



RUSSIAN TECHNOLOGICAL JOURNAL

**РОССИЙСКИЙ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ**

*Информационные системы.
Информатика.
Проблемы информационной безопасности*

*Роботизированные комплексы и системы.
Технологии дистанционного зондирования и неразрушающего контроля*

Современные радиотехнические и телекоммуникационные системы

*Микро- и наноэлектроника.
Физика конденсированного состояния*

Аналитическое приборостроение и технологии

Математическое моделирование

*Экономика наукоемких и высокотехнологичных
предприятий и производств. Управление в организационных системах*

Управление качеством продукции. Стандартизация

Мировоззренческие основы технологии и общества



RUSSIAN TECHNOLOGICAL JOURNAL

РОССИЙСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

- Информационные системы. Информатика. Проблемы информационной безопасности
- Роботизированные комплексы и системы. Технологии дистанционного зондирования и неразрушающего контроля
- Современные радиотехнические и телекоммуникационные системы
- Микро- и нанoeлектроника. Физика конденсированного состояния
- Аналитическое приборостроение и технологии
- Математическое моделирование
- Экономика наукоемких и высокотехнологичных предприятий и производств. Управление в организационных системах
- Управление качеством продукции. Стандартизация
- Мировоззренческие основы технологии и общества
- Information systems. Computer sciences. Issues of information security
- Multiple robots (robotic centers) and systems. Remote sensing and nondestructive testing
- Modern radio engineering and telecommunication systems
- Micro- and nanoelectronics. Condensed matter physics
- Analytical instrument engineering and technology
- Mathematical modeling
- Economics of knowledge-intensive and high-tech enterprises and industries. Management in organizational systems
- Product quality management. Standardization
- Philosophical foundations of technology and society

Russian Technological Journal
2025, том 13, № 2

Russian Technological Journal
2025, Vol. 13, No. 2

Russian Technological Journal 2025, том 13, № 2

Дата опубликования 28 марта 2025 г.

Научно-технический рецензируемый журнал освещает вопросы комплексного развития радио-технических, телекоммуникационных и информационных систем, электроники и информатики, а также результаты фундаментальных и прикладных междисциплинарных исследований, технологических и организационно-экономических разработок, направленных на развитие и совершенствование современной технологической базы.

Периодичность: один раз в два месяца.

Журнал основан в декабре 2013 года. До 2016 г. издавался под названием «Вестник МГТУ МИРЭА» (ISSN 2313-5026), а с января 2016 г. по июль 2021 г. под названием «Российский технологический журнал» (ISSN 2500-316X).

Учредитель и издатель:

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «МИРЭА – Российский технологический университет»
119454, РФ, г. Москва, пр-т Вернадского, д. 78.

Журнал входит в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов ВАК РФ, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук и доктора наук, входит в RSCI, РГБ, РИНЦ, eLibrary, Directory of Open Access Journals (DOAJ), Directory of Open Access Scholarly Resources (ROAD), Google Scholar, Ulrich's International Periodicals Directory.

Главный редактор:

Сигов Александр Сергеевич, академик РАН,
доктор физ.-мат. наук, профессор, президент ФГБОУ ВО МИРЭА – Российский технологический университет (ПТУ МИРЭА), Москва, Россия.
Scopus Author ID 35557510600, ResearcherID L-4103-2017,
sigov@mirea.ru.

Редакция:

Зав. редакцией	к.т.н. Г.Д. Середина
Научный редактор	д.т.н., проф. Г.В. Куликов
Выпускающий редактор	А.С. Алексеенко
Технический редактор	Д.В. Трофимова

119571, г. Москва, пр-т Вернадского, 86, оф. Р-108.
Тел.: +7 (499) 600-80-80 (#31288).
E-mail: seredina@mirea.ru.

Регистрационный номер и дата принятия решения о регистрации СМИ ПИ № ФС 77 - 81733 от 19.08.2021 г. СМИ зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).

Индекс по объединенному каталогу «Пресса России» 79641.

<https://www.rtlj-mirea.ru>

Russian Technological Journal 2025, Vol. 13, No. 2

Publication date March 28, 2025.

The peer-reviewed scientific and technical journal highlights the issues of complex development of radio engineering, telecommunication and information systems, electronics and informatics, as well as the results of fundamental and applied interdisciplinary researches, technological and economical developments aimed at the development and improvement of the modern technological base.

Periodicity: bimonthly.

The journal was founded in December 2013. The titles were «Herald of MSTU MIREA» until 2016 (ISSN 2313-5026) and «Rossiiskii tekhnologicheskii zhurnal» from January 2016 until July 2021 (ISSN 2500-316X).

Founder and Publisher:

Federal State Budget
Educational Institution of Higher Education
«MIREA – Russian Technological University»
78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia.

The journal is included into the List of peer-reviewed science press of the State Commission for Academic Degrees and Titles of Russian Federation. The Journal is included in Russian Science Citation Index (RSCI), Russian State Library (RSL), Science Index, eLibrary, Directory of Open Access Journals (DOAJ), Directory of Open Access Scholarly Resources (ROAD), Google Scholar, Ulrich's International Periodicals Directory.

Editor-in-Chief:

Alexander S. Sigov, Academician at the Russian Academy of Sciences, Dr. Sci. (Phys.–Math.), Professor,
President of MIREA – Russian Technological University (RTU MIREA), Moscow, Russia.
Scopus Author ID 35557510600, ResearcherID L-4103-2017,
sigov@mirea.ru.

Editorial staff:

Managing Editor	Cand. Sci. (Eng.) Galina D. Seredina
Scientific Editor	Dr. Sci. (Eng.), Prof. Gennady V. Kulikov
Executive Editor	Anna S. Alekseenko
Technical Editor	Darya V. Trofimova

86, Vernadskogo pr., Moscow, 119571 Russia.
Phone: +7 (499) 600-80-80 (#31288).
E-mail: seredina@mirea.ru.

The registration number ПИ № ФС 77 - 81733 was issued in August 19, 2021 by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology, and Mass Media of Russia.

The subscription index of *Pressa Rossii*: 79641.

Редакционная коллегия

Кудж Станислав Алексеевич	д.т.н., профессор, ректор РТУ МИРЭА, Москва, Россия. Scopus Author ID 56521711400, ResearcherID AAG-1319-2019, https://orcid.org/0000-0003-1407-2788 , rector@mirea.ru
Банис Юрас Йонович	хабилированный доктор наук, профессор, проректор Вильнюсского университета, Вильнюс, Литва. Scopus Author ID 7003687871, juras.banyas@ff.vu.lt
Бетелин Владимир Борисович	академик Российской академии наук (РАН), д.ф.-м.н., профессор, научный руководитель Федерального научного центра «Научно-исследовательский институт системных исследований» РАН, Москва, Россия. Scopus Author ID 6504159562, ResearcherID J-7375-2017, betelin@niisi.msk.ru
Боков Алексей Алексеевич	д.ф.-м.н., старший научный сотрудник, химический факультет и 4D LABS, Университет Саймона Фрейзера, Ванкувер, Британская Колумбия, Канада. Scopus Author ID 35564490800, ResearcherID C-6924-2008, http://orcid.org/0000-0003-1126-3378 , abokov@sfu.ca
Вахрушев Сергей Борисович	д.ф.-м.н., профессор, заведующий лабораторией нейтронных исследований Физико-технического института им. А.Ф. Иоффе РАН, профессор кафедры Физической электроники СПбГПУ, Санкт-Петербург, Россия. Scopus Author ID 7004228594, ResearcherID A-9855-2011, http://orcid.org/0000-0003-4867-1404 , s.vakhrushev@mail.ioffe.ru
Гуляев Юрий Васильевич	академик РАН, д.ф.-м.н., профессор, научный руководитель Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Москва, Россия. Scopus Author ID 35562581800, gulyaev@cplire.ru
Жуков Дмитрий Олегович	д.т.н., профессор кафедры телекоммуникаций Института радиоэлектроники и информатики РТУ МИРЭА, Москва, Россия. Scopus Author ID 57189660218, zhukov_do@mirea.ru
Кимель Алексей Вольдемарович	к.ф.-м.н., профессор, Университет Радбауд, г. Наймеген, Нидерланды. Scopus Author ID 6602091848, ResearcherID D-5112-2012, a.kimel@science.ru.nl
Крамаров Сергей Олегович	д.ф.-м.н., профессор, Сургутский государственный университет, Сургут, Россия. Scopus Author ID 56638328000, ResearcherID E-9333-2016, https://orcid.org/0000-0003-3743-6513 , mavoo@yandex.ru
Новиков Дмитрий Александрович	академик РАН, д.т.н., директор Института проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия. Scopus Author ID 7102213403, ResearcherID Q-9677-2019, https://orcid.org/0000-0002-9314-3304 , novikov@ipu.ru
Перно Филипп	Dr. Sci. (Electronics), профессор, Центральная Школа г. Лилль, Франция. Scopus Author ID 7003429648, philippe.pernod@ec-lille.fr
Романов Михаил Петрович	д.т.н., профессор, научный руководитель Института искусственного интеллекта РТУ МИРЭА, Москва, Россия. Scopus Author ID 14046079000, https://orcid.org/0000-0003-3353-9945 , m_romanov@mirea.ru
Савиных Виктор Петрович	академик РАН, Дважды Герой Советского Союза, д.т.н., профессор, президент Московского государственного университета геодезии и картографии, Москва, Россия. Scopus Author ID 56412838700, vp@miigaik.ru
Соболевский Андрей Николаевич	д.ф.-м.н., директор Института проблем передачи информации им. А.А. Харкевича, Москва, Россия. Scopus Author ID 7004013625, ResearcherID D-9361-2012, http://orcid.org/0000-0002-3082-5113 , sobolevski@iitp.ru
Сюй Ли Да	академик Европейской академии наук, Российской инженерной академии и Инженерной академии Армении, Dr. Sci. (Systems Science), профессор, Университет Олд Доминион, Норфолк, Соединенные Штаты Америки. Scopus Author ID 13408889400, https://orcid.org/0000-0002-5954-5115 , lxu@odu.edu
Харин Юрий Семенович	академик Национальной академии наук Беларуси, д.ф.-м.н., профессор, директор НИИ прикладных проблем математики и информатики Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь. Scopus Author ID 6603832008, http://orcid.org/0000-0003-4226-2546 , kharin@bsu.by
Чаплыгин Юрий Александрович	академик РАН, д.т.н., профессор, член Отделения нанотехнологий и информационных технологий РАН, президент Института микроприборов и систем управления им. Л.Н. Преснухина НИУ «МИЭТ», Москва, Россия. Scopus Author ID 6603797878, ResearcherID B-3188-2016, president@miet.ru
Шпак Василий Викторович	к.э.н., зам. министра промышленности и торговли Российской Федерации, Министерство промышленности и торговли РФ, Москва, Россия; доцент, Институт микроприборов и систем управления им. Л.Н. Преснухина НИУ «МИЭТ», Москва, Россия, mishinevaiv@minprom.gov.ru

Editorial Board

Stanislav A. Kudzh	Dr. Sci. (Eng.), Professor, Rector of RTU MIREA, Moscow, Russia. Scopus Author ID 56521711400, ResearcherID AAG-1319-2019, https://orcid.org/0000-0003-1407-2788 , rector@mirea.ru
Juras Banys	Habilitated Doctor of Sciences, Professor, Vice-Rector of Vilnius University, Vilnius, Lithuania. Scopus Author ID 7003687871, juras.banys@ff.vu.lt
Vladimir B. Betelin	Academician at the Russian Academy of Sciences (RAS), Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Supervisor of Scientific Research Institute for System Analysis, RAS, Moscow, Russia. Scopus Author ID 6504159562, ResearcherID J-7375-2017, betelin@niisi.msk.ru
Alexei A. Bokov	Dr. Sci. (Phys.-Math.), Senior Research Fellow, Department of Chemistry and 4D LABS, Simon Fraser University, Vancouver, British Columbia, Canada. Scopus Author ID 35564490800, ResearcherID C-6924-2008, http://orcid.org/0000-0003-1126-3378 , abokov@sfu.ca
Sergey B. Vakhrushev	Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Head of the Laboratory of Neutron Research, A.F. Ioffe Physico-Technical Institute of the RAS, Department of Physical Electronics of St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia. Scopus Author ID 7004228594, ResearcherID A-9855-2011, http://orcid.org/0000-0003-4867-1404 , s.vakhrushev@mail.ioffe.ru
Yury V. Gulyaev	Academician at the RAS, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Academic Supervisor of V.A. Kotelnikov Institute of Radio Engineering and Electronics of the RAS, Moscow, Russia. Scopus Author ID 35562581800, gulyaev@cplire.ru
Dmitry O. Zhukov	Dr. Sci. (Eng.), Professor of the Department of Telecommunications, Institute of Radio Electronics and Informatics, RTU MIREA, Moscow, Russia. Scopus Author ID 57189660218, zhukov_do@mirea.ru
Alexey V. Kimel	PhD (Phys.-Math.), Professor, Radboud University, Nijmegen, Netherlands, Scopus Author ID 6602091848, ResearcherID D-5112-2012, a.kimel@science.ru.nl
Sergey O. Kramarov	Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Surgut State University, Surgut, Russia. Scopus Author ID 56638328000, ResearcherID E-9333-2016, https://orcid.org/0000-0003-3743-6513 , mavoo@yandex.ru
Dmitry A. Novikov	Academician at the RAS, Dr. Sci. (Eng.), Director of V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences, Moscow, Russia. Scopus Author ID 7102213403, ResearcherID Q-9677-2019, https://orcid.org/0000-0002-9314-3304 , novikov@ipu.ru
Philippe Pernod	Dr. Sci. (Electronics), Professor, Dean of Research of Centrale Lille, Villeneuve-d'Ascq, France. Scopus Author ID 7003429648, philippe.pernod@ec-lille.fr
Mikhail P. Romanov	Dr. Sci. (Eng.), Professor, Academic Supervisor of the Institute of Artificial Intelligence, RTU MIREA, Moscow, Russia. Scopus Author ID 14046079000, https://orcid.org/0000-0003-3353-9945 , m_romanov@mirea.ru
Viktor P. Savinykh	Academician at the RAS, Dr. Sci. (Eng.), Professor, President of Moscow State University of Geodesy and Cartography, Moscow, Russia. Scopus Author ID 56412838700, vp@miigaik.ru
Andrei N. Sobolevski	Professor, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Director of Institute for Information Transmission Problems (Kharkevich Institute), Moscow, Russia. Scopus Author ID 7004013625, ResearcherID D-9361-2012, http://orcid.org/0000-0002-3082-5113 , sobolevski@iitp.ru
Li Da Xu	Academician at the European Academy of Sciences, Russian Academy of Engineering (formerly, USSR Academy of Engineering), and Armenian Academy of Engineering, Dr. Sci. (Systems Science), Professor and Eminent Scholar in Information Technology and Decision Sciences, Old Dominion University, Norfolk, VA, the United States of America. Scopus Author ID 13408889400, https://orcid.org/0000-0002-5954-5115 , lxu@odu.edu
Yury S. Kharin	Academician at the National Academy of Sciences of Belarus, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Director of the Institute of Applied Problems of Mathematics and Informatics of the Belarusian State University, Minsk, Belarus. Scopus Author ID 6603832008, http://orcid.org/0000-0003-4226-2546 , kharin@bsu.by
Yuri A. Chaplygin	Academician at the RAS, Dr. Sci. (Eng.), Professor, Member of the Departments of Nanotechnology and Information Technology of the RAS, President of the National Research University of Electronic Technology (MIET), Moscow, Russia. Scopus Author ID 6603797878, ResearcherID B-3188-2016, president@miet.ru
Vasilii V. Shpak	Cand. Sci. (Econ.), Deputy Minister of Industry and Trade of the Russian Federation, Ministry of Industry and Trade of the Russian Federation, Moscow, Russia; Associate Professor, National Research University of Electronic Technology (MIET), Moscow, Russia, mishinevaiv@minprom.gov.ru

