работ по этой теме была опубликована в 2017 г. [6] и посвящена влиянию дозовых эффектов на устройства защиты от ЭСР: P^+/NW -диоды, диоды Зенера, n -МОП¹-транзисторы с заземленным затвором (gate grounded n -type metal-oxide-semiconductor, GGNMOS). В качестве источника ионизирующего излучения были выбраны ионы гелия с энергией 1.5 МэВ, образцы подвергались воздействию ионов со значением флюенса 10^{14} , $2 \cdot 10^{14}$ и 10^{15} см⁻². В обоих типах диодов наблюдалось некоторое увеличение напряжения срабатывания, а также рост тока утечки и снижение тока отказа с ростом поглощенной дозы. Для GGNMOS после облучения исчезало поведение, характерное для вторичного пробоя, и также наблюдалось снижение тока отказа. Однако в работе не было приведено объяснений и причин такого поведения приборов после облучения. Также возникает вопрос о влиянии структурных дефектов на поведение образцов во время импульса ЭСР, поскольку облучение ионами гелия

вносит значительное количество дефектов в объеме полупроводника.

В [7] исследовалось влияние гамма-облучения до поглощенной дозы 200 крэд на характеристики низковольтных и высоковольтных двунаправленных кремниевых управляемых выпрямителей (dual-directional silicon controlled rectifier, DDSCR). В отличие от напряжения срабатывания низковольтных DDSCR, напряжение срабатывания высоковольтных DDSCR значительно увеличивалось с ростом поглощенной дозы в основном из-за увеличения напряжения пробоя, и такие выпрямители выходили из строя сразу после срабатывания. Увеличение пробивного напряжения после облучения было связано с накоплением ловушек и поверхностных состояний (ПС) в полевом и подзатворном оксидах, что приводило к увеличению области пространственного заряда (ОПЗ) p - n -переходов, которая и определяет напряжение пробоя. По той же причине после облучения возрастали токи утечки, что приводило к слабой инверсии паразитных боковых транзисторов. В данной работе были высказаны предположения о связи изменения поведения во время импульса ЭСР облученных устройств с накоплением ловушек и ПС, но не было проведено количественное сравнение концентрации накопленных ПС и изменения параметров устройств.

Целью текущей работы является выявление механизма изменения стойкости к ЭСР мощных металлооксидных полупроводниковых полевых транзисторов (МОПТ) после гамма-облучения, а также исследование связи между концентрацией встроившихся в процессе облучения ПС и изменением пробивного напряжения при воздействии ЭСР (V_{ESD}). Для расчета концентрации ПС необходимо

¹ Металл-оксид-полупроводник.

разработать метод, позволяющий напрямую связать вольтамперную характеристику (ВАХ) транзистора с концентрацией ПС.

1. ФИЗИЧЕСКИЙ МЕХАНИЗМ НАКОПЛЕНИЯ ПС И ЕГО ВЛИЯНИЕ НА СТОЙКОСТЬ МОПТ К ЭСР

Ранее авторами в работе [8] было экспериментально показано, что облучение гамма-квантами мощных МОПТ приводит к улучшению стойкости к ЭСР, причем, чем больше поглощенная доза, тем выше пробивное напряжение. Такой эффект был связан с включением под действием ЭСР «паразитного» биполярного транзистора в структуре мощных МОПТ. Однако под действием гамма-облучения происходит деградация коэффициента усиления паразитного биполярного транзистора (h_{21e}) [9] и требуется все большее напряжение ЭСР для достижения током коллектора значения, необходимого для начала вторичного пробоя биполярного транзистора, и последующего выхода из строя МОПТ. Деградация h_{21e} вследствие воздействия ионизирующего излучения происходит из-за роста темпа рекомбинации в ОПЗ перехода эмиттер-база и проявляется в виде роста тока базы при фиксированном смещении эмиттера. Темп рекомбинации увеличивается из-за двух взаимосвязанных эффектов: увеличения скорости поверхностной рекомбинации и расширения ОПЗ перехода эмиттер-база [10]. Увеличение скорости поверхностной рекомбинации пропорционально плотности центров рекомбинации на границе Si/SiO₂ перехода эмиттер-база. Поверхностные состояния, будучи одними из центров рекомбинации, определяют это увеличение скорости, однако следует принимать во внимание и накопленный на границе Si/SiO₂ радиационно-индуцированный положительный заряд, вследствие сложного механизма их взаимодействия. Поверхностные состояния физически представляют собой атом Si с непасивированной оборванной связью, который образовался после разрыва связи Si–H [11].

На сегодняшний день считается, что доминирующим процессом в механизме накопления ПС является прыжковый перенос протонов. На 1-й стадии этого процесса радиационно-индуцированные дырки, образовавшиеся вследствие генерации электрон-дырочных пар ионизирующим излучением, перемещаются через оксид и свободный водород в форме протонов под действием электрического поля. На 2-й стадии протоны перемещаются уже посредством прыжкового переноса, и в момент достижения границы Si/SiO₂ они вступают в реакцию с разрывом связи Si–H, образуя H₂ и трехвалентный дефект Si [12, 13].

Существующие на сегодняшний день методы измерения коэффициента усиления

паразитного биполярного транзистора, применимые для мощных МОПТ с закороченным выводом подложки, подразумевают нагрев исследуемых образцов с 25 до 300°C и измерение зависимости тока стока от напряжения на стоке закрытого транзистора [14]. Такой нагрев после облучения меняет динамику накопления ПС [15, 16], следовательно, h_{21e} меняется в процессе измерения, и применение этих методов в текущем случае приведет к недостоверным результатам. Для подтверждения гипотезы о том, что стойкость мощных МОПТ к ЭСР после гамма-облучения определяется накоплением ПС, необходимо рассчитать плотность ПС необлученных образцов, облучить образцы до нескольких значений поглощенной дозы, затем рассчитать плотность ПС после облучения и исследовать стойкость к ЭСР в каждом случае.

2. ЭКСПЕРИМЕНТ

В качестве исследуемых образцов были выбраны два типа мощных МОПТ, изготовленных по технологии HEXFET (hexagonal field-effect transistor), т.е. в одном кристалле размещаются тысячи параллельно-включенных МОПТ-ячеек, образующих шестиугольник: IRFR4615PbF (производство International Rectifier, США) и IRFR3710ZPbF (производство Infineon Technologies, Германия). До и после облучения снимались сток-затворные ВАХ в подпороговой области ($V_{g,s} < V_{th}$), из которых рассчитывалась концентрация ПС.

Облучение гамма-квантами ⁶⁰Co происходило в режиме измерения порогового напряжения: $V_{g,s} = V_{d,s}$ и $I_d = 100$ мкА для IRFR4615PbF и $V_{g,s} = V_{d,s}$ и $I_d = 250$ мкА для IRFR3710ZPbF. Образцы IRFR4615PbF облучались до двух значений поглощенной дозы: 1.78 крад и 3.18 крад, образцы IRFR3710ZPbF облучались до значений поглощенной дозы: 2 крад и 3.9 крад. В качестве источника ЭСР использовался разработанный в АО «НИИП» (Россия)² генератор ЭСР, принципиальная схема которого приведена на рис. 1, а основные параметры – в табл. 1.

Стойкость образцов мощных МОПТ к ЭСР определялась путем измерения сток-затворной ВАХ транзистора после подачи импульса ЭСР на сток (исток и затвор в момент подачи импульса заземлены). Критерием отказа считалось нетипичное для МОПТ поведение ВАХ. Диапазон напряжений подаваемого импульса ЭСР составлял 1–5 кВ. Если образец выдерживал испытание одним импульсом ЭСР начальной амплитуды, в следующем подаваемом импульсе амплитуда увеличивалась на 0.5 кВ. Максимально выдерживаемое напряжение при

² <http://www.niipribor.ru/> (in Russ.). Дата обращения 06.10.2025. / Accessed October 06, 2025.

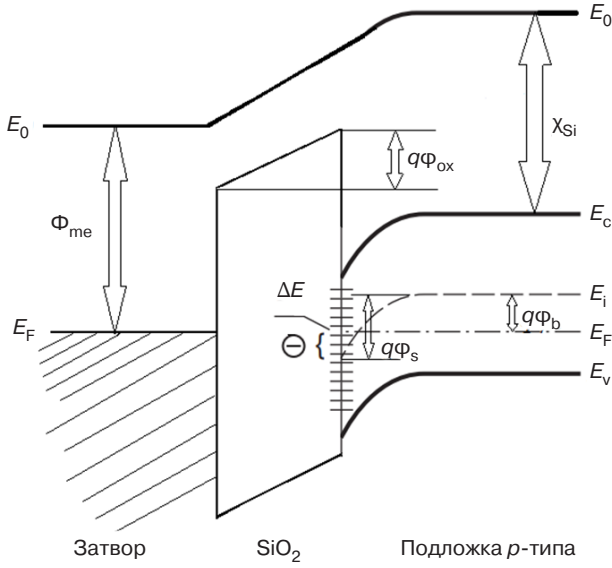


Рис. 2. Зонная диаграмма МОП-структуры

с подложкой p -типа: E_0 – уровень вакуума; E_F – уровень Ферми; E_V – энергия, соответствующая потолку валентной зоны; E_i – энергия середины запрещенной зоны; E_C – энергия, соответствующая дну зоны проводимости, $\Delta E = q\Delta\Phi = q(\Phi_s - \Phi_b)$

Согласно теореме Гаусса для вектора электрического смещения:

$$D_{ox} - D_{Si} = Q_{i.t}, \quad (5)$$

где D_{ox} – электрическое смещение в оксиде, D_{Si} – электрическое смещение в кремнии, $Q_{i.t}$ – заряд ПС.

Тогда

$$\epsilon_{ox}\epsilon_0 E_{ox} - \epsilon_{Si}\epsilon_0 E_{Si} = Q_{i.t}. \quad (6)$$

Как известно, в верхней части запрещенной зоны ПС акцептороподобны (могут принять электроны), а в нижней части запрещенной зоны ПС донороподобны (могут отдавать электроны) [18]. Состояния донорного типа положительно заряжены, если расположены выше уровня Ферми, и нейтральны, если расположены ниже уровня Ферми. Состояния акцепторного типа нейтральны, если расположены выше уровня Ферми, и отрицательно заряжены, если расположены ниже уровня Ферми. В рассматриваемом случае подложки p -типа в режиме слабой инверсии вблизи поверхности уровень Ферми лежит выше середины запрещенной зоны, и заряжена только часть акцепторных уровней в промежутке энергий ΔE (рис. 2).

Заряженную часть уровней можно выразить следующим образом:

$$\eta = \frac{\Delta E}{E_g}, \quad (7)$$

где ΔE – это расстояние от середины запрещенной зоны до уровня Ферми вблизи границы Si/SiO_2 .

В таком случае заряд ПС:

$$Q_{i.t} = N_{i.t} q \eta = N_{i.t} q^2 \frac{\Phi_s - \Phi_b}{E_g}, \quad (8)$$

где $N_{i.t}$ – концентрация ПС.

Подставляя (8) в (6), получим:

$$\epsilon_{ox}\epsilon_0 E_{ox} - \epsilon_{Si}\epsilon_0 E_{Si} = N_{i.t} q^2 \frac{\Phi_s - \Phi_b}{E_g}. \quad (9)$$

Согласно уравнению Пуассона:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\frac{\rho(x)}{\epsilon_{Si}\epsilon_0}, \quad (10)$$

где $\rho(x)$ – плотность полного объемного заряда:

$$\rho(x) = q(-N_A + p(x) - n(x)), \quad (11)$$

$$p(x) = p_0 \exp\left(-\frac{\phi(x)}{\Phi_T}\right), \quad (12)$$

$p(x)$ – распределение плотности дырок, p_0 – начальная концентрация дырок,

$$n(x) = n_0 \exp\left(\frac{\phi(x)}{\Phi_T}\right), \quad (13)$$

$n(x)$ – распределение плотности электронов, n_0 – начальная концентрация электронов.

Преобразуем левую часть (10):

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{d}{dx} \frac{d\phi}{dx} = \frac{d\phi}{dx} \cdot \frac{d}{d\phi} \frac{d\phi}{dx} = -E \frac{-dE}{d\phi} = E \frac{dE}{d\phi}. \quad (14)$$

Подставляя (14) в (10) и интегрируя по ϕ от Φ_s до 0, получим:

$$\int_{E_{Si}}^0 E dE = -\frac{q}{\epsilon_{Si}\epsilon_0} \int_{\Phi_s}^0 \left[p_0 \left(\exp\left(-\frac{\Phi_s}{\Phi_T}\right) - 1 \right) - n_0 \exp\left(\frac{\Phi_s}{\Phi_T}\right) \right] d\phi. \quad (15)$$

С учетом того, что $p_0 = N_a$, а $n_0 = n_i^2 / N_a$, получаем выражение для поля в кремнии E_{Si} :

$$E_{Si} = \sqrt{\frac{2q\Phi_T N_a}{\epsilon_{Si}\epsilon_0} \left[\left(\frac{\Phi_s}{\Phi_T} + \exp\left(-\frac{\Phi_s}{\Phi_T}\right) - 1 \right) + \frac{n_i^2}{N_a^2} \left(\exp\left(\frac{\Phi_s}{\Phi_T}\right) - 1 \right) \right]}. \quad (16)$$

Таким образом, система уравнений (3, 4), (9), (16) напрямую связывает величину $V_{g,s}$ с ϕ_s . Изменяя ϕ_s в диапазоне от ϕ_b до $2\phi_b$ и используя выражения (1)–(16), можно численно рассчитать зависимости I_d от $V_{g,s}$ для любых значений плотности накопленного радиационно-индуцированного заряда и концентрации встроившихся ПС.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ И АНАЛИЗ

В табл. 2 и 3 представлены результаты расчета концентрации ПС и заряда в окисле (Q_{ox}) до и после облучения, а также экспериментально полученные значения максимально выдерживаемого образцом напряжения импульса ЭСР (V_{ESD}). Значения пробивного напряжения при воздействии ЭСР для необлученных образцов находились в диапазоне 3–4 кВ для IRFR4615PbF и 4–4.5 кВ для IRFR3710ZPbF.

Из табл. 2 видно, что для образцов IRFR4615PbF, облученных с дозой 1.78 крад, ПС, накопленные вследствие гамма-облучения, не встраивались, и их концентрация сохранялась на том же уровне, что и до облучения. Для образцов, облученных с дозой 3.9 крад, уже происходило незначительное встраивание, пробивное напряжение при воздействии ЭСР также практически не изменилось. Для образцов IRFR3710ZPbF встраивание ПС происходило при всех значениях поглощенной дозы, и концентрация встроившихся ПС возрастала с ростом поглощенной дозы.

После облучения пробивное напряжения при воздействии ЭСР возросло, что согласуется с предложенной гипотезой о том, что возрастание концентрации встроившихся ПС приводит к деградации

коэффициента усиления паразитного биполярного транзистора, и, как следствие, требуется большее напряжение ЭСР для достижения током коллектора значения, необходимого для начала вторичного пробоя биполярного транзистора. Стоит отметить, что изначальная концентрация ПС в обоих типах образцов очень велика, что затрудняет исследования, и даже при облучении до поглощенной дозы, близкой к дозе отказа, количество встроившихся ПС будет сравнимо с начальной концентрацией.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлено теоретическое описание физического механизма увеличения пробивного напряжения при воздействии ЭСР после гамма-облучения мощных МОПТ. Основная причина данного явления заключается в деградации коэффициента усиления паразитного биполярного транзистора в структуре МОПТ, которая, в свою очередь, происходит из-за роста темпа рекомбинации в ОПЗ перехода эмиттер-база, пропорционального плотности ПС.

Определена стойкость к ЭСР двух типов мощных МОПТ с помощью специально разработанного генератора ЭСР до и после гамма-облучения. Гамма-облучение исследуемых образцов происходило в режиме измерения порогового напряжения на источнике ^{60}Co при комнатной температуре. До и после облучения снимались сток-затворные ВАХ в подпороговой области из которых в дальнейшем рассчитывалась концентрация ПС. Представлен метод расчета зависимости тока стока от напряжения затвор-исток для любых значений

Таблица 2. Экспериментальные и расчетные данные для IRFR4615PbF

№ образца	Поглощенная доза, крад (Si)	До облучения		После облучения		
		N_{it} , см^{-2}	Q_{ox} , Кл	N_{it} , см^{-2}	Q_{ox} , Кл	V_{ESD} , кВ
1	1.78	$2.5 \cdot 10^{11}$	0	$2.5 \cdot 10^{11}$	$2.3 \cdot 10^{-8}$	2.5
2	1.78	$2.0 \cdot 10^{11}$	0	$2.0 \cdot 10^{11}$	$2.4 \cdot 10^{-8}$	3
3	3.18	$2.2 \cdot 10^{11}$	0	$2.4 \cdot 10^{11}$	$4.8 \cdot 10^{-8}$	3.5
4	3.18	$1.0 \cdot 10^{11}$	0	$1.2 \cdot 10^{11}$	$5.0 \cdot 10^{-8}$	2.5

Таблица 3. Экспериментальные и расчетные данные для IRFR3710ZPbF

№ образца	Поглощенная доза, крад (Si)	До облучения		После облучения		
		N_{it} , см^{-2}	Q_{ox} , Кл	N_{it} , см^{-2}	Q_{ox} , Кл	V_{ESD} , кВ
1	2	$5.0 \cdot 10^{11}$	0	$8.0 \cdot 10^{11}$	$5.7 \cdot 10^{-8}$	5.5
2	3.9	$3.0 \cdot 10^{11}$	0	$7.0 \cdot 10^{11}$	$7.1 \cdot 10^{-8}$	5.5
3	3.9	$2.0 \cdot 10^{11}$	0	$6.0 \cdot 10^{11}$	$8 \cdot 10^{-8}$	5.5

плотности накопленного радиационно-индуцированного заряда и концентрации встроившихся ПС. Показано, что с увеличением концентрации встроившихся ПС растет пробивное напряжение образца при воздействии ЭСР.

Вклад авторов

Д.М. Бакеренкова – формулировка гипотезы, разработка метода расчета концентрации поверхностных состояний, проведение экспериментальных исследований, написание статьи.

А.С. Петров – разработка методики проведения экспериментов, валидация результатов, рецензирование и редактирование статьи.

Authors' contributions

D.M. Bakerenkova – hypothesis, development of a method for calculating the concentration of interface states, experimental studies, writing the text of the article.

A.S. Petrov – development of experimental methodology, validation, writing the text of the article, and editing.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

1. Падернов В.П., Силкин Д.С., Горячкин Ю.В., Хапугин А.А., Гришанин А.В. Влияние протонного облучения на напряжение пробоя высоковольтного $p-n$ перехода. *Радиотехника и электроника*. 2017;62(6):596–600. <https://www.elibrary.ru/ysugwj>
[Paderov V.P., Silkin D.S., Goryachkin Yu.V., et al. Effect of proton irradiation on the breakdown voltage of a high-voltage $p-n$ junction. *J. Commun. Technol. Electron.* 2017;62(6):616–620. <https://doi.org/10.1134/S1064226917060158>]
[Original Russian Text: Paderov V.P., Silkin D.S., Goryachkin Yu.V., Khapugin A.A., Grishanin A.V. Effect of proton irradiation on the breakdown voltage of a high-voltage $p-n$ junction. *Radiotekhnika i elektronika*. 2017;62(6):596–600 (in Russ.). <https://www.elibrary.ru/ysugwj>]
2. Shu L., Zhao Y.-F., Galloway K.F., Wang L., Wang X.-S., Yuan Z.-Y., Zhou X., Chen W.-P., Qiao M., Wang T.-Q. Effect of Drift Length on Shifts in 400-V SOI LDMOS Breakdown Voltage Due to TID. *IEEE Trans. Nucl. Sci.* 2020;67(11):2392–2395. <https://doi.org/10.1109/TNS.2020.2970743>
3. Zhou X., Chen L., Chen C., Qiao M., Li Z., Zhang B. New Insight into Total-Ionizing-Dose Effect-Induced Breakdown Voltage Degradation for SOI LDMOS: Irradiation Charge Field Modulation. *IEEE Trans. Nucl. Sci.* 2023;70(4):659–666. <https://doi.org/10.1109/TNS.2022.3231877>
4. Seehra S.S., Slusark W.J. The Effect of Operating Conditions on the Radiation Resistance of VDMOS Power FETs. *IEEE Trans. Nucl. Sci.* 1982;29(6):1559–1563. <https://doi.org/10.1109/TNS.1982.4336404>
5. Blackburn D.L., Benedetto J.M., Galloway K.F. The Effect of Ionizing Radiation on the Breakdown Voltage of Power MOSFETs. *IEEE Trans. Nucl. Sci.* 1983;30(6):4116–4121. <https://doi.org/10.1109/TNS.1983.4333092>
6. Liang W., Alexandrou K., Klebanov M., Kuo C.-C., Kymissis I., Sundaram K.B., Liou J.J. Characterization of ESD protection devices under total ionizing dose irradiation. In: *IEEE 24th International Symposium on the Physical and Failure Analysis of Integrated Circuits (IPFA)*, Chengdu, China: 2017. P. 1–4. <https://doi.org/10.1109/IPFA.2017.8060225>
7. Wu M., Lu W., Zhang C., Peng W., Zeng Y., Jin H., Xu J., Chen Z. The impact of radiation and temperature effects on dual-direction SCR devices for on-chip ESD protections. *Semicond. Sci. Technol.* 2020;35(4):045016. <https://doi.org/10.1088/1361-6641/ab74ed>
8. Арзамасцева Д.М., Петров А.С., Таперо К.И. Влияние предварительного гамма-облучения на деградацию мощных n -МОПТ при воздействии электростатического разряда. *Вопросы атомной науки и техники. Серия: Физика радиационного воздействия на радиоэлектронную аппаратуру*. 2023;3:19–22.
[Arzamastseva D.M., Petrov A.S., Tapero K.I. Effect of Preliminary Gamma Irradiation on Degradation of Power N -MOS Transistors Influenced by Electrical Static Discharge. *Voprosy atomnoi nauki i tekhniki. Seriya: Fizika radiatsionnogo vozdeistviya na radioelektronnyy apparaturu*. 2023;3:19–22 (in Russ.).]
9. Bakerenkov A.S., Felitsyn V.A., Chubunov P.A., Skorkin I.V. Temperature Dependence of Surface Recombination Current in Bipolar Transistors. In: *5th International Conference on Radiation Effects of Electronic Devices (ICREED)*. Kunming, China: 2023. <https://doi.org/10.1109/ICREED59404.2023.10390896>
10. Kosier S.L., Schrimpf R.D., Nowlin R.N., Fleetwood D.M., DeLaus M., Pease R.L. Charge Separation for Bipolar Transistors. *IEEE Trans. Nucl. Sci.* 1993;40(6):1276–1285. <https://doi.org/10.1109/23.273541>
11. Lenahan P.M., Dressendorfer P.V. An Electron Spin Resonance Study of Radiation Induced Electrically Active Paramagnetic Centers at the Si/SiO₂ Interface. *J. Appl. Phys.* 1983;54(3):1457–1460. <https://doi.org/10.1063/1.332171>
12. McLean F.B. A Framework for Understanding Radiation-Induced Interface States in SiO₂ MOS Structures. *IEEE Trans. Nucl. Sci.* 1980;27(6):1651–1657. <https://doi.org/10.1109/TNS.1980.4331084>
13. Winokur P.S., McGarrity J.M., Boesch H.E. Dependence of Interface-State Buildup on Hole Generation and Transport in Irradiated MOS Capacitors. *IEEE Trans. Nucl. Sci.* 1976;23(6):1580–1585. <https://doi.org/10.1109/TNS.1976.4328543>
14. Reichert G., Raynaud C., Faynot O., Balestra F., Cristoloveanu S. Temperature dependence (300–600 K) of parasitic bipolar effects in SOI-MOSFETs. In: *Proceedings of the 7th European Solid-State Device Research Conference*. 1997.
15. Saks N.S., Dozier C.M., Brown D.B. Time Dependence of Interface Trap Formation in MOSFETs Following Pulsed Irradiation *IEEE Trans. Nucl. Sci.* 1988;35(6):1168–1177. <https://doi.org/10.1109/23.25435>

16. Winokur P.S., Boesch H.E., McGarrity J.M., McLean F.B. Field- and Time-Dependent Radiation Effects at the Si/SiO₂ Interface of Hardened MOS Capacitors. *IEEE Trans. Nucl. Sci.* 1977;24(6):2113–2118. <https://doi.org/10.1109/TNS.1977.4329176>
17. McWhorter P.J., Winokur P.S. Simple technique for separating the effects of interface traps and trapped-oxide charge in metal-oxide-semiconductor transistors. *Appl. Phys. Lett.* 1986;48(2):133–135. <https://doi.org/10.1063/1.96974>
18. Schwank J.R., Shaneyfelt M.R., Fleetwood D.M., Felix J.A., Dodd P.E., Paillet P., Ferlet-Cavrois V. Radiation Effects in MOS Oxides *IEEE Trans. Nucl. Sci.* 2008;55(4):1833–1853. <https://doi.org/10.1109/TNS.2008.2001040>

Об авторах

Бакеренкова Диана Максимовна, инженер-испытатель, Акционерное общество «Научно-исследовательский институт приборов» (140080, Россия, Московская обл., г. Лыткарино, промзона Тураево, стр. 8). E-mail: arzamasceva.diana@mail.ru. SPIN-код РИНЦ 8543-8866, <https://orcid.org/0009-0000-8670-812X>

Петров Александр Сергеевич, к.т.н., начальник отдела, Акционерное общество «Научно-исследовательский институт приборов» (140080, Россия, Московская обл., г. Лыткарино, промзона Тураево, стр. 8). E-mail: as_petrov@inbox.ru. Scopus Author ID 7401779679, SPIN-код РИНЦ 8304-5998, <https://orcid.org/0009-0008-1198-980X>

About the Authors

Diana M. Bakerenkova, Test Engineer, Research Institute of Scientific Instruments (8, Turaevo Industrial Area, Lytkarino, Moscow oblast, 140080 Russia). E-mail: arzamasceva.diana@mail.ru. RSCI SPIN-code 8543-8866, <https://orcid.org/0009-0000-8670-812X>

Aleksandr S. Petrov, Cand. Sci. (Eng.), Head of Department, Research Institute of Scientific Instruments (8, Turaevo Industrial Area, Lytkarino, Moscow oblast, 140080 Russia). E-mail: as_petrov@inbox.ru. Scopus Author ID 7401779679, RSCI SPIN-code 8304-5998, <https://orcid.org/0009-0008-1198-980X>

УДК 550.380.8
<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-6-95-103>
EDN JCFXYH



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

О рабочей зоне измерительного устройства при использовании в нем противостоящих полюсов с плоскими поверхностями

Д.А. Сандуляк[@], М.Н. Полисмакова, Д.А. Головченко, А.С. Харин,
А.В. Сандуляк, А.А. Сандуляк

МИРЭА – Российский технологический университет, Россия, 119454 Москва
[@] Автор для переписки, e-mail: d.sandulyak@mail.ru

• Поступила: 29.01.2025 • Доработана: 31.05.2025 • Принята к опубликованию: 06.10.2025

Резюме

Цели. Цель работы – восполнить пробел, касающийся подхода к оценке рабочей (локальной) зоны в измерительных устройствах – магнитометрах-электромагнитах, предназначенных для контроля магнитных свойств образцов с обеспечением в данной зоне условия однородности магнитного поля: постоянства напряженности поля или индукции.

Методы. В основе методологии достижения поставленной цели – экспериментальное получение координатных характеристик напряженности (индукции) поля между полюсами и идентификация искомой рабочей зоны (в окрестности экстремума, фактически – минимума каждой из таких характеристик) с учетом расстояния b между полюсами и их диаметра D .

Результаты. Приведены экспериментально аргументированные данные о рабочих зонах между противостоящими плоскими полюсами для разных величин b и D . Так, при повышенных отношениях $b/D = 0.7–1.3$ размер рабочей зоны, сосредоточенной в срединной приосевой части межполюсной области, оценивается величиной, не превышающей 25–30% от расстояния b . Тогда характерный продольный размер образца со сравнительно малыми поперечными размерами (при размещении образца в такой зоне) не должен превышать 5–10 мм. С увеличением диаметра D и уменьшением отношения b/D рабочая зона увеличивается. В частности, при $b/D \approx 0.5$ размер рабочей зоны оценивается величиной до 90% и даже 100% от расстояния b .

Выводы. Показан и реализован принципиальный подход к оценке рабочей (приосевой) зоны между противостоящими плоскими полюсами посредством получения и анализа необходимых для этого координатных (экстремальных по виду, существенно зависящих от расстояния между полюсами и их диаметра) характеристик напряженности (индукции) поля между ними.

Ключевые слова: однородное магнитное поле, магнитометр-электромагнит, напряженность, индукция, плоские полюсные наконечники

Для цитирования: Сандуляк Д.А., Полисмакова М.Н., Головченко Д.А., Харин А.С., Сандуляк А.В., Сандуляк А.А. О рабочей зоне измерительного устройства при использовании в нем противостоящих полюсов с плоскими поверхностями. *Russian Technological Journal*. 2025;13(6):95–103. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-6-95-103>, <https://www.elibrary.ru/JCFXYH>

Прозрачность финансовой деятельности: Авторы не имеют финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

RESEARCH ARTICLE

On the working zone of a magnetometer-electromagnet measuring device when using opposing pole pieces with flat surfaces

Daria A. Sandulyak[@], Maria N. Polismakova, Daria A. Golovchenko,
Alexey S. Kharin, Alexander V. Sandulyak, Anna A. Sandulyak

MIREA – Russian Technological University, Russian Federation, 119454 Moscow

[@] Corresponding author, e-mail: d.sandulyak@mail.ru

• Submitted: 29.01.2025 • Revised: 31.05.2025 • Accepted: 06.10.2025

Abstract

Objectives. The work set out to develop an approach for assessing the working (local) zone in magnetometer-electromagnet measuring devices designed for controlling the magnetic properties of samples in which the homogeneity of the magnetic field should be observed in terms of constancy of the field strength or induction.