Содержание

Информационные системы. Информатика. Проблемы информационной безопасности

- 7** *И.А. Косьяненко, Р.Г. Болбаков*
Сбор и анализ датасета для задачи автоматической генерации сообщений коммитов
- 18** *В.Я. Цветков, Н.С. Курдюков*
Информационное онтологическое моделирование
- 27** *Е.С. Шевцов, Р.В. Шамин*
Логическая интеграция информационных систем на основе экспертных систем

Современные радиотехнические и телекоммуникационные системы

- 36** *В.К. Битюков, А.И. Лавренов, Д.А. Малицкий*
Проектирование DC/DC-преобразователя, построенного по Zeta-топологии на базе драйвера TPS40200

Микро- и нанoeлектроника. Физика конденсированного состояния

- 46** *И.В. Лавров, В.В. Бардушкин, В.Б. Яковлев*
Распределение напряженности температурного поля на поверхности включений графена в матричном композите
- 57** *В.М. Миннебаев*
Тепловые и механические механизмы деградаций в гетероструктурных полевых транзисторах на нитриде галлия

Математическое моделирование

- 74** *В.А. Головешкин, А.А. Николаенко, В.Н. Самаров, Ж. Рейссон, Д.М. Фисунова*
Математическое моделирование процесса горячего изостатического прессования труб из порошковых материалов
- 93** *А.А. Мицель, Е.В. Викторенко*
Динамическая модель управления BSF-портфелем без ограничений
- 111** *В.Н. Каданцев, А.Н. Гольцов*
Латеральный протонный транспорт, индуцированный распространением акустических солитонов в липидных мембранах
- 121** *А.В. Смирнов*
Метод оценки выпуклости рельефа целевых функций в процессе поиска экстремума
- 132** *М.Е. Соловьев, Д.В. Малышев, С.Л. Балдаев, Л.Х. Балдаев*
Математическое моделирование технологических параметров порошковой лазерной наплавки на основе аппроксимации профиля дорожки напыления
- 143** *В.Б. Федоров, С.Г. Харламов, А.В. Федоров*
Восстановление изображений с использованием дискретной функции рассеяния точки, получаемой с учетом конечности размера пикселя

Contents

Information systems. Computer sciences. Issues of information security

- 7** *Ivan A. Kosyanenko, Roman G. Bolbakov*
Dataset collection for automatic generation of commit messages
- 18** *Viktor Ya. Tsvetkov, Nikita S. Kurdyukov*
Informational ontological modeling
- 27** *Evgeniy S. Shevtsov, Roman V. Shamin*
Logical integration of information systems based on expert systems

Modern radio engineering and telecommunication systems

- 36** *Vladimir K. Bityukov, Aleksey I. Lavrenov, Daniil A. Malitskiy*
Zeta topology DC/DC converter design based on TPS40200 driver

Micro- and nanoelectronics. Condensed matter physics

- 46** *Igor V. Lavrov, Vladimir V. Bardushkin, Victor B. Yakovlev*
Distribution of temperature field strength on the surface of graphene inclusions in a matrix composite
- 57** *Vadim M. Minnebaev*
Thermal and mechanical degradation mechanisms in heterostructural field-effect transistors based on gallium nitride

Mathematical modeling

- 74** *Vasily A. Goloveshkin, Artem A. Nickolaenko, Victor N. Samarov, Gerard Raison, Daria M. Fisunova*
Mathematical modeling of hot isotatic pressing of tubes from powder materials
- 93** *Artur A. Mitsel, Elena V. Viktorenko*
Dynamic model of BSF portfolio management
- 111** *Vasily N. Kadantsev, Alexey N. Goltsov*
Lateral proton transport induced by acoustic solitons propagating in lipid membranes
- 121** *Alexander V. Smirnov*
Method for estimating objective function landscape convexity during extremum search
- 132** *Mikhail E. Soloviev, Denis V. Malyshev, Sergey L. Baldaev, Lev Kh. Baldaev*
Mathematical modeling of technological parameters of laser powder surfacing based on approximation of the deposition track profile
- 143** *Victor B. Fedorov, Sergey G. Kharlamov, Alexey V. Fedorov*
Image restoration using a discrete point spread function with consideration of finite pixel size

УДК 004.622

<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-2-7-17>

EDN OQUHWL



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Сбор и анализ датасета для задачи автоматической генерации сообщений коммитов

И.А. Косьяненко[®],
Р.Г. Болбаков

МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, 119454 Россия

[®] Автор для переписки, e-mail: kosyanyenko.edu@gmail.com

Резюме

Цели. Для управления процессом разработки современного программного обеспечения нередко применяются системы контроля версий, которые позволяют фиксировать изменения в программном коде и передавать контекст этих изменений при помощи сообщений коммитов. Релевантное и качественное описание внешних изменений при помощи таких сообщений требует от разработчика высокой компетенции и времени, но современные методы машинного обучения позволяют решать эту задачу автоматически. Целью работы является статистический и сравнительный анализ собранной выборки данных с наборами изменений в программном коде и их описаниями на естественном языке.

Методы. В исследовании использован комплексный подход, включающий сбор данных с популярных репозиторий на GitHub, предварительную обработку и фильтрацию данных, а также статистический анализ и метод обработки естественного языка (векторизация текста). Для оценки семантической близости между первым предложением и полным текстом сообщений коммитов было использовано косинусное сходство.

Результаты. Проведено исследование структуры и качества сообщений коммитов, включающее сбор данных из репозиторий GitHub и их предварительную очистку. Осуществлена векторизация текста сообщений коммитов и оценка семантической близости между первыми предложениями и полными текстами сообщений с использованием косинусного сходства. Выполнен сравнительный анализ качества сообщений в собранном датасете и в нескольких аналогичных наборах данных с помощью классификации при помощи модели CodeBERT.

Выводы. Проведенный анализ выявил низкий уровень косинусного сходства между первыми предложениями и полными текстами сообщений коммитов (0.0969), что свидетельствует о слабой семантической связи между ними и опровергает гипотезу о том, что первые предложения выступают в качестве обобщения содержания сообщений. Процентная доля пустых сообщений в собранном наборе данных составила лишь 0.0007%, что существенно ниже ожидаемого значения и указывает на высокое качество собранных данных. Классификационный анализ показал, что доля сообщений, отнесенных к категории «плохих», в собранном датасете составляет 16.82%, что значительно ниже аналогичных показателей в других сопоставимых наборах данных, где этот процент варьируется от 34.75% до 54.26%. Данный факт подчеркивает высокое качество собранного набора данных и его адекватность для дальнейшего применения в системах автоматической генерации сообщений коммитов.

Ключевые слова: генерация сообщений коммитов, системы контроля версий, описание изменений в программном коде, косинусное сходство, фильтрация данных, векторизация текста, датасет, машинное обучение

• Поступила: 01.03.2024 • Доработана: 22.07.2024 • Принята к опубликованию: 06.02.2025

Для цитирования: Косьяненко И.А., Болбаков Р.Г. Сбор и анализ датасета для задачи автоматической генерации сообщений коммитов. *Russian Technological Journal*. 2025;13(2):7–17. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-2-7-17>, <https://elibrary.ru/OQUHWL>

Прозрачность финансовой деятельности: Авторы не имеют финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

RESEARCH ARTICLE

Dataset collection for automatic generation of commit messages

Ivan A. Kosyanenko[@],
Roman G. Bolbakov

MIREA – Russian Technological University, Moscow, 119454 Russia

[@] Corresponding author, e-mail: kosyanenko.edu@gmail.com

Abstract

Objectives. In contemporary software development practice, version control systems are often used to manage the development process. Such systems allow developers to track changes in the codebase and convey the context of these changes through commit messages. The use of such messages to provide relevant and high-quality descriptions of the changes generally requires a high level of competence and time commitment from the developer. However, modern machine learning methods can enable the automation of this task. Therefore, the work sets out to provide a statistical and comparative analysis of the collected data sample with sets of changes in the program code and their descriptions in natural language.

Methods. In this study, a comprehensive approach was used, including data collection from popular GitHub repositories, preliminary data processing and filtering, as well as statistical analysis and natural language processing method (text vectorization). Cosine similarity was used as a means of assessing the semantic proximity between the first sentence and the full text of commit messages.

Results. A comprehensive study of the structure and quality of commit messages encompassed data collection from GitHub repositories and preliminary data cleansing. The research involved text vectorization of commit messages and evaluation of semantic similarity between the first sentences and full texts of messages using cosine similarity. The comparative analysis of message quality in the collected dataset and several analogous datasets used classification based on the CodeBERT model.

Conclusions. The analysis revealed a low level of cosine similarity (0.0969) between the first sentences and full texts of commit messages, indicating a weak semantic relationship between them and refuting the hypothesis that first sentences serve as summaries of message content. The low proportion of empty messages in the collected dataset at 0.0007% was significantly lower than expected, indicating high-quality data collection. The results of classification analysis showed that the proportion of messages categorized as “poor” in the collected dataset was 16.82%, substantially lower than comparable figures in other datasets, where this percentage ranged from 34.75% to 54.26%. This fact underscores the high quality of the collected dataset and its suitability for further application in automatic commit message generation systems.

Keywords: commit message generation, version control systems, description of changes in software code, cosine similarity, data filtering, text vectorization, dataset, machine learning

• Submitted: 01.03.2024 • Revised: 22.07.2024 • Accepted: 06.02.2025

For citation: Kosyanenko I.A., Bolbakov R.G. Dataset collection for automatic generation of commit messages. *Russian Technological Journal*. 2025;13(2):7–17. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-2-7-17>, <https://elibrary.ru/OQUHWL>

Financial disclosure: The authors have no financial or proprietary interest in any material or method mentioned.

The authors declare no conflicts of interest.

Глоссарий

Датасет – коллекция (набор) данных, которая обычно обрабатывается и анализируется как единое целое. В контексте машинного обучения датасеты обычно содержат примеры, используемые для обучения модели.

Коммит – в контексте систем контроля версий является записью о конкретном наборе изменений в коде. Каждый коммит обычно сопровождается сообщением, которое описывает внесенные изменения.

ВВЕДЕНИЕ

Системы контроля версий играют ключевую роль в разработке современного программного обеспечения. Они позволяют разработчикам отслеживать и управлять изменениями в коде, обеспечивая эффективное сотрудничество и повышение качества продукта. Одними из основных элементов систем контроля версий являются коммиты – записи о каждом значимом изменении, сделанном в кодовой базе.

Сообщения коммитов играют важную роль, поскольку они предоставляют контекст для каждого изменения, помогают понять, что было сделано и почему. Так, например, при помощи сообщений коммитов предлагается обнаруживать уязвимости в программном продукте¹.

Однако написание эффективных сообщений коммитов является непростой задачей, требующей времени и усилий. Хорошее сообщение должно как описывать изменения в программном коде, так и давать пояснение причины внесенного изменения [1], и, по многим рекомендациям, его объем не должен превышать 30 слов (лексем, токенов).

Для автоматической генерации сообщений коммитов было предложено несколько подходов [2]. Тем не менее, исследования [3] показывают, что около 50% сообщений, полученных при помощи инструментов автоматической генерации, оказываются нерелевантными или некорректными.

В настоящей статье внимание фокусируется на сборе и анализе обучающих данных для алгоритма автоматической генерации сообщений коммитов.

Обучающий набор данных (датасет) является одним из важных факторов, влияющих на качество и эффективность моделей машинного обучения [4]. Он представляет собой совокупность примеров, которые используются для обучения и тестирования модели, а также для оценки ее обобщающей способности. Качество обучающего набора данных зависит от его размера, разнообразия, репрезентативности, чистоты и релевантности по отношению к задаче машинного обучения. Некачественный датасет может привести к ряду проблем в процессе обучения модели, включая переобучение [5], недообучение, высокое смещение и дисперсию. Это, в свою очередь, может снизить точность и полноту предсказаний модели. Следовательно, формирование и оптимизация обучающего набора данных являются критически важными этапами в процессе машинного обучения, требующими детального анализа, подготовки и очистки данных для обеспечения качества и эффективности модели.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И ОБЗОР СУЩЕСТВУЮЩИХ НАБОРОВ ДАННЫХ

1.1. Важность набора данных в задачах машинного обучения

В 2001 г. исследователи из Microsoft отметили [6], что, несмотря на наличие обширных текстовых корпусов в Интернете, специалисты в области обработки естественного языка продолжали использовать относительно малые наборы данных (до 1 млн слов) для обучения моделей, сосредотачиваясь в основном на оптимизации алгоритмов. В их работе подчеркивается, что различные, в т.ч. и простые, алгоритмы демонстрируют схожую высокую эффективность в задачах устранения неоднозначности языка при наличии достаточного количества данных. В ходе экспериментов четыре алгоритма обучались на данных с контекстным окном в одно слово, постепенно

¹ Wan L. *Automated vulnerability detection system based on commit messages*: магистерская диссертация. Сингапур: Наньянский технологический университет, 2019. 123 с. [Wan L. *Automated vulnerability detection system based on commit messages*: Master's Thesis. Singapore: Nanyang Technological University, 2019. 123 p.]

увеличивая объемы выборок. Результаты исследования показаны на рис. 1.

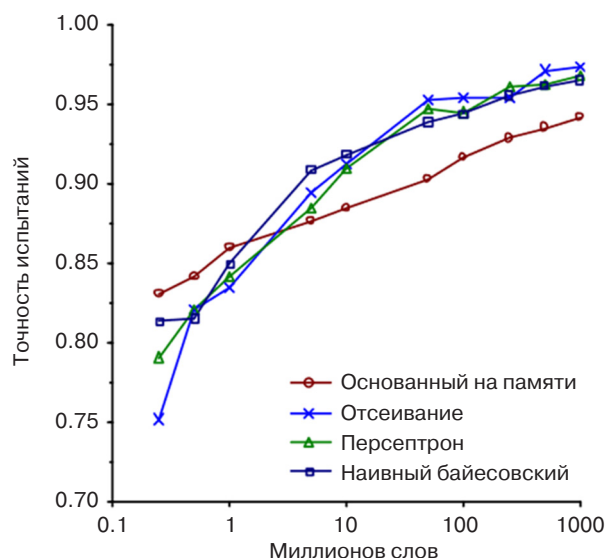


Рис. 1. Результаты экспериментов по увеличению объема обучающего корпуса текста [6]

В экспериментах авторы исследовали:

- алгоритм, основанный на памяти, который сохраняет и использует предыдущую информацию для принятия решений;
- алгоритм отсеивания, применяющий методы отбрасывания ненужных данных или шума для улучшения качества модели;
- персептрон, являющийся простейшей моделью нейронной сети, используемой для бинарной классификации;
- наивный байесовский классификатор, основанный на применении теоремы Байеса с предположением о независимости признаков.

По результатам экспериментов можно заметить, что при увеличении набора данных точность рассматриваемых алгоритмов машинного обучения значительно возрастает. Примечательно, что на малых объемах данных (менее 1 млн слов) алгоритмы показывают различную точность, однако по мере увеличения объема данных различия между ними становятся менее значительными. Авторы отметили, что полученные ими результаты могут навести на мысль о пересмотре компромисса между затратами ресурсов на разработку алгоритмов и на совокупную разработку корпуса текста (набора данных для обучения моделей).

Идея о том, что для сложных задач данные более важны, чем алгоритмы, была популяризирована П. Норвегом и другими исследователями из Google [7]. Экспертная оценка для разметки данных часто сложна и медленна из-за несогласованности оценок. Авторы статьи заключают, что полезные семантические связи могут быть получены

статистическими методами, и для обработки текстов следует использовать неразмеченные данные большого объема.

В задаче автоматической генерации сообщений коммитов обучающая выборка играет ключевую роль, т.к. качество и объем данных напрямую влияют на способность модели интерпретировать и описывать изменения в коде. Большой и разнообразный набор данных, содержащий примеры коммитов из различных проектов и написанных разными разработчиками, может улучшить способность модели к обобщению и адаптации к новым данным.

Таким образом, при решении задачи автоматической генерации сообщений коммитов необходимо уделить должное внимание сбору и подготовке обучающего набора данных, что повысит эффективность и точность модели, а также ее практическую ценность для разработчиков.

1.2. Обзор существующих наборов данных

Перейдем к обзору существующих наборов данных с сообщениями коммитов [8]:

- **CommitGen** – один из первых датасетов [9] коммитов, собранный на основе тысячи самых популярных проектов на языке Java. Из датасета исключены коммиты, не несущие смысловой нагрузки для генерации сообщений (например, rollback и merge). Также применен фильтр Verb-Direct Object (V-DO), основанный на морфологическом анализе, показавшем, что сообщения часто начинаются с глагола, за которым идет прямое дополнение [10]. В результате датасет содержит 537000 помеченных diff-файлов.
- **NNGen** [3] – улучшение CommitGen путем удаления «шумных» данных (16% от исходного набора).
- **CoDiSum** [11] – основан на CommitGen, ограничен .java файлами и очищен от специальных символов.
- **PtrGen** [12] – включает 32663 пары <код: сообщение> из 2081 высокооцененных Java-проектов, с заменой специальных символов токенами.
- **MultiLang** [13] мультиязыковой набор из трех популярных репозиторий для Python, Java, JavaScript и C++.
- **ATOM** [14] – содержит 197968 записей после фильтрации шумных сообщений и коммитов без изменений в коде из 56 наиболее популярных Java-проектов.
- **CommitChronicle** [15] – на июль 2024 г. является самым объемным набором данных с коммитами, содержит 10.7 млн коммитов для 20 разных языков программирования.

Ключевая проблема многих датасетов – сосредоточенность на Java, что ограничивает применимость потенциального инструмента для автоматического создания сообщений коммитов. Необходимо собрать набор данных, который позволит инструменту генерации работать с как можно большим количеством языков программирования и содержать информацию о связях между изменениями в коде и сообщениями к ним.

Каждый набор данных имеет свои особенности и ограничения, и выбор подходящего набора зависит от конкретных целей и требований исследования.

В исследовании [9] авторы отмечают, что примерно 14% сообщений коммитов являются пустыми, и данный факт служит одним из обоснований необходимости инструмента генерации сообщений коммитов. Проверка этой информации является одним из исследовательских вопросов данной работы.

В1: какой процент сообщений коммитов из выборки является пустым?

Гипотеза В1: примерно 14% сообщений коммитов в исследуемом датасете являются пустыми.

Результат проверки гипотезы представлен в пункте 3.2.

2. МЕТОДОЛОГИЧЕСКАЯ ОСНОВА

2.1. Планирование сбора датасета

Для преодоления ограничений на количество языков программирования в наборах данных, упомянутых ранее, перед процессом сбора данных необходимо определить перечень актуальных языков. Формируемый набор данных должен содержать изменения в программном коде, написанном на языках из выбранного множества. Таким образом, обученная на таком наборе данных модель сможет обобщать синтаксические и семантические особенности выбранных языков и на их основании синтезировать описания изменений на естественном языке. Оценить актуальность программных языков можно на основании статистических исследований².

Выбор источников данных напрямую влияет на качество финального датасета, поэтому отбор репозитория-доноров происходил в ручном режиме. Источники выбирались на основании популярности репозитория, мерой популярности служили оценки одобрения от пользователей на платформе GitHub³. Значительная часть популярных репозиториях состояла

из обучающих материалов: такие репозитории не попали в список доноров. Финальный список репозитория размещен в онлайн-приложении к статье⁴.

Исходя из специфики задачи, было принято решение извлекать следующие признаки из каждого репозитория-донора (табл. 1).

Таблица 1. Описание признаков

Признак	Описание
hash	Хеш коммита (hash). Генерируется системой контроля версий и служит идентификатором изменения
author	Идентификатор автора сообщения. Может потребоваться для формирования более обобщенной выборки, где не будет преобладать стиль конкретного автора
committer_date	Дата и время коммита
timezone	Часовой пояс автора
parents	Список родительских коммитов
message	Сообщение коммита. Описание изменений на естественном языке
language	Язык программирования (language). Основной язык репозитория
changes	Список внесенных в коммите изменений

Два признака – changes (внесенные изменения) и message (описание на естественном языке) – непосредственно являются данными, подаваемыми на вход модели генерации сообщений коммитов. Остальные признаки носят служебный характер и будут применены на этапе фильтрации собранных данных.

2.2. Методы и процедура очистки датасета

Для того, чтобы набор данных был пригоден к применению в алгоритмах машинного обучения, его необходимо подготовить. Под подготовкой понимается фильтрация данных, их очистка, и, если требуется, разработка новых признаков. От указанного выше этапа будет зависеть качество набора данных, и, следовательно, моделей, которые на нем обучаются.

В самых первых датасетах сообщений коммитов содержалось большое количество сообщений, сгенерированных при помощи «ботов» – утилит,

² Most used programming languages among developers worldwide as of 2023. Statista. <https://www.statista.com/statistics/793628/worldwide-developer-survey-most-used-languages/>. Дата обращения 10.10.2023. / Accessed October 10, 2023.

³ <https://github.com/>. Дата обращения 10.10.2023. / Accessed October 10, 2023.

⁴ Онлайн-приложение к статье. <https://gist.github.com/Malomalsky/a243e43c00adb56fd11c19242a239275>. Дата обращения 06.02.2025. [Online appendix to the article. <https://gist.github.com/Malomalsky/a243e43c00adb56fd11c19242a239275>. Accessed February 06, 2025.]

фиксирующих изменения в репозитории программного кода и добавляющих к ним тривиальные описания на естественном языке [9]. Такие сообщения могли описывать внесенные изменения (отвечать на вопрос «что было изменено?»), но не предоставляли достаточно контекста внесения этих изменений (иными словами, не отвечали на вопрос «почему изменения были внесены?») [1], и, следовательно, в качественном датасете количество таких сообщений должно быть сведено к минимуму.

Говоря формально, одной из необходимых процедур очистки собранных данных должна являться классификация сообщений на «естественные» и «сгенерированные» и фильтрация последних. Решить эту задачу можно при помощи метода сопоставления шаблонов [16] – в имени автора сообщения, сгенерированного автоматически, присутствует токен «[bot]». Таким образом, в большинстве случаев запись, в признаке «author» которой встречается такой шаблон, можно классифицировать как сгенерированную и удалить в рамках фильтрации.

Помимо сгенерированных сообщений необходимо также подвергнуть фильтрации сообщения тривиальные. Согласно таксономии сообщений коммитов [1], к таковым можно отнести сообщения, генерируемые самой системой контроля версий git (сообщения о слиянии веток в репозитории) и дублирующие сообщения – сообщения, описывающие содержимое изменений, которое легко вывести из различий в коде («Update readme.md», «Add <file name>»). Для классификации и фильтрации таких сообщений можно воспользоваться регулярными выражениями [17], составив шаблоны тривиальных сообщений при помощи синтаксиса регулярных выражений.

Одним из популярных фильтров для наборов данных для задачи автоматической генерации сообщений коммитов является фильтр V-DO, появившийся из наблюдения, что примерно половина сообщений коммитов соответствует структуре «глагол и следующий за ним объект» [10]. Формально, можно описать фильтр V-DO в виде функции:

$$f(m) = \begin{cases} 1, \exists i : (w_i - \text{глагол и } w_{i+1} - \text{объект}), \\ 0, \text{ в любом другом случае.} \end{cases} \quad (1)$$

где m – это сообщение коммита, w_i – i -е слово в сообщении m , а $f(m)$ – результат фильтрации. Если $f(m) = 1$, то сообщение коммита проходит через фильтр, в противном случае – нет. Предположим, у нас есть сообщение коммита «Minor changes to the database schema». Фильтр V-DO не пропустит это сообщение, т.к. оно не начинается с глагола, за которым следует прямое дополнение (объект). Однако сообщение коммита «Modified database schema»

будет пропущено фильтром V-DO, т.к. оно соответствует шаблону.

Одним из важных фильтров является ограничение на количество токенов (длину) в сообщении коммита [8]. Информативное и релевантное сообщение не должно быть слишком коротким или слишком длинным. Большинство исследователей [10–12] фильтровали набор данных по максимальной длине в 30 токенов, хотя более поздние работы [15] сфокусировались на диапазоне от 5 до 600 токенов в сообщении. В большинстве случаев 5 токенов недостаточно для релевантного описания внесенных изменений, а оставление в наборе длинных сообщений (больше 600 токенов) может повлечь за собой увеличение занимаемого набором дискового пространства и вычислительной сложности для его обработки.

Некоторые исследования предлагают оставлять только первое предложение от сообщения коммита [13], объясняя это тем, что первое предложение часто является обобщением всего сообщения. Такой фильтр позволил бы снизить объем дискового пространства, занимаемый набором данных, но вместе с тем потенциально принес бы потери важной семантической информации. Проверка этой гипотезы является еще одним из исследовательских вопросов работы.

B2: являются ли первые предложения в сообщениях коммитов обобщением всего сообщения?

Гипотеза B2: первые предложения в сообщениях коммитов являются обобщением всего сообщения.

Методы проверки данной гипотезы изложены в пункте 1.3, результат проверки представлен в пункте 2.3.

2.3. Методы проверки семантической близости двух текстовых последовательностей

В сфере обработки естественного языка для проверки семантической близости двух текстовых последовательностей применяется мера косинусного сходства [18, 19]. Формально, косинусное сходство отражает косинус угла между векторами предгильбертового пространства и может быть выражено в виде формулы:

$$\text{similarity} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}}, \quad (2)$$

где a_i и b_i – это соответствующие элементы векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Диапазон меры – от 0 до 1; если мера равна 0, то вектора двух последовательностей ортогональны и далеки друг от друга семантически. Если же мера равна 1, то две текстовые последовательности имеют близкое семантическое значение.

Стоит также упомянуть методы отображения символьных последовательностей в векторное (предгильбертово) пространство. Для вычисления меры на собранных данных и проверки гипотезы В2 сообщения коммитов и их первые предложения должны быть преобразованы в численные векторы одинаковой размерности. Такой процесс называется векторизацией текста – это процесс преобразования текста в числовые векторы, которые не только могут быть использованы машинными алгоритмами, но и отражают семантику текста благодаря принципу дистрибутивной семантики.

Одним из методов такой векторизации является векторизация хешированием [20]. Этот инструмент применяет хеш-функцию к словам и преобразует их в числовые индексы в векторном пространстве, сохраняя при этом семантические связи между словами.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ

3.1. Процесс сбора данных

Сбор данных велся с 15.10.2023 по 25.11.2023 г. Источником данных послужил сервис GitHub. Необработанный набор данных содержит 3141212 записей и занимает 73 ГБ дискового пространства. Распределение записей по языкам программирования представлено в табл. 2.

Таблица 2. Распределение записей по языкам программирования

Язык	Количество записей в собранном датасете
C	932003
Ruby	253331
TypeScript	251127
C++	251125
Rust	211660
Python	209374
Java	141024
Go	140211
JavaScript	121610
C#	107960
Scala	86929
Dart	86532
Kotlin	81183
Lua	61622
PHP	61399
Groovy	50647
Shell	45687
R	22190
Swift	14396
Objective-C	11200

Важно отметить, что количество записей по различным языкам программирования распределилось неравномерно, и, если того потребует задача, целесообразно было бы сделать равномерную выборку из данного набора.

3.2. Анализ и очистка собранных данных

Всего в собранном наборе данных 22 записи с пустыми сообщениями, что составляет примерно 0.0007% от общего числа всех записей. Записи с пустыми сообщениями были удалены из набора. Важно уточнить, что данные собирались из самых популярных репозиторий, которые часто принадлежат технологическим компаниям, поэтому этот показатель может не отражать реальную статистику по пустым сообщениям.

Гипотеза В1 «*примерно 14% сообщений коммитов в исследуемом датасете являются пустыми*» не подтвердилась.

В собранном наборе данных фильтру V-DO не соответствуют 2952077 сообщений, т.е. приблизительно 94%. Его применение привело бы к значительному сокращению объема набора данных, а вместе с ним и полезных зависимостей между изменениями в коде и естественным языком, поэтому было принято решение не применять данный фильтр.

В неотфильтрованном собранном наборе данных максимальная длина сообщения коммита – 68529. И это явный статистический выброс, который может негативно повлиять на работу алгоритма [21].

После удаления пустых сообщений были рассчитаны следующие статистические показатели по количеству токенов в сообщениях коммитов (табл. 3):

Таблица 3. Статистические показатели по количеству токенов в сообщениях коммитов

Статистические показатели	Значение
Количество записей (count)	3141186
Среднее (mean)	52.19
Стандартное отклонение (std)	129.61
Минимум (min)	1
25-й перцентиль	10
Медиана (50-й перцентиль)	42
75-й перцентиль	174
Максимум (max)	68529

Стандартное отклонение (примерно 129.61) довольно велико, что указывает на значительное разнообразие в длине сообщений. Максимальное значение (68529) гораздо больше, чем 75-й перцентиль (174), что указывает на наличие выбросов с очень большим количеством токенов.

Чтобы уменьшить влияние выбросов, было принято решение оставить в наборе только те записи, количество токенов в которых расположено в диапазоне от 5 до 600 (включительно). Такой фильтр сократил количество записей в наборе до 2761945 или на 12.07%. На рис. 2 представлена одномерная диаграмма типа «ящик с усами» (box plot), которая показывает распределение количества токенов в сообщениях коммитов в собранном наборе данных.

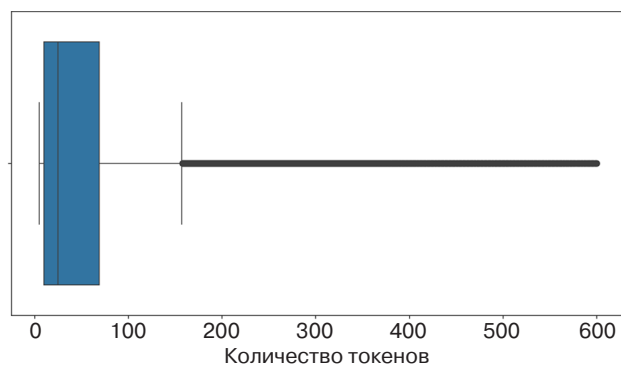


Рис. 2. Распределение количества токенов в сообщениях коммитов

Основная часть данных находится в пределах от 5 до 100 токенов, однако также видны значительные выбросы, указывающие на наличие большого числа сообщений с повышенным количеством токенов.

Для фильтрации тривиальных и сгенерированных сообщений были применены регулярные выражения. В качестве шаблонов использовались ключевые слова из утилит CI-CD, например, «*bump version to*». Помимо этого, были удалены символы, не входящие в ASCII [9] и записи, в признаке «*author*» которых встречался токен «*[bot]*». В результате применения данного фильтра было выявлено 185540 сообщений, сгенерированных автоматическими утилитами. После применения фильтра количество записей в наборе составило 2576405.

3.3. Оценка семантической близости первого предложения и целого сообщения коммита

После проведения фильтрации была проверена гипотеза [13] о том, что первое предложение в сообщении коммитов является обобщением всего сообщения.

Для проведения экспериментов по проверке этой гипотезы был создан новый признак (колонка в наборе данных), затем первые предложения и сообщения целиком были отображены в численные векторы при помощи утилиты `HashingVectorizer` из библиотеки `scikit-learn` с размерностью 1048576. Таким образом, первые предложения и сообщения целиком были преобразованы в векторы, состоящие

из 1048576 чисел каждый. Программный код реализации эксперимента доступен в онлайн-приложении к статье⁵.

Среднее значение косинусного сходства по всем сообщениям коммитов составило 0.0969. Это значение отражает степень семантической близости между первым предложением и полным текстом сообщений коммитов. Относительно низкое значение среднего косинусного сходства может указывать на то, что первое предложение часто содержит уникальную информацию, которая не полностью повторяется в остальной части сообщения. В рамках данного исследования было принято решение не сокращать объем сообщений коммитов в наборе данных до первого предложения.

Гипотеза В2 «*первые предложения в сообщениях коммитов являются обобщением всего сообщения*» не подтвердилась.

Важно отметить, что при процедуре определения косинусного сходства измеряется только угол между векторами, а не их длина. Это означает, что косинусное сходство не учитывает объем информации, содержащейся в сообщениях коммитов. Для более глубокого анализа структуры сообщений коммитов могут потребоваться более сложные методы.