Methods. The coordinate characteristics of the field strength (induction) between pole components were experimentally obtained to identify the desired working zone (in the vicinity of the minimum of each of these characteristics), taking into account the distance b between the poles and their diameter D .

Results. Data on working zones between opposing flat poles are obtained for different values b and D . With increased ratios $b/D = 0.7–1.3$, the size of the working zone concentrated in the middle axial part of the interpolar area is estimated at a value not exceeding 25–30% of the distance b such that the characteristic longitudinal size of the sample does not exceed 5–10 mm. As D increases and b/D decreases, the working area increases. In particular, at $b/D \cong 0.5$, the size of the working area is estimated to be up to 90% and even 100% of the distance b .

Conclusions. A principled approach to the assessment of the working (axial) zone between opposing flat poles is demonstrated by obtaining and analyzing the necessary coordinate (significantly dependent on b and D) characteristics of the field strength (induction) between them.

Keywords: homogeneity of the magnetic field, magnetometer-electromagnet, strength, induction, flat pole pieces

For citation: Sandulyak D.A., Polismakova M.N., Golovchenko D.A., Kharin A.S., Sandulyak A.V., Sandulyak A.A. On the working zone of a magnetometer-electromagnet measuring device when using opposing pole pieces with flat surfaces. *Russian Technological Journal*. 2025;13(6):95–103. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-6-95-103>, <https://www.elibrary.ru/JCFXYH>

Financial disclosure: The authors have no financial or proprietary interest in any material or method mentioned.

The authors declare no conflicts of interest.

ВВЕДЕНИЕ

В науке и технике известное применение получили измерительные устройства, основывающиеся на баллистическом методе измерения многих параметров, в частности, параметров, характеризующих магнитные свойства различных образцов и их материалов. Наряду с использованием этих устройств, где для создания необходимого магнитного поля ключевым органом является соленоид, в рабочую зону которого (т.е. зону однородного магнитного поля) должен помещаться исследуемый образец [1–6], используют также электромагнит, где магнитное поле создается между противостоящими магнитными полюсами, а форма полюсных наконечников выбирается в зависимости от решаемой задачи [7–15].

Для создания необходимого (для изучения именно магнитных свойств образцов) однородного магнитного поля противостоящие поверхности полюсных наконечников (усеченный конус, цилиндрические диски [9] и пр.) должны быть плоскими и взаимно параллельными. При этом надо иметь в виду, что рабочей зоной (в которой соблюдается требуемая однородность поля, т.е. практически постоянство того или иного значения напряженности поля H) здесь является не вся межполюсная область, а только ее срединная часть в зависимости от расстояния b между плоскостями полюсов и их диаметра D , чему, на наш взгляд, не уделяется должного внимания. Если же не учитывать этого, то может оказаться, что при выполнении исследований разные участки изучаемого объекта будут находиться в разных условиях (по H), и тогда результаты измерений будут не вполне корректными. Следовательно, рассматриваемый в данной работе вопрос о рабочей зоне такого измерительного устройства является актуальным и подлежит обязательному обсуждению.

С позиций затронутого вопроса основной характеристикой поля между противостоящими магнитными полюсами (плоскими, разноименными) является координатная характеристика поля: она важна как при эксплуатации устройств (особенно измерительных) подобного типа, так и для создания таких устройств. Это – данные индукции B (или напряженности $H = B/\mu_0$, где μ_0 – магнитная константа) в межполюсной области.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ, ИХ ОБРАБОТКА И ОБСУЖДЕНИЕ

Как следует из сказанного выше, измерительным устройством, заслуживающим внимания (по сути – вариантом магнитометра баллистического типа), является электромагнит, в котором используются противостоящие полюсные наконечники, поверхности

которых, обращенные друг к другу, плоские и взаимно параллельные. Изучаемый образец должен размещаться между полюсными наконечниками, выполненными, в частности, в виде дисков, как показано на рис. 1, именно в рабочей зоне, где создаваемое магнитное поле практически однородно. Между тем, как будет проиллюстрировано ниже, в межполюсной области такого измерительного устройства-магнитометра оговоренное условие может быть обеспечено лишь при сравнительно небольшом расстоянии b между полюсами, причем только в срединной части области между ними (при увеличении b напряженность поля H снижается при приближении к периферии этой части области и возрастает при приближении к полюсам).

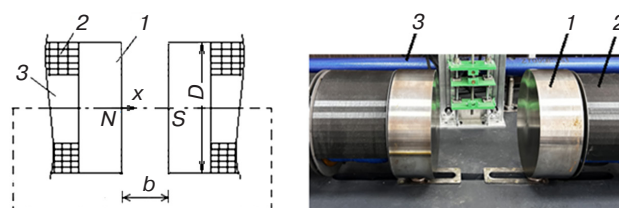


Рис. 1. Схема и общий вид варианта магнитометра баллистического типа – с полюсными наконечниками-дисками:
1 – полюсный наконечник,
2 – катушка намагничивания, 3 – магнитопровод.
 N, S – полюса магнита, x – направление измерения индукции

На рис. 2 в качестве примера показаны полученные с помощью датчика Холла координатные (при удалении x от одного из противостоящих разноименных полюсов по оси межполюсной области) характеристики магнитной индукции B [11]. При их получении использовались плоские магнитные элементы Nd-Fe-B диаметром $D = 25$ мм и толщиной 10 мм (для иллюстрации характеристик наподобие рис. 2 достаточно экспериментально получить одну из симметричных ветвей любой из них [11]), значения b (повышенные по сравнению с D) составили $b = 18–33$ мм ($b/D = 0.7–1.3$).

Данные рис. 2 свидетельствуют, что рабочая (исполнительная для исследования того или иного образца) зона здесь – это срединная зона в окрестности экстремума (минимума) кривой B от x ; по протяженности она может быть оценена величиной не более чем 25–30% от значения b . Для исследователя такой результат означает, что размер изучаемого образца при размещении его в такой зоне не должен превышать всего лишь 5–10 мм, к тому же это справедливо лишь для образцов сравнительно малых поперечных размеров.

Увеличить протяженность рабочей зоны и добиться однородности поля в ней можно за счет увеличения диаметра D полюсов (полюсных наконечников

в виде дисков) и/или уменьшения расстояния b между ними.

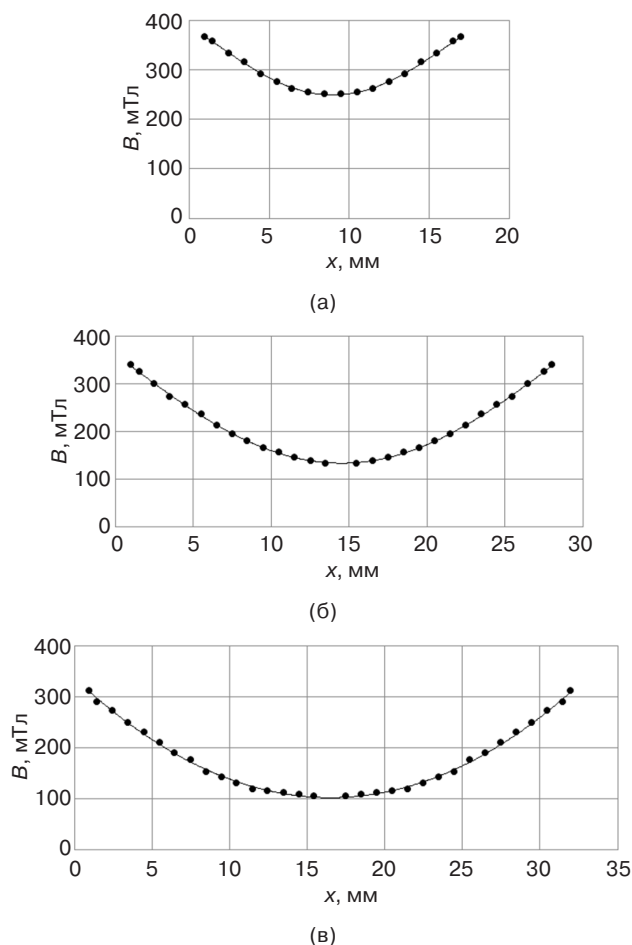


Рис. 2. Координатные характеристики индукции B магнитного поля между противостоящими полюсами диаметром $D = 25$ мм (для приосевой части межполюсной области) при разных расстояниях b между ними: (а) 18 мм, (б) 29 мм, (в) 33 мм

На рис. 3 показаны координатные характеристики индукции B между полюсами диаметром $D = 200$ мм, удаленными друг от друга на расстояние $b = 102$ мм ($b/D \cong 0.5$), причем соответствующие зависимости приведены как для приосевой части межполюсной области, так и для других частей этой области – на разных расстояниях от оси: $0.15D$, $0.3D$, $0.38D$ и практически на периферии этой области, а именно $0.45D$.

Видно, что в данном случае рабочей зоной можно считать практически всю межполюсную приосевую область; причем поперечным (по отношению к оси) радиусом не более $0.15D$. Здесь протяженность рабочей зоны, оцениваемая величиной 90–100% от b (для приосевой части межполюсной области), допускает даже стыковку торцов изучаемого образца с полюсными поверхностями, но только (это надо учитывать обязательно) при изучении образцов сравнительно малых поперечных размеров.

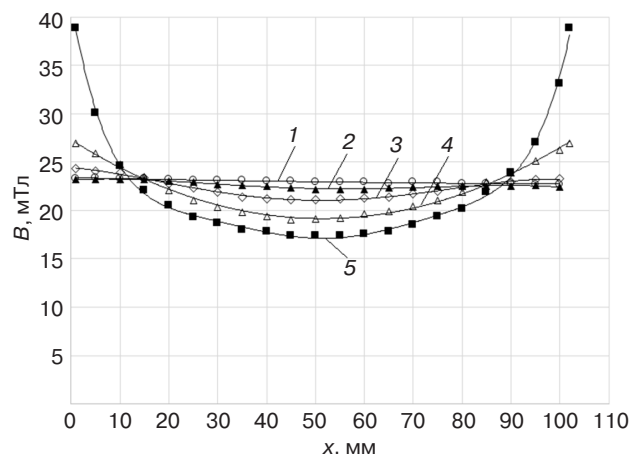


Рис. 3. Координатные характеристики индукции B магнитного поля между противостоящими полюсами диаметром $D = 200$ мм (например, в электромагнитной системе согласно рис. 1) при расстоянии $b = 102$ мм между ними: 1 (○) – данные для приосевой части межполюсной области, 2 (▲), 3 (◊), 4 (Δ) и 5 (■) – данные для участков, отстоящих от оси соответственно на удалении $0.15D$, $0.3D$, $0.38D$ и $0.45D$

Вместе с тем, надо также иметь в виду, что при увеличении диаметра D полюсов и уменьшении расстояния b между ними, хотя и решается вопрос создания необходимой рабочей зоны (с обеспечением практически однородного магнитного поля), одновременно ограничивается возможность использования такой рабочей зоны для проведения в ней исследований сравнительно продолговатых образцов.

В связи с тем, что первостепенной координатной характеристикой в подобных электромагнитных системах является характеристика в осевом направлении межполюсной области, где силовые линии индукции не искривляются, уместным может стать вопрос о возможности получения таких характеристик приемом суперпозиции. Необходимо лишь обладать соответствующей координатной характеристикой индукции B со стороны одного полюса в отсутствии противостоящего разноименного магнитного полюса, имеющего зеркальную характеристику, условно предполагаемого на определенном расстоянии.

На рис. 4 показана координатная характеристика индукции поля со стороны одного магнитного полюса указанного магнитного элемента [11]. Видно, что по мере удаления x от центра его полюсной поверхности индукция поля B монотонно убывает, подчиняясь, как установлено в [11], зависимости, близкой к экспоненциальной.

Оперируя этой характеристикой, в т.ч. ее «зеркальным отражением» – симметричным на удалении, равным тому или иному межполюсному расстоянию b (размеру межполюсной области), можно тем самым найти результирующую характеристику индукции сложением соответствующих значений

индукции в направлении оси (здесь – между фактическим и фиктивным полюсами), т.е. прибегнуть к приему суперпозиции.

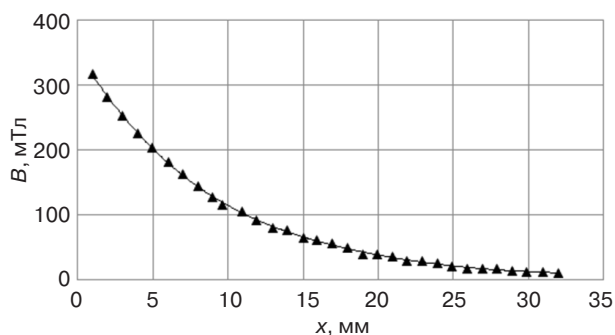
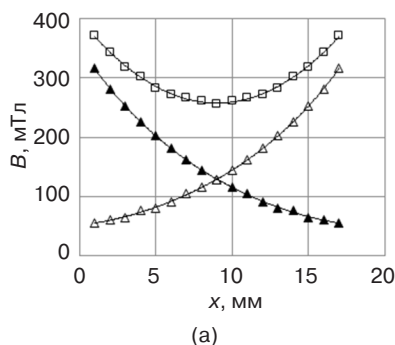
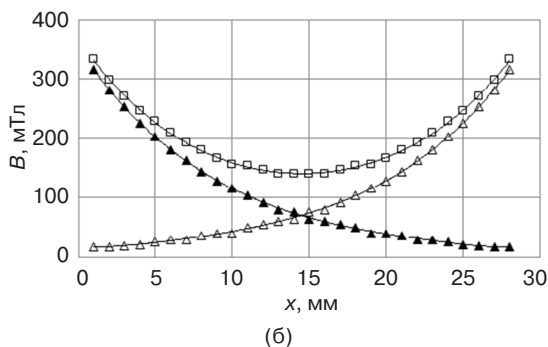


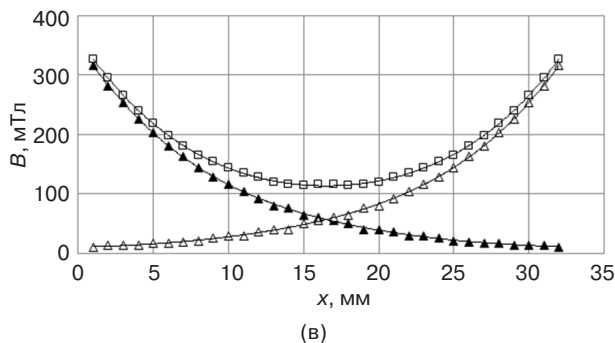
Рис. 4. Координатная характеристика индукции B поля со стороны одного полюса магнитного элемента-диска при удалении от центра полюсной поверхности



(а)



(б)



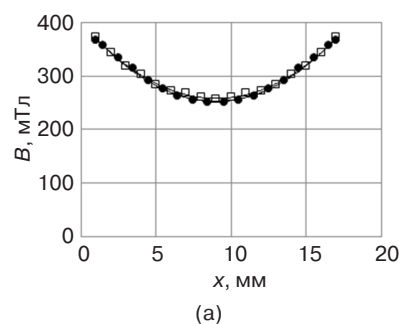
(в)

Рис. 5. Результаты суперпозиции данных индукции B (□) между фактическим (данные B помечены точками ▲) и условно противостоящим на расстоянии b (данные B помечены точками Δ) магнитными полюсами элементов-дисков:
(а) $b = 18$ мм, (б) $b = 29$ мм, (в) $b = 33$ мм

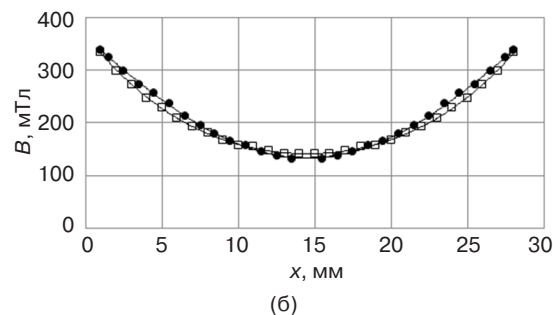
На рис. 5 показаны результаты такого метода с получением соответствующих результирующих (точки □) координатных характеристик индукции B [11] для разных значений (фиктивных) межполюсного расстояния b .

На рис. 6 сведены фактические данные индукции B , полученные между противостоящими (разноименными) магнитными полюсами, с данными индукции B , полученными суперпозицией.

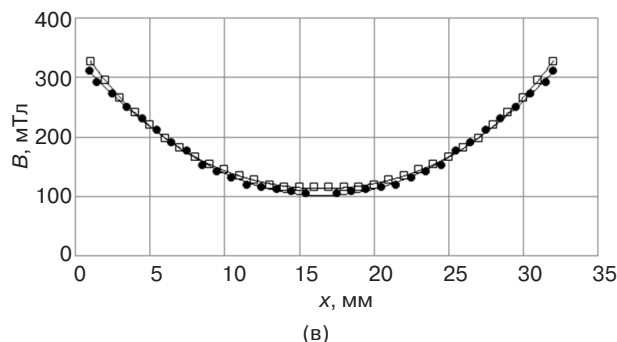
Из рис. 6 видно, что сопоставляемые координатные характеристики B хорошо согласуются между собой. Это свидетельствует о возможности применения принципа суперпозиции к данной задаче, а значит – о возможности универсального решения вопроса получения координатных (напомним – при осевых) характеристик индукции поля в той или иной (не обязательно указанной выше) системе двух



(а)



(б)



(в)

Рис. 6. Сравнение фактической координатной характеристики данных индукции между двумя противостоящими полюсами, разнесенными на расстояние b (точки ● из рис. 2) с соответствующей характеристикой, полученной суперпозицией данных индукции каждого из этих магнитных полюсов (точки □ из рис. 5):
(а) $b = 18$ мм, (б) $b = 29$ мм, (в) $b = 33$ мм

противостоящих полюсов с плоскими поверхностями. При этом стоит заметить, что можно отказаться от предварительных (перед компоновкой той или иной магнитной системы, в т.ч. используемой в соответствующих измерительных устройствах) замеров индукции, а пользоваться только одной координатной характеристикой – со стороны одного магнитного полюса. Это указывает на возможность практического использования принципа суперпозиции при создании подобных систем.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе обозначена востребованность оценки размеров рабочей зоны (где значения напряженности поля H или индукции B практически постоянны) между противостоящими плоскими полюсами, от чего зависит достоверность определения магнитных свойств образцов, размещаемых в данной зоне. Так, может оказаться, что при выполнении исследований разные части изучаемого образца будут находиться в разных условиях (по H или B), а значит, к результатам таких измерений следует относиться как к не вполне корректным.

В работе приводятся экспериментально аргументированные данные о рабочих зонах, когда противостоящие магнитные полюса являются плоскими, в виде дисков, для разных расстояний b между плоскостями полюсов и разных диаметров D . Установлено, что при повышенных относительно D значениях b размер рабочей зоны не будет превышать 25–30% от b , а значит, размещаемый в этой зоне образец для исследований не должен превышать 5–10 мм (к тому же со сравнительно малым поперечным размером).

Показано, что с увеличением диаметра D (и насколько возможным уменьшением расстояния b) рабочая зона увеличивается. В частности, при $b = 102$ мм и $D = 200$ мм (т.е. при $b/D \cong 0.5$) размер рабочей зоны оценивается величиной, начиная с 90% и до 100% от b для приосевой части межполюсной области, т.е. вплоть до допускаемой стыковки торцов изучаемого образца с полюсными поверхностями, но только при изучении образцов сравнительно малых поперечных размеров.

Демонстрируется возможность оценки рабочей (приосевой) зоны между противостоящими плоскими магнитными полюсами получением необходимых для этого координатных характеристик индукции (напряженности) поля между ними приемом суперпозиции (с использованием соответствующих координатных характеристик со стороны одного из магнитных полюсов).

БЛАГОДАРНОСТИ

Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания в сфере науки (проект № FSFZ-2024-0005).

ACKNOWLEDGMENTS

The study was financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the framework of the State Assignment in the field of science (project No. FSFZ-2024-0005).

Вклад авторов

Д.А. Сандуляк – методология, верификация и анализ данных, написание рукописи и ее редактирование.

М.Н. Полисмакова – концептуализация, проведение исследования, написание рукописи и ее редактирование.

Д.А. Головченко – сбор и анализ материалов для исследования, написание черновика рукописи.

А.С. Харин – проведение исследования, сбор материалов для исследования.

А.В. Сандуляк – верификация данных, формальный анализ, руководство исследованием.

А.А. Сандуляк – методология, редактирование рукописи.

Authors' contributions

D.A. Sandulyak – methodology, data verification and analysis, writing and editing the text of the article.

M.N. Polismakova – conceptualization, conducting the research, writing and editing the text of the article.

D.A. Golovchenko – collecting and analyzing materials for the study, writing the original draft.

A.S. Kharin – conducting the research, collecting materials for the study.

A.V. Sandulyak – data verification, formal analysis, supervision.

A.A. Sandulyak – methodology, editing.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колесов К.А., Маширов А.В., Коледов В.В., Петров А.О., Орлов А.П., Бычков И.В., Кузьмин Д.А., Gaida D., Кошкидько Ю.С., Шавров В.Г., Суслов Д.А. Соленоид на основе лент высокотемпературного сверхпроводника для магнитокалорических применений. *Журнал радиоэлектроники*. 2024;11. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2024.11.31>
2. Франц В.Г. Сверхпроводящий соленоид из ВТСП ленты второго поколения. В сб.: *Гагаринские чтения – 2022: Сборник тезисов работ международной молодежной научной конференции XLVIII Гагаринские чтения 2022*. М.: 2022. С. 310. <https://www.elibrary.ru/zlbgea>

3. Chen D.X., Pardo E., Zhu Y.-H., Xiang L.-X., Ding J.-Q. Demagnetizing correction in fluxmetric measurements of magnetization curves and hysteresis loops of ferromagnetic cylinders. *J. Magn. Magn. Mater.* 2018;449:447–454. <https://doi.org/10.1016/j.jmmm.2017.10.069>
4. Сандуляк Д.А., Сандуляк А.А., Горпиненко Ю.О., Сандуляк А.В., Соловьев И.А. Модель «трубок-слоев» намагничиваемой цепочки шаров: магнитные свойства, оценка гиперусиления поля между шарами. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение*. 2023;3(144):49–61. <https://doi.org/10.18698/0236-3933-2023-3-49-61>
5. Цицикян Г.Н., Антипов М.Ю. Расчет индуктивности однослойного и двухслойного соленоида с учетом особенностей практического применения. *Электричество*. 2019;10:48–53. <https://doi.org/10.24160/0013-5380-2019-10-48-53>
6. Капица П.Л., Филимонов С.И. Соленоид, создающий магнитное поле до 30 кЭ в объеме 5 л и потребляющий 500 кВт. *УФН*. 1968;95(1):35–43. <https://doi.org/10.3367/UfNr.0095.196805d.0035>
7. Чечерников В.И. *Магнитные измерения*. М.: МГУ; 1963. 286 с.
8. Thirumurugan A., Ramadoss A., Dhanabalan S., et al. MXene/Ferrite Magnetic Nanocomposites for Electrochemical Supercapacitor Applications. *Micromachines (Basel)*. 2022;13(10):1792. <https://doi.org/10.3390/mi13101792>
9. Lopez-Dominguez V., Quesada A., Guzmán-Mínguez J.C., Moreno L., Lere M., Spottorno J., Giacomone F., Fernández J.F., Hernando A., García M.A. A simple vibrating sample magnetometer for macroscopic samples. *Rev. Sci. Instrum.* 2018;89(3):034707. <https://doi.org/10.1063/1.5017708>
10. Li W., Cai H., Kang Y., Ying Y., Yu J., Zheng J., Qiao L., Che S. High permeability and low loss bioinspired soft magnetic composites with nacre-like structure for high frequency applications. *Acta Materialia*. 2019;167:267–274. <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2019.01.035>
11. Сандуляк А.А., Ершов Д.В., Орешкин Д.В., Сандуляк А.В. Характеристики индукции поля в модуле магнитного сепаратора. *Вестник МГСУ*. 2013;5:103–111. <https://www.elibrary.ru/olirce>
12. Нейман Л.А., Нейман В.Ю. *Однокатушечный электромагнит*: пат. 2791925 РФ. Заявка № 2022115710; заявл. 10.06.2022; опубл. 14.03.2023. Бюл. № 8.
13. Амосков В.М., Знаменщикова Н.С., Кухтин В.П., Капаркова М.В., Крылова Н.А., Ламзин Е.А., Ларионов М.С., Мельников Д.Д. *Способ обеспечения однородности магнитного поля в рабочей области явнополюсного магниторезонансного устройства*: пат. 2833238 РФ. Заявка № 2023126377; заявл. 15.10.2023; опубл. 15.01.2025. Бюл. № 2.
14. Сандуляк А.В., Сандуляк А.А., Полисмакова М.Н., Киселев Д.О., Сандуляк Д.А. Магнетометр Фарадея с полюсными наконечниками-полусферами: идентификация зоны стабильного силового фактора. *Russ. Technol. J.* 2017;5(6):43–54. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2017-5-6-43-54>
15. Сандуляк А.А., Сандуляк А.В., Полисмакова М.Н., Киселев Д.О., Ершова В.А., Сандуляк Д.А. Использование полюсных наконечников сферической формы для реализации метода Фарадея. *Приборы и техника эксперимента*. 2018;1:109–112. <https://doi.org/10.7868/S0032816218010342>

REFERENCES

1. Kolesov K.A., Mashirov A.V., Koledov V.V., et al. Solenoid based on tapes of high-temperature superconductor for magnetocaloric applications. *Zhurnal radioelektroniki = J. Radio Electronics*. 2024;11 (in Russ.). <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2024.11.31>
2. Franz V.G. Superconducting solenoid from the second-generation HTSC tape. In: *Gagarin Readings – 2022: Collection of Abstracts of the Works of the International Youth Scientific Conference 48th Gagarin Readings 2022*. Moscow: 2022. P. 310 (in Russ.). <https://www.elibrary.ru/zlbgea>
3. Chen D.X., Pardo E., Zhu Y.-H., Xiang L.-X., Ding J.-Q. Demagnetizing correction in fluxmetric measurements of magnetization curves and hysteresis loops of ferromagnetic cylinders. *J. Magn. Magn. Mater.* 2018;449:447–454. <https://doi.org/10.1016/j.jmmm.2017.10.069>
4. Sandulyak D.A., Sandulyak A.A., Gorpinenko Yu.O., et al. “Pipe-layer” model of the magnetized chain of spheres: magnetic properties and assessment of the hyper-amplification field between the spheres. *Vestnik MGTU im. N.E. Bauman. Ser. Priborostroyeniye = Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Instrument Engineering*. 2023;3(144): 49–61 (in Russ.). <https://doi.org/10.18698/0236-3933-2023-3-49-61>
5. Tsitsikyan G.N., Antipov M.Yu. Calculating the Inductance of Single- and Two-Layer Solenoids Taking into Account the Specific Features of Their Practical Application. *Elektrichestvo*. 2019;10:48–53 (in Russ.). <https://doi.org/10.24160/0013-5380-2019-10-48-53>
6. Kapitza P.L., Filimonov S.I. Solenoid producing a magnetic field up to 30 kOe in a volume of 5 liters and consuming 500 kW. *Sov. Phys. Usp.* 1968;11(3):299–303. <https://doi.org/10.1070/PU1968v011n03ABEH003833> [Original Russian Text: Kapitza P.L., Filimonov S.I. Solenoid producing a magnetic field up to 30 kOe in a volume of 5 liters and consuming 500 kW. *Uspekhi fizicheskikh nauk*. 1968;95(1):35–43 (in Russ.). <https://doi.org/10.3367/UfNr.0095.196805d.0035>]
7. Chechernikov V.I. *Magnitnyye izmereniya (Magnetic Measurements)*. Moscow: Moscow State University; 1963. 286 p. (in Russ.).
8. Thirumurugan A., Ramadoss A., Dhanabalan S., et al. MXene/Ferrite Magnetic Nanocomposites for Electrochemical Supercapacitor Applications. *Micromachines (Basel)*. 2022;13(10):1792. <https://doi.org/10.3390/mi13101792>

9. Lopez-Dominguez V., Quesada A., Guzmán-Mínguez J.C., Moreno L., Lere M., Spottorno J., Giacomone F., Fernández J.F., Hernando A., García M.A. A simple vibrating sample magnetometer for macroscopic samples. *Rev. Sci. Instrum.* 2018;89(3):034707. <https://doi.org/10.1063/1.5017708>
10. Li W., Cai H., Kang Y., Ying Y., Yu J., Zheng J., Qiao L., Che S. High permeability and low loss bioinspired soft magnetic composites with nacre-like structure for high frequency applications. *Acta Materialia*. 2019;167:267–274. <https://doi.org/10.1016/j.actamat.2019.01.035>
11. Sandulyak A.A., Ershov D.V., Oreshkin D.V., Sandulyak A.V. Characteristics of magnetic field induction inside a module of a magnetic separator. *Vestnik MGSU*. 2013;5:103–111 (in Russ.).
12. Neiman L.A., Neiman V.Yu. *Single Coil Electromagnet*: RF Pat. RU 2791925. Publ. 14.03.2023 (in Russ.).
13. Amoskov V.M., Znamenshchikova N.S., Kukhtin V.P., Kaparkova M.V., Krylova N.A., Lamzin E.A., Larionov M.S., Mel'nikov D.D. *Method for Ensuring Magnetic Field Homogeneity in the Working Region of a Salient-Pole Magnetic Resonance Device*: RF Pat. RU 2833238. Publ. 15.01.2025 (in Russ.).
14. Sandulyak A.V., Sandulyak A.A., Polismakova M.N., Kiselev D.O., Sandulyak D.A. Faraday magnetometer with spheric pole pieces: identification zone with a stable force factor. *Russ. Technol. J.* 2017;5(6):43–54 (in Russ.). <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2017-5-6-43-54>
15. Sandulyak A.A., Sandulyak A.V., Polismakova M.N., et al. The Use of Spherical Pole Pieces for Performing the Faraday Balance Method. *Instrum. Exp. Tech.* 2018;61(1):123–126. <https://doi.org/10.1134/S0020441218010293>
[Original Russian Text: Sandulyak A.A., Sandulyak A.V., Polismakova M.N., Kiselev D.O., Ershova V.A., Sandulyak D.A. The Use of Spherical Pole Pieces for Performing the Faraday Balance Method. *Pribory i tekhnika eksperimenta*. 2018;1: 109–112 (in Russ.). <https://doi.org/10.7868/S0032816218010342>]