3.4. Характеристики финального датасета и его сравнение с аналогами

Очищенный датасет доступен в онлайн-приложении к статье⁵. В результате фильтрации количество записей в датасете составило 2576405. Датасет содержит пары изменений для 20 языков программирования, тем самым расширяя сферу применения потенциальной модели генерации сообщений коммитов, которая будет обучаться на данном наборе. Из датасета на этапе фильтрации были удалены автоматически сгенерированные, тривиальные и пустые сообщения.

Для валидации качества датасета было принято решение провести сравнительный анализ собранного набора данных и наборов, упомянутых ранее. Для выполнения сравнительного анализа качества сообщений коммитов в предлагаемом наборе данных была использована методология классификации с применением предобученной нейронной сети «*commit-message-quality-codebert*⁶». Эта модель, основанная

⁵ Онлайн-приложение к статье. <https://gist.github.com/Malomalsky/a243e43c00adb56fd11c19242a239275>. Дата обращения 06.02.2025. [Online appendix to the article. <https://gist.github.com/Malomalsky/a243e43c00adb56fd11c19242a239275>. Accessed February 06, 2025.]

⁶ Нейронная сеть-классификатор сообщений коммитов. <https://huggingface.co/saridormi/commit-message-quality-codebert>. Дата обращения 06.02.2025. [Neural network classifier of messages to the commits. <https://huggingface.co/saridormi/commit-message-quality-codebert>. Accessed February 06, 2025.]

Таблица 4. Результаты сравнительного анализа датасетов

Название датасета	Всего записей	Классифицированы как «хорошие»	Классифицированы как «плохие»	Процент «плохих» записей
Собранный датасет	2576405	2143000	433405	16.82
NNGen	27144	12415	14729	54.26
CoDiSum	90661	56305	34356	37.90
PtrGen	32663	16826	15837	48.49
MultiLang	126928	82819	44109	34.75

на архитектуре CodeBERT [22], была дообучена [23] для задачи классификации качества сообщений коммитов на основании упомянутой ранее таксономии сообщений [1]. «Плохим» по данной таксономии является сообщение, которое не отвечает на вопросы «Почему изменения были внесены?» и «Что изменилось?», т.е. не передают контекст внесенных изменений.

Методологическая процедура анализа включала предварительную обработку данных, в ходе которой выполнялась нормализация текста (приведение к нижнему регистру) и удаление неинформативных символов. Затем сообщения коммитов из собранного набора данных и из других, доступных для сравнения наборов данных, были пропущены через нейронную сеть для автоматической классификации на основе присвоенных меток «хороший» и «плохой». Результаты классификации по каждому из наборов данных представлены в табл. 4.

Анализ результатов сравнения показывает, что доля «плохих» сообщений в собранном наборе данных составила 16.82%, что является существенно более низким показателем по сравнению с другими наборами данных.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе исследования собран обширный мультиязычный набор данных (датасет), содержащий изменения в программном коде, их описание на естественном языке, а также дополнительную метаинформацию, важную в контексте фильтрации и очистки набора данных. Очищенный от сгенерированных и тривиальных сообщений датасет размещен на хостинге данных HuggingFace⁷.

В рамках исследования были выдвинуты две гипотезы, основанные на ранних работах по тематике исследования. Гипотеза В1 состояла в том, что примерно 14% сообщений коммитов в исследуемом

датасете являются пустыми. Однако при анализе собранных данных было выявлено, что всего лишь 0.0007% сообщений коммитов в исследуемой выборке являются пустыми, что значительно меньше предполагаемого значения. Таким образом, гипотеза В1 не нашла подтверждения в ходе исследования.

Гипотеза В2 состояла в том, что первые предложения в сообщениях коммитов являются обобщением всего сообщения. Для проверки этой гипотезы проведена векторизация текста и вычислено косинусное сходство между первым предложением и полным текстом сообщений коммитов. На исследуемой выборке мера косинусного сходства составила 0.0969, что свидетельствует о низкой семантической близости между первым предложением и полным текстом сообщения. Следовательно, гипотеза В2 также не нашла подтверждения в ходе исследования.

Полученные результаты опровергают выдвинутые гипотезы и указывают на то, что пустые сообщения коммитов встречаются крайне редко, а первое предложение не является достаточным обобщением всего сообщения. Эти выводы могут служить основой для дальнейшего изучения структуры и содержания сообщений коммитов, а также для разработки систем автоматической генерации сообщений коммитов.

Разумной представляется идея проведения дальнейших исследований по векторизации файлов diff (представление изменений, генерируемое системой контроля версий). Если diff – это набор добавлений и удалений, то для векторизованного diff должны быть определены операции сложения и вычитания, причем сложение можно интерпретировать как добавление программного кода, а вычитание – как удаление из него фрагментов. Такой потенциальный алгоритм позволил бы решить задачу сведения языков программирования к единой формальной нотации, исходя из предположения о том, что одинаковые изменения программного кода, внесенные в файлы, написанные на различных языках программирования, имели бы близкое косинусное расстояние. Вопрос подлежит дальнейшему изучению.

Стоит также отметить целесообразность выявления сгенерированных сообщений при помощи

⁷ Собранный датасет. https://huggingface.co/datasets/Malolmalsky/commit_dataset. Дата обращения 06.02.2025. <https://doi.org/10.57967/hf/2216>. [Collected dataset. https://huggingface.co/datasets/Malolmalsky/commit_dataset. Accessed February 06, 2025. <https://doi.org/10.57967/hf/2216>]

нейронных сетей. Такой подход будет гораздо сложнее с вычислительной точки зрения, но при этом должен обеспечить большую точность при классификации сообщений коммитов.

Вклад авторов

И.А. Косьяненко – концептуализация исследования, разработка методологии, сбор и анализ данных, проведение вычислительных экспериментов, подготовка первоначального варианта текста статьи.

Р.Г. Болбаков – научное руководство, проверка и редактирование текста статьи, критический анализ полученных результатов.

Authors' contributions

I.A. Kosyachenko – research conceptualization, methodology development, data collection and analysis, computational experiments, preparation of the original draft of the manuscript.

R.G. Bolbakov – scientific supervision, manuscript review and editing, critical analysis of the obtained results.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

1. Tian Y., Zhang Y., Stol K., Jiang L., Liu H. What makes a good commit message? *Proceedings of the 44th International Conference on Software Engineering*. 2022;44:2389–2401. <https://doi.org/10.1145/3510003.3510205>
2. Косьяненко И.А., Болбаков Р.Г. Об автоматической генерации сообщений к коммитам в системах контроля версий. *International Journal of Open Information Technologies*. 2022;10(4):55–60.
[Kosyachenko I.A., Bolbakov R.G. About automatic generation of commit messages in version control systems. *International Journal of Open Information Technologies (INJOIT)*. 2022;10(4):55–60 (in Russ.).]
3. Liu Z., Xia X., Hassan A., Lo D., Xing Z. Neural-machine-translation-based commit message generation: how far are we? In: *Proceedings of the 33rd ACM/IEEE International Conference on Automated Software Engineering*. 2018;33:373–384. <https://doi.org/10.1145/3238147.3238190>
4. Sun Z., Li L., Liu Y., Du X., Li L. On the importance of building high-quality training datasets for neural code search. In: *Proceedings of the 44th International Conference on Software Engineering*. 2022;44:1609–1620. <https://doi.org/10.1145/3510003.3510160>
5. Hawkins D.M. The problem of overfitting. *J. Chem. Inf. Comput. Sci.* 2004;44(1):1–12. <https://doi.org/10.1021/ci0342472>
6. Banko M., Brill E. Scaling to Very Very Large Corpora for Natural Language Disambiguation. In: *Proceedings of the 39th Annual Meeting on Association for Computational Linguistics*. 2001;26–33. <https://doi.org/10.3115/1073012.1073017>
7. Halevy A., Norvig P., Pereira F. The unreasonable effectiveness of data. *IEEE Intell. Syst.* 2009;24(2):8–12. <https://doi.org/10.1109/MIS.2009.36>
8. Tao W., Wang Y., Shi E., Du L., Han S., Zhang H., Zhang D., Zhang W. On the evaluation of commit message generation models: An experimental study. In: *2021 IEEE International Conference on Software Maintenance and Evolution (ICSME)*. IEEE. 2021;126–136. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2107.05373>
9. Jiang S., McMillan C. Towards automatic generation of short summaries of commits. In: *2017 IEEE/ACM 25th International Conference on Program Comprehension (ICPC)*. IEEE. 2017;320–323. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1703.09603>
10. Мягкова Е.Ю. О «формальной» и «внутренней» грамматике. *Вестник Тверского государственного университета. Серия: Филология*. 2012;24(4):96–102.
[Myagkova E.Yu. To the problem of “formal” and “inner” grammar. *Vestnik Tverskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Filologiya = Herald of Tver State University. Series: Philology*. 2012;24(4):96–102 (in Russ.).]
11. Xu S., Yao Y., Xu F., Gu T., Tong H., Lu J. Commit message generation for source code changes. In: *Proceedings of the Twenty-Eighth International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI-19)*. 2019;3975–3981. <https://doi.org/10.24963/ijcai.2019/552>
12. Liu Q., Liu Z., Zhi H., Fan H., Du B., Qian Y. Generating commit messages from diffs using pointer-generator network. In: *2019 IEEE/ACM 16th International Conference on Mining Software Repositories (MSR)*. IEEE. 2019;299–309. <http://doi.org/10.1109/MSR.2019.00056>
13. Loyola P., Marrese-Taylor E., Matsuo Y. A neural architecture for generating natural language descriptions from source code changes. In: *Proceedings of the 55th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics*. 2017;287–292. <https://doi.org/10.18653/v1/P17-2045>
14. Liu S., Gao C., Chen S., Yiu L., Liy Y. ATOM: Commit message generation based on abstract syntax tree and hybrid ranking. *IEEE Trans. Software Eng.* 2020;48(5):1800–1817. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1912.02972>
15. Eliseeva A., Sokolov Y., Bogomolov E., Golubev Y., Dig D., Bryskin T. From Commit Message Generation to History-Aware Commit Message Completion. In: *2023 38th IEEE/ACM International Conference on Automated Software Engineering (ASE)*. IEEE. 2023;723–735. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2308.07655>
16. Dey T., Mousavi S., Ponce E. Detecting and characterizing bots that commit code. In: *Proceedings of the 17th international conference on mining software repositories*. 2020;209–219. <https://doi.org/10.1145/3379597.3387478>
17. Kuchnik M., Smith V., Amvrosiadis G. Validating large language models with ReLM. *Proceedings of Machine Learning and Systems*. 2023;5:457–476. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2211.15458>

18. Haque S., Zachary E. Semantic similarity metrics for evaluating source code summarization. In: *Proceedings of the 30th IEEE/ACM International Conference on Program Comprehension*. 2022;36–47. <https://doi.org/10.1145/3524610.3527909>
19. Rahutomo F., Kitasuka T., Aritsugi M. Semantic cosine similarity. In: *The 7th International Student Conference on Advanced Science and Technology (ICAST)*. 2012;4(1):1–2.
20. Roshan R., Bhacho I.A., Zai S. Comparative Analysis of TF–IDF and Hashing Vectorizer for Fake News Detection in Sindhi: A Machine Learning and Deep Learning Approach. *Eng. Proc.* 2023;46(1):5. <https://doi.org/10.3390/engproc2023046005>
21. Aggarwal C.C., Yu P.S. Outlier Detection in High Dimensional Data. In: *Proceedings of the 2001 ACM SIGMOD International Conference on Management of Data*. 2001;30(2):37–46. <http://dx.doi.org/10.1145/376284.375668>
22. Feng Z., Guo D., Tang F., et al. CodeBERT: A pre-trained model for programming and natural languages. In: *Findings of the Association for Computational Linguistics: EMNLP 2020*. P. 1536–1547. Online. Association for Computational Linguistics. <https://doi.org/10.18653/v1/2020.findings-emnlp.139>
23. Qasim R., Bangyal W.H. A fine-tuned BERT-based transfer learning approach for text classification. *J. Healthc. Eng.* 2022;2022:3498123. <https://doi.org/10.1155/2022/3498123>

Об авторах

Косьяненко Иван Александрович, аспирант, кафедра инструментального и прикладного программного обеспечения, Институт информационных технологий, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: kosyanenko.edu@gmail.com. SPIN-код РИНЦ 2592-5015, <https://orcid.org/0009-0009-1804-9412>

Болбаков Роман Геннадьевич, к.т.н., доцент, заведующий кафедрой инструментального и прикладного программного обеспечения, Институт информационных технологий, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: bolbakov@mirea.ru. Scopus Author ID 57202836952, SPIN-код РИНЦ 4210-2560, <http://orcid.org/0000-0002-4922-7260>

About the authors

Ivan A. Kosyanenko, Postgraduate Student, Department of Instrumental and Applied Software, Institute of Information Technologies, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: kosyanenko.edu@gmail.com. RSCI SPIN-code 2592-5015, <https://orcid.org/0009-0009-1804-9412>

Roman G. Bolbakov, Cand. Sci. (Eng.), Associate Professor, Head of the Department of Instrumental and Applied Software, Institute of Information Technologies, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: bolbakov@mirea.ru. Scopus Author ID 57202836952, RSCI SPIN-code 4210-2560, <http://orcid.org/0000-0002-4922-7260>

Информационные системы. Информатика. Проблемы информационной безопасности
Information systems. Computer sciences. Issues of information security

УДК 519.113.115+681.3

<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-2-18-26>

EDN PJVWFG



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Информационное онтологическое моделирование

В.Я. Цветков[@],
Н.С. Курдюков

МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, 119454 Россия

[@] Автор для переписки, e-mail: cvj7@mail.ru

Резюме

Цели. Несмотря на широкое применение термина «онтология» в философии и социальных науках, в области информатики онтология и, тем более, онтологическое моделирование остаются мало изученными. Также мало исследована онтология в области информационного поля. Цель работы – разработка методики информационного онтологического моделирования и исследование технологии информационного поиска в широком смысле и как части онтологического моделирования. На основе онтологического моделирования необходимо показать различие между закономерностью и функциональной зависимостью.

Методы. Для достижения цели применен логически структурный подход, включающий построение концептуальных схем и логический формализм их описания. Логически структурный подход включает построение концептуальных схем, которые служат для применения логического формализма. Основой логического моделирования является выделение родственных моделей. Для этой цели предлагается применить расширенную технологию информационного поиска, которая ищет не отдельные объекты, а группы объектов. Онтологическое исследование строится на применении перехода от качественного описания к количественному. К числу применяемых методов относится метод количественно-качественных переходов.

Результаты. Вводится новое понятие – информационное онтологическое моделирование. Обоснованы условия онтологического моделирования. Исследованы отношения между понятиями закономерности и функциональности. На этой основе дается трактовка закономерности и функциональной зависимости. Показано структурное и формальное различие между информационным моделированием, технологиями информационного поиска и онтологическим моделированием. Раскрыты три задачи информационного поиска. При онтологическом моделировании решают вторую и третью задачи информационного поиска, соответственно, поиск группы связанных между собой объектов и поиск отношений или связей внутри группы связанных между собой объектов. Даны формальные схемы онтологического моделирования. Показан переход от отношений к связям в случае онтологического моделирования.

Выводы. Доказано, что онтологическое моделирование можно применять только к родственным моделям или к моделям, между которыми существует общность. Предложена технология онтологического моделирования, в варианте которой информационный поиск является начальной частью онтологического моделирования. Вторым вариантом является применение технологии кластерного анализа. Онтологическое моделирование использует качественно-количественные переходы и в предлагаемом варианте может служить для извлечения неявного знания.