Об авторах

Сандуляк Дарья Александровна, к.т.н., доцент, кафедра «Приборы и информационно-измерительные системы», Институт кибербезопасности и цифровых технологий, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: sandulyak_d@mirea.ru. Scopus Author ID 36621369400, ResearcherID L-9814-2016, SPIN-код РИНЦ 8114-8109, <https://orcid.org/0000-0003-4269-6133>

Полисмакова Мария Николаевна, к.т.н., доцент, кафедра «Приборы и информационно-измерительные системы», Институт кибербезопасности и цифровых технологий, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: polismakova@mirea.ru. Scopus Author ID 36621096600, ResearcherID O-8796-2017, SPIN-код РИНЦ 3845-8391, <https://orcid.org/0000-0002-4564-6206>

Головченко Дарья Андреевна, преподаватель-исследователь, стажер-исследователь лаборатории магнитного контроля и разделения материалов, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: golovchenko@mirea.ru. SPIN-код РИНЦ 4303-1093, <https://orcid.org/0000-0002-6227-6884>

Харин Алексей Сергеевич, преподаватель-исследователь, инженер лаборатории магнитного контроля и разделения материалов, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: linnetdar@mail.ru. SPIN-код РИНЦ 8435-3232, <https://orcid.org/0000-0002-0922-1366>

Сандуляк Александр Васильевич, д.т.н., профессор, кафедра «Приборы и информационно-измерительные системы», Институт кибербезопасности и цифровых технологий, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: sandulyak@mirea.ru. Scopus Author ID 57194504434, ResearcherID V-6094-2018, SPIN-код РИНЦ 3795-5374, <https://orcid.org/0000-0001-7605-2702>

Сандуляк Анна Александровна, д.т.н., профессор, кафедра «Приборы и информационно-измерительные системы», Институт кибербезопасности и цифровых технологий, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: sandulyak_a@mirea.ru. Scopus Author ID 7004032043, ResearcherID S-5187-2017, SPIN-код РИНЦ 8858-1720, <https://orcid.org/0000-0002-5111-6092>

About the Authors

Daria A. Sandulyak, Cand. Sci. (Eng.), Associate Professor, Department of Devices and Information-Measuring Systems, Institute for Cybersecurity and Digital Technologies, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: sandulyak_d@mirea.ru. Scopus Author ID 36621369400, ResearcherID L-9814-2016, RSCI SPIN-code 8114-8109, <https://orcid.org/0000-0003-4269-6133>

Maria N. Polismakova, Cand. Sci. (Eng.), Associate Professor, Department of Devices and Information-Measuring Systems, Institute for Cybersecurity and Digital Technologies, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: polismakova@mirea.ru. Scopus Author ID 36621096600, ResearcherID O-8796-2017, RSCI SPIN-code 3845-8391, <https://orcid.org/0000-0002-4564-6206>

Daria A. Golovchenko, Researcher Intern, Laboratory of Magnetic Control and Material's Separation, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: golovchenko@mirea.ru. RSCI SPIN-code 4303-1093, <https://orcid.org/0000-0002-6227-6884>

Alexey S. Kharin, Engineer, Laboratory of Magnetic Control and Material's Separation, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: linnetdar@mail.ru. RSCI SPIN-code 8435-3232, <https://orcid.org/0000-0002-0922-1366>

Alexander V. Sandulyak, Dr. Sci. (Eng.), Professor, Department of Devices and Information-Measuring Systems, Institute for Cybersecurity and Digital Technologies, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: sandulyak@mirea.ru. Scopus Author ID 57194504434, ResearcherID V-6094-2018, RSCI SPIN-code 3795-5374, <https://orcid.org/0000-0001-7605-2702>

Anna A. Sandulyak, Dr. Sci. (Eng.), Professor, Department of Devices and Information-Measuring Systems, Institute for Cybersecurity and Digital Technologies, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: sandulyak_a@mirea.ru. Scopus Author ID 7004032043, ResearcherID S-5187-2017, RSCI SPIN-code 8858-1720, <https://orcid.org/0000-0002-5111-6092>

Математическое моделирование
Mathematical modeling

УДК 539.3

<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-6-104-115>

EDN NGHUVB



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Метод расщепления интегрального преобразования в задачах сложного теплообмена

Э.М. Карташов[®]

МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, 119454 Россия

[®] Автор для переписки, e-mail: professor.kartashov@gmail.com

• Поступила: 11.04.2025 • Доработана: 02.07.2025 • Принята к опубликованию: 06.10.2025

Резюме

Цели. Статья посвящена развитию достаточно редкого метода расщепления интегрального преобразования Фурье – Ханкеля при нахождении точного аналитического решения обобщенной третьей краевой задачи сложного теплообмена с переменным во времени коэффициентом теплообмена и переменной во времени температурой окружающей среды. Обобщение заключается в том, что исходная задача рассматривается одновременно в трех системах координат: декартовой (полупространство, ограниченное плоской поверхностью), цилиндрической (пространство, ограниченное изнутри цилиндрической полостью), сферической (пространство, ограниченное изнутри сферической полостью).

Методы. Используется развитое для этих целей обобщенное интегральное преобразование одновременно в трех системах координат и метод его расщепления применительно к задаче сложного теплообмена.

Результаты. Предварительно создан специальный математический аппарат – обобщенное интегральное преобразование Фурье – Ханкеля одновременно для трех систем координат (в литературе указанное преобразование сформулировано для каждой системы координат отдельно). Наличие указанного математического аппарата позволило развить метод его расщепления и получить точное аналитическое решение третьей краевой задачи нестационарной теплопроводности сложного теплообмена одновременно для всех трех систем координат. В качестве иллюстрации рассмотрен частный случай в декартовых координатах и установлен быстрый рост пикаровского процесса.

Выводы. На основе развитого специального математического аппарата получено точное аналитическое решение обобщенной третьей краевой задачи теплопроводности с переменными во времени коэффициентом теплообмена и температуры окружающей среды одновременно в трех системах координат. Полученные результаты составляют научную новизну работы и являются новыми в аналитической теплофизике.

Ключевые слова: интегральное преобразование обобщенного типа, метод расщепления, аналитическое решение тепловой задачи

Для цитирования: Карташов Э.М. Метод расщепления интегрального преобразования в задачах сложного теплообмена. *Russian Technological Journal*. 2025;13(6):104–115. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-6-104-115>, <https://www.elibrary.ru/NGHUVB>

Прозрачность финансовой деятельности: Автор не имеет финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

RESEARCH ARTICLE

Method for splitting integral transformation in problems of complex heat transfer

Eduard M. Kartashov[@]

MIREA – Russian Technological University, Moscow, 119454 Russia

[@] Corresponding author, e-mail: professor.kartashov@gmail.com

• Submitted: 11.04.2025 • Revised: 02.07.2025 • Accepted: 06.10.2025

Abstract

Objectives. This paper presents the development of a rather rare method for splitting the integral Fourier–Hankel transform when finding an exact analytical solution to the generalized third boundary value problem of complex heat transfer, where both the heat transfer coefficient and ambient temperature vary in time. The generalization lies in the simultaneous consideration of the problem in three different coordinate systems: Cartesian (a half-space bounded by a flat surface), cylindrical (a space bounded by a cylindrical cavity from the inside), and spherical (a space bounded by a spherical cavity from the inside). The aim was to develop a method for splitting the integral transformation as applied to finding an exact analytical solution to a generalized model problem of non-stationary thermal conductivity of complex heat exchange with an arbitrary dependence of the heat exchange coefficient and ambient temperature on time.

Methods. The generalized integral transformation developed for these purposes is used simultaneously in three coordinate systems, and the method for its splitting is applied to the problem of complex heat transfer.

Results. Initially, a special mathematical apparatus constituting a generalized integral Fourier–Hankel transform for three coordinate systems simultaneously was developed. For comparison, in the literature, such a transformation is formulated, as a rule, separately for each coordinate system. The availability of this mathematical apparatus made it possible to develop a method for its splitting and to obtain an exact analytical solution to the third boundary value problem for nonstationary thermal conductivity in complex heat transfer, simultaneously for all three coordinate systems. To illustrate this, a specific case in Cartesian coordinates was considered and a rapid growth of the Picard process was established.

Conclusions. Based on the developed special mathematical apparatus, an exact analytical solution to the generalized third boundary value problem of heat conductivity with time-varying heat transfer coefficient and ambient temperature, simultaneously in three coordinate systems, was obtained. These results constitute the scientific novelty of the work and represent a significant contribution to analytical thermal physics.

Keywords: generalized integral transformation, splitting method, analytical solution to the thermal problem

For citation: Kartashov E.M. Method for splitting integral transformation in problems of complex heat transfer. *Russian Technological Journal*. 2025;13(6):104–115. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-6-104-115>, <https://www.elibrary.ru/NGHUVB>

Financial disclosure: The author has no financial or proprietary interest in any material or method mentioned.

The author declares no conflicts of interest.

ВВЕДЕНИЕ

Задачи тепло- и массопереноса с граничным условием

$$(\partial T / \partial n)|_{\Gamma} = h(t)[T_{\Gamma} - T_c(t)], \quad t > 0$$

относятся к сложному теплообмену вследствие зависимости $h(t) = \alpha(t)/\lambda^*$. Здесь T_{Γ} – температура

на границе области, \vec{n} – вектор нормали, T_c – температура окружающей среды, $\alpha(t)$ – коэффициент теплообмена, λ^* – теплопроводность материала, t – время. Так как его определение оказывается весьма затруднительным, то практически во всех критериальных уравнениях $\alpha(t)$ принимается постоянной величиной $\alpha = \text{const}$ ($h = \alpha/\lambda^* = \text{const}$), что позволяет получать точные аналитические решения соответствующих задач теплообмена. Для этих целей

разработаны специальные расчетные таблицы [1], вошедшие в теорию теплообмена как таблицы Карташова № 1, № 2, позволяющие быстро выписать и улучшить аналитическое решение тепловой задачи в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат и далее улучшить решение в виде ряда Фурье – Ханкеля до абсолютной и равномерной сходимости ряда вплоть до границы области определения дифференциального уравнения теплопроводности. В случае задания зависимости коэффициента h от времени ($h = h(t)$) ситуация с нахождением аналитических решений модельных задач резко меняется: точное аналитическое решение задачи получить не удастся [2–6]. До настоящего времени указанная проблема остается открытой.

Начиная с 1950-х гг. прошлого столетия в большом числе публикаций авторов различных направлений (математиков, физиков, механиков, химиков – последние изучали процессы диффузии в металлах в физической химии) предпринимались попытки получить точное или приближенное аналитическое решение задачи сложного теплообмена. Использовались многочисленные подходы классических дифференциальных уравнений математической физики [7, 8]. Однако, несмотря на многообразие подходов, каждый из них, в конечном счете, приводил к приближенному решению задачи либо к наиболее удачному первому приближению пикаровского процесса (также

приближенному решению). По существу, данная проблема остается открытой до сих пор.

Рассмотрим обобщенную постановку задачи в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} &= a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{2m+1}{x} \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad x > x_0, t > 0, \\ T(x, t)|_{t=0} &= T_0, \quad x \geq x_0, \quad |T(x, t)| < \infty, \quad x \geq x_0, t \geq 0, \\ \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=x_0} &= h(t) \left[T(x, t) \Big|_{x=x_0} - \varphi(t) \right], \quad t > 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Здесь $m = -1/2, 0, 1/2$ соответственно для декартовой, цилиндрической и сферической систем координат, a – температуропроводность, x, x_0 – параметры модели. Функции $h(t), \varphi(t)$ – неотрицательные и абсолютно интегрируемые на полупространстве $[0, +\infty)$. В этом случае выполняются условия теоремы существования и единственности решения рассматриваемой задачи (1), т.е. существует и является единственным решение $T(x, t) \in L^2[(x_0, \infty) \times L^1(0, \infty)]$, где L^n – множество функций, непрерывно дифференцируемых до порядка n [8–10]. Нахождению этого решения и посвящена настоящая работа. Дальнейшее обобщение обсуждаемой здесь теории – переход к локально-неравновесному теплообмену, где учитывается конечная скорость распространения теплоты¹ [11–16].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Аналитическое решение задачи (1) получим методом расщепления интегрального преобразования Фурье – Ханкеля обобщенного типа. Указанное преобразование строится на основе соотношений операционного исчисления, развитых в [1]. Выпишем окончательный результат всех определяющих соотношений.

Обобщенное интегральное преобразование функции $T(x, t)$ для третьей краевой задачи:

$$\bar{T}(\lambda, t) = \int_{x_0}^{\infty} \rho^{2m+1} T(\rho, t) \Psi(\lambda, \rho) d\rho, \quad (2)$$

$$T(x, t) = \int_0^{\infty} \frac{\bar{T}(\lambda, t) \Psi(\lambda, x)}{\left[\lambda J_{m+1}(\lambda x_0) + h J_m(\lambda x_0) \right]^2 + \left[\lambda Y_{m+1}(\lambda x_0) + h Y_m(\lambda x_0) \right]^2} \lambda d\lambda, \quad (3)$$

$$\Psi(\lambda, x) = x^{-m} \left\{ \lambda \left[J_m(\lambda x) Y_{m+1}(\lambda x_0) - Y_m(\lambda x) J_{m+1}(\lambda x_0) \right] + h \left[J_m(\lambda x) Y_m(\lambda x_0) - Y_m(\lambda x) J_m(\lambda x_0) \right] \right\}. \quad (4)$$

При этом изображение оператора $\Delta T(x, t)$ имеет вид:

$$\int_{x_0}^{\infty} \rho^{2m+1} \Delta T(\rho, t) \Psi(\lambda, \rho) d\rho = \frac{2x_0^{-m}}{\pi} \left[\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} - h T(x, t) \right] \Big|_{x=x_0} - \lambda^2 \bar{T}(\lambda, t). \quad (5)$$

Здесь $J_m(\cdot), Y_m(\cdot)$ – функции Бесселя.

¹ Савельева Ю.И. Разработка и анализ математической модели термомеханики структурно-чувствительных материалов: автореферат дис. ... д.ф.-м.н. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана; 2023. 32 с. [Savelyeva I.Yu. Development and analysis of the mathematical model of thermomechanics of structurally sensitive materials. Dr. Sci. Thesis (Phys.-Math.), Bauman Moscow State Technical University; 2023, 32 p. (in Russ.).]

Имея обобщенное интегральное преобразование (2)–(5), нетрудно выписать точное аналитическое решение задачи (1) при $h = \text{const}$, включая все неоднородности как в уравнении (внутренний нестационарный источник теплоты), так и в краевых условиях (наличие начальной температуры и температуры окружающей среды). Из (2)–(5) нетрудно получить соответствующие преобразования в цилиндрических координатах при $m = 0$, в декартовых – при $m = -1/2$ и в сферических – при $m = 1/2$.

ПОСТРОЕНИЕ ТОЧНОГО АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ РАСЩЕПЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Рассмотрим задачу (1) в безразмерных переменных:

$$\rho = x / x_0, F_0 = at / x_0^2, Bi(F_0) = \frac{\alpha(t)x_0}{\lambda^*}, \Theta(\rho, F_0) = \frac{T(x, t) - T_0}{T_c^* - T_0}, T_c(F_0) = \frac{\varphi(t) - T_0}{T_c^* - T_0}, \quad (6)$$

где T_c^* – выбранная единица масштаба, Bi – безразмерный коэффициент теплообмена.

Теперь можно записать задачу (1) в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Theta}{\partial F_0} &= \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \rho^2} + \frac{2m+1}{\rho} \frac{\partial \Theta}{\partial \rho}, \rho > 1, F_0 > 0, \\ \Theta(\rho, F_0) \Big|_{F_0=0} &= 0, \rho \geq 1, |\Theta(\rho, F_0)| < \infty, \rho \geq 1, F_0 \geq 0, \\ \frac{\partial \Theta(\rho, F_0)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=1} &= Bi(F_0) [\Theta(\rho, F_0) \Big|_{\rho=1} - T_c(F_0)], F_0 > 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Обобщенное интегральное преобразование (2)–(5) запишем в виде:

$$\bar{\Theta}(\lambda, F_0) = \int_1^\infty \rho^{2m+1} \Theta(\rho, F_0) K(\rho, \lambda, F_0) d\rho, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} K(\rho, \lambda, F_0) &= \rho^{-m} \left\{ \lambda [J_m(\lambda \rho) Y_{m+1}(\lambda) - Y_m(\lambda \rho) J_{m+1}(\lambda)] + Bi(F_0) [J_m(\lambda \rho) Y_m(\lambda) - Y_m(\lambda \rho) J_m(\lambda)] \right\} = \\ &= [Bi(F_0) Y_m(\lambda) + \lambda Y_{m+1}(\lambda)] [\rho^{-m} J_m(\lambda \rho)] - [Bi(F_0) J_m(\lambda) + \lambda J_{m+1}(\lambda)] [\rho^{-m} Y_m(\lambda \rho)]. \end{aligned} \quad (9)$$

Обозначим:

$$\left. \begin{aligned} \alpha(\lambda, F_0) &= Bi(F_0) Y_m(\lambda) + \lambda Y_{m+1}(\lambda), \\ \beta(\lambda, F_0) &= Bi(F_0) J_m(\lambda) + \lambda J_{m+1}(\lambda). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Тогда формула обращения для преобразования (8) будет иметь вид:

$$\Theta(\rho, F_0) = \int_0^\infty \bar{\Theta}(\lambda, F_0) \frac{K(\rho, \lambda, F_0)}{\alpha^2(\lambda, F_0) + \beta^2(\lambda, F_0)} \lambda d\lambda. \quad (11)$$

При этом

$$K(\rho, \lambda, F_0) = \alpha(\lambda, F_0) [\rho^{-m} J_m(\lambda \rho)] - \beta(\lambda, F_0) [\rho^{-m} Y_m(\lambda \rho)], \quad (12)$$

$$\int_1^\infty \rho^{2m+1} \Delta \Theta(\rho, F_0) K(\rho, \lambda, F_0) d\rho = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\partial \Theta(\rho, F_0)}{\partial \rho} - Bi(F_0) \Theta(\rho, F_0) \right] \Big|_{\rho=1} - \lambda^2 \bar{\Theta}(\lambda, F_0). \quad (13)$$

Введем ряд важных обозначений:

$$\left. \begin{aligned} \omega(\lambda, F_0) &= \alpha(\lambda, F_0) + i\beta(\lambda, F_0), \\ \bar{\omega}(\lambda, F_0) &= \alpha(\lambda, F_0) - i\beta(\lambda, F_0), \\ H_0^{(1)}(\lambda\rho) &= [J_m(\lambda\rho) + iY_m(\lambda\rho)](\rho^{-m}), \\ H_0^{(2)}(\lambda\rho) &= [J_m(\lambda\rho) - iY_m(\lambda\rho)](\rho^{-m}), \\ A(\lambda, F_0) &= \int_1^\infty \rho^{2m+1} \Theta(\rho, F_0) H_0^{(1)}(\lambda\rho) d\rho, \\ \bar{A}(\lambda, F_0) &= \int_1^\infty \rho^{2m+1} \Theta(\rho, F_0) H_0^{(2)}(\lambda\rho) d\rho. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Тогда можно записать:

$$\bar{\Theta}(\lambda, F_0) = \frac{1}{2} [\omega(\lambda, F_0) A(\lambda, F_0) + \bar{\omega}(\lambda, F_0) \bar{A}(\lambda, F_0)] \quad (15)$$

или

$$\bar{\Theta}(\lambda, F_0) = \operatorname{Re} [\omega(\lambda, F_0) A(\lambda, F_0)]. \quad (16)$$

Дальнейшая цель – перевести исходную задачу (7) в пространство изображений (8). Вначале запишем интегральное преобразование левой части уравнения в (7):

$$\frac{\partial \bar{\Theta}(\lambda, F_0)}{\partial F_0} = \int_1^\infty \rho^{2m+1} \frac{\partial \Theta(\rho, F_0)}{\partial F_0} K(\rho, \lambda, F_0) d\rho = \frac{1}{2} \left[\omega(\lambda, F_0) \frac{\partial A(\lambda, F_0)}{\partial F_0} + \bar{\omega}(\lambda, F_0) \frac{\partial \bar{A}(\lambda, F_0)}{\partial F_0} \right].$$

Изображение оператора $\Delta\Theta(\rho, F_0)$ в (13) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \rho^{2m+1} \Delta\Theta(\rho, F_0) K(\rho, \lambda, F_0) d\rho &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{\partial \Theta(\rho, F_0)}{\partial \rho} - Bi(F_0) \Theta(\rho, F_0) \right] \Big|_{\rho=1} - \lambda^2 \bar{\Theta}(\lambda, F_0) = \\ &= -\frac{2}{\pi} Bi(F_0) T_c(F_0) - \lambda^2 \bar{\Theta}(\lambda, F_0) = -\frac{1}{2} \lambda^2 [\omega(\lambda, F_0) A(\lambda, F_0) + \bar{\omega}(\lambda, F_0) \bar{A}(\lambda, F_0)] - \frac{2}{\pi} Bi(F_0) T_c(F_0). \end{aligned} \quad (17)$$

Теперь исходную задачу (7) можно записать в виде:

$$\left. \begin{aligned} \omega(\lambda, F_0) \frac{\partial A(\lambda, F_0)}{\partial F_0} + \bar{\omega}(\lambda, F_0) \frac{\partial \bar{A}(\lambda, F_0)}{\partial F_0} + \lambda^2 [\omega(\lambda, F_0) A(\lambda, F_0) + \bar{\omega}(\lambda, F_0) \bar{A}(\lambda, F_0)] &= -\frac{4}{\pi} Bi(F_0) T_c(F_0), F_0 > 0, \\ A(\lambda, 0) &= \bar{A}(\lambda, 0) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

или

$$\left. \begin{aligned} \left[\omega(\lambda, F_0) \frac{\partial A(\lambda, F_0)}{\partial F_0} + \lambda^2 \omega(\lambda, F_0) A(\lambda, F_0) + \frac{2}{\pi} Bi(F_0) T_c(F_0) \right] &= \\ = - \left[\bar{\omega}(\lambda, F_0) \frac{\partial \bar{A}(\lambda, F_0)}{\partial F_0} + \lambda^2 \bar{\omega}(\lambda, F_0) \bar{A}(\lambda, F_0) + \frac{2}{\pi} Bi(F_0) T_c(F_0) \right], F_0 > 0, \\ A(\lambda, 0) &= \bar{A}(\lambda, 0) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Рассмотрим подробнее равенство (18). После преобразований получим важное соотношение:

$$\int_1^{\infty} \rho^{2m+1} \frac{\partial \Theta(\rho, F_0)}{\partial F_0} K(\rho, \lambda, F_0) d\rho + \lambda^2 \int_1^{\infty} \rho^{2m+1} \Theta(\rho, F_0) d\rho + \frac{2}{\pi} Bi(F_0) T_c(F_0) = W(\lambda, F_0) = 0. \quad (20)$$

Теперь раскроем левую часть уравнения в (19). Находим:

$$\begin{aligned} & \left[\alpha(\lambda, F_0) + i\beta(\lambda, F_0) \right] \int_1^{\infty} \rho^{2m+1} \frac{\partial \Theta(\rho, F_0)}{\partial F_0} \left[(J_m(\lambda\rho) + iY_m(\lambda\rho)) \rho^{-m} \right] d\rho + \\ & + \lambda^2 \left[\alpha(\lambda, F_0) + i\beta(\lambda, F_0) \right] \int_1^{\infty} \rho^{2m+1} \Theta(\rho, F_0) \left[(J_m(\lambda\rho) + iY_m(\lambda\rho)) \rho^{-m} \right] d\rho + \\ & + \frac{2}{\pi} Bi(F_0) T_c(F_0) = \int_1^{\infty} \rho^{2m+1} \frac{\partial \Theta(\rho, F_0)}{\partial F_0} K(\rho, \lambda, F_0) d\rho + \lambda^2 \int_1^{\infty} \rho^{2m+1} \Theta(\rho, F_0) K(\rho, \lambda, F_0) d\rho + \frac{2}{\pi} Bi(F_0) T_c(F_0) + \\ & + i \left\{ \int_1^{\infty} \rho^{2m+1} \frac{\partial \Theta(\rho, F_0)}{\partial F_0} \left[\beta(\lambda, F_0) (J_m(\lambda\rho) \rho^{-m}) + \alpha(\lambda, F_0) (Y_m(\lambda\rho) \rho^{-m}) \right] d\rho + \right. \\ & \left. + \lambda^2 \int_1^{\infty} \rho^{2m+1} \Theta(\rho, F_0) \left[\beta(\lambda, F_0) (J_m(\lambda\rho) \rho^{-m}) + \alpha(\lambda, F_0) (Y_m(\lambda\rho) \rho^{-m}) \right] d\rho \right\} = W(\lambda, F_0) + i\Psi(\lambda, F_0) = i\Psi(\lambda, F_0). \end{aligned}$$

Здесь:

$$\begin{aligned} \Psi(\lambda, F_0) = & \int_1^{\infty} \rho^{2m+1} \frac{\partial \Theta(\rho, F_0)}{\partial F_0} \left[\beta(\lambda, F_0) (J_m(\lambda\rho) \rho^{-m}) + \alpha(\lambda, F_0) (Y_m(\lambda\rho) \rho^{-m}) \right] d\rho + \\ & + \lambda^2 \int_1^{\infty} \rho^{2m+1} \Theta(\rho, F_0) \left[\beta(\lambda, F_0) (J_m(\lambda\rho) \rho^{-m}) + \alpha(\lambda, F_0) (Y_m(\lambda\rho) \rho^{-m}) \right] d\rho. \end{aligned} \quad (21)$$

Теперь искомая задача сводится к следующей задаче Коши:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial A(\lambda, F_0)}{\partial F_0} + \lambda^2 A(\lambda, F_0) = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{Bi(F_0)}{\omega(\lambda, F_0)} T_c(F_0) + i \frac{\Psi(\lambda, F_0)}{\omega(\lambda, F_0)}, F_0 > 0, \\ A(\lambda, 0) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

с решением в виде:

$$A(\lambda, F_0) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{F_0} \frac{Bi(\tau) T_c(\tau)}{\omega(\lambda, \tau)} \exp[-\lambda^2 (F_0 - \tau)] d\tau + i \int_0^{F_0} \frac{\Psi(\lambda, \tau)}{\omega(\lambda, \tau)} \exp[-\lambda^2 (F_0 - \tau)] d\tau. \quad (23)$$

При этом

$$\frac{1}{\omega(\lambda, \tau)} = \frac{\alpha(\lambda, \tau) - i\beta(\lambda, \tau)}{\alpha^2(\lambda, \tau) + \beta^2(\lambda, \tau)}.$$

Принципиальное равенство для дальнейших исследований имеет вид:

$$\bar{\Theta}(\lambda, F_0) = \text{Re}[\omega(\lambda, F_0) A(\lambda, F_0)]. \quad (24)$$

Раскроем $\Psi(\lambda, F_0)$:

$$\begin{aligned}\Psi(\lambda, F_0) &= \int_1^\infty \rho^{2m+1} \Delta \Theta(\rho, F_0) \left[\beta(\lambda, F_0)(J_m(\lambda \rho) \rho^{-m}) + \alpha(\lambda, F_0)(Y_m(\lambda \rho) \rho^{-m}) \right] d\rho + \\ &+ \lambda^2 \int_1^\infty \rho^{2m+1} \Theta(\rho, F_0) \left[\beta(\lambda, F_0)(J_m(\lambda \rho) \rho^{-m}) + \alpha(\lambda, F_0)(Y_m(\lambda \rho) \rho^{-m}) \right] d\rho = \\ &= \int_1^\infty \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^{2m+1} \frac{\partial \Theta(\rho, F_0)}{\partial \rho} \right) \left[\beta(\lambda, F_0)(J_m(\lambda \rho) \rho^{-m}) + \alpha(\lambda, F_0)(Y_m(\lambda \rho) \rho^{-m}) \right] d\rho + \\ &+ \lambda^2 \int_1^\infty \rho^{2m+1} \Theta(\rho, F_0) \left[\beta(\lambda, F_0)(J_m(\lambda \rho) \rho^{-m}) + \alpha(\lambda, F_0)(Y_m(\lambda \rho) \rho^{-m}) \right] d\rho.\end{aligned}\quad (25)$$

Интегрируя дважды по частям (первый интеграл в (25)) и учитывая соотношения

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho^{2m+1}} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho^{2m+1} \frac{\partial (J_m(\lambda \rho) \rho^{-m})}{\partial \rho} \right] &= -\lambda^2 (J_m(\lambda \rho) \rho^{-m}), \\ \frac{\partial}{\partial \rho} [J_m(\lambda \rho) \rho^{-m}] &= -\lambda [J_{m+1}(\lambda \rho) \rho^{-m}],\end{aligned}$$

справедливые также и для $[Y_m(\lambda \rho) \rho^{-m}]$, устанавливаем, что

$$\Psi(\lambda, F_0) = -\left\{ \Theta(1, F_0) [\alpha^2(\lambda, F_0) + \beta^2(\lambda, F_0)] - Bi(F_0) T_c(F_0) [\beta(\lambda, F_0) J_m(\lambda) + \alpha(\lambda, F_0) Y_m(\lambda)] \right\}. \quad (26)$$

Используем (24). Перемножая $\omega(\lambda, F_0)$ из (14) и $A(\lambda, F_0)$ из (23), выделяем действительную часть и после длительных преобразований приходим к результату:

$$\begin{aligned}\bar{\Theta}(\lambda, F_0) &= \left(-\frac{2}{\pi} \right) \left\{ \int_0^{F_0} \left[\frac{Bi(\tau) T_c(\tau) \alpha(\lambda, \tau)}{\alpha^2(\lambda, \tau) + \beta^2(\lambda, \tau)} \alpha(\lambda, F_0) + \frac{Bi(\tau) T_c(\tau) \beta(\lambda, \tau)}{\alpha^2(\lambda, \tau) + \beta^2(\lambda, \tau)} \beta(\lambda, F_0) \right] \exp[-\lambda^2 (F_0 - \tau)] d\tau \right\} - \\ &- \int_0^{F_0} \Theta(1, \tau) [\alpha(\lambda, F_0) \beta(\lambda, \tau) - \beta(\lambda, F_0) \alpha(\lambda, \tau)] \exp[-\lambda^2 (F_0 - \tau)] d\tau + \\ &+ \int_0^{F_0} \left\{ Bi(\tau) T_c(\tau) [\beta(\lambda, \tau) J_m(\lambda) + \alpha(\lambda, \tau) Y_m(\lambda)] \frac{[\beta(\lambda, \tau) \alpha(\lambda, F_0) - \alpha(\lambda, \tau) \beta(\lambda, F_0)]}{\alpha^2(\lambda, \tau) + \beta^2(\lambda, \tau)} \exp[-\lambda^2 (F_0 - \tau)] \right\} d\tau.\end{aligned}$$

По теореме обращения (11) можно записать искомую функцию $\Theta(\rho, F_0)$ – решение задачи (7):

$$\begin{aligned}\Theta(\rho, F_0) &= \int_0^\infty \bar{\Theta}(\lambda, F_0) \frac{K(\rho, \lambda, F_0)}{\alpha^2(\lambda, F_0) + \beta^2(\lambda, F_0)} \lambda d\lambda = \left(-\frac{2}{\pi} \right) \int_0^{F_0} Bi(\tau) T_c(\tau) d\tau \int_0^\infty \frac{K(\rho, \lambda, F_0)}{\alpha^2(\lambda, \tau) + \beta^2(\lambda, \tau)} \times \\ &\times \frac{\alpha(\lambda, F_0) \alpha(\lambda, \tau) + \beta(\lambda, F_0) \beta(\lambda, \tau)}{\alpha^2(\lambda, F_0) + \beta^2(\lambda, F_0)} \exp[-\lambda^2 (F_0 - \tau)] \lambda d\lambda + \int_0^{F_0} Bi(\tau) T_c(\tau) d\tau \int_0^\infty \frac{K(\rho, \lambda, F_0) [\beta(\lambda, \tau) J_m(\lambda) + \alpha(\lambda, \tau) Y_m(\lambda)]}{\alpha^2(\lambda, \tau) + \beta^2(\lambda, \tau)} \times \\ &\times \frac{\beta(\lambda, \tau) \alpha(\lambda, F_0) - \alpha(\lambda, \tau) \beta(\lambda, F_0)}{\alpha^2(\lambda, F_0) + \beta^2(\lambda, F_0)} \exp[-\lambda^2 (F_0 - \tau)] \lambda d\lambda - \\ &- \int_0^{F_0} \Theta(1, \tau) d\tau \int_0^\infty \frac{K(\rho, \lambda, F_0) [\alpha(\lambda, F_0) \beta(\lambda, \tau) - \beta(\lambda, F_0) \alpha(\lambda, \tau)]}{\alpha^2(\lambda, F_0) + \beta^2(\lambda, F_0)} \exp[-\lambda^2 (F_0 - \tau)] \lambda d\lambda.\end{aligned}\quad (27)$$

Правая часть (27) зависит от неизвестной величины $\Theta(1, F_0)$. Полагая в (27) $\rho = 1$ и используя соотношение $J_m(z)Y_{m+1}(z) - J_{m+1}(z)Y_m(z) = -2/(\pi z)$, приходим к интегральному уравнению Вольтера второго рода относительно $\Theta(1, F_0)$:

$$\Theta(1, F_0) = \Theta_1(F_0) + \frac{2}{\pi} \int_0^{F_0} \Theta_2(\tau, F_0) \Theta(1, \tau) d\tau, \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} \Theta_1(F_0) = & \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \int_0^{F_0} Bi(\tau) T_c(\tau) d\tau \int_0^\infty \frac{\alpha(\lambda, F_0)\alpha(\lambda, \tau) + \beta(\lambda, F_0)\beta(\lambda, \tau)}{\alpha^2(\lambda, \tau) + \beta^2(\lambda, \tau)} \cdot \frac{\exp[-\lambda^2(F_0 - \tau)]}{\alpha^2(\lambda, F_0) + \beta^2(\lambda, F_0)} \lambda d\lambda - \\ & - \frac{2}{\pi} \int_0^{F_0} Bi(\tau) T_c(\tau) d\tau \int_0^\infty \frac{\beta(\lambda, \tau) J_m(\lambda) + \alpha(\lambda, \tau) Y_m(\lambda)}{\alpha^2(\lambda, \tau) + \beta^2(\lambda, \tau)} \cdot \frac{\beta(\lambda, \tau)\alpha(\lambda, F_0) - \alpha(\lambda, \tau)\beta(\lambda, F_0)}{\alpha^2(\lambda, F_0) + \beta^2(\lambda, F_0)} \exp[-\lambda^2(F_0 - \tau)] \lambda d\lambda, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\Theta_2(\tau, F_0) = \int_0^\infty \frac{\alpha(\lambda, F_0)\beta(\lambda, \tau) - \beta(\lambda, F_0)\alpha(\lambda, \tau)}{\alpha^2(\lambda, F_0) + \beta^2(\lambda, F_0)} \exp[-\lambda^2(F_0 - \tau)] \lambda d\lambda. \quad (30)$$

Решение интегрального уравнения (28) можно представить в виде пикаровского процесса последовательных приближений:

$$\Theta(1, F_0) = \Psi_0(F_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi}\right)^n \Psi_n(F_0), \quad (31)$$

где

$$\Psi_0(F_0) = \Theta_1(F_0), \Psi_n(F_0) = \int_0^{F_0} \Theta_2(\tau, F_0) \Psi_{n-1}(\tau) d\tau. \quad (32)$$

Из (31), (32) находим искомую величину в виде:

$$\Theta(1, F_0) = \Theta_1(F_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi}\right)^n \int_0^{F_0} \Theta_2(\tau, F_0) d\tau \int_0^\tau \Theta_2(\tau_1, \tau) d\tau_1 \dots \int_0^{\tau_{n-2}} \Theta_2(\tau_{n-1}, \tau_{n-2}) \Theta_1(\tau_{n-1}) d\tau_{n-1}, \quad (33)$$

чем и завершается процедура нахождения точного аналитического решения обобщенной задачи (7) сложного теплообмена.

Следует отметить, что это решение (в обобщенной форме) – первое в литературе по аналитической теплофизике.

ПРИМЕР ИСПОЛЬЗОВАНИЯ РАЗВИТОГО ПОДХОДА

В качестве приложения развитого подхода при решении задачи (1) рассмотрим случай декартовых координат: $m = -1/2$, $x_0 = 0$, $\varphi(t) = T_c$. При этом необходимо учесть, что

$$\begin{aligned} J_{1/2}(z) &= \sqrt{2/\pi} \sin(z/\sqrt{z}), J_{-1/2}(z) = \sqrt{2/\pi} \cos(z/\sqrt{z}), \\ Y_{1/2}(z) &= -\sqrt{2/\pi} \cos(z/\sqrt{z}), Y_{-1/2}(z) = \sqrt{2/\pi} \sin(z/\sqrt{z}). \end{aligned}$$

В безразмерных переменных

$$z = x/l, F_0 = at/l^2, Bi(F_0) = \alpha(t)l/\lambda^*, \Theta(z, F_0) = \frac{T(x, t) - T_0}{T_c - T_0},$$

где l – выбранная единица масштаба, имеем задачу:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Theta(z, F_0)}{\partial F_0} &= \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2}, \quad z > 0, F_0 > 0, \\ \Theta(z, F_0) \Big|_{F_0=0} &= 0, \quad z \geq 0, |\Theta(z, F_0)| < \infty, \quad z \geq 0, F_0 \geq 0, \\ \frac{\partial \Theta(z, F_0)}{\partial z} \Big|_{z=0} &= Bi(F_0) [\Theta(z, F_0) - 1], \quad F_0 > 0. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Опуская длительные преобразования перехода от обобщенных координат к декартовым, получим следующее аналитическое решение задачи (34):

$$\begin{aligned} \Theta(z, F_0) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{F_0} Bi(\tau) d\tau \int_0^\infty \left[\cos \xi z + \frac{Bi(F_0)}{\xi} \sin \xi z \right] \frac{\xi^2}{\xi^2 + Bi^2(F_0)} \exp[-\xi^2(F_0 - \tau)] d\xi + \\ &+ \frac{2}{\pi} \int_0^{F_0} \Theta(0, \tau) [Bi(F_0) - Bi(\tau)] d\tau \int_0^\infty \left[\cos \xi z + \frac{Bi(F_0)}{\xi} \sin \xi z \right] \frac{\xi^2}{\xi^2 + Bi^2(F_0)} \exp[-\xi^2(F_0 - \tau)] d\xi, \end{aligned} \quad (35)$$

где

$$\Theta(0, F_0) = \Theta_1(F_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi} \right)^n \int_0^{F_0} \Theta_2(F_0, \tau) d\tau \int_0^\tau \Theta_2(\tau, \tau_1) d\tau_1 \dots \int_0^{\tau_{n-2}} \Theta_1(\tau_{n-1}) \Theta_2(\tau_{n-2}, \tau_{n-1}) d\tau_{n-1}, \quad (36)$$

$$\Theta_1(F_0) = \frac{2}{\pi} \int_0^{F_0} Bi(\tau) \Psi_0(F_0, \tau) d\tau,$$

$$\Theta_2(F_0, \tau) = [Bi(F_0) - Bi(\tau)] \Psi_0(F_0, \tau), \quad (37)$$

$$\Psi_0(F_0, \tau) = \frac{\sqrt{\pi/2}}{\sqrt{F_0 - \tau}} - \frac{\pi Bi(F_0)}{2} \exp[Bi^2(F_0)(F_0 - \tau)^2] \Phi^*[Bi(F_0)(F_0 - \tau)^2]. \quad (38)$$

Одним из доказательств справедливости найденного соотношения (35) является рассмотрение частного классического случая $Bi(F_0) = Bi = \text{const}$. Для этого случая соотношение (35) автоматически дает классическое решение:

$$\Theta(z, F_0) = \Phi^*\left(\frac{z}{2\sqrt{F_0}}\right) - \exp(Bi z - Bi^2 F_0) \Phi^*\left(\frac{z}{2\sqrt{F_0}} + Bi F_0\right),$$

где $\Phi^*(z) = 1 - \Phi(z)$, $\Phi(z)$ – функция Лапласа.

Можно показать, что при выполнении условия $|Bi(F_0)| \leq M/2$ ряд (36) сходится равномерно при всех $F_0 > 0$ в любом конечном промежутке изменения F_0 и мажорируется рядом:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} M^{n+1} d_{n+1}}{\pi^n} (\sqrt{F_0})^{n+1}, \quad d_{n+1} = \begin{cases} \frac{\pi^{-1/2} 2^{(n+1/2)}}{(n+1)!!}, & n = 2k+1, \\ \frac{2^{(n+1/2)}}{(n+1)!!}, & n = 2k, \end{cases}$$

сходимость которого при всех $F_0 > 0$ легко проверить по признаку Даламбера. В качестве численного примера возьмем $Bi(F_0) = \exp(-F_0)$ и выпишем ряд последовательных приближений для $\Theta(0, F_0)$ из (36):

$$\begin{aligned}\Theta_0(0, F_0) &= \Theta_1(F_0), \\ \Theta_1(0, F_0) &= \int_0^{F_0} \Theta_2(F_0, \tau) \Theta_1(\tau) d\tau, \\ \Theta_2(0, F_0) &= \int_0^{F_0} \Theta_2(F_0, \tau) d\tau \int_0^{\tau} \Theta_2(\tau, \tau_1) \Theta_1(\tau_1) d\tau_1.\end{aligned}$$

На рисунке приведены результаты численного счета приближений температурной функции $\Theta(z, F_0)$: $\Psi_1 = \Theta_1(z, F_0)$, $\Psi_2 = \Theta_1(z, F_0) + \Theta_2(z, F_0)$, $\Psi_3 = \Theta_1(z, F_0) + \Theta_2(z, F_0) + \Theta_3(z, F_0)$ и т.д., рассчитанных в зависимости от критерия F_0 для точек: (а) $z = 0.707$, (б) $z = 2$. Из рисунка видно, что графики для первого и второго приближения охватывают сверху и снизу – «берут в клещи» (автор), график для третьего приближения, а графики для второго и третьего приближения охватывают снизу и сверху график для четвертого приближения и т.д., что свидетельствует о достаточно быстрой сходимости процесса итерации для $\Theta(z, t)$, так что с достаточной для практики точностью можно ограничиться третьим приближением. Что касается сферических координат, то этот случай сводится к рассмотренному в декартовых координатах с помощью подстановки $W(z, F_0) = z\Theta(z, F_0)$.

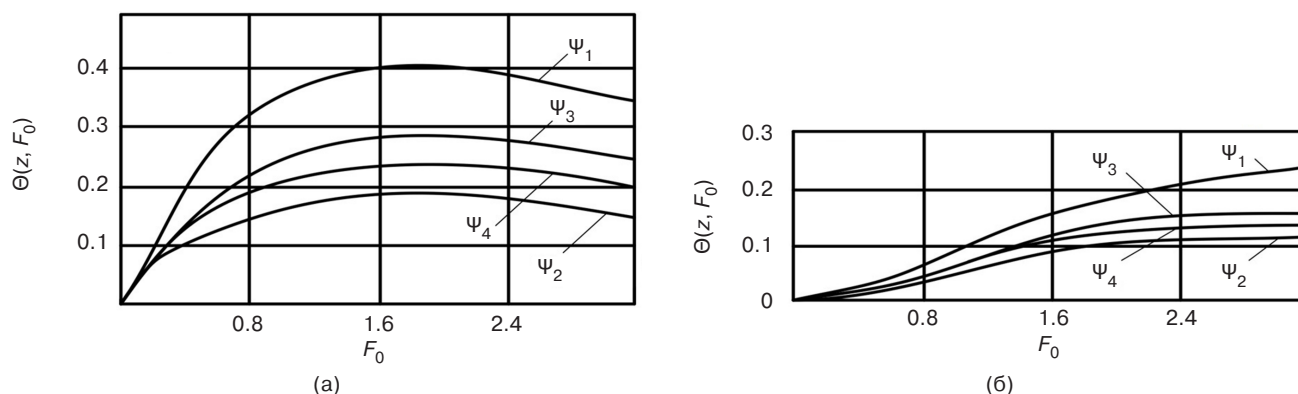


Рисунок. Приближения температурной функции $\Theta(z, F_0)$ в зависимости от F_0 в точках: (а) $z = 0.707$, (б) $z = 2$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье представлено развитие метода расщепления обобщенного интегрального преобразования Фурье применительно к нахождению точного аналитического решения температурной задачи сложного теплообмена – при произвольной зависимости от времени коэффициента теплообмена и температуры окружающей среды в обобщенных координатах. Метод распространен на декартовы, цилиндрические и сферические координаты. Полученные результаты являются новыми в аналитической теплофизике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карташов Э.М. *Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел*. М.: Высшая школа; 2001. 549 с. ISBN 5-06-004091-7
2. Аттетков А.В., Волков И.К. Формирование температурных полей в области, ограниченной изнутри цилиндрической поверхностью. *Вестник МГТУ им. Баумана. Серия Машиностроение*. 1999;1:49–56.
3. Волков И.К., Канатников А.Н. *Интегральное преобразование и операционное исчисление*. М.: Изд-во МГТУ им. Баумана; 1996. 228 с. ISBN 5-7938-1273-9
4. Лыков А.В. *Теория теплопроводности*. М.: Высшая школа; 1967. 600 с.
5. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. *Термоупругость тел при переменных коэффициентах теплообмена*. Киев: Наукова Думка; 1977. 159 с.

6. Карслоу Г.С., Егер Д. *Теплопроводность твердых тел*: пер. с англ. М.: Наука; 1964. 487 с.
7. Формалев В.Ф. *Уравнения математической физики*. М.: URSS; 2021. 648 с. ISBN 978-5-9710-8380-1
8. Новиков В.С. Аналитические методы теории переноса. *Промышленная теплотехника*. 1989;11(5):11–54.
9. Кудинов И.В., Кудинов В.А. *Аналитические решения параболических и гиперболических уравнений теплопереноса*. М.: Инфра-М; 2013. 391 с. ISBN 978-5-16-006724-7
10. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*. М.: Наука; 1967. 736 с.
11. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. *Математические модели термомеханики*. М.: Физматлит; 2002. 168 с. ISBN 5-9221-0321-0
12. Кирсанов Ю.А. *Моделирование теплофизических процессов*. СПб.: Политехника; 2022. 229 с. ISBN 978-5-7325-1192-5. <https://doi.org/10.25960/7325-1192-5>
13. Кудинов И.В., Кудинов В.А. Математическая модель локально-неравновесного теплопереноса с учетом пространственно-временной нелокальности. *Инженерно-физический журнал*. 2015;88(2):393–408.
14. Савельева Ю.И. Двойственная вариационная модель процесса теплопроводности, учитывающая пространственную нелокальность. *Вестник МГТУ им. Баумана. Естественные науки*. 2022;5:45–61. <http://doi.org/10.18698/1812-3368-2022-5-45-61>
15. Карташов Э.М. Развитие модельных представлений термической реакции вязкоупругих тел на температурное поле. *Russ. Technol. J.* 2024;12(6):80–90. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-6-80-90>
16. Кудинов В.А., Еремин А.В., Кудинов И.В. Разработка и исследование сильно неравновесной модели теплообмена в жидкости с учетом пространственно-временной нелокальности и диссипации энергии. *Теплофизика и аэромеханика*. 2017;24(6):929–935.

REFERENCES

1. Kartashov E.M. *Analytical Methods in the Theory of Thermal Conductivity of Solids*. Moscow: Vysshaya shkola; 2001. 549 p. (in Russ.). ISBN 5-06-004091-7
2. Attetkov A.V., Volkov I.K. Formation of temperature fields in the region internally restricted by cylindrical hollow. *Vestnik MGTU im. Bauman. Seriya Mashinostroenie = Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Mechanical Engineering*. 1999;1:49–56 (in Russ.).
3. Volkov I.K., Kanatnikov A.N. *Integral'noe preobrazovanie i operatsionnoe ischislenie (Integral Transformation and Operational Calculus)*. Moscow: Bauman Press; 1996. 228 p. (in Russ.). ISBN 5-7938-1273-9
4. Lykov A.V. *Teoriya teploprovodnosti (Theory of Thermal Conductivity)*. Moscow: Vysshaya shkola; 1967. 600 p. (in Russ.).
5. Podstrigach Ya.S., Kolyano Yu.M. *Termouprugost' tel pri peremennykh koefitsientakh teploobmena (Thermoelasticity of Bodies with Variable Heat Transfer Coefficients)*. Kiev: Naukova Dumka; 1977. 159 p. (in Russ.).
6. Carslow H.S., Jaeger J.C. *Teploprovodnost' tverdykh tel (Conduction of Heat in Solids)*: transl. from Engl. Moscow: Nauka; 1964. 487 p. (in Russ.).
[Carslow H.S., Jaeger J.C. *Conduction of Heat in Solids*. Oxford: Clarendon Press; 1959. 520 p.]
7. Formalev V.F. *Uravneniya matematicheskoi fiziki (Equations of Mathematical Physics)*. Moscow: URSS; 2021. 648 p. (in Russ.). ISBN 978-5-9710-8380-1
8. Novikov V.S. Analytical methods of transfer theory. *Promyshlennaya teplotekhnika = Industrial Heat Engineering*. 1989;11(5):11–54 (in Russ.).
9. Kudinov I.V., Kudinov V.A. *Analytical Solutions of Parabolic and Hyperbolic Heat and Mass Transfer Equations*. Moscow: Infra-M; 2013. 391 p. (in Russ.). ISBN 978-5-16-006724-7
10. Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N. *Lineinye i kvazilineinye uravneniya parabolicheskogo tipa (Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type)*. Moscow: Nauka; 1967. 736 p. (in Russ.).
11. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. *Matematicheskie modeli termomekhaniki (Mathematical Models of Thermomechanics)*. Moscow: Fizmatlit; 2002. 168 p. (in Russ.). ISBN 5-9221-0321-0
12. Kirsanov Yu.A. *Modelirovanie teplofizicheskikh protsessov (Modeling of Thermophysical Processes)*. St. Petersburg: Politekhnik; 2022. 230 p. (in Russ.). ISBN 978-5-7325-1192-5. <https://doi.org/10.25960/7325-1192-5>
13. Kudinov I.V., Kudinov V.A. Mathematical Simulation of the Locally Nonequilibrium Heat Transfer in a Body with Account for its Nonlocality in Space and Time. *J. Eng. Phys. Thermophy.* 2015;88(2):406–422. <https://doi.org/10.1007/s10891-015-1206-6>
[Original Russian Text: Kudinov I.V., Kudinov V.A. Mathematical Simulation of the Locally Nonequilibrium Heat Transfer in a Body with Account for its Nonlocality in Space and Time. *Inzhenerno-Fizicheskii Zhurnal*. 2015;88(2):393–408 (in Russ.).]
14. Savelyeva Yu.I. Dual variational model of a steady-state thermal conductivity process taking into account spatial non-locality. *Vestnik MGTU im. Bauman. Estestvennye nauki = Herald of the Bauman Moscow State University. Series Natural Sciences*. 2022;5:45–61 (in Russ.). <http://doi.org/10.18698/1812-3368-2022-5-45-61>
15. Kartashov E.M. Development of model representations of the thermal response of viscoelastic bodies to a temperature field. *Russ. Technol. J.* 2024;12(6):80–90 (in Russ.). <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-6-80-90>

16. Kudinov V.A., Eremin A.V., Kudinov I.V. The development and investigation of a strongly non-equilibrium model of heat transfer in fluid with allowance for the spatial and temporal non-locality and energy dissipation. *Thermophys. Aeromech.* 2017;24(6):901–907. <https://doi.org/10.1134/S0869864317060087>
[Original Russian Text: Kudinov V.A., Eremin A.V., Kudinov I.V. The development and investigation of a strongly non-equilibrium model of heat transfer in fluid with allowance for the spatial and temporal non-locality and energy dissipation. *Teplofizika i Aeromekhanika*. 2017;24(6):929–935 (in Russ.).]

Об авторе

Карташов Эдуард Михайлович, д.ф.-м.н., Заслуженный деятель науки Российской Федерации, Почетный работник высшего профессионального образования Российской Федерации, Почетный работник науки и техники Российской Федерации, Почетный профессор МИТХТ им. М.В. Ломоносова, Лауреат Золотой медали Академии наук Беларуси по теплофизике, профессор кафедры высшей и прикладной математики, Институт тонких химических технологий им. М.В. Ломоносова, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: professor.kartashov@gmail.com. Scopus Author ID 7004134344, ResearcherID Q-9572-2016, <https://orcid.org/0000-0002-7808-4246>

About the Author

Eduard M. Kartashov, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Honored Scientist of the Russian Federation, Honorary Worker of Higher Professional Education of the Russian Federation, Honorary Worker of Science and Technology of the Russian Federation, Honorary Professor of the Lomonosov Moscow State University of Fine Chemical Technology, Laureate of the Golden Medal of the Academy of Sciences of Belarus in Thermophysics, Professor, Department of Higher and Applied Mathematics, M.V. Lomonosov Institute of Fine Chemical Technologies, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: professor.kartashov@gmail.com. Scopus Author ID 7004134344, ResearcherID Q-9572-2016, <https://orcid.org/0000-0002-7808-4246>

Математическое моделирование
Mathematical modeling

УДК 004:005.584.1:502/504
<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-6-116-126>
EDN LAVZAN



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

О мониторинге и прогнозировании динамики развития структуры тропических циклонов на основе почти периодического анализа спутниковых изображений

А.А. Парамонов[@], А.В. Калач, Т.Е. Саратова

МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, 119454 Россия

[@] Автор для переписки, e-mail: paramonov_a_a99@mail.ru

• Поступила: 11.03.2025 • Доработана: 04.06.2025 • Принята к опубликованию: 06.10.2025

Резюме

Цели. Статья посвящена проблеме идентификации характеристик тропических циклонов с использованием почти периодического анализа изображений облачной динамики ураганов и прогнозирования структуры циклона на основе полученных значений почти периодов. Цель статьи заключается в применении почти периодического анализа с использованием модифицированного математического аппарата вычислений при обработке и анализе изображений структуры тропического циклона с возможностью осуществления прогнозных оценок.

Методы. Основным инструментом обработки и анализа изображений структуры тропического циклона является почти периодический анализ – анализ данных с упорядоченным аргументом по выявлению зависимостей, близких к периодическим. Использование аппарата почти периодического анализа позволяет проводить выявление критических рубежей изменения тенденций исследуемых данных вне зависимости от априорных предположений. В ходе проведения такого анализа определяется информационный параметр – почти период, соответствующий значениям, наиболее близким к периодам. Предложена модификация известного математического аппарата почти периодического анализа, позволяющая обрабатывать большие и многомерные данные.

Результаты. В ходе исследования на примере анализа кадров динамики тропического циклона Милтон, действующего с 5 по 10 октября 2024 г., выявлены характерные почти периодические значения структурных зон в момент начала формирования динамики развития циклона. На основе выявленных значений составлены прогнозны оценки развития структуры тропического циклона, точность которых составила 95%.

Выводы. Полученные результаты совместно с результатами исследований, опубликованными ранее, позволяют сделать вывод о возможности применения почти периодического анализа к выявлению характерных паттернов структур тропических циклонов и составлению качественных прогнозных оценок динамики развития чрезвычайных ситуаций, вызванных тропическими циклонами.

Ключевые слова: почти периодический анализ, обработка и анализ изображений, мониторинг тропических циклонов, прогнозирование тропических циклонов, техносферная безопасность, тайфуны

Для цитирования: Парамонов А.А., Калач А.В., Саратова Т.Е. О мониторинге и прогнозировании динамики развития структуры тропических циклонов на основе почти периодического анализа спутниковых изображений. *Russian Technological Journal*. 2025;13(6):116–126. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-6-116-126>, <https://www.elibrary.ru/LAVZAN>

Прозрачность финансовой деятельности: Авторы не имеют финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

RESEARCH ARTICLE

On monitoring and forecasting the dynamics of the development of the structure of tropical cyclones based on almost periodic analysis of satellite images

Alexander A. Paramonov[@], Andrew V. Kalach, Tatiana E. Saratova

MIREA – Russian Technological University, Moscow, 119454 Russia

[@] Corresponding author, e-mail: paramonov_a_a99@mail.ru

• Submitted: 11.03.2025 • Revised: 04.06.2025 • Accepted: 06.10.2025

Abstract

Objectives. The article sets out to identify the characteristics of tropical cyclones using almost periodic analysis of images of cloud dynamics of hurricanes in order to forecast the cyclone structure. Almost periodic analysis is applied in the processing and analysis of tropical cyclone structure images based on the obtained almost period values using a modified mathematical computational apparatus.

Methods. The main tool for processing and analyzing images of the tropical cyclone structure is almost periodic analysis, i.e., analysis of data with an ordered argument to identify dependencies that are close to periodic. By this means critical boundaries of changes in the trends of the studied data can be identified regardless of *a priori* assumptions. In the course of analysis the almost period information parameter, corresponding to the values closest to the periods, is determined. A modification of the known mathematical apparatus of almost periodic analysis is proposed for processing large and multidimensional datasets.

Results. In the course of the study, the characteristic almost periodic values of the structural zones at the moment of the beginning of the formation of the dynamics of the cyclone development were revealed on the example of the analysis of the frames of the dynamics of tropical cyclone Milton, operating from October 5, 2024 to October 10, 2024. Based on the identified values, forecast estimates of the tropical cyclone structure development were made to an accuracy of 95%.

Conclusions. Together with the results of studies published earlier, the results of this study support the conclusion that it is possible to apply almost periodic analysis to the identification of characteristic patterns of tropical cyclone structures and carry out qualitative forecast estimates of the dynamics of emergency situations caused by tropical cyclones.

Keywords: almost periodic analysis, image processing and analysis, tropical cyclone monitoring, tropical cyclone forecasting, technosphere safety, typhoons

For citation: Paramonov A.A., Kalach A.V., Saratova T.E. On monitoring and forecasting the dynamics of the development of the structure of tropical cyclones based on almost periodic analysis of satellite images. *Russian Technological Journal*. 2025;13(6):116–126. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-6-116-126>, <https://www.elibrary.ru/LAVZAN>

Financial disclosure: The authors have no financial or proprietary interest in any material or method mentioned.

The authors declare no conflicts of interest.

ВВЕДЕНИЕ

Прогнозирование погодных явлений имеет важное значение для обеспечения безопасности и устойчивого развития общества. Изменения климатических условий сопровождаются возникающими экстремальными погодными явлениями. Одним из опасных природных явлений являются тропические циклоны, представляющие собой мощные атмосферные вихри, возникающие в тропических и субтропических широтах над теплыми водами океанов. Согласно статистике МЧС России, ежегодно происходит более ста природных опасных явлений, общий материальный ущерб от которых превышает 50 млрд руб.¹.

Нарастающий ритм жизни и колоссальные объемы информационного обмена требуют принятия оперативных, взвешенных, верных и обоснованных решений, базирующихся на соответствующих прогнозных оценках. В связи с этим, актуальным является повышение оперативности принятия эффективных решений в условиях чрезвычайных ситуаций путем получения улучшенных прогнозов динамики развития опасных природных явлений, что, в свою очередь, способствует заблаговременному принятию мер по обеспечению безопасности людей, а также подготовке мер противодействия чрезвычайным ситуациям.