Ключевые слова: моделирование, онтологическое моделирование, информационный поиск, информационное поле, закономерность, обобщение, логически структурное описание, родственные модели

• Поступила: 23.06.2024 • Доработана: 02.08.2024 • Принята к опубликованию: 22.01.2025

Для цитирования: Цветков В.Я., Курдюков Н.С. Информационное онтологическое моделирование. *Russian Technological Journal*. 2025;13(2):18–26. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-2-18-26>, <https://elibrary.ru/PJWWFG>

Прозрачность финансовой деятельности: Авторы не имеют финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

RESEARCH ARTICLE

Informational ontological modeling

Viktor Ya. Tsvetkov[@],
Nikita S. Kurdyukov

MIREA – Russian Technological University, Moscow, 119454 Russia

[@] Corresponding author, e-mail: cvj7@mail.ru

Abstract

Objectives. Despite the wide application of the term “ontology” in philosophy and social sciences, ontological modeling in the fields of computer science and information theory remains poorly studied. The purpose of the work is to develop a methodology for the ontological modeling of information and to clarify the theory of information retrieval technology both in a broad sense and as part of ontological modeling. Relevant problems in ontological modeling include the necessity of demonstrating the difference between regularity and functional dependence.

Methods. To achieve the stated goal, a logically structural approach is used, including the construction of conceptual schemes and their description in terms of logical formalism. The logically structural approach includes the construction of conceptual schemes that serve to apply logical formalism. The basis of logical modeling involves the selection of related models. The extended information retrieval technology proposed for this purpose searches not for individual objects, but for groups of objects. Since ontological research is based on a transition from qualitative to quantitative description, the methods used include quantitative-qualitative transitions.

Results. A new concept of ontological modeling of information is introduced. The conditions of ontological modeling are substantiated. Relationships between the concepts of regularity and functionality are investigated. On this basis, an interpretation of regularity and functional dependence is given. Structural and formal differences between information modeling, information retrieval technologies, and ontological modeling are demonstrated. Three information retrieval tasks are described, of which the second and third tasks involving the search for a group of related objects and the search for relationships or connections within a group of related objects, respectively, are solved using ontological modeling. Formal schemes of ontological modeling are provided. The transition from relations to connections in the case of ontological modeling is demonstrated.

Conclusions. Ontological modeling is shown to be applicable only to related models or to models between which there is a commonality. A technology of ontological modeling is proposed, in which version information retrieval is the initial part, while the second option involves the use of cluster analysis technology. Since ontological modeling uses qualitatively quantitative transitions, the proposed variant can be used to extract implicit knowledge.

Keywords: modeling, ontological modeling, information retrieval, information field, regularity, generalization, logical structural description, related models

• Submitted: 23.06.2024 • Revised: 02.08.2024 • Accepted: 22.01.2025

For citation: Tsvetkov V.Ya., Kurdyukov N.S. Informational ontological modeling. *Russian Technological Journal*. 2025;13(2):18–26. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-2-18-26>, <https://elibrary.ru/PJWWFG>

Financial disclosure: The authors have no financial or proprietary interest in any material or method mentioned.

The authors declare no conflicts of interest.

ВВЕДЕНИЕ

В философии онтологию применяют для концептуального описания реальности [1]. В информатике онтология дифференцируется по предметным областям и относится к информационному артефакту [2]. Она включает словарь, используемый для описания тематической определенной реальности, онтологические соглашения, используемые для комплементарности, согласования понятий и контекстных отношений, схемы построения и анализа. Первоначально онтологии были предложены для проверки и построения концептуальных моделей. Проверка уходит в область логики. В связи с этим логические конструкции широко применяют в онтологическом моделировании. В настоящее время онтологии применяют для извлечения знаний и накопления опыта. При этом следует отметить информационный поиск [3] как средство для последующего онтологического моделирования. В информатике онтология выходит в область информационного поля (ИП) [4] и это дает основание ввести понятие *информационной онтологии*. Информационная онтология – это онтология в ИП. В ИП широко применяют разные виды моделирования, среди которых основным является информационное. Эта особенность дает основание говорить об информационном онтологическом моделировании [5].

Информационное онтологическое моделирование полностью согласуется с теоретическими положениями онтологии, которые связаны с определением типов, свойств и взаимосвязей сущностей [1]. Упрощенно обозначают: онтология – это теория сущностей объектов и сущностей их связей [6]. Различают формальные, описательные и формализованные онтологии. Формальная онтология была введена Эдмундом Гуссерлем в его «Логических исследованиях». Согласно Гуссерлю, объектом онтологии является изучение сущности и важных категорий. В информационных науках такой формальный подход связывает онтологию с таксономией. Необходимо разграничить онтологии информационных сущностей и онтологии информационных систем [7]. Применение онтологического подхода обусловлено потребностями современного общества. Информационная поддержка и обмен знаниями являются ключевым фактором развития информационного обществ. В условиях глобального

обмена ресурсами получение знаний и методы получения знаний заслуживают особого внимания. Однако отсутствует методология систематического информационного моделирования по этому вопросу. Онтология является одним из таких методов. В работе [8] предложен подход, основанный на онтологии, который обеспечивает семантическое представление информации.

Информационное моделирование применяют для разных целей. Одной из целей является извлечение смысла и знаний. Это сближает информационное и онтологическое моделирование. Информационное моделирование иногда трактуют как концептуальное моделирование или моделирование семантических данных. Это также сближает онтологическое моделирование с информационным. Вариант информационного моделирования направлен на построение информационной модели, в которой представлены концептуальные аспекты объективной и субъективной реальности. Концептуальная основа этой методологии опирается на онтологии и понятия, возникающие в онтологических построениях. Это составляет сущность онтологического информационного моделирования. Многообразие моделей и информационных технологий порождает избыточные требования и правила обмена данными. Чтобы улучшить эту ситуацию в работе [9] использованы онтологические принципы. В [10] представлены результаты исследования, основанного на онтологии подхода к построению информационного моделирования для облегчения обмена информацией между различными приложениями предметной области. Подход основан на общей онтологии информационной сущности, которая моделирует типы элементов ИП и отношения между ними. Информационные системы, подлежащие интеграции, должны быть смоделированы с использованием общей онтологии; каждая область знаний добавляет свои собственные свойства элементов в общую онтологию. Существует точка зрения представления онтологии как прикладной системы.

В области искусственного интеллекта онтологию применяют для обобщения и уменьшения сложности [11] информации. Для онтологий применяют топологические модели, что существенно упрощает их анализ. Существуют онтологические модели, которые можно распространить на область

информационного поиска. Такие онтологические модели можно назвать онтологическими моделями информационного поиска. Все это говорит о важности онтологий в ИП и необходимости онтологического моделирования. Онтологическое моделирование [12] направлено на обобщение свойств ряда родственных моделей, нахождение закономерностей и знаний в этом обобщении. Информационный поиск [3] предшествует онтологическому моделированию. Информационный поиск в широком смысле слова означает часть научного исследования для получения знания. Исследование сочетания онтологического моделирования и информационного поиска является новым и актуальным.

1. МЕТОДОЛОГИЯ ИССЛЕДОВАНИЯ

Использован логически структурный подход анализа. Применены вторая и третья задачи информационного поиска, суть которых раскрывается ниже. Использованы метод качественно-количественных переходов, методы сравнительного и качественного анализа.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

2.1. Концептуальные схемы

Логический структурный подход подразумевает построение графических схем, которые в дальнейшем служат основой построения логических конструкций. В системе онтологического моделирования для сравнения целесообразно рассмотреть информационное моделирование и информационный поиск как связанные процессы моделирования. Концептуальная схема информационного моделирования показана на рис. 1.

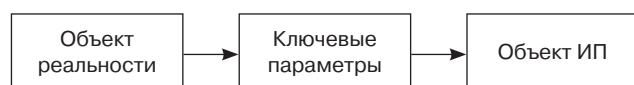


Рис. 1. Схема информационного моделирования

Основой моделирования является объект реальности, который на основе ключевых параметров, условий моделирования и поставленной задачи преобразуется в объект ИП. Синонимом объекта ИП является информационная модель. Структура модели информационного поиска показана на рис. 2.

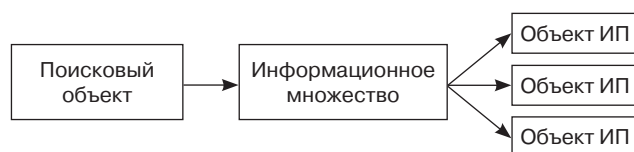


Рис. 2. Структура информационного поиска

Информационный поиск может выполняться с разными целями или задачами. Наиболее часто информационный поиск выполняют для того, чтобы найти один, нужный для пользователя объект. В первой задаче информационного поиска объект определяют из множества найденных объектов по релевантности признаков. Существует вторая задача информационного поиска – найти группу связанных между собой объектов. В третьей задаче информационного поиска необходимо найти отношения или связи внутри группы связанных между собой объектов. При онтологическом моделировании решают вторую и третью задачи поиска. Во всех случаях основой поиска является поисковая модель, которую также называют *паттерном*. Связанные объекты при решении второй и третьей задачи информационного поиска следует назвать *родственными объектами*.

Во второй и третьей задачах поиска создается дискретное множество объектов, имеющих общности. Паттерн порождает множество объектов ИП (рис. 2). Объекты ИП тождественны информационным моделям. Поэтому информационный поиск во второй и третьей задачах порождает множество информационных моделей, имеющих общности.

Сходство информационного поиска с информационным моделированием состоит в том, что в обеих технологиях формируют информационные модели. Одиночное информационное моделирование формирует одну информационную модель. Информационный поиск формирует совокупность информационных моделей. В этой совокупности на основе онтологического моделирования можно искать явные и неявные закономерности и связи. На рис. 3 приведена обобщенная модель онтологического моделирования.

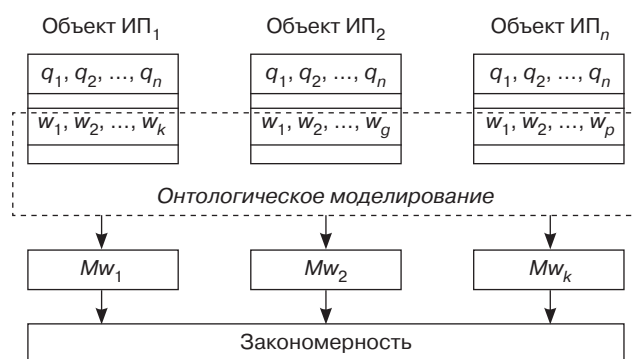


Рис. 3. Обобщенная модель онтологического моделирования

Здесь показаны 3 типа параметров: заданные или явные ($q_1, q_2, \dots, q_n$); найденные или дополнительные ($w_1, w_2, \dots, w_k$); обобщенные ($Mw_1, Mw_2, \dots, Mw_k$).

Количество этих параметров обычно разное. Количество заданных параметров может быть больше или меньше количества найденных. Количество обобщенных параметров обычно меньше найденных и заданных.

2.2. Закономерности группировки родственных объектов

Родственными называют объекты, между которыми существуют общности и явные или скрытые связи. Необходимо различать понятия *закономерность*, *связь* и *функциональная зависимость*. Закономерность, как правило, есть мягкая качественная констатация. Она имеет логическую или вербальную форму представления. Например, повышение стоимости транспортного средства повышает стоимость перевозки грузов. Связь есть жесткая зависимость одной величины от другой или объектов между собой. Например, связь между вагонами в поезде осуществляется с помощью разных видов сцепок. Сцепки могут быть разными, но жесткая связь всегда присутствует. Функциональная зависимость есть связь, определенная в явной форме в виде аналитической формы. Любой известный закон – Кулона или всемирного притяжения – есть пример функциональной зависимости.

Одним из способов нахождения родственных объектов является информационный поиск в аспекте отмеченных выше второй и третьей задачи поиска. Информационный поиск начинается с формирования поисковой сущности с использованием когнитивных методов. Пользователь может сформировать морфологический образец и дополнить его альтернативными параметрами: тип, размер, дата создания файла и другими. Принципиальным является то, что образец поиска формируется морфологически, а не семантически.

Паттерн (Pat) содержит параметры запроса $\{q\}$. Обозначение $\{\}$ применяют для описания дискретной совокупности значений. В общем виде модель поиска может быть представлена как закономерность:

$$Pat\{q_i\} \rightarrow IR(IS) \rightarrow \{Ex_j\}, j = 1, \dots, m; i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Выражение (1) интерпретируется так. Запрос $Pat\{q_i\}$ направляется в информационное множество (IS) через технологию информационного поиска IR . В результате формируется дискретное множество $\{Ex_j\}$. Величина n задает количество параметров запроса. Величина m задает количество экземпляров, выделенных в информационном множестве на основе запроса. Существует закономерность:

$$\uparrow n \rightarrow \uparrow m \rightarrow \uparrow t. \quad (2)$$

Согласно (2) рост количества параметров запроса влечет рост числа экземпляров и увеличение времени поиска t . Такая закономерность приводит к необходимости минимизировать количество параметров поиска.

Поиск $\{Ex_j\}$ как целостных объектов является объектным поиском. При этом результат запроса есть информационная модель или объект ИП, например, файл. Результат $\{Ex_j\}$ есть совокупность родственных объектов для дальнейшего анализа.

2.3. Схемы моделирования

Онтологическое моделирование есть многоэтапный процесс в отличие от информационного моделирования (рис. 1). Онтологическое моделирование начинается с выделения группы объектов, имеющих общности. Одни вариант такого выделения связан с когнитивным моделированием. Другой вариант основан на использовании технологии информационного поиска в рамках задач 2 и 3. Такой информационный поиск можно представить, как процесс кластеризации гетерогенного множества.

Объектом поиска или кластеризации могут быть информационная модель, модель процесса, модель состояния, связи и неявные знания. Эти объекты имеют разные степени абстракции. Для задачи 1 имеет место индивидуальный поиск. Для задач 2 и 3 имеет место групповой поиск. При формировании запроса на групповой поиск используют опыт эксперта или когнитивные способности субъекта. Простейшая схема поиска приведена в выражении (1).

В выражении (1) присутствуют известные, заданные параметры $(q_1, q_2, \dots, q_n)$. Рассмотрим условно 5 экземпляров в группе. Вновь найденные параметры обозначим через $(w_1, w_2, \dots, w_k)$, где k – общее количество найденных параметров. В результате запроса имеем всего $(n + k)$ параметров. Первый экземпляр группы имеет вид:

$$Ex_1(q_1, q_2, w_1, w_2, w_3, w_4). \quad (3)$$

Из выражения (3) видно, что первый экземпляр содержит 2 заданных и 4 найденных параметра. Все 6 параметров описывают первый экземпляр.

Второй экземпляр группы имеет вид:

$$Ex_2(q_1, q_3, w_6, w_5, w_2, w_4) \quad (4)$$

и также содержит 2 заданных и 4 найденных параметра. Но эти параметры отличаются: вместо q_2 появился q_3 , вместо w_2, w_3 появились w_6, w_5 . Все 6 параметров описывают второй экземпляр.

Третий экземпляр группы имеет вид:

$$Ex_3(q_1, q_3, q_n, w_1, w_3, w_6, w_8, w_4) \quad (5)$$

и содержит 3 заданных и 5 найденных параметров. Параметры отличаются от первого экземпляра. Дополнительно появился параметр q_n , вместо w_2 появились w_6, w_8 . Все 8 параметров описывают третий экземпляр.

Четвертый экземпляр группы имеет вид:

$$Ex_4(q_1, q_2, q_3, w_7, w_8, w_1, w_4) \quad (6)$$

и содержит 3 заданных и 4 найденных параметров. Параметры отличаются от первого экземпляра. Дополнительно появился параметр q_3 , вместо w_2, w_3 появились w_7, w_8 . Все 7 параметров описывают четвертый экземпляр.

Пятый экземпляр группы имеет вид:

$$Ex_5(q_1, q_3, w_1, w_5, w_9, w_4) \quad (7)$$

и содержит 2 заданных и 4 найденных параметров. Параметры отличаются от первого экземпляра. Вместо параметра q_2 появился q_3 , вместо w_2, w_3 появились w_5, w_9 . Все 6 параметров описывают пятый экземпляр.

В чем недостаток описаний экземпляров группы? Исключено описание и влияние ситуации, в которой находятся объекты. Допустимо наличие разных видов отношений между параметрами. Следует выделить разные возможные типичные отношения между параметрами:

$$Re_1(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n), \quad (8)$$

$$Re_2(q_1, q_2, w_1, \dots, w_i), \quad (9)$$

$$Re_3(w_1, w_2, \dots, w_k). \quad (10)$$

Выражение (8) говорит, что существуют отношения между параметрами запроса. Выражение (9) говорит, что существуют отношения между частью параметров запроса и частью новых найденных параметров. Выражение (10) говорит, что существуют отношения между найденными параметрами. Это возможные ситуации существования отношений.

Отношения служат основой установления возможных связей (*Con*) и функциональных зависимостей (*F*). По аналогии с (8)–(10) можно выделить 3 возможные группы связей:

$$Con_1(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n), \quad (11)$$

$$Con_2(q_1, q_2, w_1, \dots, w_i), \quad (12)$$

$$Con_3(w_1, w_2, \dots, w_k). \quad (13)$$

Выражение (11) говорит о возможном существовании связей между параметрами запроса, выражение (12) – о возможном существовании связей между частью параметров запроса и частью новых найденных параметров, выражение (13) – о возможном существовании связей между найденными параметрами.

Наличие связей может привести к функциональной зависимости, например, для выражения (12) и (13) может появиться функциональная зависимость типа:

$$\begin{aligned} Con_2(q_1, q_2, w_1, \dots, w_i) \rightarrow \\ \rightarrow Y = F_2(q_1, q_2, w_1, \dots, w_i), \end{aligned} \quad (14)$$

$$Con_3(w_1, w_2, \dots, w_k) \rightarrow Y = F_3(w_1, w_2, \dots, w_k). \quad (15)$$

Выражения (14) и (15) называют качественно-количественным переходом. С левой стороны стоит константа или логическое выражение, которое служит основой для формирования функциональной зависимости. Функциональная зависимость указана справа. Выражение (14) выдвигает гипотезу, что связи между разными параметрами могут приводить к образованию функциональной зависимости между разными параметрами. Выражение (15) выдвигает гипотезу, что связи между новыми параметрами могут приводить к образованию функциональной зависимости между новыми параметрами. Выражения (14), (15) можно рассматривать как новое знание. Такие функции появились после выявления новых параметров.

Онтологическое моделирование осуществляют на основе дополнительного анализа. Например, анализ экземпляров в выражениях (3)–(7) показывает устойчивость появления параметров q_1, w_1, w_4 . Это дает основание предположить, что данные параметры являются общими характеристиками для разных экземпляров. Они характеризуют общность. Эта общность выявлена на группе моделей, связанных общей тематикой. Общая тематика организуется либо по принципу «от частного к общему» (информационный поиск), либо по принципу «от общего к частному» (кластерный анализ).

Результат дальнейшего онтологического моделирования является трехуровневым. На первом уровне определяют и выделяют метапараметры. Для выражений (3)–(7) это q_1, w_1, w_4 и возможны новые мета-параметры как функции:

$$Mw_1 = \varphi_1(\{q\}, \{w\}), \quad (16)$$

$$Mw_2 = \varphi_2(\{q\}, \{w\}), \quad (17)$$

$$Mw_3 = \varphi_3(\{q\}, \{w\}). \quad (18)$$

Количество и состав аргументов в функциях $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ разные, и можно сделать обобщение:

$$(\{q\}, \{w\}) \rightarrow Mw_k. \quad (19)$$

В выражении (19) Mw – метапараметры, количество которых равно k .

После получения метапараметров находят отношения между ними. Это второй этап онтологического моделирования:

$$(Mw_1, Mw_2, \dots, Mw_k) \rightarrow ReW. \quad (20)$$

В выражении (20) ReW есть неявные отношения между метапараметрами, невидимые первоначально по параметрам q, w и определяемые только по метапараметрам. Новые отношения ReW дают основание искать и устанавливать новые связи:

$$(Mw_1, Mw_2, \dots, Mw_k) \rightarrow ConMw \rightarrow \psi(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k). \quad (21)$$

В выражении (21) $ConMw$ – неизвестные ранее связи, $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ – функции метапараметров, ψ – онтологическая функция.

Выражение (21) описывает новую зависимость. Эта зависимость является неявной до начала онтологического моделирования и выявляется только на его третьем этапе.

3. ОБСУЖДЕНИЕ

Онтологическое моделирование проводят на конкретных объектах или моделях. Для него необходимы родственные или связанные модели. Пока такое понятие не применяют в теории онтологического моделирования. В тоже время, это обязательное условие онтологического моделирования. Онтологический анализ моделей, которые никак не связаны, не даст достоверного результата. Онтологический анализ и онтологическое моделирование связанных внутренними свойствами моделей приводит к получению новых закономерностей и новых знаний. Онтологическое информационное моделирование на связанных моделях является одним из методов извлечения неявных знаний [13].

Важной особенностью онтологического информационного моделирования является влияние когнитивных факторов на результат моделирования. Когнитивное моделирование требуется на стадии формирования запроса на поиск родственных моделей. Это обстоятельство также слабо учитывают в теории онтологии. Недостатком когнитивного подхода является то, что когнитивные факторы создают неоднозначность формирования поискового запроса и, соответственно, неоднозначность формирования родственных моделей.

Онтологическое информационное моделирование использует модель ИП [14, 15], и само является технологией ИП. Информационное поле создает интегральную модель реальности со всеми внутренними связями и отношениями. Это дает возможность их находить с применением онтологического информационного моделирования. Преимущество ИП в том, что оно содержит все внутренние связи и отношения. Это повышает адекватность онтологического моделирования.

В настоящее время на моделирование и особенно на онтологическое моделирование влияет проблема больших данных. При онтологическом моделировании возникает необходимость кластеризации с использованием больших данных [16]. Кроме того, возникает задача интеллектуального анализа данных с учетом их объема [17]. Для этой цели необходимы специальные методы. Поэтому современные методы онтологического моделирования включают дополнительно алгоритмы обработки больших данных.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Онтологическое моделирование выполняют только на моделях, которые имеют внутреннюю общность и внутренние связи. Онтологическое моделирование и информационный поиск связаны. Их можно рассматривать как единую составную технологию. Информационный поиск в составной технологии является предварительным этапом. Он служит для выбора связанных моделей, которые являются основой последующего онтологического анализа. Онтологическое моделирование в этой составной технологии находит закономерности и функциональные зависимости. Фактически это метод получения нового знания. В процессе данного исследования уточнились понятия закономерности и функциональной зависимости. Установлено, что между ними существуют качественно-количественные переходы. Закономерность выражается с помощью логических описаний. Отношением закономерности является следование, основным отношением функциональной зависимости является эквивалентность. Закономерность дает качественное описание и качественные оценки. Функциональная зависимость позволяет количественно оценивать внутренние связи.

В данной работе для получения родственных моделей предложена технология информационного поиска в расширенном понимании группового поиска. Как альтернативу можно использовать кластерный анализ, но это предмет исследования другой работы.

Вклад авторов. Все авторы в равной степени внесли свой вклад в исследовательскую работу.

Authors' contribution. All authors equally contributed to the research work.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gigi M., Tzfadia E. Frontieriphery: An anti-positivist ontological approach to intersectional investigation. *Ethnopolitics*. 2023;23(4):1–17. <http://doi.org/10.1080/17449057.2023.2176586>
2. Bader S., Pullmann J., Mader C., et al. The international data spaces information model—an ontology for sovereign exchange of digital content. In: Pan J.Z., et al. *The Semantic Web – ISWC 2020. ISWC 2020. Series: Lecture Notes in Computer Science*. Springer; 2020. V. 12507. P. 176–192. https://doi.org/10.1007/978-3-030-62466-8_12
3. Lin J., Ma X., Lin S.C., et al. Pyserini: A Python toolkit for reproducible information retrieval research with sparse and dense representations. In: *Proceedings of the 44th International ACM SIGIR Conference on Research and Development in Information Retrieval*. 2021. P. 2356–2362. <https://doi.org/10.1145/3404835.3463238>
4. Кудж С.А. *Информационное поле*. М.: МАКС Пресс; 2017. 97 с. ISBN 978-5-317-05530-1
5. Bolbakov R.G., Sinitsyn A.V., Tsvetkov V.Ya. Onomasiological modeling in the information field. *J. Phys.: Conf. Ser. The Third International Conference on Metrological Support of Innovative Technologies (ICMSIT-III-2022)*. 2022;2373(2):2201. <http://doi.org/10.1088/1742-6596/2373/2/022010>
6. Sánchez-Zas C., Villagra V., Vega-Barbas M., et al. Ontology-based approach to real-time risk management and cyber-situational awareness. *Future Gener. Comput. Syst.* 2023;141(2):462–472. <https://doi.org/10.1016/j.future.2022.12.006>
7. Milton S., Kazmierczak E., Thomas L. Ontological foundations of data modeling in information systems. In: *AMCIS 2000 Proceedings*. 2000. P. 292. URL: <https://aisel.aisnet.org/amcis2000/292>
8. Lu W., Xiong N., Park D.S. An ontological approach to support legal information modeling. *J. Supercomput.* 2012;62:53–67. <https://doi.org/10.1007/s11227-011-0647-8>
9. Lee Y.C., Eastman C.M., Solihin W. An ontology-based approach for developing data exchange requirements and model views of building information modeling. *Adv. Eng. Informatics*. 2016;30(3):354–367. <https://doi.org/10.1016/j.aei.2016.04.008>
10. Karshenas S., Niknam M. Ontology-based building information modeling. *Comput. Civil Eng.* 2013;2013:476–483. <https://doi.org/10.1061/9780784413029.060>
11. Сигов А.С., Цветков В.Я., Рогов И.Е. Методы оценки сложности тестирования в сфере образования. *Russian Technological Journal*. 2021;9(6):64–72. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2021-9-6-64-72>
12. Kogalovsky M.R., Kalinichenko L.A. Conceptual and ontological modeling in information systems. *Program. Comput. Soft.* 2009;35:241–256. <https://doi.org/10.1134/S0361768809050016>
13. Сигов А.С., Цветков В.Я. Неявное знание: оппозиционный логический анализ и типологизация. *Вестник Российской Академии Наук*. 2015;85(9):800–804. <https://doi.org/10.7868/S0869587315080319>
14. Ostrom T.M., Pryor J.B., Simpson D.D. The organization of social information. In: *Social Cognition*. Routledge; 2022. P. 3–38.
15. Tsvetkov V.Ya., Romanchenko A., Tkachenko D., et al. The Information Field as an Integral Model. In: Silhavy R., Silhavy P. (Eds.). *Software Engineering Research in System Science. CSOC 2023. Series: Lecture Notes in Networks and Systems*. Springer. 2023;722:174–183. https://doi.org/10.1007/978-3-031-35311-6_19
16. Ikotun A.M., Ezugwu A.E., Abualigah L., et al. K-means clustering algorithms: A comprehensive review, variants analysis, and advances in the era of big data. *Inf. Sci.* 2023;622(11):178–210. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2022.11.139>
17. Thayyib P.V., Mamilla R., Khan M., et al. State-of-the-art of artificial intelligence and big data analytics reviews in five different domains: a bibliometric summary. *Sustainability*. 2023;15(5):4026. <https://doi.org/10.3390/su15054026>

REFERENCES

1. Gigi M., Tzfadia E. Frontieriphery: An anti-positivist ontological approach to intersectional investigation. *Ethnopolitics*. 2023;23(4):1–17. <http://doi.org/10.1080/17449057.2023.2176586>
2. Bader S., Pullmann J., Mader C., et al. The international data spaces information model—an ontology for sovereign exchange of digital content. In: Pan J.Z., et al. *The Semantic Web – ISWC 2020. ISWC 2020. Series: Lecture Notes in Computer Science*. Springer; 2020. V. 12507. P. 176–192. https://doi.org/10.1007/978-3-030-62466-8_12
3. Lin J., Ma X., Lin S.C., et al. Pyserini: A Python toolkit for reproducible information retrieval research with sparse and dense representations. In: *Proceedings of the 44th International ACM SIGIR Conference on Research and Development in Information Retrieval*. 2021. P. 2356–2362. <https://doi.org/10.1145/3404835.3463238>
4. Kudzh S.A. *Informacionnoe pole (Information Field)*. Moscow: MAKSS Press; 2017. 97 p. (in Russ.). ISBN 978-5-317-05530-1
5. Bolbakov R.G., Sinitsyn A.V., Tsvetkov V.Ya. Onomasiological modeling in the information field. *J. Phys.: Conf. Ser. The Third International Conference on Metrological Support of Innovative Technologies (ICMSIT-III-2022)*. 2022;2373(2):2201. <http://doi.org/10.1088/1742-6596/2373/2/022010>
6. Sánchez-Zas C., Villagra V., Vega-Barbas M., et al. Ontology-based approach to real-time risk management and cyber-situational awareness. *Future Gener. Comput. Syst.* 2023;141(2):462–472. <https://doi.org/10.1016/j.future.2022.12.006>
7. Milton S., Kazmierczak E., Thomas L. Ontological foundations of data modeling in information systems. In: *AMCIS 2000 Proceedings*. 2000. P. 292. Available from URL: <https://aisel.aisnet.org/amcis2000/292>
8. Lu W., Xiong N., Park D.S. An ontological approach to support legal information modeling. *J. Supercomput.* 2012;62:53–67. <https://doi.org/10.1007/s11227-011-0647-8>

9. Lee Y.C., Eastman C.M., Solihin W. An ontology-based approach for developing data exchange requirements and model views of building information modeling. *Adv. Eng. Informatics*. 2016;30(3):354–367. <https://doi.org/10.1016/j.aei.2016.04.008>
10. Karshenas S., Niknam M. Ontology-based building information modeling. *Comput. Civil Eng.* 2013;2013:476–483. <https://doi.org/10.1061/9780784413029.060>
11. Sigov A.S., Tsvetkov V.Ya., Rogov I.E. Method for assessing testing difficulty in educational sphere. *Russian Technological Journal*. 2021;9(6):64–72. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2021-9-6-64-72>
12. Kogalovsky M.R., Kalinichenko L.A. Conceptual and ontological modeling in information systems. *Program. Comput. Soft.* 2009;35:241–256. <https://doi.org/10.1134/S0361768809050016>
13. Sigov A.S., Tsvetkov V.Ya. Tacit knowledge: Oppositional logical analysis and typologization. *Her. Russ. Acad. Sci.* 2015;85(5):429–433. <https://doi.org/10.1134/S1019331615040073>
[Original Russian Text: Sigov A.S., Tsvetkov V.Ya. Tacit knowledge: Oppositional logical analysis and typologization. *Vestnik Rossiiskoi Akademii Nauk*. 2015;85(9):800–804 (in Russ.). <https://doi.org/10.7868/S0869587315080319>]
14. Ostrom T.M., Pryor J.B., Simpson D.D. The organization of social information. In: *Social Cognition*. Routledge; 2022. P. 3–38.
15. Tsvetkov V.Ya., Romanchenko A., Tkachenko D., et al. The Information Field as an Integral Model. In: Silhavy R., Silhavy P. (Eds.). *Software Engineering Research in System Science. CSOC 2023. Series: Lecture Notes in Networks and Systems*. Springer. 2023;722:174–183. https://doi.org/10.1007/978-3-031-35311-6_19
16. Ikotun A.M., Ezugwu A.E., Abualigah L., et al. K-means clustering algorithms: A comprehensive review, variants analysis, and advances in the era of big data. *Inf. Sci.* 2023;622(11):178–210. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2022.11.139>
17. Thayyib P.V., Mamilla R., Khan M., et al. State-of-the-art of artificial intelligence and big data analytics reviews in five different domains: a bibliometric summary. *Sustainability*. 2023;15(5):4026. <https://doi.org/10.3390/su15054026>

Об авторах

Цветков Виктор Яковлевич, д.т.н., д.э.н., профессор, профессор кафедры инструментального и прикладного программного обеспечения, Институт информационных технологий, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). Лауреат Премии Президента РФ, Лауреат Премии Правительства РФ, академик Российской академии информатизации образования, академик Российской академии космонавтики им. К.Э. Циолковского. E-mail: cvj2@mail.ru. Scopus Author ID 56412459400, ResearcherID J-5446-2013, SPIN-код РИНЦ 3430-2415, <http://orcid.org/0000-0003-1359-9799>

Курдюков Никита Сергеевич, аспирант, кафедра инструментального и прикладного программного обеспечения, Институт информационных технологий, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: nskurdyukov@gmail.com. SPIN-код РИНЦ 8535-1612, <https://orcid.org/0000-0001-6784-3369>

About the authors

Viktor Ya. Tsvetkov, Dr. Sci. (Eng.), Dr. Sci. (Econ.), Professor, Department of Instrumental and Applied Software, Institute of Information Technologies, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). Laureate of the Prize of the President of the Russian Federation, Laureate of the Prize of the Government of the Russian Federation, Academician at the Russian Academy of Education Informatization, Academician at the K.E. Tsiolkovsky Russian Academy of Cosmonautics. E-mail: cvj2@mail.ru. Scopus Author ID 56412459400, ResearcherID J-5446-2013. RSCI SPIN-code 3430-2415, <http://orcid.org/0000-0003-1359-9799>

Nikita S. Kurdyukov, Postgraduate Student, Department of Instrumental and Applied Software, Institute of Information Technologies, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: nskurdyukov@gmail.com. RSCI SPIN-code 8535-1612, <https://orcid.org/0000-0001-6784-3369>

УДК 004.6

<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-2-27-35>

EDN SRKXBR



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Логическая интеграция информационных систем на основе экспертных систем

Е.С. Шевцов,
Р.В. Шамин[@]

МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, 119454 Россия

[@] Автор для переписки, e-mail: roman@shamin.ru

Резюме

Цели. Целью статьи является разработка принципиальных основ для методов логической интеграции информационных систем (ИС) в организациях, а также получение количественной оценки топологической значимости процесса интеграции ИС.