Традиционные численные модели погоды основаны на решении систем дифференциальных уравнений, описывающих физику атмосферы. Однако эти модели имеют ограничения в точности и требуют значительных вычислительных ресурсов. Применение технологий искусственного интеллекта, машинного обучения позволит существенно повысить оперативность и точность прогнозирования возникновения опасных погодных явлений и динамики развития чрезвычайных ситуаций.

Актуальным представляется развитие подхода к прогнозированию динамики развития тропических циклонов на основе почти периодического анализа изображений структуры циклонов. Изображения являются одной из категорий данных с упорядоченным аргументом. Данные с упорядоченным аргументом – это набор измерений некоторой экспериментальной величины, которая зависит от аргумента, представляющего собой упорядоченный вектор значений.

В качестве примеров аргумента может служить время или пространство. В настоящее время анализ и обработка таких данных проводится

с использованием специальных языков программирования и встроенных в них библиотек [1, 2]. Наиболее распространенным подходом к анализу является применение методов машинного обучения [3–9]. Исследование и выявление скрытых закономерностей в данных с упорядоченным аргументом активно используются в сферах медицины, экономики и иных отраслях [10–16].

Необходимо отметить, что использование пространственно-временных данных дистанционного зондирования позволяет отслеживать динамику природных явлений, особенно таких как тропические циклоны [17–19].

Данное исследование посвящено модифицированному анализу и прогнозированию динамики развития тропических циклонов на основе спутниковых изображений методом почти периодического анализа данных. Описанный модифицированный метод почти периодического анализа направлен на совершенствование существующих инструментов анализа данных с упорядоченным аргументом.

МЕТОДОЛОГИЯ ИССЛЕДОВАНИЯ

Почти периодический анализ – анализ данных с упорядоченным аргументом по выявлению зависимостей, близких к периодическим. Использование аппарата почти периодического анализа позволяет проводить выявление критических рубежей изменения тенденций исследуемых данных вне зависимости от априорных предположений. В ходе проведения такого анализа определяется информационный параметр – почти период – значения, наиболее близкие к периодам. В общем виде почти периодической функцией $f(t)$ называется функция, удовлетворяющая условию: $|f(t + \tau) - f(t)| < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ – смещение, τ – почти период этой функции [20].

В настоящее время большая часть исследований с применением почти периодического анализа дискретных данных с упорядоченным аргументом основывается на формулах, вычисление значений которых определяется последовательными итерационными алгоритмами.

Алгоритм почти периодического анализа дискретного набора данных концептуально состоит из двух этапов:

- 1) исключение тренда из вектора обрабатываемых данных;
- 2) обработка полученных колебаний обобщенной сдвиговой функцией для выявления почти периодов.

На первом этапе из обрабатываемых данных необходимо исключить трендовую составляющую для того, чтобы дальше качественно анализировать почти периодические составляющие колебаний ряда.

¹ Министерство Российской Федерации по делам гражданской обороны, чрезвычайным ситуациям и ликвидации последствий стихийных бедствий. <https://mchs.gov.ru/> (in Russ.). Дата обращения 10.08.2025. / Accessed August 10, 2025.

Поскольку на начальном этапе обработки данных нет информации об уравнении тренда, то для его изъятия из данных применяется подход, независимый от каких-либо априорных предположений о поведении тренда в данных. Такой подход исключения тренда из данных основывается на преобразовании, основой которого является теория пропорций.

Исключение тренда на основе теории пропорций основывается на предположении, что характеристики тренда кодируются через опорные точки. В качестве примера реализации рассмотрим простейшую зависимость значений дискретного набора данных из трех точек $y_t, y_{t-\Delta t}, y_{t+\Delta t}$, которым кодируется весь исследуемый ряд [21]. Если за основу взять отношение, например, геометрической прогрессии, то преобразования для исключения тренда и получения колебаний относительно упорядоченного аргумента t для данных y будут выглядеть следующим образом:

$$\ln\left(\frac{y_{t-\Delta t}y_{t+\Delta t}}{y_t^2}\right) \sim t, \quad (1)$$

где y_t – текущее значение ряда y с упорядоченным аргументом t ; $y_{t-\Delta t}$ – предыдущее значение исходного ряда на расстоянии Δt по аргументу от текущего значения y_t ; $y_{t+\Delta t}$ – следующее значение исходного ряда на расстоянии Δt по аргументу от текущего значения y_t .

В результате подобных преобразований получаем ряд колебаний, соответствующий параметру сдвига Δt . Для комплексного анализа всех видов колебаний исходных данных необходимо получить колебания для каждого параметра сдвига по аргументу Δt . Диапазон значений Δt находится в пределах от 1 до $N/2$, где N – длина исходного ряда данных.

Вторым шагом почти периодического анализа дискретного ряда данных с упорядоченным аргументом является обработка полученных наборов векторов колебаний с целью исключения тренда сдвиговой функцией вида:

$$a(\tau) = \frac{1}{n-\tau} \sum_{t=1}^{n-\tau} |\hat{y}_{\Delta t}(t+\tau) - \hat{y}_{\Delta t}(t)|, \quad (2)$$

где n – общее число отсчетов колебаний $\hat{y}_{\Delta t}(t)$, полученных при сдвиге по аргументу Δt .

Каждый вектор колебаний обрабатывается функцией (2). В результате вычислений получаем вектор значений сдвиговой функции, соответствующей ряду колебаний исходных данных при сдвиге по аргументу Δt .

Для получения значений почти периодов τ результат сдвиговой функции исследуется на наличие ярко выраженных минимумов. Чем ближе минимум к нулю, тем более значимым и близким к чистому периоду оказывается выявленное значение почти периода.

Результатом обработки сдвиговой функцией (2) всех наборов векторов колебаний, полученных в результате исключения тренда преобразованием типа (1), будет являться матрица векторов сдвиговых функций. Для последовательного вычисления и учета зависимости сдвиговой функции от значения Δt определяется обобщенная сдвиговая функция. Пример ее реализации с учетом геометрического исключения тренда представлен следующей формулой²:

$$a(\tau, \Delta t) = \frac{1}{n-\tau-2\Delta t} \times \sum_{t=1}^{n-\tau-2\Delta t} \left| \ln\left(\frac{y_{t-\Delta t+\tau}y_{t+\Delta t-\tau}}{y_{t+\tau}^2}\right) - \ln\left(\frac{y_{t-\Delta t}y_{t+\Delta t}}{y_t^2}\right) \right|. \quad (3)$$

Применимость данных формул в почти периодическом анализе опубликована исследователями [21]. Однако такой подход последовательного итерационного вычисления значений дискретного ряда с упорядоченным аргументом плохо реализуется для больших объемов данных, в т.ч. для обработки изображений [22].

Для обработки и анализа больших дискретных рядов и матриц с упорядоченным аргументом авторами была реализована модификация математического аппарата почти периодического анализа.

Первой предложенной модификацией стал алгоритм исключения тренда из данных. Операции по исключению тренда стало возможным проводить, вычисляя сразу целый вектор колебаний для фиксированного значения сдвига Δt :

$$\vec{P}_{\Delta t} = \ln\left(\frac{\vec{y}_{t-\Delta t} \cdot \vec{y}_{t+\Delta t}}{\vec{y}_t^2}\right), \quad (4)$$

где $\vec{P}_{\Delta t}$ – вектор значений колебаний, полученный по результатам исключения тренда на основе теории пропорций, размерностью $N - 2\Delta t$; \vec{y}_t^2 – вектор

² Кузьмин В.И., Гадзаов А.Ф. *Методы построения моделей по эмпирическим данным: учебное пособие*. М.: Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет), 2012. 94 с. [Kuzmin V.I., Gadzaov A.F. *Methods for building models based on empirical data: tutorial*. Moscow: Moscow State Institute of Radio Engineering, Electronics and Automation (Technical University), 2012. 94 p. (in Russ.).]

квадрата значений y_i ; $\vec{y}_{t-\Delta t}$ – вектор значений $y_{t-\Delta t}$; $\vec{y}_{t+\Delta t}$ – вектор значений $y_{t+\Delta t}$.

Тогда расчет сдвиговой функции (2) для фиксированного значения Δt также можно представить в векторном виде (5).

$$\vec{a}(\tau)_{\Delta t} = \frac{1}{N - \tau - 2\Delta t} |\vec{P}_{\Delta t + \tau} - \vec{P}_{\Delta t}|, \quad (5)$$

где $\vec{a}(\tau)_{\Delta t}$ – вектор сдвиговой функции для вектора колебаний со сдвигом по аргументу Δt ; $\vec{P}_{\Delta t + \tau}$ – вектор исключенного тренда при значении Δt , смещенный на τ ; $\vec{P}_{\Delta t}$ – вектор исключенного тренда при значении Δt .

В (5) операция модуля является перегруженной, т.е. результат модуля разности векторов $\vec{P}_{\Delta t + \tau}$ и $\vec{P}_{\Delta t}$ представляет собой вектор абсолютных величин.

В результате таких преобразований, получаем, что набор векторов $\vec{a}(\tau)_{\Delta t}$ при расчете всех значений сдвига по аргументу Δt есть результат обобщенной сдвиговой функции (3). Представленные алгоритмы были реализованы в виде программы для определения почти периодов в эмпирических данных с упорядоченным аргументом, способной работать с крупными объемами данных с использованием параллельных вычислений [23].

Для задачи мониторинга и прогнозирования динамики развития чрезвычайных ситуаций, вызванных тропическими циклонами, на основе почти периодического анализа спутниковых изображений разработаны методики, позволяющие анализировать кадры тропических циклонов и на основе результатов анализа формировать прогнозные оценки динамики развития структуры тропических циклонов.

Так, например, методика обработки и анализа спутниковых кадров тропических циклонов для выявления почти периодических характеристик включает следующие этапы. На первом этапе происходит кадрирование исследуемого видеоряда в случае, если исходные данные представлены в данном формате. Следующим шагом является обработка и перевод кадра в черно-белый формат. Полученные изображения представляют собой матрицу пикселей, которые принимают значения от 0 до 255. Размер преобразованного изображения составляет 500×500 пикселей.

На следующем этапе происходит определение центра тропического циклона на изображении и дальнейшее преобразование кадра в полярные координаты. Данное преобразование выбрано в качестве первого приближения развертки центрической структуры тропических циклонов для возможности применения почти периодического анализа к полученным

значениям модулей радиус-векторов при фиксированных значениях полярных углов для выявления критических радиусов зон структуры циклонов.

Последующая поочередная обработка векторов значений при фиксированных полярных углах дает набор матриц результатов обобщенных сдвиговых функций для каждого среза изображения. Анализируя полученные минимумы каждой обобщенной сдвиговой функции, сопоставляются найденные значения почти периодов каждого среза изображения в полярных координатах, и совпадающие значения принимаются за характерные почти периоды всей структуры изучаемого тропического циклона.

Методика прогнозирования динамики развития тропических циклонов на основе почти периодического анализа спутниковых изображений позволяет осуществлять прогнозную оценку динамики развития структуры тропических циклонов на основе выявленных почти периодов и классифицированных зон опасностей на ранних этапах развития тропических циклонов.

На основе выявленных в результате анализа почти периодов исходное изображение размечается окружностями с радиусами, кратными выявленным почти периодам. Центральная зона кадра тропического циклона, занимающая, как правило, области первой-второй зональных окружностей, классифицируется особо опасной зоной. Зоны следующих двух-трех окружностей, зависящие от значения почти периода, на основе которого они строятся, занимают большую часть кадра структуры тропического циклона и классифицируются как опасные зоны. Оставшиеся зоны на кадре структуры тропического циклона являются зонами повышенного наблюдения.

Проиллюстрируем описанные методики обработки и анализа результатами оценок прогноза развития структуры тропического циклона на примере урагана Милтон, который проходил с 5 по 10 октября 2024 г. В качестве данных для анализа рассматривались фото- и видеоснимки тропического циклона, взятые из открытого интернет-источника – официального сайта Национального управления океанических и атмосферных исследований США³.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

На рис. 1 представлен в декартовых координатах преобразованный в черно-белый формат кадр тропического циклона в инфракрасном диапазоне с размеченным центром циклона, относительно которого произведена развертка структуры циклона в полярные координаты (рис. 2).

³ National Oceanic and Atmospheric Administration. U.S. Department of Commerce. <https://www.noaa.gov/>. Дата обращения 08.02.2025. / Accessed February 08, 2025.

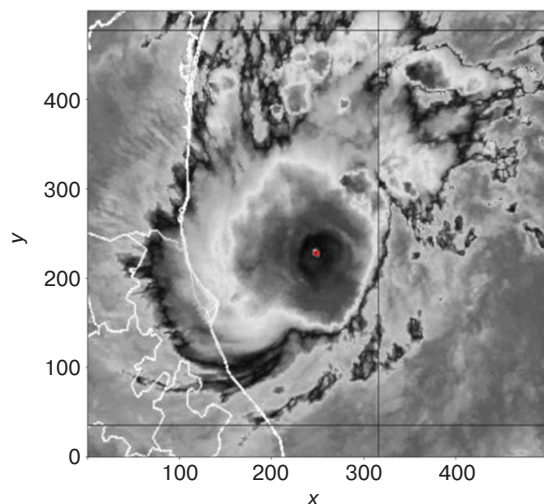


Рис. 1. Кадр начала развития тропического циклона Милтон на момент 5 октября 2024 г. в 15:00 по времени UTC⁴ с размеченным центром циклона размерностью 500 × 500 пикселей

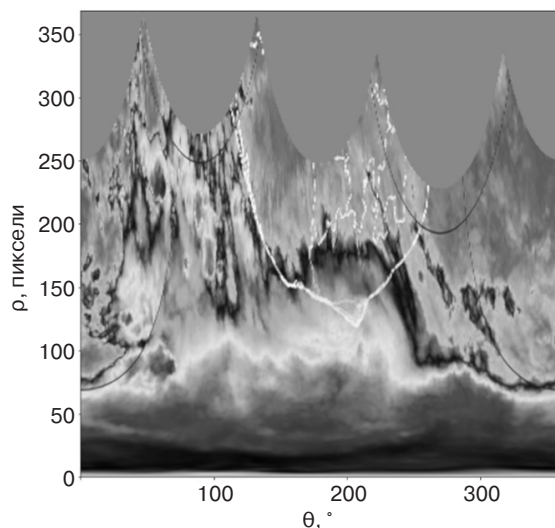


Рис. 2. Преобразованный в полярные координаты кадр начала развития тропического циклона Милтон размерностью 360 × 360 пикселей, где ρ – значения модулей радиус-векторов, θ – значения полярных углов

Вертикальные срезы полученного изображения (рис. 2) по полярным углам обрабатывались функциями (4) и (5), в результате получен набор значений обобщенных сдвиговых функций для модулей радиус-векторов. На рис. 3 представлен пример среза обобщенной сдвиговой функции с выявленными значениями, похожими на почти периоды, для преобразованного кадра циклона по углу 50°.

Полученные результаты почти периодических значений радиус-векторов (рис. 3) отображаются на исходных данных. Результаты представлены

кадрами видеоряда в виде окружностей с радиусами, кратными выявленному почти периоду. Центры кратных окружностей располагаются в выявленном центре структуры тропического циклона (рис. 1), в качестве опорного радиуса первой окружности от центра выступают выявленные почти периодические значения.

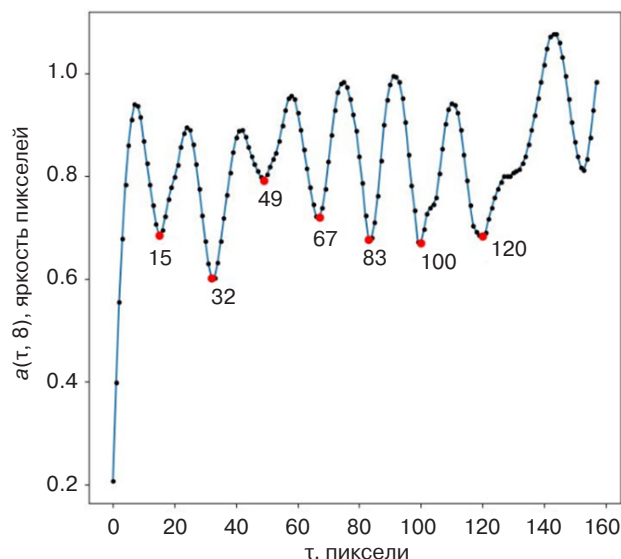


Рис. 3. Пример обобщенной сдвиговой функции при $\Delta t = 8$ для вектора значений при фиксированном угле 50°

Так, на рис. 4 представлен пример определения центральных зон, кратных выявленному почти периоду в 83 пикселя. Применение данной разметки даст возможность определить характерные почти периодические составляющие структуры исследуемого тропического циклона, что позволит применить методику прогнозирования динамики развития тропических циклонов на основе почти периодического анализа спутниковых изображений.

Необходимо обратить внимание на штриховку выделенных областей на рис. 4. Наклонной штриховкой обозначены особо опасные зоны воздействия тропического циклона, штриховкой точками обозначены опасные зоны воздействия тропического циклона, и штриховка сеткой обозначает зоны повышенного наблюдения.

В результате проведенных исследований [24–26] установлено, что получаемые почти периодические значения структуры тропических циклонов на изображениях ранних этапов динамики их развития проявлены на более поздних этапах динамики развития урагана с погрешностью не более 12%, что является допустимым в задачах прогнозирования динамических систем технического анализа [27].

⁴ Coordinated universal time – всемирное координированное время.

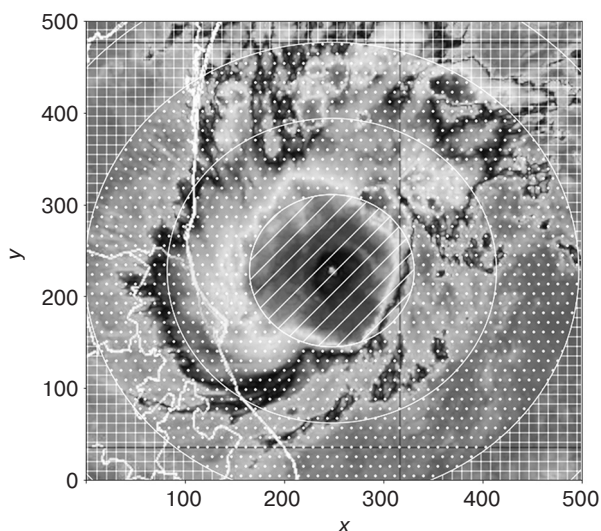


Рис. 4. Кадр начала развития тропического циклона Милтон на момент 5 октября 2024 г. в 15:00 по времени UTC с размеченными зонами опасности

В качестве проверки прогнозных оценок на основе выявленного почти периода в 83 пикселя был взят кадр тропического циклона Милтон в момент его достижения пикового состояния динамики на момент 8 октября 2024 г. в 21:35, и размечены зоны, кратные почти периоду 83 пикселя (рис. 5). Важно отметить, что полученные результаты разметки описывают структуру тропического циклона с достаточным уровнем точности.

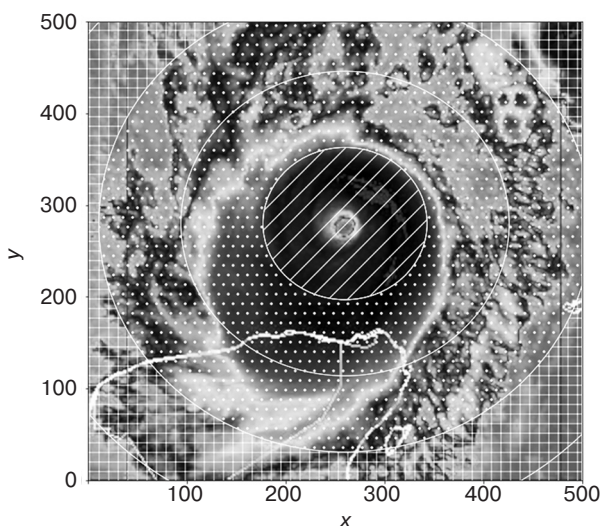


Рис. 5. Кадр пиковой стадии развития тропического циклона Милтон на момент 8 октября 2024 г. в 21:35 по времени UTC с размеченными зонами опасности

Для получения численных оценок применим методику обработки и анализа спутниковых кадров тропических циклонов для выявления почти периодических характеристик для данных (рис. 5).

Результаты срезов обобщенной сдвиговой функции выдают близкие почти периоды к полученным значениям на раннем этапе (рис. 6).

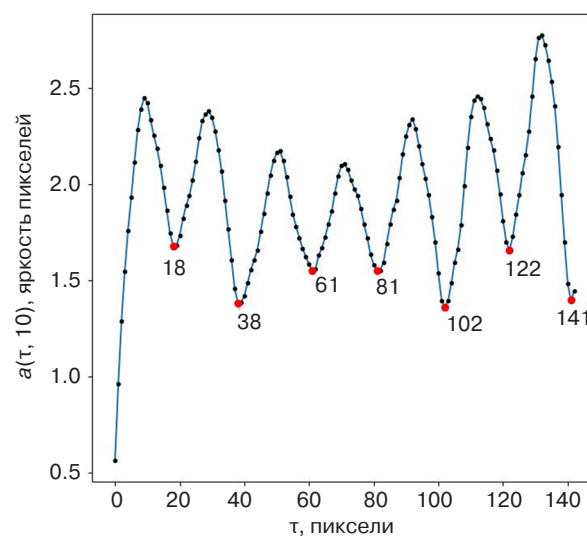


Рис. 6. Обобщенная сдвиговая функция при $\Delta t = 10$ для вектора значений при фиксированном угле 45° для изображения на рис. 5

Точность прогнозных значений с полученными почти периодами возможно оценить по формуле:

$$\sigma = \frac{|\tau_{\text{прогноз}} - \tau_{\text{факт}}|}{\tau_{\text{факт}}}, \quad (6)$$

где $\tau_{\text{прогноз}}$ – значение прогнозного почти периода, $\tau_{\text{факт}}$ – значение рассчитанного фактического почти периода.

Таким образом, прогнозные оценки с выявленными фактическими значениями почти периодов для структуры тропического циклона на рис. 6 имеют погрешность, не превышающую 5%, что подтверждает полученные ранее результаты по оценкам прогнозирования динамики структуры тропических циклонов на основе почти периодического анализа. Полученные результаты погрешностей получаемых прогнозных значений сопоставимы со сложными моделями, учитывающими связи физических величин циклонов [28].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлен модифицированный метод почти периодического анализа данных с упорядоченным аргументом, позволяющий анализировать как одномерные данные больших размерностей, так и массивы данных, в качестве примера которых были представлены кадры тропического циклона.

Применение методики обработки и анализа спутниковых кадров тропических циклонов для выявления почти периодических характеристик на примере циклона Милтон позволило установить на начальном этапе формирования характерные почти периоды структуры тропического циклона. В отличие от имеющихся подходов, применяемых при построении прогнозов, где используются физические параметры тропических циклонов, предлагаемый подход предоставляет одновременную возможность мониторинга и прогнозирования динамики развития структуры тропических циклонов на основе спутниковых снимков с использованием выявления независимого от физических величин параметра – почти периода. На примере одного из характерных почти периодов реализована разметка опасных зон структуры тропического циклона на основе окружностей с радиусами, кратными выявленному почти периоду в 83 пикселя.

Разработанная методика на основе модифицированного метода почти периодического анализа апробирована на примере прогнозирования динамики

развития тропических циклонов. Точность полученных прогнозных оценок в ходе проведенного исследования составила около 95%.

Разработанный подход позволил выявить характерные структурные изменения на снимках тропических циклонов и с достаточной точностью спрогнозировать динамику тропического циклона на примере урагана Милтон. Полученные результаты имеют практическое значение для оценки рисков и разработки стратегий управления чрезвычайными ситуациями, вызванных тропическими циклонами.

Вклад авторов

А.А. Парамонов – обработка исходных данных, расчет параметров, анализ результатов.

А.В. Калач – постановка задачи, анализ результатов.

Т.Е. Саратова – разработка этапов исследования, анализ результатов.

Authors' contributions

A.A. Paramonov – processing the initial data, calculating parameters, and analysis of results.

A.V. Kalach – problem formulation, analysis of results.

T.E. Saratova – designing the research stages, analysis of results.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Donatelli R.E., Park J.A., Matthews S.M., Lee S.D. Time series analysis. *Am. J. Orthod. Dentofacial Orthop.* 2022;161(4): 605–608. <https://doi.org/10.1016/j.ajodo.2021.07.013>
2. Seibert J., Gross Y., Schrott C. A systematic review of packages for time series analysis. *Eng. Proc.* 2021;5(1):22. <https://doi.org/10.3390/engproc2021005022>
3. Choi K., Yi J., Park K., Yoon S. Deep learning for anomaly detection in time series data: A review, analysis, and guidelines. *IEEE Access.* 2021;9:120043–120065. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2021.3107975>
4. Kumar R., Kumar P., Kumar Y. Multi-step time series analysis and forecasting strategy using ARIMA and evolutionary algorithms. *Int. J. Inf. Technol.* 2022;14(1):359–373. <https://doi.org/10.1007/s41870-021-00741-8>
5. Dubey A.K., Kumar A., Garcia-Diaz V., Sharma A.K., Kanhaiya K. Study and analysis SARIMA and LSTM in forecasting time series data. *Sustainable Energy Technologies and Assessments.* 2021;47:101474. <https://doi.org/10.1016/j.seta.2021.101474>
6. Пашшоев Б., Петрусевич Д.А. Анализ нейросетевых моделей для прогнозирования временных рядов. *Russ. Technol. J.* 2024;12(4):106–116. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-4-106-116>
7. Мохнаткина У.С., Парфенов Д.В., Петрусевич Д.А. Анализ подходов к определению тренда в структуре временных рядов. *Russ. Technol. J.* 2024;12(3):93–103. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-3-93-103>
8. Перова Ю.П., Леско С.А., Иванов А.А. Анализ и прогнозирование динамики настроек пользователей интернет-ресурсов на основе уравнения Фоккера – Планка. *Russ. Technol. J.* 2024;12(3):78–92. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-3-78-92>
9. Грамович Ю.В., Мусатов Д.Ю., Петрусевич Д.А. Применение бэггинга в прогнозировании временных рядов. *Russ. Technol. J.* 2024;12(1):101–110. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-1-101-110>
10. Kracalik I., Mowla S., Katz L., Cumming M., Sapiano M.R., Basavaraju S.V. Impact of the early coronavirus disease 2019 pandemic on blood utilization in the United States: A time series analysis of data submitted to the National Healthcare Safety Network Hemovigilance Module. *Transfusion.* 2021;61(Suppl. 2):S36–S43. <https://doi.org/10.1111/trf.16451>
11. Kumar R., Jain A., Tripathi A.K., Tyagi S. COVID-19 outbreak: An epidemic analysis using time series prediction model. In: *11th International Conference on Cloud Computing, Data Science & Engineering (Confluence)*. 2021. IEEE. P. 1090–1094. <https://doi.org/10.1109/Confluence51648.2021.9377075>
12. Balli S. Data analysis of COVID-19 pandemic and short-term cumulative case forecasting using machine learning time series methods. *Chaos Solitons Fractals.* 2021;142:110512. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.110512>
13. Chen X., Wang X., Zhang K., Fung K.M., Thai T.C., Moore K., Mannel R.S., Liu H., Zheng B., Qiu Y. Recent advances and clinical applications of deep learning in medical image analysis. *Med. Image Anal.* 2022;79:102444. <https://doi.org/10.1016/j.media.2022.102444>

14. Suganyadevi S., Sithalakshmi V., Balasami K. A review on deep learning in medical image analysis. *Int. J. Multimed. Info. Retr.* 2022;11(1):19–38. <https://doi.org/10.1007/s13735-021-00218-1>
15. Van der Velden B.H., Kuijff H.J., Gilhuis K.G., Virgeever M.A. Explainable artificial intelligence (XAI) in deep learning-based medical image analysis. *Med. Image Anal.* 2022;79:102470. <https://doi.org/10.1016/j.media.2022.102470>
16. Meyer-Hein L., Reinke A., Godau P., et al. Metrics reloaded: Pitfalls and recommendations for image analysis validation. *arXiv*. 2022 Jul 7; arXiv:2206.01653. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2206.01653>
17. Fu Y., Zhu Z., Liu L., Zhan W., He T., Shen H., Zhao J., Liu Y., Zhang H., Liu Z., Xue Y. Remote sensing time series analysis: A review of data and applications. *J. Remote Sens.* 2024;4:0285. <https://doi.org/10.34133/remotesensing.0285>
18. Richards J.A. *Remote Sensing Digital Image Analysis*. Berlin/Heidelberg, Germany: Springer; 2022. 567 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-82327-6>
19. Крынецкий Б.А. Анализ моделей периодических структур пространственно-временных процессов. В сб.: *Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: Труды Международной научной конференции*. Воронеж; 2024. С. 497–501. <https://elibrary.ru/vbsjnl>
20. Кузьмин В.И., Гадзаов А.Ф. Математические методы анализа периодических компонент нелинейных процессов и прогнозирование на их основе динамики ограниченного роста. *Вестник МГТУ МИРЭА*. 2015;4-2(9):94–104. <https://elibrary.ru/vhiyoz>
21. Кузьмин В.И., Самохин А.Б. Почти периодические функции с трендом. *Вестник МГТУ МИРЭА*. 2015;4-2(9):105–110. <https://elibrary.ru/vhiypj>
22. Парамонов А.А., Крынецкий Б.А. Асимптотический анализ алгоритма поиска почти-периодов в данных с упорядоченным аргументом. *Защита информации. Инсайт*. 2023;4(112):53–57.
23. Калач А.В., Парамонов А.А., Толстова И.С., Данилова В.А. Программа почти периодической обработки данных с возможностью выбора параллельных вычислений: Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2024688438 РФ. Заявка № 2024686766; Заявл. 08.11.2024; опубл. 27.11.2024. Бюл. № 12.
24. Парамонов А.А. Выявление почти-периодических характеристик спутниковых изображений тайфунов в аспекте решения проблем техносферной безопасности. *Техносферная безопасность*. 2024;44(3):71–76.
25. Парамонов А.А., Калач А.В. Моделирование чрезвычайных ситуаций с использованием почти-периодического анализа изображений структуры тайфунов. *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика. Механика. Физика*. 2024;16(4):67–74. <https://doi.org/10.14529/mmph240408>
26. Калач А.В., Парамонов А.А. О возможностях применения метода почти-периодического анализа для обработки изображений. *Моделирование систем и процессов*. 2024;17(3):44–52. <https://doi.org/10.12737/2219-0767-2024-42-50>
27. Фридзон М.Б., Евтушенко О.А. О требованиях к точности метеорологической информации. *Научный вестник Московского государственного технического университета гражданской авиации (Научный Вестник МГТУ ГА)*. 2014;210:142–144. <https://elibrary.ru/tbubqh>
28. Wang X., Chen K., Liu L., Han T., Li B., Bai L. Global tropical cyclone intensity forecasting with multi-modal multi-scale causal autoregressive model. In: *ICASSP 2025-2025 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*. IEEE; 2025. P. 1–5. <https://doi.org/10.1109/ICASSP49660.2025.10888556>