Методы. Используются методы экспертных систем для логической интеграции информации, а также методы интеллектуального анализа данных из различных ИС. Для количественной оценки топологической значимости процедуры интеграции ИС используются методы теории графов, а для вычисления топологических инвариантов топологии взаимной связи ИС – методы дискретной топологии.

Результаты. Рассмотрены вопросы и проблемы интеграции ИС в крупных организациях, а также методы интеграции ИС, основанные на физическом и логическом принципах. Показаны сложности, которые возникают при физической интеграции ИС, и преимущества их интеграции на основе логических принципов. Установлено, что логическая интеграция обладает рядом важных достоинств, но при этом возникают новые проблемы, которые необходимо решать. Предложены схема логической интеграции ИС и алгебраический метод количественной оценки топологической значимости интеграции – важного числового показателя при логической интеграции ИС. Рассмотрены методы обучающихся экспертных систем для интеллектуального анализа данных. Использование экспертных систем является принципиальным решением для организации логической интеграции ИС.

Выводы. При интеграции ИС в организациях целесообразно использовать логическую интеграцию, сохраняющую логику отдельных ИС. Применение логической интеграции позволяет проводить интеллектуальный анализ данных, используя различные ИС. Использование экспертных систем при логической интеграции дает возможность создать новый логический слой для осуществления поддержки принятия решений в организации.

Ключевые слова: информационные системы, интеграция систем, экспертные системы, интеллектуальный анализ данных, топология информационных систем

• Поступила: 11.03.2024 • Доработана: 05.07.2024 • Принята к опубликованию: 31.01.2025

Для цитирования: Шевцов Е.С., Шамин Р.В. Логическая интеграция информационных систем на основе экспертных систем. *Russian Technological Journal*. 2025;13(2):27–35. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-2-27-35>, <https://elibrary.ru/SRKXBR>

Прозрачность финансовой деятельности: Авторы не имеют финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

RESEARCH ARTICLE

Logical integration of information systems based on expert systems

Evgeniy S. Shevtsov,
Roman V. Shamin[@]

MIREA – Russian Technological University, Moscow, 119454 Russia

[@] Corresponding author, e-mail: roman@shamin.ru

Abstract

Objectives. The study set out to develop fundamental methodological principles for the logical integration of information systems (IS) in organizations and to quantitatively assess the topological significance of the IS integration process.

Methods. Methods based on expert systems were used for the logical integration of information in conjunction with data-mining approaches based on various IS. In order to quantitatively assess the topological significance of the IS integration procedure, graph theory methods were used. Discrete topology methods were also employed for calculating the topological invariants of the IS interconnection topology.

Results. Issues and challenges involved in the integration of IS in large organizations are considered in terms of integration methods based on physical and logical principles. While IS integration approaches based on logical principles offer distinct advantages over physical integration approaches, new problems arising in the context of logical integration approaches require innovative solutions. The proposed scheme for the logical integration of IS includes an algebraic method for quantitatively assessing the topological significance of integration, comprising an important numerical indicator in the logical integration of IS. Methods based on learning expert systems, which represent a fundamental solution for organizing the logical integration of IS for intelligent data analysis, are reviewed.

Conclusions. When integrating IS in organizations, it is advisable to use a logical integration approach that preserves the logic of existing information systems. The application of logical integration enables intelligent data analysis using various IS. The use of expert systems in logical integration enables the creation of a new logical layer for providing decision support within the organization.

Keywords: information systems, systems integration, expert systems, data mining, information systems topology

• Submitted: 11.03.2024 • Revised: 05.07.2024 • Accepted: 31.01.2025

For citation: Shevtsov E.S., Shamin R.V. Logical integration of information systems based on expert systems. *Russian Technological Journal*. 2025;13(2):27–35. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-2-27-35>, <https://elibrary.ru/SRKXBR>

Financial disclosure: The authors have no financial or proprietary interest in any material or method mentioned.

The authors declare no conflicts of interest.

ВВЕДЕНИЕ

Цифровизация экономики и всех бизнес-процессов приводит к тому, что в организациях для принятия решений все больше используются различные информационные системы (ИС), в которых хранится и обрабатывается основная информация о деятельности организации [1–3]. При этом ИС, как правило, имеют различное назначение и используют разные информационные технологии. Поскольку многие ИС являются взаимосвязанными, то возникает важная задача интеграции существующих ИС. Однако полномасштабная интеграция крупных ИС представляет собой сложную проблему [4–8]. Возникающие при этом сложности являются техническими, финансовыми и организационными. Кроме того, некоторые ИС не могут быть интегрированы, поскольку их объединение может нарушить правила информационной безопасности.

В статье предложен метод интеграции ИС на основе создания интеллектуальной информационной среды. Такой метод интеграции ИС является логической интеграцией.

Логическая интеграция ИС имеет ряд преимуществ перед полной интеграцией [9]. При ее реализации можно использовать различные методы интеллектуального анализа данных, позволяющие получать дополнительную (скрытую) информацию.

В работе предложено использовать обучающиеся экспертные системы для создания единого информационного поля в организации, что является новым логическим уровнем интеграции ИС.

1. МЕТОД ИНТЕГРАЦИИ ИС

Как правило, в организациях одновременно поддерживаются несколько ИС, которые связаны едиными информационными потоками. При этом характерной особенностью этих ИС является их взаимное пересечение по объектам, информация о которых хранится и обрабатывается в этих системах. Например, это работники организации, материальные объекты, клиенты и т.д. В силу объективных причин эти ИС создаются в разное время и с использованием различных технологий. При такой организации «системы ИС» возникает ряд проблем, связанных с целостностью информации, ее достоверностью, а также

появляются проблемы, связанные с нарушением правил информационной безопасности [10]. В этом случае возникает задача интеграции различных ИС в единую информационную платформу.

Методы интеграции ИС могут быть основаны на следующих принципах:

1. Физическая интеграция.
2. Интеграция на основе бизнес-логики.

Физическая интеграция ИС подразумевает создание ИС, которая должна выполнять функции объединяемых ИС. В этом случае необходимо производить рефакторинг структуры баз данных и логики всего программного обеспечения. Этот процесс может обеспечить полноценное объединение ИС, но такая процедура является очень трудоемкой, а в ряде случаев может быть сравнимой с созданием новой ИС [11].

Интеграцию ИС на основе бизнес-логики будем называть логической интеграцией ИС, понимая под этим не только объединение баз данных, но и создание единой логики объединения информации в различных ИС (рис. 1) [12, 13].

Интеграция ИС позволяет обеспечить единую логику объединенной ИС без существенных изменений архитектуры ИС [14, 15].

Логическая интеграция ИС имеет преимущества перед физическим объединением, к которым можно отнести следующие факторы:

1. Более низкая стоимость.
2. Сохранение разнообразия.
3. Технологическая разнородность.
4. Возможность обработки данных на более высоком уровне.

Использование единой логики при интеграции ИС основывается на использовании специальных протоколов для взаимной связи между существующими ИС. Разработка таких протоколов должна опираться на специально разработанный формальный язык [16].

2. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СИСТЕМ ПРИ ЛОГИЧЕСКОЙ ИНТЕГРАЦИИ

При логической интеграции необходимо обеспечить механизмы взаимодействия между объединяемыми ИС. Это взаимодействие может быть описано формальным конечно-автоматным языком.

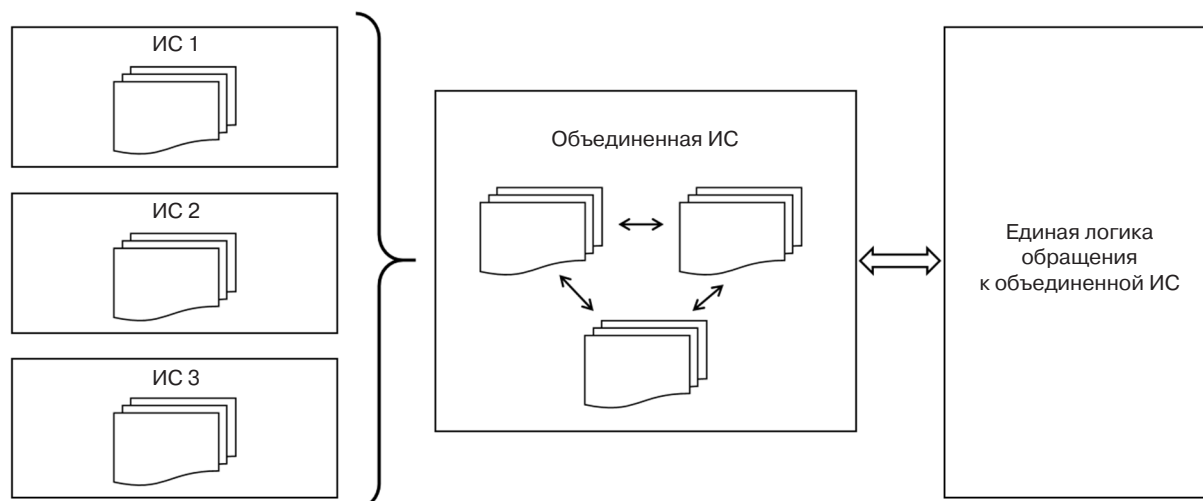


Рис. 1. Логическая интеграция ИС

Задача механизма взаимодействия состоит в том, чтобы обеспечить отображения объектов в одной ИС в объекты другой ИС. Основная трудность состоит в том, что отображаемые объекты могут иметь информационное пересечение. Например, в разных ИС может быть информация, относящаяся к работникам организации, но в разных системах эта информация может быть представлена различным образом. Кроме того, проблемой является, что разные информационные базы могут иметь различный масштаб при описании одних и тех же объектов.

Таким образом, при проектировании и реализации процедуры интеграции ИС одна из основных задач состоит в том, чтобы создать механизм логического отображения различных ИС. На рис. 2 представлена схема отображения объектов при логической интеграции.

При логическом отображении объектов в различных ИС целесообразно использовать интеллектуальную среду интеграции информационных объектов. Эта среда, используя методы семантической обработки информации, позволит реализовывать механизм отображения объектов в ИС.

3. ИЗМЕНЕНИЕ ТОПОЛОГИИ ВЗАИМОСВЯЗИ ИС В ОРГАНИЗАЦИИ

При интеграции различных ИС в организации возникает важный вопрос об изменении топологии взаимной связи этих систем. Дело в том, что для получения качественных изменений при интеграции ИС необходимо обеспечить изменения в топологии их взаимосвязи.

Топология взаимосвязи ИС описывается неориентированным графом, в котором вершины –

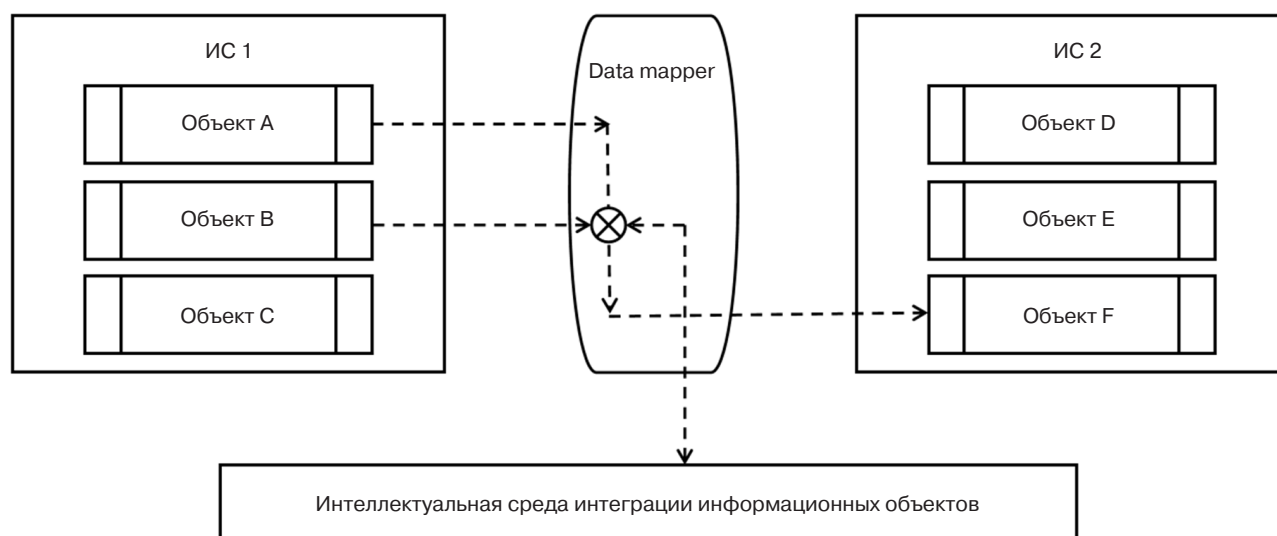


Рис. 2. Схема механизма логического отображения объектов.
Data Mapper – средство отображения данных

это отдельные ИС, а ребра – это информационные связи между системами [17]. Будем рассматривать именно неориентированные графы, поскольку для топологии сети ИС важно лишь наличие связи без учета направления потока. Дело в том, что даже однонаправленные потоки включают в себя не только поток данных, но и соответствующий запрос этих данных.

На рис. 3 приведен пример топологии связи ИС.

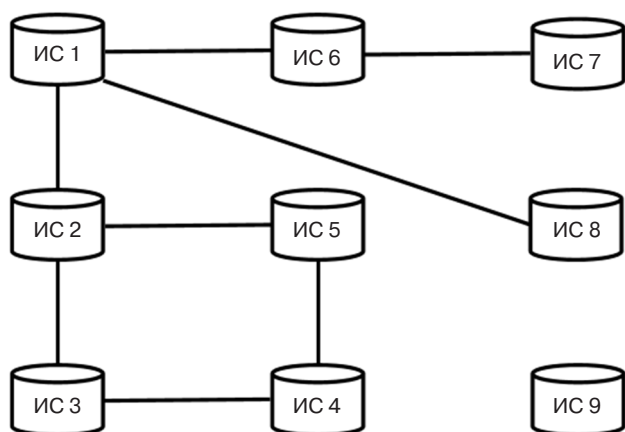


Рис. 3. Пример топологии связи ИС

В этом примере ИС с номерами 1–8 связаны информационными связями, а ИС с номером 9 не связана с другими ИС. Две ИС будем называть инцидентными, если между ними есть информационная связь.

Будем говорить, что две ИС S и P связны, если от S можно построить цепочку последовательно связанных ИС до P.

Вся сеть ИС может быть представлена компонентами связности. Каждая компонента связности представляет собой набор отдельных ИС, являющихся попарно связными.