REFERENCES

1. Donatelli R.E., Park J.A., Matthews S.M., Lee S.D. Time series analysis. *Am. J. Orthod. Dentofacial Orthop.* 2022;161(4):605–608. <https://doi.org/10.1016/j.ajodo.2021.07.013>
2. Seibert J., Gross Y., Schrott C. A systematic review of packages for time series analysis. *Eng. Proc.* 2021;5(1):22. <https://doi.org/10.3390/engproc2021005022>
3. Choi K., Yi J., Park K., Yoon S. Deep learning for anomaly detection in time series data: A review, analysis, and guidelines. *IEEE Access*. 2021;9:120043–120065. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2021.3107975>
4. Kumar R., Kumar P., Kumar Y. Multi-step time series analysis and forecasting strategy using ARIMA and evolutionary algorithms. *Int. J. Inf. Technol.* 2022;14(1):359–373. <https://doi.org/10.1007/s41870-021-00741-8>
5. Dubey A.K., Kumar A., Garcia-Diaz V., Sharma A.K., Kanhaiya K. Study and analysis SARIMA and LSTM in forecasting time series data. *Sustainable Energy Technologies and Assessments*. 2021;47:101474. <https://doi.org/10.1016/j.seta.2021.101474>
6. Pashshoev B., Petrusevich D.A. Neural network analysis in time series forecasting. *Russ. Technol. J.* 2024;12(4):106–116. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-4-106-116>
7. Mokhnatkina U.S., Parfenov D.V., Petrusevich D.A. Analysis of approaches to identification of trend in the structure of the time series. *Russ. Technol. J.* 2024;12(3):93–103. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-3-93-103>
8. Perova J.P., Lesko S.A., Ivanov A.A. Analyzing and forecasting the dynamics of Internet resource user sentiments based on the Fokker–Planck equation. *Russ. Technol. J.* 2024;12(3):78–92. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-3-78-92>
9. Gramovich I.V., Musatov D.Yu., Petrusevich D.A. Implementation of bagging in time series forecasting. *Russ. Technol. J.* 2024;12(1):101–110. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-1-101-110>
10. Kracalik I., Mowla S., Katz L., Cumming M., Sapiano M.R., Basavaraju S.V. Impact of the early coronavirus disease 2019 pandemic on blood utilization in the United States: A time series analysis of data submitted to the National Healthcare Safety Network Hemovigilance Module. *Transfusion*. 2021;61(Suppl. 2):S36–S43. <https://doi.org/10.1111/trf.16451>

11. Kumar R., Jain A., Tripathi A.K., Tyagi S. COVID-19 outbreak: An epidemic analysis using time series prediction model. In: *11th International Conference on Cloud Computing, Data Science & Engineering (Confluence)*. 2021. IEEE. P. 1090–1094. <https://doi.org/10.1109/Confluence51648.2021.9377075>
12. Balli S. Data analysis of COVID-19 pandemic and short-term cumulative case forecasting using machine learning time series methods. *Chaos Solitons Fractals*. 2021;142:110512. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.110512>
13. Chen X., Wang X., Zhang K., Fung K.M., Thai T.C., Moore K., Mannel R.S., Liu H., Zheng B., Qiu Y. Recent advances and clinical applications of deep learning in medical image analysis. *Med. Image Anal.* 2022;79:102444. <https://doi.org/10.1016/j.media.2022.102444>
14. Suganyadevi S., Sithalakshmi V., Balasami K. A review on deep learning in medical image analysis. *Int. J. Multimed. Info. Retr.* 2022;11(1):19–38. <https://doi.org/10.1007/s13735-021-00218-1>
15. Van der Velden B.H., Kuijff H.J., Gilhuis K.G., Virgeever M.A. Explainable artificial intelligence (XAI) in deep learning-based medical image analysis. *Med. Image Anal.* 2022;79:102470. <https://doi.org/10.1016/j.media.2022.102470>
16. Meyer-Hein L., Reinke A., Godau P., et al. Metrics reloaded: Pitfalls and recommendations for image analysis validation. *arXiv*. 2022 Jul 7; arXiv:2206.01653. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2206.01653>
17. Fu Y., Zhu Z., Liu L., Zhan W., He T., Shen H., Zhao J., Liu Y., Zhang H., Liu Z., Xue Y. Remote sensing time series analysis: A review of data and applications. *J. Remote Sens.* 2024;4:0285. <https://doi.org/10.34133/remotesensing.0285>
18. Richards J.A. *Remote Sensing Digital Image Analysis*. Berlin/Heidelberg, Germany: Springer; 2022. 567 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-82327-6>
19. Krynetskiy B.A. Analysis of models of periodic structures of spatiotemporal processes. In: *Actual Problems of Applied Mathematics, Informatics, and Mechanics: Proceedings of the International Scientific Conference*. Voronezh; 2024. P. 497–501 (in Russ.). <https://elibrary.ru/vbsjnl>
20. Kuzmin V.I., Gadzaov A.F. Mathematical methods of analysis of periodic components of nonlinear processes and predict the dynamics of the limited growth based on them. *Vestnik MGTU MIREA = Herald of MSTU MIREA (Russ. Technol. J.)*. 2015;4-2(9):94–104 (in Russ.). <https://elibrary.ru/vhiyoz>
21. Kuzmin V.I., Samokhin A.B. Almost periodic functions with trend. *Vestnik MGTU MIREA = Herald of MSTU MIREA (Russ. Technol. J.)*. 2015;4-2(9):105–110 (in Russ.). <https://elibrary.ru/vhiypj>
22. Paramonov A.A., Krynetskiy B.A. Asymptotic analysis of an algorithm for searching for almost-periods in data with an ordered argument. *Zashchita informatsii. Insait*. 2023;4(112):53–57 (in Russ.).
23. Kalach A.V., Paramonov A.A., Tolstova I.S., Danilova V.A. *Program for Almost-Periodic Data Processing with Parallel Computing Option*: Computer Program RU2024688438 RF. Publ. 13.02.2025 (in Russ.).
24. Paramonov A.A. Identification of almost-periodic characteristics of satellite images of typhoons in the aspect of solving problems of technosphere safety. *Tekhnosferная bezopasnost' = Technosphere Safety*. 2024;44(3):71–76 (in Russ.).
25. Paramonov A.A., Kalach A.V. Simulation of emergencies using almost periodic analysis of images of typhoon structure. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika. Mekhanika. Fizika = Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematics. Mechanics. Physics*. 2024;16(4):67–74 (in Russ.). <http://doi.org/10.14529/10.14529/mmph240408>
26. Kalach A.V., Paramonov A.A. On the possibilities of using the method of near-periodic analysis method for image processing. *Modelirovanie sistem i protsessov = Modeling of Systems and Processes*. 2024;17(3):44–52 (in Russ.). <http://doi.org/10.12737/2219-0767-2024-42-50>
27. Fridzon M.B., Evtushenko O.A. About requirements for exactness of meteo information. *Nauchnyi vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta grazhdanskoi aviatsii (Nauchnyi Vestnik MGTU GA) = Civil Aviation High Technologies*. 2014;210:142–144 (in Russ.). <https://elibrary.ru/tbubqh>
28. Wang X., Chen K., Liu L., Han T., Li B., Bai L. Global tropical cyclone intensity forecasting with multi-modal multi-scale causal autoregressive model. In: *ICASSP 2025–2025 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*. IEEE; 2025. P. 1–5. <https://doi.org/10.1109/ICASSP49660.2025.10888556>

Об авторах

Парамонов Александр Александрович, аспирант, старший преподаватель, кафедра прикладной математики, Институт информационных технологий, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: paramonov_a_a99@mail.ru. SPIN-код РИНЦ 7885-7510, <https://orcid.org/0000-0002-8504-2108>

Калач Андрей Владимирович, д.х.н., профессор, кафедра прикладной математики, Институт информационных технологий, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: a_kalach@mail.ru. Scopus Author ID 57201667604, SPIN-код РИНЦ 2584-7456

Саратова Татьяна Евгеньевна, д.т.н., заведующий кафедрой прикладной математики, Институт информационных технологий, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: smolenceva@mirea.ru. Scopus Author ID 57201668525, SPIN-код РИНЦ 2383-6811, <https://orcid.org/0000-0003-4810-8734>

About the Authors

Alexander A. Paramonov, Postgraduate Student, Senior Lecturer, Department of Applied Mathematics, Institute of Information Technologies, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: paramonov_a_a99@mail.ru. RSCI SPIN-code 7885-7510, <https://orcid.org/0000-0002-8504-2108>

Andrew V. Kalach, Dr. Sci. (Chem.), Professor, Department of Applied Mathematics, Institute of Information Technologies, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: a_kalach@mail.ru. Scopus Author ID 57201667604, RSCI SPIN-code 2584-7456

Tatiana E. Saratova, Dr. Sci. (Eng.), Head of the Department of Applied Mathematics, Institute of Information Technologies, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: smolenceva@mirea.ru. Scopus Author ID 57201668525, RSCI SPIN-code 2383-6811, <https://orcid.org/0000-0003-4810-8734>

Математическое моделирование
Mathematical modeling

УДК 51-74:621.791.92

<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-6-127-138>

EDN ORZKBC



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Нестационарная задача теплопроводности в технологии газотермического напыления защитных покрытий

М.Е. Соловьев^{1, @}, С.С. Кокарев², С.Л. Балдаев³,
Л.Х. Балдаев³, Д.В. Малышев¹

¹ Ярославский государственный технический университет, Ярославль, 150023 Россия

² Региональный научно-образовательный центр «Логос», Ярославль, 150000 Россия

³ ООО «Технологические системы защитных покрытий», Москва, Щербинка, 108851 Россия

@ Автор для переписки, e-mail: me_s@mail.ru

• Поступила: 26.03.2025 • Доработана: 18.05.2025 • Принята к опубликованию: 06.10.2025

Резюме

Цели. Газотермическое напыление и порошковая лазерная наплавка – перспективные технологии, широко применяемые в различных отраслях промышленности, включая аэрокосмическую, энергетическую и машиностроительную отрасли. Одним из ключевых аспектов данных технологий является управление тепловыми процессами, возникающими при нанесении покрытий, т.к. они напрямую влияют на качество и долговечность получаемых материалов и изделий. В данной статье рассматривается нестационарная задача теплопереноса при однопроходном напылении на полупространство. Целью работы является моделирование распределения температуры в материальном полупространстве, на границе которого действует движущийся источник тепла.

Методы. Теоретическое исследование распределения температуры на поверхности и в толще обрабатываемого материала в процессе движения головки распылителя осуществлялось путем решения уравнения нестационарной теплопроводности в декартовых координатах. Особенностью уравнения является специальный вид функции плотности мощности источника тепла в виде тепловой полосы, моделирующей процесс теплопередачи от дорожки напыления в материальное полупространство основы детали.

Результаты. В результате исследования полученного решения, представляющего эволюцию во времени температуры в различных точках среды, установлено, что через некоторое время после прохождения импульса нагревания температура внутри среды довольно быстро достигает максимального значения, а затем она относительно медленно релаксирует к равновесной температуре окружающей среды. По мере углубления в толщу среды тепловой импульс расплывается, уменьшается его амплитуда и увеличивается ширина, а время достижения максимума монотонно увеличивается. Поперечное распределение температуры имеет вид симметричных пиков, менее выраженных в глубине.

Выводы. Полученное решение может быть полезным при описании общего температурного поля на некотором удалении от области действия головки распылителя, где конкретные детали нагрева не проявляются. В частности, в работе показано, что в окрестности действия первичной области напыления возникают значительные градиенты температур, которые вызывают заметные нестационарные температурные напряжения.

Ключевые слова: газотермическое напыление, порошковая лазерная наплавка, нестационарное уравнение теплопроводности, температурное поле, температурная волна, граничные условия Ньютона – Рихмана, функция Грина для уравнения теплопроводности

Для цитирования: Соловьев М.Е., Кокарев С.С., Балдаев С.Л., Балдаев Л.Х., Малышев Д.В. Нестационарная задача теплопроводности в технологии газотермического напыления защитных покрытий. *Russian Technological Journal*. 2025;13(6):127–138. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-6-127-138>, <https://www.elibrary.ru/ORZKBC>

Прозрачность финансовой деятельности: Авторы не имеют финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

RESEARCH ARTICLE

Unsteady heat transfer problem during single-pass spraying on a half-space

Mikhail E. Soloviev^{1, @}, Sergey S. Kokarev², Sergey L. Baldaev³,
Lev Kh. Baldaev³, Denis V. Malyshev¹

¹ Yaroslavl State Technical University, Yaroslavl, 150023 Russia

² Regional Scientific and Educational Center "Logos," Yaroslavl, 150000 Russia

³ Technological Systems for Protective Coatings, Moscow, Shcherbinka, 108851 Russia

@ Corresponding author, e-mail: me_s@mail.ru

• Submitted: 26.03.2025 • Revised: 18.05.2025 • Accepted: 06.10.2025

Abstract

Objectives. Thermal spraying and powder laser cladding are promising technologies widely used in various industries, including aerospace, energy, and mechanical engineering. The efficiency of these technologies depends on the management of thermal processes occurring during coating application, which directly affect the quality and durability of the resulting materials and products. This article considers a nonstationary problem of heat transfer during single-pass spraying on a half-space. The research aim was to simulate the temperature distribution in a material half-space upon the action of a moving heat source on its boundary.

Methods. A theoretical study of the temperature distribution on the surface and in the bulk of the processed material during movement of the spray head was carried out by solving the equation of nonstationary thermal conductivity in Cartesian coordinates. This equation employs a special type of the heat source power density function in the form of a thermal strip, simulating the process of heat transfer from the spray path to the material half-space of the part base.

Results. The obtained solution representing the evolution of temperature in time at different points of the medium shows that at a certain point of time after the passage of the heating pulse, the temperature inside the medium reaches its maximum value rapidly followed by its relatively slow relaxation to the equilibrium temperature of the environment. Penetrating deeper into the bulk of the medium, the thermal pulse is spreading out while decreasing its amplitude and increasing its width, accompanied by a monotonic increase in the time to reach the maximum. The transverse temperature distribution has the form of symmetrical peaks, less pronounced in depth.

Conclusions. The obtained solution can be used when describing the general temperature field at some distance from the spray head area, where specific heating details are lacking. In particular, the work shows that significant temperature gradients arise in the vicinity of the primary spray area, which will cause noticeable nonstationary temperature stresses.

Keywords: gas-thermal spraying, powder laser cladding, nonstationary heat conduction equation, temperature field, temperature wave, Newton–Richmann boundary conditions, Green’s function for the heat equation

For citation: Soloviev M.E., Kokarev S.S., Baldaev S.L., Baldaev L.Kh., Malyshev D.V. Unsteady heat transfer problem during single-pass spraying on a half-space. *Russian Technological Journal*. 2025;13(6):127–138. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-6-127-138>, <https://www.elibrary.ru/ORZKBC>

Financial disclosure: The authors have no financial or proprietary interest in any material or method mentioned.

The authors declare no conflicts of interest.

ВВЕДЕНИЕ

В современном машиностроении широко используются технологии нанесения порошковых покрытий методом газотермического напыления [1, 2] и лазерной наплавки [3, 4]. Эти методы позволяют не только эффективно восстанавливать изношенные поверхности деталей, но и создавать специализированные покрытия с уникальным набором характеристик, включая повышенную теплостойкость, износостойкость и химическую стойкость [5, 6]. Лазерная наплавка также стала фундаментальной технологией в области аддитивного производства металлических изделий, в ходе которого деталь производится путем послойного нанесения порошкового материала [7, 8]. Суть этих технологий заключается в нагреве порошкообразных материалов до температур, превышающих их температуру плавления, с последующим нанесением на поверхность детали посредством высокоскоростного газового потока. Отличительной особенностью лазерной наплавки является использование инфракрасного лазера в качестве источника нагрева частиц. Лазерный луч фокусируется на поверхности детали или в непосредственной близости от нее, что обеспечивает более точный контроль температуры наплавляемого материала и прецизионное позиционирование дорожки наплавки. В случае обычного газотермического напыления разогрев материала производится непосредственно в головке распылителя. Элементарной технологической операцией данных процессов является однократный проход плазменной свечи вдоль обрабатываемой поверхности и как результат – появление одинарной тонкой расплавленной дорожки на этой поверхности со скоростью, равной скорости движения плазменной свечи. В настоящей работе рассматривается именно эта элементарная операция, поскольку именно она и формирует в основном качество покрытия.

Для оптимизации рассматриваемых технологий и повышения качества получаемых покрытий и изделий критически важно понимание теплофизических процессов, происходящих при взаимодействии расплавленного материала

с обрабатываемой поверхностью [9–11]. В частности, особый интерес представляет распределение температуры в материале подложки во время и после прохождения головки распылителя [12]. Отмечается также важность точного контроля тепловложения для получения желаемой микроструктуры покрытия [13, 14].

Методы математического моделирования широко используются для оптимизации технологии напыления и прогнозирования свойств формирующихся покрытий [15–17]. Для моделирования распределения температуры в дорожке напыления используются численные методы, такие как метод конечных элементов [13, 18, 19]. Авторы работы [20] с использованием метода конечных объемов исследовали влияние распределения температуры при лазерной наплавке на процесс плавления порошкообразного металла в дорожке наплавки и влияние эффекта Марангони на размер зоны плавления. Также данный метод был использован в работе [21] для численного моделирования процессов тепломассопереноса в трехмерной постановке задачи при моделировании порошковой лазерной наплавки нержавеющей стали. Показано, что распределение температуры в дорожке наплавки является критическим фактором, определяющим форму профиля ее сечения. Помимо мощности источника излучения на распределение температуры в дорожке напыления оказывает влияние скорость движения головки напыления относительно поверхности образца и расход порошка [22, 23].

Наряду с численными методами полезным оказывается использование и аналитических методов, применение которых позволяет описать движущийся источник тепла, предсказать скорость охлаждения [13, 24] и оценить форму бассейна расплавленного металла [25].

Если не интересоваться детальным распределением тепловых величин в объеме дорожки и их динамикой во времени, то процессы теплопереноса при напылении можно описать упрощенной моделью, в которой напыление порождает локализованный на линии действия плазменной струи и локализованный во времени источник тепла. В дальнейшем эту

модель можно принять за нулевое (главное) приближение и все остальные детали процесса учитывать в форме поправок, в которых параметром малости будет отношение ширины дорожки к характерному размеру обрабатываемой поверхности.

В настоящей статье рассматривается задача о нестационарном распределении температуры в бесконечном однородном полупространстве, на границе которого имеется растущая во времени «тепловая линия» – источник тепла, локализованный на геометрическом луче, начало которого движется на плоской границе с постоянной скоростью. В такой постановке задача несколько нестандартна, поскольку вместо начальных условий она имеет асимптотическое условие для поля температур: при $t \rightarrow -\infty$ поле температуры полупространства стремится к постоянному значению – температуре окружающей среды.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Абстрагируясь от размеров и формы поверхности напыления, рассмотрим эту поверхность как границу бесконечного полупространства, заполненного теплопроводящим веществом с постоянными теплопроводностью α и удельной объемной теплоемкостью c . На этой поверхности рассмотрим непрерывно растущую со скоростью \vec{v} тепловую полосу, которая состоит из точечных мгновенных источников тепла с мощностью выделения тепловой энергии $q_0(t)$ как некоторой убывающей функции времени (рис. 1).

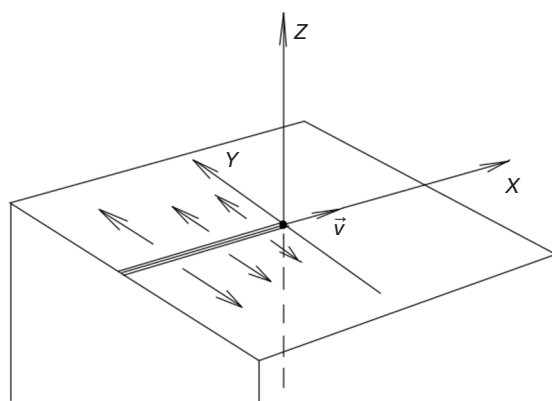


Рис. 1. Тепловая полоса на поверхности полубесконечного материального полупространства

Оси неподвижной системы координат ориентированы, как показано на рис. 1. В выбранной системе координат плотность мощности источников тепла рассматриваемого типа описывается соотношением

$$q(t, x, y, z) = q_0(t, x)\delta(z)\delta(y)\delta(x - vt), \quad (1)$$

где δ – дельта-функция Дирака. Условный момент $t = 0$ показан на рис. 1. Условному моменту $t = 0$

не соответствуют какие-либо начальные условия, поскольку тепловая полоса начинает формироваться при $t \rightarrow -\infty$.

Функция $q_0(t, x)$ в рамках рассматриваемой модели задается внешним образом: она моделирует процесс теплопередачи от тепловой полосы в материал полупространства и зависит от многих физических параметров в процессе напыления. В настоящей статье примем простейшую модель «ступенчатого теплового высвечивания», в которой

$$q_0(t, x) = k(\theta(t - x/v) - \theta(t - x/v - \tau)), \quad (2)$$

где k – постоянная эффективная тепловая мощность высвечивания; τ – эффективное время теплового высвечивания (эффективные величины представляют упрощенную модель теплообмена линии источников тепла, в которой источник тепла движется вдоль линии со скоростью свечи и передает тепло материалу полупространства с постоянной мощностью k в течение конечного промежутка времени τ в каждой точке линии источников); $\theta(x)$ – стандартная ступенчатая функция Хевисайда.

Уравнение теплопроводности для рассматриваемой задачи будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \dot{T} - \alpha \Delta T = \\ = p\delta(y)\delta(z)\delta(x - vt)(\theta(t - x/v) - \theta(t - x/v - \tau)), \end{aligned} \quad (3)$$

где T – температура в рассматриваемой области, α – коэффициент температуропроводности, $p = k/c$ и область изменения переменных: $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $z \in (-\infty, 0)$, $t \in \mathbb{R}$.

Уравнение (3) должно быть дополнено граничными условиями Ньютона – Рихмана, заданными на границе полупространства в виде:

$$\left. \frac{-\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = \beta(T|_{z=0} - T_0), \quad (4)$$

где β – приведенный коэффициент теплоотдачи, равный отношению коэффициента теплопередачи на границе «материал-воздух» к теплопроводности материала; T_0 – температура окружающей среды (воздуха), которая совпадает с температурой в асимптотическом начальном условии, знак «минус» в левой части соответствует охлаждению

$$T|_{t \rightarrow \infty} = T_0 = \text{const}, \quad (5)$$

играющему роль начального условия в рассматриваемой постановке задачи и необходимому для ее корректной постановки.

РЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ

Будем искать частное решение неоднородного уравнения (3) с помощью функции Грина G для оператора теплопроводности

$$\left(\frac{\partial}{\partial t'} - \alpha \Delta'\right) G(t-t', \vec{r} - \vec{r}') = \delta(t-t') \delta^3(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (6)$$

которая с точностью до произвольного решения однородного уравнения определяется формулой:

$$G(t-t', \vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{(2\sqrt{\alpha\pi}(t-t'))^3} e^{-|\vec{r}-\vec{r}'|^2/4\alpha(t-t')}\theta(t-t'), \quad (7)$$

\vec{r} соответствует текущей точке (x, y, z) .

Частное решение $\bar{T}(t, \vec{r})$ уравнения (3), соответствующее (7), принимает вид:

$$\begin{aligned} \bar{T}(t, \vec{r}) = & \int_{-\infty}^t dt' \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{r}' \frac{1}{(2\sqrt{\alpha\pi}(t-t'))^3} e^{-((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2)/4\alpha(t-t')} \times \\ & \times p \delta(y') \delta(z') \delta(x'-vt') (\theta(t'-x'/v) - \theta(t'-x'/v - \tau)). \end{aligned} \quad (8)$$

Интегрирование по y', z' приводит к следующей промежуточной формуле для частного решения:

$$\bar{T}(t, \vec{r}) = \frac{p}{(2\sqrt{\alpha\pi})^{3/2}} \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \frac{e^{-((x-x')^2 + y^2 + z^2)/4\alpha(t-t')}}{(t-t')^{3/2}} \delta(x'-vt') (\theta(t'-x'/v) - \theta(t'-x'/v - \tau)). \quad (9)$$

Для корректного интегрирования по переменным (x, t) перейдем к запаздывающей и опережающей комбинациям исходных переменных:

$$r = x' - vt', \quad s = x' + vt' \Leftrightarrow t' = \frac{s-r}{2v}, \quad x' = \frac{s+r}{2}. \quad (10)$$

Элемент объема заменится по правилу: $dt' dx' = ds dr / 2v$, область интегрирования (в координатах x', t' представляющая собой полуплоскость $t' \leq t$) перейдет в полуплоскость $s - r - 2vt \leq 0$.

В новых переменных интеграл (9) примет вид

$$\bar{T}(t, \vec{r}) = \frac{p}{2v(2\sqrt{\alpha\pi})^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} ds \int_{s-2vt}^{+\infty} dr \frac{e^{-((x-(s+r)/2)^2 + y^2 + z^2)/4\alpha(t-(s-r)/2v)}}{(t-(s-r)/2v)^{3/2}} \delta(r) (\theta(-r/v) - \theta(-r/v - \tau)). \quad (11)$$

Интегрирование по переменной r вместо δ -функции дает 0, если $s - 2vt > 0$ и 1 при противоположном дополнительном равенстве при подстановке $r = 0$ во все вхождения переменной r . Эта ситуация универсальным образом описывается множителем $\theta(2vt - s)$, что в итоге приводит к интегралу

$$\begin{aligned} \bar{T}(t, \vec{r}) = & \frac{p}{2v(2\sqrt{\alpha\pi})^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} ds \frac{e^{-((x-s/2)^2 + y^2 + z^2)/4\alpha(t-s/2v)}}{(t-s/2v)^{3/2}} \theta(2vt-s) = \\ = & \frac{p}{2v(2\sqrt{\alpha\pi})^{3/2}} \int_{-\infty}^{2vt} ds \frac{e^{-((x-s/2)^2 + y^2 + z^2)/4\alpha(t-s/2v)}}{(t-s/2v)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Введем новую переменную $u = t - s/2v$, для которой интеграл примет вид:

$$\bar{T}(t, \vec{r}) = \frac{p}{(2\sqrt{\alpha\pi})^{3/2}} \int_0^{+\infty} du \frac{e^{-((x-v(t-u))^2 + y^2 + z^2)/4\alpha u}}{u^{3/2}}. \quad (13)$$

Интеграл (13) вычисляется в элементарных функциях, и окончательный результат имеет вид:

$$\bar{T}(t, \vec{r}) = \frac{p}{4\alpha\pi} \cdot \frac{e^{-\left(\sqrt{(x-vt)^2 + y^2 + z^2} + x-vt\right)v/2\alpha}}{\sqrt{(x-vt)^2 + y^2 + z^2}}. \quad (14)$$

Фактически, решение (14) описывает аксиально-симметричную тепловую волну, центр которой движется со скоростью v вдоль оси x . В сопутствующей инерциальной системе отсчета $x = vt$ формула (14) приобретает вид цилиндрической волны

$$\bar{T}'(t, \vec{r}) = \frac{p}{4\alpha\pi} \cdot \frac{e^{-\rho v/2\alpha}}{\rho}, \quad (15)$$

где $\rho = \sqrt{y^2 + z^2}$, с осью, совпадающей с прямой источников тепла.

При $t \rightarrow \pm\infty$ решение (13) стремится к нулю по разным причинам: при $t \rightarrow -\infty$ тепло еще не успело выделиться, а при $t \rightarrow +\infty$ бесконечное выделившееся на всей тепловой линии тепло успевает релаксировать по бесконечному объему, который в результате возвращается в состояние с нулевой температурой. В типичной точке на некотором расстоянии ρ от тепловой оси характер эволюции температуры от времени показан на рис. 2. Он имеет вид теплового импульса, быстро нарастающего сразу после прохождения волны включения теплового импульса на тепловой прямой (момент прохождения лазерной свечи мимо координаты $x = 0$ точки наблюдения) и сравнительно медленно (по закону обратной пропорциональности) релаксирующего к равновесному состоянию с нулевой температурой. Полученное решение еще пока не имеет физического смысла, релевантного поставленной задаче: это решение необходимо дополнить общим решением однородного уравнения, с помощью которого можно реализовать граничные условия (4).

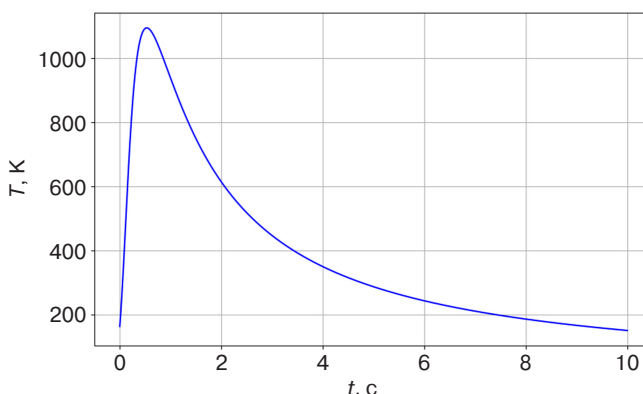


Рис. 2. Зависимость $T(t)$ при значениях параметров: $x = 0$, $y = 1$, $z = 1$ (в мм), $v = 5$ мм/с, $\alpha = 1$ мм²/с, $\rho = 1.0 \cdot 10^5$ мм³·К/с

РЕШЕНИЕ ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ И ПОЛНОЕ РЕШЕНИЕ

В силу линейности уравнения теплопроводности (3) его общее решение может быть записано в виде суммы некоторого частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного T_h :

$$T(t, x, y, z) = \bar{T}(t, x, y, z) + T_h(t, x, y, z), \quad (16)$$

где \bar{T} – уже найденное в предыдущем разделе частное решение (14), а отысканием подходящего T_h займемся в настоящем разделе. По существу, все сводится к реализации посредством T_h выбранного граничного условия (4). Подставляя в него представление (16), найдем после перегруппировки слагаемых

$$\left(\beta T_h + \frac{\partial T_h}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} = \beta (T_0 - \bar{T}) \Big|_{z=0}, \quad (17)$$

где справа стоит уже известная функция и было учтено, что в силу четности \bar{T} по z выполняется равенство:

$$\left. \frac{\partial T_h}{\partial z} \right|_{z=0} = 0.$$

Будем искать общее решение T_h методом разделения переменных:

$$T_h = \Theta(t)X(x)Y(y)Z(z). \quad (18)$$

Подставляя (18) в уравнение (3) при $p = 0$ и разделив его на T_h , получим уравнение теплопроводности в разделенном виде:

$$\frac{\Theta'}{\Theta} - \alpha \left(\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} \right) = 0, \quad (19)$$

где штрих обозначает дифференцирование по аргументу. Условие разделения переменных приобретает вид постоянства отдельных слагаемых в (19), так что это уравнение выражает соотношение между константами разделения

$$k_t - \alpha(-k_x^2 - k_y^2 + k_z^2) = 0, \quad (20)$$

которое мы будем понимать как выражение для волнового числа k_z :

$$k_z = \pm \sqrt{\frac{k_t}{\alpha} + k_x^2 + k_y^2}. \quad (21)$$

В (20):

$$k_t = \frac{\Theta'}{\Theta}, \quad \frac{X''}{X} = -k_x^2, \quad \frac{Y''}{Y} = k_y^2, \quad \frac{Z''}{Z} = k_z^2. \quad (22)$$

Общее решение T_h имеет вид следующего разложения (линейной комбинации различных решений с постоянными коэффициентами):

$$T_h = \sum_{k, \varepsilon} C_{k, \varepsilon} e^{k_t t + i(k_x x + k_y y) + \varepsilon \sqrt{k_t / \alpha + k_x^2 + k_y^2} z}, \quad (23)$$

где $k = \{k_x, k_y, k_z\}$, а параметр $\varepsilon = \pm 1$ различает корни для k_z в (21).

Для отыскания коэффициентов Фурье $C_{k, \varepsilon}$ подставляем выражение (23) в граничное условие (17), в котором правую часть тоже преобразуем в интеграл Фурье. Все Фурье-преобразования заметно упростятся, если заметить, что в правой части (17) частное решение \bar{T} зависит в соответствии с (14) лишь от запаздывающей комбинации $\xi = x - vt$. Для того, чтобы такая же комбинация получилась и в левой части (17), необходимо и достаточно потребовать, чтобы $k_t = -ivk_x$; только в этом случае в показателе экспоненты слева сформируется нужная комбинация $ik_x(x - vt) = ik_\xi \xi$, относительно которой и будет вычисляться преобразование Фурье, приводящее к правильной зависимости в правой части. Найдем Фурье-образ правой части (17). Имеем цепочку равенств $\left(a + v/2\alpha, K = \sqrt{k_y^2 + k_\xi^2}\right)$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} d\xi dy \beta \left(T_0 - \frac{p}{4\pi\alpha} \cdot \frac{e^{-\left(\sqrt{\xi^2 + y^2} + \xi\right)v/2\alpha}}{\sqrt{\xi^2 + y^2}} \right) e^{-i(k_\xi \xi + k_y y)} \Big|_{\xi = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi} \\ &= \beta T_0 \delta(k_\xi) \delta(k_y) - \frac{\beta p}{16\pi^3 \alpha} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \rho d\rho \cdot \frac{e^{-a(\rho + \rho \cos \varphi)}}{\rho} e^{-iK\rho \cos(\psi - \varphi)} = \\ &= \beta T_0 \delta(k_\xi) \delta(k_y) - \frac{\beta p}{16\pi^3 \alpha} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a(1 + \cos \varphi) + iK \cos(\psi - \varphi)} \equiv F(k_y, k_\xi). \end{aligned} \quad (24)$$

Интеграл в последнем выражении вычисляется с помощью аналитического продолжения вещественной формулы

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + b \cos \varphi + c \cos \varphi} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}} \quad (25)$$

в комплексную область, что дает в нашем случае равенство:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a(1 + \cos \varphi) + iK \cos(\psi - \varphi)} = \frac{2\pi}{\sqrt{K^2 - 2iak_\xi}} \quad (26)$$

с выбором ветви корня, которая дает $\sqrt{K^2} = k_y$ при $k_\xi = 0$.

Окончательно для Фурье-образа правой части (17) получаем:

$$F(k_y, k_\xi) = \beta T_0 \delta(k_\xi) \delta(k_y) - \frac{\beta p}{8\pi^2 \alpha \sqrt{K^2 - 2iak_\xi}}, \quad (27)$$

где $K = \sqrt{k_y^2 + k_\xi^2}$, $a = v/2\alpha$. Подставляя теперь (23) и (28) в (17), находим коэффициенты Фурье для однородного решения:

$$C_k = \frac{F(k_y, k_\xi)}{\beta + \sqrt{K^2 - 2iak_\xi}}. \quad (28)$$

Однородное решение с правильными граничными условиями запишется в виде следующего интеграла (δ -функции в F явно проинтегрированы):

$$T_h(\xi, y, z) = T_0 - \frac{\beta p}{8\pi^2 \alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y dk_\xi \frac{e^{i(k_\xi \xi + k_y y) + \sqrt{K^2 - 2iak_\xi} z}}{\sqrt{K^2 - 2iak_\xi} (\beta + \sqrt{K^2 - 2iak_\xi})}. \quad (29)$$

Как показывает дальнейший анализ, формула (29) не допускает какого-то преобразования, позволяющего представить результат в аналитическом виде, частично или полностью свободном от квадратур. Поэтому все дальнейшие иллюстрации будут получены с помощью численного преобразования Фурье для конкретных значений параметров модели.

Прежде всего, запишем полное решение с правильными граничными условиями по формуле (16):

$$T(\xi, y, z) = T_0 - \frac{\beta p}{8\pi^2 \alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y dk_\xi \frac{e^{i(k_\xi \xi + k_y y) + \sqrt{K^2 - 2iak_\xi} z}}{\sqrt{K^2 - 2iak_\xi} (\beta + \sqrt{K^2 - 2iak_\xi})} + \frac{p}{4\pi \alpha} \cdot \frac{e^{-\left(\sqrt{\xi^2 + y^2 + z^2} + \xi\right)v/2\alpha}}{\sqrt{\xi^2 + y^2 + z^2}}, \quad (30)$$

где $\xi = x - vt$.

Примем для параметров модели следующие средние значения (в системе СИ):

$$T_0 = 300, a = 40, \frac{p}{4\pi \alpha} = 10^3, \beta = 2\pi \cdot 10^{-2}, v = 10^{-3}.$$

Далее замечаем, что, в формуле (30) параметр β (он имеет размерность волнового числа, т.е. обратной длины) можно рассматривать как малый. При этом решение будет заметно отличаться для области $k \rightarrow 0$, которая соответствует длинноволновым модам решения, описывающим удаленные от источника области среды. Таким образом, упрощенный вид формулы (30) получается пренебрежением β в знаменателе под интегралом – это соответствует сохранению членов первого порядка в разложении решения по параметру β (даже в этом случае интегралы не вычисляются аналитически). В итоге, переходя для удобства вычислений к вещественной форме преобразования Фурье, находим:

$$T(\xi, y, z) = 300 - 100 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y dk_\xi \frac{2e^{Q_+ z / \sqrt{2}}}{K^4 + 6400k_\xi^2} \times \\ \times \left(K^2 \cos(k_\xi \xi + k_y y - c \operatorname{sgn}(k_\xi) Q_- z) - 80k_\xi \sin(k_\xi \xi + k_y y - c \operatorname{sgn}(k_\xi) Q_- z) \right) + 10000 \frac{e^{-40(\sqrt{\xi^2 + y^2 + z^2} + \xi)}}{\sqrt{\xi^2 + y^2 + z^2}}, \quad (31)$$

где

$$Q_\pm = \sqrt{K^4 + 6400k_\xi^2} \pm K^2, \quad \xi = x - 10^{-3}t.$$

Перейдем к иллюстрациям зависимости (31). На рис. 3 и 4 представлены семейства одномерных графиков, полученных из полной зависимости (31). Семейство кривых на рис. 3 представляет эволюцию во времени температуры в точках среды, расположенных на разных глубинах в толще среды под началом системы координат. Графики показывают, что через некоторое время после прохождения импульса нагрева температура внутри среды довольно быстро достигает максимального значения, а затем она относительно медленно релаксирует к температуре окружающей среды. При этом по мере углубления в толщу среды тепловой импульс расплывается: он уменьшает свою амплитуду и увеличивает ширину, а время достижения максимума монотонно увеличивается. В целом такая картина соответствует всем физически разумным ожиданиям рассматриваемой модели.

На рис. 4 представлено пространственное распределение температуры в момент $t = 0$ в толще вещества под тепловой линией – прямолинейной траекторией пятна свечи – в зависимости от продольной координаты x при тех же глубинах z , что и на рис. 3. В рассматриваемый момент времени свеча проходит над точкой $x = 0$. При этом видно, что тепловой импульс (тем более выраженный, чем ближе рассматриваемая точка к поверхности) накопился на предыдущем участке $x < 0$ и далее будет перемещаться вправо в соответствии с зависимостями на рис. 3.

Полученное решение (16) может быть полезным при описании температурного поля на некотором удалении от области действия свечи, где конкретные детали нагрева (например, распределение температуры на первоначальном пятне напыления) не проявляются. В частности, из графиков на рис. 4 следует, что в окрестности действия свечи возникают значительные градиенты температур, которые будут вызывать заметные нестационарные температурные напряжения. Их релаксация в окрестности пройденных участков тепловой линии, так или иначе, будет влиять на качество покрытия, что, вероятно, поддается технологическому управлению с помощью специального тайминга напыления, согласованного с динамикой температурной волны в слое.

Поперечное к тепловой линии распределение температуры представлено семейством графиков на рис. 5. Оно имеет ожидаемый вид симметричных пиков, тем менее острых, чем глубже располагается точка наблюдения.

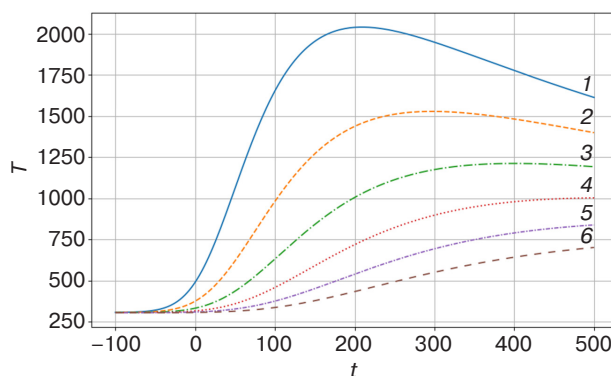


Рис. 3. Временная эволюция температуры в точках с координатами $x = y = 0$: (1) $z = -0.1$ мм, (2) $z = -0.2$ мм, (3) $z = -0.3$ мм, (4) $z = -0.4$ мм, (5) $z = -0.5$ мм, (6) $z = -0.6$ мм. Отрицательное время соответствует принятому асимптотическому начальному условию (5); в движущейся системе координат момент $t = 0$ условный

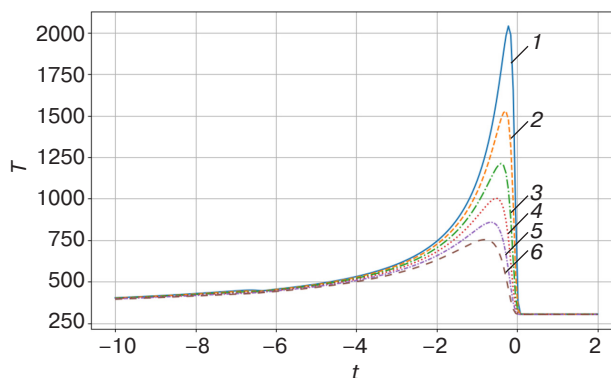


Рис. 4. Пространственный профиль температурной волны при $y = 0$, $t = 0$ в зависимости от координаты x на тех же глубинах в слое, что и на рис. 3: (1) $z = -0.1$ мм, (2) $z = -0.2$ мм, (3) $z = -0.3$ мм, (4) $z = -0.4$ мм, (5) $z = -0.5$ мм, (6) $z = -0.6$ мм

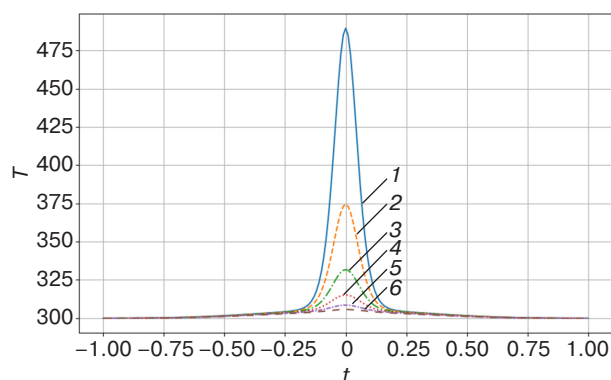


Рис. 5. Поперечный пространственный профиль температурной волны при $x = 0$, $t = 0$ в зависимости от координаты y на тех же глубинах в слое, что и на рис. 3: (1) $z = -0.1$ мм, (2) $z = -0.2$ мм, (3) $z = -0.3$ мм, (4) $z = -0.4$ мм, (5) $z = -0.5$ мм, (6) $z = -0.6$ мм

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена нестационарная задача теплопроводности, моделирующая технологию газотермического напыления тонкой полосы, образующей часть защитного покрытия. Получено точное аналитическое решение, описывающее температурное поле в материале подложки при движении плазменной свечи, создающей тепловую полосу.

В результате проведенных расчетов установлено, что:

- после прохождения импульса нагрева температура внутри среды быстро достигает максимального значения и затем медленно релаксирует к температуре окружающей среды;

- по мере углубления в материал тепловой импульс расплывается, уменьшая амплитуду и увеличивая ширину, а время достижения максимума температуры увеличивается;
- вблизи области действия источника тепла возникают значительные градиенты температур, которые могут приводить к нестационарным температурным напряжениям.

Эти факты вполне соответствуют общим закономерностям теплофизических процессов и в совокупности демонстрируют правильность выбранной физической модели и разумность сделанных приближений.

Выведена точная формула для температурного поля нестационарной тепловой полосы, позволяющая теоретически детально исследовать все существенные характеристики теплового импульса и использовать их для расчетов экспериментально и практически значимых параметров технологии напыления. Отметим, что экспериментальные возможности исследования характеристик теплового импульса в рассматриваемых условиях весьма ограничены и ресурсоемки.

Полученное решение может быть полезно для описания общего температурного поля на некотором удалении от области действия головки распылителя, где детали структуры тепловой полосы не проявляются. Результаты работы могут быть использованы для оптимизации технологических параметров напыления, таких как тайминг напыления, с целью управления качеством покрытия.

Вклад авторов

Все авторы в равной степени внесли свой вклад в исследовательскую работу.

Authors' contribution

All authors contributed equally to the research work.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

1. Davis J.R. *Handbook of Thermal Spray Technology*. ASM International; 2004. 338 p.
2. Газотермическое напыление; под общ. ред. Л.Х. Балдаева. М.: Маркет ДС; 2007. 344 с. [*Gazotermicheskoe napylenie (Gas Thermal Spraying)*. Baldaev L.H. (Ed.). Moscow: Market DS; 2007. 344 p. (in Russ.).]
3. Ghasempour-Mouziraji M., Lagarinhos J., Afonso D., de Sousa R.A. A review study on metal powder materials and processing parameters in Laser Metal Deposition. *Opt. Laser Technol.* 2024;170:110226. <https://doi.org/10.1016/j.optlastec.2023.110226>
4. Cheng J., Xing Y., Dong E., Zhao L., Liu H., Chang T., Chen M., Wang J., Lu J., Wan J. An Overview of Laser Metal Deposition for Cladding: Defect Formation Mechanisms, Defect Suppression Methods and Performance Improvements of Laser-Cladded Layers. *Materials*. 2022;15(16):5522. <https://doi.org/10.3390/ma15165522>
5. Chen H.F., Zhang C., Liu Y.C., Song P., Li W.-X., Yang G., Liu B. Recent progress in thermal/environmental barrier coatings and their corrosion resistance. *Rare Met.* 2020;39(5):498–512. <https://doi.org/10.1007/s12598-019-01307-1>
6. Hardwicke C.U., Lau Y.C. Advances in Thermal Spray Coatings for Gas Turbines and Energy Generation: A Review. *J. Therm. Spray Technol.* 2013;22(5):564–576. <https://doi.org/10.1007/s11666-013-9904-0>
7. Bernhard R., Neef P., Wiche H., Wesling V., Hoff C., Hermsdorf J., Kaierle S. Laser Cladding – Additive Manufacturing. In: Cavaliere P. (Ed.) *Laser Cladding of Metals*. Springer, Cham; 2021. P. 1–8. https://doi.org/10.1007/978-3-030-53195-9_1
8. Lim W.Y.S., Cao J., Suwardi A., Meng T.L., Tan C.K.I., Liu H. Recent advances in laser-cladding of metal alloys for protective coating and additive manufacturing. *J. Adhes. Sci. Technol.* 2022;36(23–24):2482–2504. <https://doi.org/10.1080/01694243.2022.2085499>

9. Журавский А.В. Математическое моделирование теплообмена при газофазном осаждении. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*. 2017;11(692):10–17. <https://doi.org/10.18698/0536-1044-2017-11-10-17> [Zhuravskiy A.V. Mathematical Modeling of Heat Transfer During Chemical Vapor Deposition. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Mashinostroyeniye = BMSTU Journal of Mechanical Engineering*. 2017;11(692):10–17 (in Russ.). <https://doi.org/10.18698/0536-1044-2017-11-10-17>]
10. Ravichandran K.S., An K., Dutton R.E., Semiatin S.L. Thermal conductivity of plasma-sprayed monolithic and multilayer coatings of alumina and yttria-stabilized zirconia. *J. Am. Ceram. Soc.* 2004;82(3):673–682. <https://doi.org/10.1111/j.1151-2916.1999.tb01816.x>
11. Ma K., Cheng Y., Jeyaprakash N., Zhou J., Wan Y., Yang W. Temperature gradient and solidification rate simulation model of the microstructure of laser-cladded 27SiMn. *Metals*. 2023;13(10):1682. <https://doi.org/10.3390/met13101682>
12. Moritz S., Schwanekamp T., Reuber M., Lentz J., Boes J., Weber S. Impact of *in situ* heat treatment effects during laser-based powder bed fusion of 1.3343 high-speed steel with preheating temperatures up to 700°C. *Steel Research Int.* 2023;94(6):2200775. <https://doi.org/10.1002/srin.202200775>
13. Yamashita Y., Ilman K.A., Kunimine T., Sato Y. Temperature evaluation of cladding beads and the surrounding area during the laser metal deposition process. *J. Manuf. Mater. Process.* 2023;7(6):192. <https://doi.org/10.3390/jmmp7060192>
14. Chen C., Sun G., Ren B., Wang H., Zhang Y., Zhao X. A novel heterogeneous particle addition method based on laser cladding hybrid wire arc additive manufacturing: improvement performance of stainless steel components. *Virtual Phys. Prototyp.* 2024;19(1):e2397815 <https://doi.org/10.1080/17452759.2024.2397815>
15. Li C., Han X., Zhang D., Gao X., Jia T. Quantitative analysis and experimental study of the influence of process parameters on the evolution of laser cladding. *J. Adhes. Sci. Technol.* 2021;36(17):1894–1920. <https://doi.org/10.1080/01694243.2021.1991142>
16. Li C., Jia T., Han X., Jiang X. Study on parameter optimization of laser cladding Fe60 based on GA-BP neural network. *J. Adhes. Sci. Technol.* 2022;37(18):2556–2586. <https://doi.org/10.1080/01694243.2022.2159298>
17. Huang H., Wu M., Luo S., Chen Z. Optimization of process parameters in laser cladding multi channel forming using MVBm-NSGA-II method. *Mater. Manuf. Processes.* 2024;39(15):2226–2235. <https://doi.org/10.1080/10426914.2024.2395002>
18. Hu Z., Li C., Tian D., Li X., Wang J., Xu Z., Sun X. Numerical simulation analysis of temperature distribution of NbC-reinforced Ti-based composite coating by laser cladding. *Metals*. 2023;13(8):1348. <https://doi.org/10.3390/met13081348>
19. Deng C., Zhu Y., Chen W. Numerical Investigation of the Effects of Process Parameters on Temperature Distribution and Cladding-Layer Height in Laser Cladding. *Coatings*. 2024;14(8):1020. <https://doi.org/10.3390/coatings14081020>
20. Jiang Y., Cheng Y., Zhang X., Yang J., Yang X., Cheng Z. Simulation and experimental investigations on the effect of Marangoni convection on thermal field during laser cladding process. *Optik*. 2020;203:164044. <https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2019.164044>
21. Sun Z., Guo W., Li L. Numerical modelling of heat transfer, mass transport and microstructure formation in a high deposition rate laser directed energy deposition process. *Addit. Manuf.* 2020;33:101175. <https://doi.org/10.1016/j.addma.2020.101175>
22. Wang C., Zhou J., Zhang T., Meng X., Li P., Huang S. Numerical simulation and solidification characteristics for laser cladding of Inconel 718. *Opt. Laser Technol.* 2022;149:107843. <https://doi.org/10.1016/j.optlastec.2021.107843>
23. Chai Q., Zhang H., Fang C., Qiu X., Xing Y. Numerical and experimental investigation into temperature field and profile of Stellite6 formed by ultrasonic vibration-assisted laser cladding. *J. Manuf. Process.* 2023;85:80–89. <https://doi.org/10.1016/j.jmapro.2022.11.035>
24. de La Batut B., Fergani O., Brotan V., Bambach M., Mansouri M.E. Analytical and numerical temperature prediction in direct metal deposition of Ti6Al4V. *J. Manuf. Mater. Process.* 2017;1(1):3. <https://doi.org/10.3390/jmmp1010003>
25. Gao Y., Jiang S., Tong Y., Bai S., Lu P. Temperature field simulation and experimental confirmation of laser cladding high-entropy alloy coating on Cr12MoV. *Processes*. 2024;12(2):257. <https://doi.org/10.3390/pr12020257>

Об авторах

Соловьев Михаил Евгеньевич, д.ф.-м.н., профессор, кафедра информационных систем и технологий, Институт цифровых систем, ФГБОУ «Ярославский государственный технический университет» (150023, Россия, Ярославль, Московский пр-т, д. 88). E-mail: me_s@mail.ru. Scopus Author ID 57190224257, ResearcherID A-4328-2014, SPIN-код РИНЦ 7444-3564, <https://orcid.org/0000-0002-8840-248X>

Кокарев Сергей Сергеевич, к.ф.-м.н., директор регионального научно-образовательного центра «Логос» (150000, Россия, Ярославль, ул. Республиканская, д. 80). E-mail: logos-center@mail.ru. <https://orcid.org/0000-0001-6944-1400>

Балдаев Сергей Львович, к.т.н., заместитель генерального директора по технологиям, ООО «Технологические системы защитных покрытий» (108851, Россия, Москва, г. Щербинка, ул. Южная, д. 9А). E-mail: s.baldaev@tspc.ru. ResearcherID B-8056-2018, SPIN-код РИНЦ 6954-6407, <https://orcid.org/0000-0002-1917-7979>

Балдаев Лев Христофорович, д.т.н., генеральный директор ООО «Технологические системы защитных покрытий» (108851, Россия, Москва, г. Щербинка, ул. Южная, д. 9А). E-mail: l.baldaev@tspc.ru. SPIN-код РИНЦ 8991-5015, <https://orcid.org/0000-0002-9084-8771>

Малышев Денис Владимирович, ассистент, кафедра информационных систем и технологий, Институт цифровых систем, ФГБОУ «Ярославский государственный технический университет» (150023, Россия, Ярославль, Московский пр-т, д. 88). E-mail: deniscs49@gmail.com. <https://orcid.org/0009-0009-9861-1531>

About the Authors

Mikhail E. Soloviev, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Department of Information Systems and Technologies, Institute of Digital Systems, Yaroslavl State Technical University (88, Moskovskii pr., Yaroslavl, 150023 Russia). E-mail: me_s@mail.ru. Scopus Author ID 57190224257, ResearcherID A-4328-2014, RSCI SPIN-code 7444-3564, <https://orcid.org/0000-0002-8840-248X>

Sergey S. Kokarev, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Director of the Regional Scientific and Educational Center "Logos" (80, Respublikanskaya ul., Yaroslavl, 150000 Russia). E-mail: logos-center@mail.ru. <https://orcid.org/0000-0001-6944-1400>

Sergey L. Baldaev, Cand. Sci. (Eng.), Deputy General Director, Technological Systems for Protective Coatings (9A, Yuzhnaya ul., Shcherbinka, Moscow, 108851 Russia). E-mail: s.baldaev@tspc.ru. ResearcherID B-8056-2018, RSCI SPIN-code 6954-6407, <https://orcid.org/0000-0002-1917-7979>

Lev Kh. Baldaev, Dr. Sci. (Eng.), General Director, Technological Systems for Protective Coatings (9A, Yuzhnaya ul., Shcherbinka, Moscow, 108851 Russia). E-mail: l.baldaev@tspc.ru. RSCI SPIN-code 8991-5015, <https://orcid.org/0000-0002-9084-8771>

Denis V. Malyshev, Assistant, Department of Information Systems and Technologies, Institute of Digital Systems, Yaroslavl State Technical University (88, Moskovskii pr., Yaroslavl, 150023 Russia). E-mail: deniscs49@gmail.com. <https://orcid.org/0009-0009-9861-1531>

Математическое моделирование
Mathematical modeling

УДК 621.391:53.08

<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-6-139-147>

EDN OVENAM



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Оценка параметра гауссовского размытия методом сопоставления гистограмм градиентов с эталонным изображением

В.Б. Федоров[@],
С.Г. Харламов

МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, 119454 Россия

[@] Автор для переписки, e-mail: feodorov@mirea.ru

• Поступила: 28.05.2025 • Доработана: 11.06.2025 • Принята к опубликованию: 09.10.2025

Резюме

Цели. Целью настоящего исследования является разработка метода автоматической количественной оценки параметра гауссовского размытия цифрового изображения, возникающего, как правило, вследствие дефокусировки оптической системы, некоторых других погрешностей вносимых оптической системой и камерой, а также вследствие влияния среды распространения света. Данная задача актуальна для множества прикладных областей, включая дистанционное зондирование, техническую экспертизу, фотограмметрию, медицинскую визуализацию, автоматическую инспекцию и предварительную обработку изображений перед решением задач их восстановления, классификации или распознавания.

Методы. Предложенный метод основан на сравнении двумерной гистограммы градиентов анализируемого изображения с эталонными гистограммами, заранее вычисленными для изображения высокой четкости, обладающего сходной текстурой и масштабом. Эталонное изображение искусственно размывается с различными значениями параметра размытия путем вычисления свертки с гауссовским ядром. Для каждого уровня размытия строится двумерная гистограмма градиентов, отражающая распределение направлений и величин локальных изменений яркости. Сравнение с аналогичной гистограммой обрабатываемого изображения выполняется после логарифмирования по евклидовой норме. Это дает высокую чувствительность, интерпретируемость и численную устойчивость. Метод не требует выделения резких границ, обучения нейросетей или наличия размеченных данных и может быть реализован с минимальными вычислительными затратами.

Результаты. На синтетических данных показано, что предложенный подход обеспечивает высокую точность: относительная ошибка оценки параметра размытия в диапазоне его значений 0.7–2.0 пикселя составляет менее 5%, а в большинстве случаев не превышает 2–3%. Метод устойчив к шуму, сжатию, локальным артефактам и текстурным неоднородностям.

Выводы. Разработанный подход может применяться в системах автоматического анализа изображений, а также в качестве предварительного этапа в задачах слепой деконволюции. Он отличается высокой точностью, простотой реализации и воспроизводимостью, обеспечивая надежную оценку степени размытия при минимальных требованиях к исходным данным.

Ключевые слова: размытие изображения, гауссовское размытие, параметр размытия, гистограмма градиентов, сравнение распределений, оценка искажений, эталонное изображение, слепая деконволюция, измерение резкости, метрика расстояния между гистограммами

Для цитирования: Федоров В.Б., Харламов С.Г. Оценка параметра гауссовского размытия методом сопоставления гистограмм градиентов с эталонным изображением. *Russian Technological Journal*. 2025;13(6):139–147. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-6-139-147>, <https://www.elibrary.ru/OVEHAM>

Прозрачность финансовой деятельности: Авторы не имеют финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

RESEARCH ARTICLE

Estimation of the Gaussian blur parameter by comparing histograms of gradients with a standard image

Victor B. Fedorov[@],
Sergey G. Kharlamov

MIREA – Russian Technological University, Moscow, 119454 Russia

[@] Corresponding author, e-mail: feodorov@mirea.ru

• Submitted: 28.05.2025 • Revised: 11.06.2025 • Accepted: 09.10.2025

Abstract

Objectives. The aim of this study is to develop a method for automatic quantitative estimation of the Gaussian blur parameter in digital images, which typically arises due to defocus of the optical system, various optical and camera-induced aberrations, as well as the influence of the propagation medium. This task is highly relevant for a wide range of applied fields, including remote sensing, forensic analysis, photogrammetry, medical imaging, automated inspection, and preprocessing of visual data prior to solving restoration, classification, or recognition problems.

Methods. The proposed method is based on comparing the two-dimensional histogram of gradients of the analyzed image with reference histograms precomputed for a high-sharpness image with similar texture and scale. The reference image is artificially blurred using convolution with a Gaussian kernel at various blur levels. For each level of blur, a two-dimensional gradient histogram is constructed, representing the distribution of directions and magnitudes of local intensity changes. The comparison with the corresponding histogram of the target image is performed after applying a logarithmic transformation and computing the Euclidean norm. This approach provides high sensitivity, interpretability, and numerical stability. The method does not require edge detection, neural network training, or labeled data, and can be implemented with minimal computational cost.

Results. Tests on synthetic data demonstrate that the proposed approach achieves high accuracy: the relative error in estimating the Gaussian blur parameter within the range of 0.7 to 2.0 pixels is less than 5%, and in most cases does not exceed 2–3%. The method is robust to noise, compression, local artifacts, and texture inhomogeneities.

Conclusions. The developed approach can be applied in automated image analysis systems as well as in blind deconvolution preprocessing tasks. It offers high accuracy, implementation simplicity, and reproducibility, providing reliable blur estimation under minimal data assumptions.

Keywords: image blur, Gaussian blur, blur parameter, gradient histogram, distribution comparison, distortion estimation, reference image, blind deconvolution, sharpness measurement, histogram distance metric

For citation: Fedorov V.B., Kharlamov S.G. Estimation of the Gaussian blur parameter by comparing histograms of gradients with a standard image. *Russian Technological Journal*. 2025;13(6):139–147. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-6-139-147>, <https://www.elibrary.ru/OVEHAM>

Financial disclosure: The authors have no financial or proprietary interest in any material or method mentioned.

The authors declare no conflicts of interest.

ВВЕДЕНИЕ

Оценка параметров размытия изображения является важной задачей в области обработки и анализа изображений. Она играет ключевую роль в повышении резкости, диагностике качества данных, предварительной обработке изображений в задачах спутникового мониторинга, медицины, промышленного контроля и других областях. Особенно актуальной является задача оценки параметра размытия σ в случае гауссовского размытия, поскольку оно широко используется как модель пространственного ухудшения изображения, вызванного дефокусом или другими формами оптической деградации. Высокоточный метод оценивания параметра размытия изображения имеет важное значение для успешного решения задачи слепой деконволюции.

Существующие методы оценки параметров размытия можно условно разделить на несколько классов. Первый класс включает методы, основанные на анализе резкой границы. Они требуют точного выделения и аппроксимации переходного профиля, что делает их чувствительными к шуму, сжатию и сложной структуре сцены. Второй класс составляют частотные подходы, включая методы на основе оценки модуляционной функции передачи (modulation transfer function, MTF). Эти методы также подвержены влиянию глобальной текстуры и могут давать систематически завышенные оценки на неоднородных участках изображения. Третий класс – это методы, основанные на машинном обучении, в частности, сверточные нейронные сети [1, 2]. Они демонстрируют высокую точность, однако требуют большой объем размеченных данных для обучения и могут плохо переноситься на новые домены, отличные от обучающей выборки [1–7]. В литературе встречаются также отдельные исследования, посвященные прямой идентификации параметра гауссовского размытия [8].

Предлагаемый в работе метод направлен на преодоление указанных ограничений. Он не требует локализации резких границ и устойчив к шумам и артефактам сжатия. В его основе лежит сравнение двумерной гистограммы градиентов анализируемого изображения с аналогичными гистограммами, заранее полученными из эталонного изображения схожей текстуры, искусственно размытого с различными значениями σ . Это позволяет оценивать степень

размытия по принципу ближайшего соседа в пространстве гистограмм. Метод легко реализуется, не требует обучения и демонстрирует высокую точность (относительная ошибка, в зависимости от значения параметра размытия, составляет от 2% до 5%). Для его реализации требуется лишь одно достаточно произвольное изображение высокого качества, которое используется в качестве опорного.

Целями настоящей статьи являются формальное описание предлагаемого метода, экспериментальная оценка его точности на синтетически размываемых изображениях, а также сопоставление его эффективности с существующими методами оценки параметров размытия.

1. МОДЕЛЬ РАЗМЫТИЯ ИЗОБРАЖЕНИЯ

Рассмотрим декартову систему координат Oxy , связанную с матрицей светочувствительных элементов изображения. Обозначим через $q[x, y]$ дискретное изображение сцены — отраженный световой сигнал, приходящий от объекта съемки до прохождения через среду распространения и оптическую систему. Предполагается, что размер пикселя фотокамеры Δ удовлетворяет условию $\Delta < 1/F_{\max}$, где F_{\max} — наибольшая существенная пространственная частота, содержащаяся в частотном спектре изображения $q[x, y]$, которое в этом случае согласно теореме отсчетов представляется в виде:

$$q[x, y] = \sum_{x', y' \in \mathbb{Z}} q[x', y'] \text{sinc}(x - x') \text{sinc}(y - y'), \quad (1)$$

где для удобства принято $\Delta = 1$.

С учетом искажений при прохождении сигнала через оптический канал и оптическую систему фотокамеры на сенсорную панель фотокамеры проецируется размытое по Гауссу изображение:

$$q'(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} q(x', y') g_{\sigma}(x - x', y - y') dx' dy', \quad (2)$$

где

$$g_{\sigma}[x, y] = g_{\sigma}(x) g_{\sigma}(y), \quad g_{\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

Здесь предполагается, что параметр гауссовского размытия σ , моделирующий свойства оптического

канала и некоторые конструкционно-технологические погрешности оптической системы, достаточно велик ($\sigma > 0.7$ пикселя) и поэтому доминирует над эффектом, вызываемым дифракцией.

За время экспозиции τ на сенсоре с индексами x, y накапливается заряд, равный $p[x, y] = \tau \Delta^2 q'(x, y) = q'[x, y]$, где принято $\tau = 1$ и учтено, что $\Delta = 1$.

Из (2) с учетом (1) следует, что

$$p[x, y] = \sum_{x', y' \in \mathbb{Z}} q[x', y'] (\text{sinc} * h_{\sigma})(x - x') (\text{sinc} * h_{\sigma})(y - y'), \quad (3)$$

где $(\text{sinc} * h_{\sigma})(x) = \int_{\mathbb{R}} \text{sinc}(x') g_{\sigma}(x - x') dx$, $*$ – операция свертки, определяемая формулой (2).

В работе [9] показано, что для значений параметра смаза $\sigma > 0.7$ пикселя с высокой точностью можно считать $(\text{sinc} * h_{\sigma})(x) = g_{\sigma}(x)$. С учетом этого выражение (3) может быть записано в виде:

$$p[x, y] = \sum_{x', y' \in \mathbb{Z}} q[x', y'] h_{\sigma}[x - x', y - y'],$$

где $h_{\sigma}[x, y] = g_{\sigma}(x) g_{\sigma}(y)$ – принимаемая нами двумерная изотропная гауссовская модель дискретной функции размытия точки (ФРТ) с параметром размытия $\sigma > 0$.

Принятая модель типична, например, для спутниковой съемки Земли в случае, когда направленные искажения (связанные с движением камеры, объекта или нестабильностью платформы) компенсированы. В данной работе предполагается, что такие направленные смазы предварительно устранены аппаратно или программно и поэтому в первом приближении можно считать изображение размытым изотропно, без наличия в размытии хоть какого-либо преобладающего направления.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПРЕДПОСЫЛКИ МЕТОДА

Предлагаемый метод оценки параметров линейного смаза основан на предположении, что при известном характере текстуры изображения и заданном масштабе съемки (соотношении линейного размера местности к размеру пикселя) двумерная гистограмма градиентов изображения содержит информацию, достаточную для восстановления параметров смаза. Иными словами, предполагается, что распределение градиентов яркости пикселей, рассматриваемых как реализация двумерной случайной величины, зависит в первую очередь от свойств текстуры сцены, масштаба изображения и параметров смаза, но не зависит от содержания сцены в целом.

Это означает, что изображения с близкой текстурой и одинаковым масштабом, но различной степенью размытия, будут иметь отличающиеся статистики градиентов, и эта зависимость может быть использована для оценки параметров искажения.

Предполагается существование широких классов изображений, для которых распределение градиентов может быть описано параметрическим семейством, зависящим только от параметров смаза. Подобные допущения характерны для статистических моделей естественных изображений (natural scene statistics [1, 3, 4]), применяемых в ряде работ по оценке искажений [10–12].

Предположительно, такие классы определяются, в первую очередь, характеристиками текстур: крупные или мелкие детали, контрастные или однородные структуры, а также линейным масштабом. Как показано в разделе 3, это допущение подтверждается на практике: гистограммы градиентов изображений с близкой текстурой, но разными параметрами смаза, демонстрируют устойчивую зависимость от параметров искажения.

Основная идея метода заключается в использовании эталонного изображения, принадлежащего тому же классу (т.е. обладающего схожей текстурой и масштабом), что и анализируемое. Эталон синтетически подвергается гауссовскому размытию с параметром размытия, варьируемым по регулярной сетке. Для каждого полученного таким способом размытого изображения вычисляется двумерная гистограмма градиентов (эталонная гистограмма). Затем гистограмма градиентов анализируемого изображения сравнивается с предвычисленными эталонными гистограммами. В качестве меры рассматривались:

- l_p -нормы ($p = 1, 2, \infty$) от разности логарифмов гистограмм,
- дивергенции Кульбака – Лейблера и Йенсена – Шеннона,

что соответствует стандартной практике в задачах оценки качества изображений [13]. Однако существенно лучшие результаты получились именно с использованием логарифмирования и l_2 -нормы.

Таким образом, задача сводится к поиску ближайшего соседа в пространстве эталонных гистограмм. Каждому узлу сетки параметров соответствует одна эталонная гистограмма и, следовательно, однозначно определенный вектор параметров смаза.

2.1. Построение двумерной гистограммы градиентов изображения

Для каждого пикселя входного изображения $p[y, x]$ вычисляется дискретный градиент:

$$\nabla p[y, x] = (p_x[y, x], p_y[y, x]),$$

где компоненты градиента определяются как свертка изображения с оператором Собеля D :

$$p_x[y, x] = (p * D_x)[y, x], \quad p_y[y, x] = (p * D_y)[y, x],$$

а сами операторы имеют вид

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_y = D_x^T.$$

Каждый вектор градиента $\nabla p[y, x]$ далее интерпретируется как реализация двумерной случайной величины, наблюдаемой в независимых «испытаниях» по всей области изображения. На основе совокупности этих значений строится двумерная гистограмма распределения градиентов:

$$H_{\nabla p}[i, j], \quad i, j = \overline{1, N},$$

где N — число ячеек гистограммы по каждому измерению (оси p_x и p_y).

Подразумевается, что значения градиентов попадают в фиксированное ограниченное окно (например, $[-G_{\max}, G_{\max}] \times [-G_{\max}, G_{\max}]$, которое равномерно разбивается на $N \times N$ ячеек.

Выбор параметра N требует компромисса между сглаживанием и дискретизацией. При слишком малом N гистограмма становится чрезмерно гладкой и теряет важные особенности распределения. При слишком большом N число наблюдений в каждой ячейке резко падает, и гистограмма становится зашумленной. Таким образом, выбор числа ячеек является частью настройки метода и должен соответствовать плотности выборки и характеру градиентов.

2.2. Генерация эталонных гистограмм

Из выбранного эталонного изображения $p^{\text{etalon}}[y, x]$ формируется набор синтетически смазанных изображений $\{p_{\sigma_k}\}$ по достаточно мелкой двумерной сетке параметра смаза σ_k . Для каждого сечного значения σ_k осуществляется смаз эталонного изображения:

$$p_{\sigma_k}^{\text{etalon}} = (p^{\text{etalon}} * h_{\sigma_k})[y, x],$$

где ядро смаза $h_{\sigma_k}[y, x]$ рассчитывается по формуле (3).

Затем для каждого варианта смаза эталонного изображения $p_{\sigma_k}^{\text{etalon}}[y, x]$ строится отдельная гистограмма градиентов $H_{\nabla p_{\sigma_k}^{\text{etalon}}}$, как это указано в разделе 2.1.

2.3. Процедура оценки параметра смаза, основанная на сравнении с эталонами

Для оценки расстояний между гистограммой градиентов анализируемого изображения и вариантами аналогичных эталонных гистограмм должна использоваться подходящая метрика. Как показали эксперименты, наилучший результат показывает метрика:

$$\begin{aligned} \text{dist}_{\log}(H_{\nabla p}, H_{\nabla p_{\sigma_k}^{\text{etalon}}}) = \\ = \sum_{i,j} \left| \log H_{\nabla p}[i, j] - \log H_{\nabla p_{\sigma_k}^{\text{etalon}}}[i, j] \right|^2. \end{aligned}$$

Для повышения численной устойчивости под знаком логарифма следует использовать регуляризующую процедуру, состоящую в том, что перед логарифмированием значения нулевых ячеек должны быть заменены наименьшим из всех полученных значений ячеек. В подобной ситуации выражение вида $\log(x)$ часто заменяют на $\log(x + \varepsilon)$, где, например, $\varepsilon = 10^{-6}$. Однако, как показал эксперимент, такое решение, по сравнению с предложенным выше, часто приводит к кратному увеличению относительной погрешности оценки параметра размытия.

Таким образом, оценка параметров смаза, присутствующего в анализируемом изображении, осуществляется по правилу:

$$\hat{\sigma} = \arg \min_k \text{dist}_{\log}(H_{\nabla p}, H_{\nabla p_{\sigma_k}^{\text{etalon}}}).$$

3. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

На рис. 1 представлены два изображения высокого качества. Первое из них, размываемое на разные величины, рассматривается как обрабатываемое, степень размытия которого требуется оценивать (при разных величинах размытия). Второе — используется в качестве опорного (эталонного).

Результаты моделирования представлены в табл. 1.

В табл. 2 представлены результаты моделирования при изменении ролей рассматриваемых изображений — изображение, которое раньше было оцениваемым, стало эталонным и наоборот.

Как можно видеть из указанных таблиц, при искусственном размытии оцениваемого изображения на величины $\sigma \in [0.7, 2.0]$ относительная точность оценок, в большинстве случаев, не превышает 5%, и в большинстве случаев значительно ниже. Отдельные выбросы значений оценки связаны с высокой чувствительностью метода к выбору границ ячеек гистограммы. Приведенные в табл. 1 и 2 оценки были получены при границах ячеек гистограммы, взятых в диапазоне от -2.1 до 2.1 с шагом 0.02126 .



(a)



(б)

Рис. 1. Два изображения высокого качества:

(a) обрабатываемое изображение, (б) изображение, используемое в качестве эталона

Таблица 1. Результаты моделирования

Истинное значение σ	Оценка σ	Величина погрешности	Относительная ошибка, %
0.7	0.69	+0.01	4.3
0.8	0.79	+0.01	1.3
0.9	0.88	+0.02	1.1
1.0	0.99	+0.01	1.0
1.1	1.07	+0.03	1.8
1.2	1.24	-0.04	2.5
1.3	1.35	-0.05	2.3
1.4	1.42	-0.02	3.6
1.5	1.54	-0.04	7.3
1.6	1.61	-0.01	3.1
1.7	1.74	-0.04	5.9
1.8	1.82	-0.02	1.7
1.9	2.00	-0.10	7.9
2.0	2.10	-0.10	6.5
2.1	2.20	-0.10	6.7
2.2	2.30	-0.10	6.8
2.3	2.40	-0.10	7.8
2.4	2.50	-0.10	3.8
2.5	2.60	-0.10	10.0

Типичный вид одномерной логарифмической гистограммы (натурального логарифма от гистограммы) показан на рис. 2. Соответствующие одномерные гистограммы получаются в результате усреднения двумерной гистограммы по каждому из двух направлений.

Таблица 2. Результаты моделирования при изменении ролей рассматриваемых изображений

Истинное значение σ	Оценка σ	Величина погрешности	Относительная ошибка, %
0.7	0.69	+0.01	4.3
0.8	0.80	0.00	5.0
0.9	0.93	-0.03	2.2
1.0	1.02	-0.02	1.0
1.1	1.12	-0.02	0.9
1.2	1.13	+0.07	2.5
1.3	1.24	+0.06	3.1
1.4	1.34	+0.06	3.6
1.5	1.44	+0.06	0.7
1.6	1.56	+0.04	1.3
1.7	1.64	+0.06	1.8
1.8	1.77	+0.03	3.9
1.9	1.80	+0.10	3.2
2.0	1.90	+0.10	6.0
2.1	2.00	+0.10	8.1
2.2	2.11	+0.09	1.4
2.3	2.20	+0.10	5.7
2.4	2.30	+0.10	5.4
2.5	2.40	+0.10	9.2

На рис. 3 представлены типичные графики зависимости значения метрики dist_{\log} от параметра σ_k (при фиксированном σ). Минимумы на этих кривых соответствуют оценке параметров размытия. На графиках сравниваются результаты при двух значениях шага сетки по σ : 0.01 и 0.001 пикселя. Как видно, шаг 0.01 уже

достаточно мал, и дальнейшее уменьшение не приводит к существенному увеличению точности.

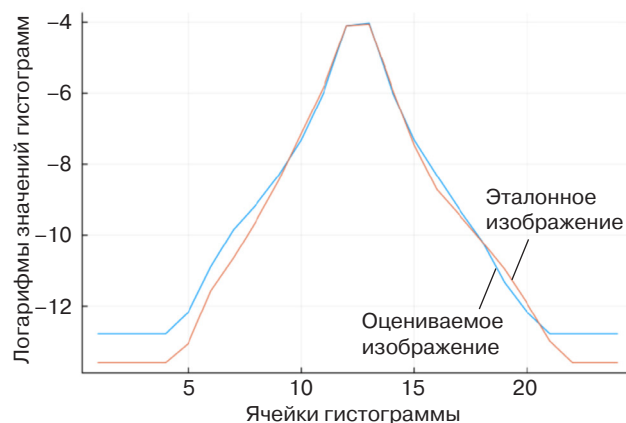


Рис. 2. Характерный вид одномерных логарифмических гистограмм

4. СРАВНЕНИЕ С ДРУГИМИ МЕТОДАМИ

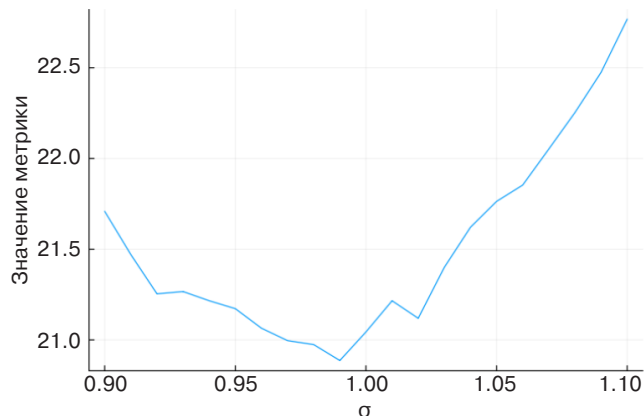
В настоящей работе предложен метод оценки параметра гауссовского размытия изображения на основе сравнения двумерной гистограммы градиентов с предварительно вычисленными эталонными гистограммами, полученными из изображения схожей текстуры и масштаба, подвергнутого искусственному размытию. Метод не требует локализации границ и хорошо работает даже при наличии сжатия и шума.

Проведенное моделирование показало, что метод демонстрирует высокую точность в диапазоне значений параметра размытия $\sigma \in [0.7, 2.0]$, достигая относительной ошибки, в подавляющем большинстве случаев не превышающей 5%, и часто ниже. При этом одним из ключевых факторов, влияющих на точность оценки, является выбор границ ячеек при построении гистограммы градиентов.

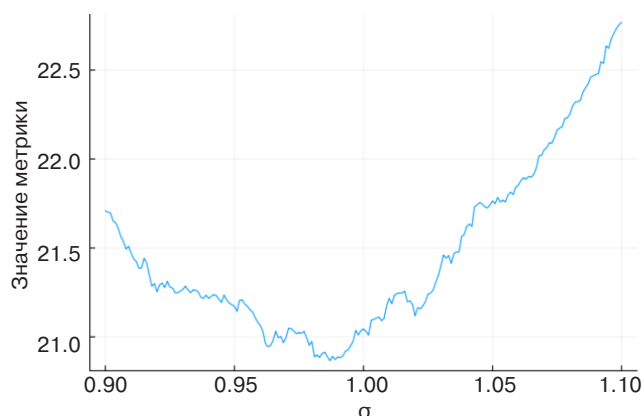
Минимальный шаг сетки по параметру размытия σ_k , достаточный для высокой точности, составляет 0.01 пикселя, и дальнейшее уменьшение не дает значимого выигрыша, что делает метод эффективным по вычислительным затратам.

Таким образом, предложенный подход является простым в реализации, устойчивым к шуму и легко адаптируется под различные диапазоны размытия. Он потенциально может применяться в задачах автоматического анализа изображений в технических, медицинских и дистанционных приложениях, а также использоваться в качестве предварительного этапа для последующего восстановления изображения.

В табл. 3 представлено краткое сравнение предложенного метода с рядом известных подходов к оценке параметров гауссовского или линейного размытия.



(а)



(б)

Рис. 3. Типичный вид зависимости метрики, определяющей близость сравниваемых изображений, от величины оцениваемого параметра размытия σ при шаге сетки: (а) 0.01, (б) 0.001

Таким образом, сравнение с существующими методами показывает, что предложенный подход достигает точности, сопоставимой с лучшими современными методами, основанными на обучаемых нейросетевых моделях (2–5%), при этом не требует предварительного обучения, размеченных данных и сложной инфраструктуры.

Следует отметить, что предложенный метод по сути реализует простейший вариант регрессии по признаковому пространству, аналогично тому, как работают сверточные нейросети. В качестве признаков выступают двумерные гистограммы градиентов, а роль обучающей выборки выполняет набор эталонных изображений, искусственно размытых при известных значениях параметра σ . При этом вместо обучения параметров модели производится явное сравнение по метрике, что делает метод интерпретируемым и устойчивым. Таким образом, предложенный подход можно рассматривать как эффективную и интерпретируемую альтернативу нейросетевым методам оценки размытия [4, 5–7, 14, 15].

Таблица 3. Сравнительная таблица различных методов оценивания параметра размытия изображения

Метод	Требуется эталон?	Требуется граница?	Устойчивость к шуму	Автоматизируемость	Точность при $\sigma \in [1.0, 2.0]$	Комментарии
Предложенный метод	Да (схожая текстура)	Нет	Высокая	Полная	2–5% (в большинстве случаев)	Высокая точность, хорошо масштабируется
Метод резкой границы	Нет	Да (локально)	Низкая	Ограниченная	5–15%	Требуется явной резкой границы и может быть чувствителен к шуму и направлению линии края
Частотный метод (MTF-fit) ¹	Нет	Нет	Средняя	Да	5–10%	Требуется корректного выбора окна, зависит от текстуры
Статистика градиентов без эталона	Нет	Нет	Средняя	Да	10–20%	Прост в реализации, имеет низкую точность
Методы на основе сверточных нейронных сетей	Не всегда	Нет	Высокая	Требуется обучения	2–5%	Хорошие результаты на обученной выборке, но сложен в применении

¹ Modulation transfer function – экспериментальная подгонка функции передачи модуляции. [Modulation Transfer Function is an experimental fitting of the modulation transfer function.]

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе использовалось одно эталонное изображение, обладающее текстурными характеристиками, сходными с анализируемым. Однако для повышения устойчивости и универсальности метода на практике разумно использовать не один эталон, а репрезентативное множество эталонов. Такой подход предполагает предварительное формирование базового набора изображений высокого качества, кластеризацию их по признакам (например, по гистограммам градиентов при $\sigma = 0$) и последующий выбор ближайшего эталона для каждого анализируемого изображения. Это может позволить

адаптировать метод к разнообразным структурам сцены и текстур, повысить точность и расширить применимость подхода.

Также представляется интересным дальнейшее развитие метода в направлении автоматического выбора участков изображения, обладающих высокой текстурной информативностью, что потенциально позволит снизить требования к подбору эталонного изображения.

Вклад авторов

Все авторы в равной степени внесли свой вклад в исследовательскую работу.

Authors' contribution

All authors contributed equally to the research work.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

- Flusser J., Lebl M., Sroubek F., Pedone M., Kostkova J. Blur Invariants for Image Recognition. *Int. J. Computer Vision*. 2023;131(9):2298–2315. <https://doi.org/10.1007/s11263-023-01798-7>
- Bergstrom A.C., Conran D., Messinger D.W. Gaussian Blur and Relative Edge Response. *arXiv*. arXiv:2301.00856. 2023. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2301.00856>
- Varela L.G., Boucheron L.E., Sandoval S., Voelz D., Siddik A.B. Estimation of Motion Blur Kernel Parameters Using Regression Convolutional Neural Networks. *arXiv*. arXiv:2308.01381. 2023. <http://doi.org/10.48550/arXiv.2308.01381>
- Zhang K., Ren W., Luo W., Lai W.-S., Stenger B., Yang M.-H., Li H. Deep Image Deblurring: A Survey. *arXiv*. arXiv:2201.10700. 2022. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2201.10700>
- Levin A., Weiss Y., Durand F., Freeman W.T. Understanding and Evaluating Blind Deconvolution Algorithms. In: *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*. 2009. P. 1964–1971. <https://doi.org/10.1109/CVPR.2009.5206815>
- Ren D., Zhang K., Wang Q., Hu Q., Zuo W. Neural Blind Deconvolution Using Deep Priors. *arXiv*. arXiv:1908.02197. 2019. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1908.02197>
- Yu J., Chang Z., Xiao C. Edge-Based Blur Kernel Estimation Using Sparse Representation and Self-Similarity. *arXiv*. arXiv:1811.07161. 2018. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1811.07161>

8. Chen F., Ma J. An Empirical Identification Method of Gaussian Blur Parameter for Image Deblurring. *IEEE Trans. Signal Proces.* 2009;57(7):2467–2478. <https://doi.org/10.1109/TSP.2009.2018358>
9. Федоров В.Б., Харламов С.Г., Федоров А.В. Восстановление изображений с использованием дискретной функции рассеяния точки, получаемой с учетом конечности размера пикселя. *Russ. Technol. J.* 2025;13(2):143–154. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-2-143-154>, <https://elibrary.ru/GXAGAW>
[Fedorov V.B., Kharlamov S.G., Fedorov A.V. Image restoration using a discrete point spread function with consideration of finite pixel size. *Russ. Technol. J.* 2025;13(2):143–154. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-2-143-154>, <https://elibrary.ru/GXAGAW>]
10. Pawanikar N.K., Strivaramangai R. Review of Single Blind Image Deblurring Techniques. *Int. J. Computer Sci. Trends Technol.* 2023;11(3):26–40. URL: <https://www.ijcstjournal.org/volume-11/issue-3/IJCST-V11I3P7.pdf>
11. Yu H., Li D., Chen Y. A State-of-the-Art Review of Image Motion Deblurring Techniques in Remote Sensing. *Heliyon.* 2023;9(6):e17332. <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2023.e17332>
12. Huang Y., Chouzenoux E., Pesquet J.-C. Unrolled Variational Bayesian Algorithm for Image Blind Deconvolution. *arXiv.* arXiv:2110.07202. 2021. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2110.07202>
13. Tiwari S., Shukla V.P., Singh A.K., Biradar S.R. Review of Motion Blur Estimation Techniques. *J. Image Graphics.* 2013;1(4):176–184. <https://doi.org/10.12720/JOIG.1.4.176-184>
14. Couzinie-Devy F., Sun J., Alahari K., Ponce J. Learning to Estimate and Remove Non-uniform Image Blur. In: *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*. 2013. P. 1075–1082. <https://doi.org/10.1109/CVPR.2013.143>
15. Yan R., Shao L. Blind Image Blur Estimation via Deep Learning. In: *Proceedings of the IEEE Transactions on Image Processing*. 2016;25(4):1910–1921. URL: <https://core.ac.uk/download/pdf/79609188.pdf>

Об авторах

Федоров Виктор Борисович, к.т.н., доцент, кафедра высшей математики, Институт искусственного интеллекта, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: feodorov@mirea.ru, fdorov@mail.ru. Scopus Author ID 57208924592, SPIN-код РИНЦ 2622-7666, <https://orcid.org/0000-0003-1011-5453>

Харламов Сергей Григорьевич, аспирант, кафедра высшей математики, Институт искусственного интеллекта, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: serhar2000@mail.ru. <https://orcid.org/0000-0003-4470-6323>

About the Authors

Victor B. Fedorov, Cand. Sci. (Eng.), Associate Professor, Higher Mathematics Department, Institute of Artificial Intelligence, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: feodorov@mirea.ru, fdorov@mail.ru. Scopus Author ID 57208924592, RSCI SPIN-code 2622-7666, <https://orcid.org/0000-0003-1011-5453>

Sergey G. Kharlamov, Postgraduate Student, Higher Mathematics Department, Institute of Artificial Intelligence, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: serhar2000@mail.ru. <https://orcid.org/0000-0003-4470-6323>

Отпечатано в «МИРЭА – Российский технологический университет».

119454, РФ, г. Москва, пр-т Вернадского, д. 78.

Подписано в печать 27.11.2025 г.

Формат 60 × 90/8. Печать цифровая.

Уч.-изд. листов 18.50.

Тираж 50 экз. Заказ № 3486.

Подписку на печатную версию

Russian Technological Journal можно оформить
через ООО «Агентство «Книга-Сервис», www.akc.ru.

Подписной индекс: **79641**.

Printed in MIREA – Russian Technological University.
78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russian
Federation.

Signed to print November 27, 2025.

Format 60 × 90/8. Digital print.

C.p.l. 18.50.

50 copies. Order No. 3486.

Subscription to the *Russian Technological
Journal* printed version can be made through
the *Kniga-Servis* Agency, www.akc.ru.

Subscription index: **79641**.