Процесс интеграции ИС будем рассматривать как последовательную операцию объединения соседних вершин (инцидентных ИС). При этом объединенная ИС наследует все информационные связи объединенных вершин.

На рис. 4 показана топология ИС после объединения ИС:

$$\begin{aligned} [1, 2] &\rightarrow [1-2], \\ [4, 5] &\rightarrow [5-4], \\ [6, 7] &\rightarrow [6-7]. \end{aligned}$$

Для того, чтобы отличать существенные изменения в топологии связи ИС будем использовать топологические инварианты. В качестве такого варианта рассмотрим фундаментальную группу для графа, описывающего топологию связи ИС. Фундаментальную группу определим как множество

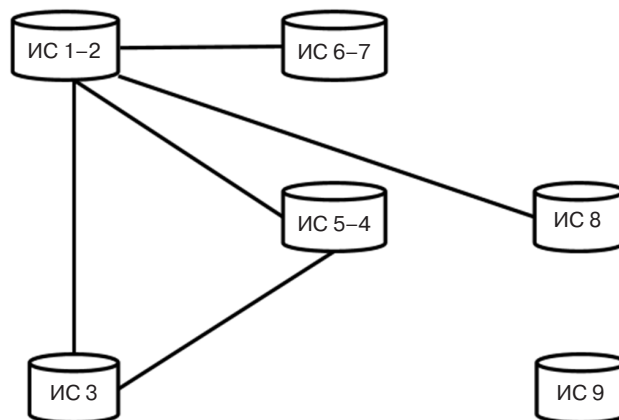


Рис. 4. Топология после объединения ИС

классов эквивалентности гомотопных петель в графе [18]. Для связной компоненты сети ИС фундаментальная группа определяет количество циклов. Если связный граф, представляющий топологию связи ИС, имеет N циклов, тогда фундаментальная группа изоморфна группе $\mathbb{Z}^N$ [19].

Наличие циклов в сети ИС организации говорит о необходимости интеграции ИС, поскольку при наличии циклов в сети информационных связей возникают угрозы неоднозначности представления информации при информационных запросах в организацию, т.к. возможны неоднозначные пути передачи информации между различными ИС.

При интеграции ИС не могут возникнуть новые циклы, но могут быть разомкнуты существующие циклы. На языке фундаментальных групп графа связи ИС это означает, что в процессе интеграции ИС происходит следующее изменение представления фундаментальных групп:

$$\mathbb{Z}^N \rightarrow \mathbb{Z}^{N-k}.$$

В этой трактовке можно определить топологическую значимость процедуры интеграции ИС как число k , на которое уменьшается степень фундаментальной группы.

4. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭКСПЕРТНЫХ СИСТЕМ ДЛЯ ЛОГИЧЕСКОЙ ИНТЕГРАЦИИ ИС

Логическая интеграция ИС в организации преследует различные цели, главная из которых состоит в том, чтобы создать единое информационное поле. Эта проблема не может быть решена с использованием «механических» методов, поскольку выборки из различных ИС необходимо привести к «общему знаменателю», чтобы было возможным получить однообразную информацию. Другая задача, которая возникает в связи с этим, состоит в том, чтобы получать дополнительную информацию о деятельности



Рис. 5. Схема использования экспертной системы

организации, основываясь на разнородной информации в различных ИС.

Для решения этих задач при логической интеграции ИС предлагается использовать обучаемые экспертные системы и базы знаний. В качестве предметной области базы знаний используются объекты, описываемые в ИС.

На рис. 5 представлена схема применения экспертной системы при логической интеграции ИС. Ключевым элементом предложенной схемы является использование маршрутизатора запросов к ИС и интеллектуальная среда интегрированных ИС. При логической интеграции ИС возникает интеллектуальная среда, которая способна предоставлять информацию из разных источников по входящему запросу для дальнейшей логической интеграции разнородной информации. Для определения ИС, к которым нужно сформировать информационные запросы, используется маршрутизатор запросов, который на основании отображении информации в разных ИС находит наиболее подходящие источники данных.

После осуществления логической интеграции информации из разных ИС формируется содержательный запрос к экспертной системе, которая, используя базу знаний, позволяет сформировать результат на полученный запрос [20, 21].

Архитектура экспертной системы зависит от характера объектов, описываемых ИС, а также от полноты информации для каждого объекта [22]. Общая

схема архитектуры экспертной системы и базы знаний представлена на рис. 6.

Архитектура экспертной системы включает в себя механизм для обучения по результатам работы, что позволяет совершенствовать процедуру Data mining (интеллектуальный анализ данных) по интегрированным данным.

На рис. 6 сплошными стрелками показан последовательный процесс вычисления и получения результата работы экспертной системы. Контурные стрелки показывают передачу данных для осуществления процедуры обучения экспертной системы. Штриховые стрелки показывают поток данных для экспертной системы из интегрированных ИС.

Принципиальным моментом является использование информационных квантов для представления интегрированной информации из ИС. Конкретная реализация процедуры представления данных в виде информационных квантов зависит от характера объектов в ИС и структуры их взаимодействия.

Для осуществления процесса обучения экспертной системы используется блок оценки результата. Этот блок может быть реализован с использованием обратной связи от пользователя экспертной системы либо быть реализован на основании оценки системой искусственного интеллекта. В случае, когда используется какой-либо метод искусственного интеллекта (нейронная сеть, байесовские сети, решающие деревья и т.д.), обучение может быть реализовано на основании методов машинного обучения с подкреплением [23].

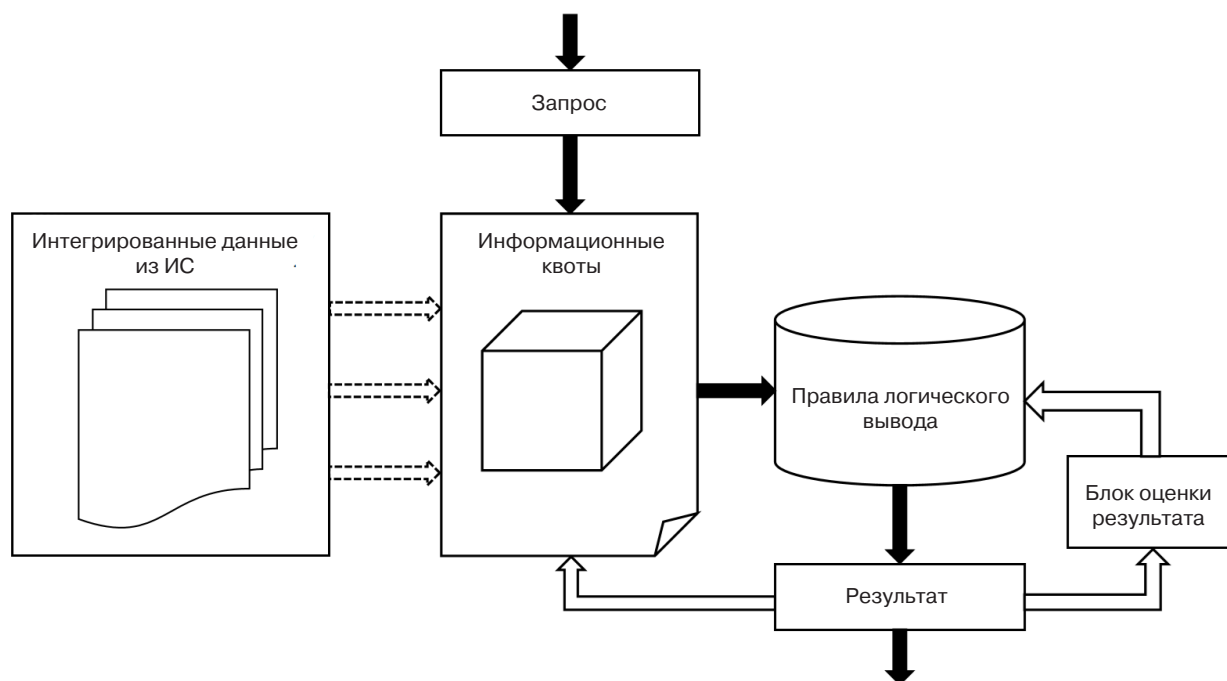


Рис. 6. Архитектура обучающейся экспертной системы

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрены принципиальные вопросы интеграции ИС в организациях на основе интеллектуальных методов. Введено понятие логической интеграции ИС и показано, что использование логических методов интеграции позволяет осуществлять процедуры интеграции разнородных ИС.

Рассмотрены вопросы топологической значимости процедуры интеграции ИС.

Ключевым моментом для логической интеграции ИС и создания единой информационной среды является использование экспертной системы, запросы к которой позволяют оперировать интегрированными информационными потоками. Более того, экспертная система позволит реализовать интеллектуальный анализ данных.

В предложенной архитектуре экспертных систем заложены механизмы для обучения (самообучения) базы знаний экспертной системы, что дает возможность для совершенствования результатов интеграции ИС в организации.

Вклад авторов

Е.С. Шевцов – концептуальная модель интеграции информационных систем на основе создания интеллектуальной информационной среды.

Р.В. Шамин – математическая модель интеграции информационных систем на основе создания интеллектуальной информационной среды.

Authors' contributions

E.S. Shevtsov – conceptual model of integration of information systems based on the creation of an intelligent information environment.

R.V. Shamin – mathematical model of integration of information systems based on the creation of an intelligent information environment.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Спиридонов Э.С., Клыков М.С., Рукин М.Д., Григорьев Н.П., Балалаева Т.И., Смуров А.В. *Информационная экономика*. М.: URSS; 2021. 286 с.
2. Калянов Г.Н., Лукинова О.В., Левочкина Г.А., Васильев Р.Б. *Стратегическое управление информационными системами*. М.: Просвещение/Бином; 2019. 510 с.
3. Прохоров А., Коник Л. *Цифровая трансформация. Анализ, тренды, мировой опыт*. М.: ООО «КомНьюс Групп»; 2019. 368 с.
4. Лойко В.И., Луценко Е.В., Орлов А.И. *Современная цифровая экономика*. Краснодар: КубГАУ; 2018. 508 с.
5. Чурсин А.А., Юдин А.В. *Киберэкономика в практике: создание радикально новой продукции в цифровую эпоху*. М.: Экономика; 2021. 301 с.
6. Белалова Г.А. Анализ методов интеграции информационных систем. *Цифровые модели и решения*. 2023;2(3):61–68.

7. Карев А.Н., Федосин С.А. Онтологический подход к интеграции информационных систем. *Перспективы науки*. 2023;168(9):26–29.
8. Беляев А.К., Критская С.Н. Интеграция информационных систем в действии. *Информационные технологии в УИС*. 2022;1:34–40.
9. Weber R.H., Burri M. *Classification of Services in the Digital Economy*. Berlin, Heidelberg: Springer; 2012. 144 p.
10. Бабаш А.В., Баранова Е.К. *Актуальные вопросы защиты информации*. М.: ИНФРА-М, РИОР Наука; 2023. 111 с. ISBN 978-5-36901-680-0
11. Мартин Р. *Чистая архитектура. Искусство разработки программного обеспечения*. СПб.: Питер; 2022. 352 с.
12. Черняк Л. Интеграция данных: синтаксис и семантика. *Открытые системы*. СУБД. 2009;10. URL: <https://www.osp.ru/os/2009/10/11170978>
13. Антамошин А.Н., Блинова О.В., Бобов А.В., Большаков А.А., Лобанов В.В., Кузнецова И.Н. *Интеллектуальные системы управления организационно-техническими системами*. М.: Горячая линия – Телеком; 2006. 160 с.
14. Норенков И.П. *Автоматизированные информационные системы*. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана; 2011. 344 с.
15. Мазепа Р.Б., Михайлов В.Ю. *Основы информационных технологий. Введение в процессы информационного взаимодействия*. М.: Вузовская книга; 2012. 60 с.
16. Магазов С.С. *Теория формальных языков. Регулярные языки*. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана; 2023. 52 с.
17. Харари Ф., Палмер Э. *Перечисление графов*: пер. с англ. М.: Мир; 1977. 328 с.
18. Фоменко А.Т., Фукс Д.Б. *Курс гомотопической топологии*. М.: URSS; 2024. 512 с.
19. Хатчер А. *Алгебраическая топология*: пер. с англ. М.: МЦНМО; 2011. 688 с.
20. Джарратано Дж., Райли Г. *Экспертные системы: принципы разработки и программирование*: пер. с англ. М.: ИД Вильямс; 2007. 1152 с.
21. Бодров О.А., Медведев Р.Е. *Предметно-ориентированные экономические информационные системы*. М.: Горячая линия – Телеком; 2013. 244 с.
22. Ручкин В.Н., Фулин В.А. *Универсальный искусственный интеллект и экспертные системы*. СПб.: БХВ-Петербург; 2009. 224 с.
23. Sutton R.S., Barto A.G. *Reinforcement Learning: An Introduction*. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press; 2018. 526 p.

REFERENCES

1. Spiridonov E.S., Klykov M.S., Rukin M.D., Grigoriev N.P., Balalaeva T.I., Smurov A.V. *Informatsionnaya ekonomika (Information Economy)*. Moscow: URSS; 2021. 286 p. (in Russ.).
2. Kalyanov G.N., Lukinova O.V., Levochkina G.A., Vasilev R.B. *Strategicheskoe upravlenie informatsionnymi sistemami (Strategic Management of Information Systems)*. Moscow: Prosveshchenie/Binom; 2019. 510 p. (in Russ.).
3. Prokhorov A., Konik L. *Tsifrovaya transformatsiya. Analiz, trendy, mirovoi opyt (Digital Transformation. Analysis, Trends, World Experience)*. Moscow: KomN'yus Grup; 2019. 368 p. (in Russ.).
4. Loiko V.I., Lutsenko E.V., Orlov A.I. *Sovremennaya tsifrovaya ekonomika (Modern Digital Economy)*. Krasnodar: KubSAU; 2018. 508 p. (in Russ.).
5. Chursin A.A., Yudin A.V. *Kiberekonomika v praktike: sozdanie radikal'no novoi produktsii v tsifrovuyu epokhu (Cybereconomics in Practice: Creating Radically New Products in the Digital Era)*. Moscow: Ekonomika; 2021. 301 p. (in Russ.).
6. Belalova G.A. Analysis of information systems integration methods. *Tsifrovye modeli i resheniya = Digital Models and Solutions*. 2023;2(3):61–68 (in Russ.).
7. Karev A.N., Fedosin S.A. Ontological approach to information systems integration. *Perspektivy nauki = Science Prospects*. 2023;168(9):26–29 (in Russ.).
8. Belyaev A.K., Kritskaya S.N. Integration of information systems in action. *Informatsionnye tekhnologii v UIS = Information Technologies in the Penal System*. 2022;1:34–40 (in Russ.).
9. Weber R.H., Burri M. *Classification of Services in the Digital Economy*. Berlin, Heidelberg: Springer; 2012. 144 p.
10. Babash A.V., Baranova E.K. *Aktual'nye voprosy zashchity informatsii (Current Issues of Information Security)*. Moscow: INFRA-M, RIOR Nauka; 2023. 111 p. (in Russ.). ISBN 978-5-36901-680-0
11. Martin R. *Chistaya arkhitektura. Iskusstvo razrabotki programmnogo obespecheniya (Clean Architecture. The Art of Software Development)*. St. Petersburg: Piter; 2022. 352 p. (in Russ.).
12. Chernyak L. Data integration: syntax and semantics. *Otkrytye sistemy. SUBD = Open Systems. DBMS*. 2009;10 (in Russ.). Available from URL: <https://www.osp.ru/os/2009/10/11170978>
13. Antamoshin A.N., Bliznova O.V., Bobov A.V., Bolshakov A.A., Lobanov V.V., Kuznetsova I.N. *Intellektual'nye sistemy upravleniya organizatsionno-tekhnicheskimi sistemami (Intelligent Control Systems for Organizational and Technical Systems)*. Moscow: Goryachaya liniya – Telekom; 2006. 160 p. (in Russ.).
14. Norenkov I.P. *Avtomatizirovannye informatsionnye sistemy (Automated Information Systems)*. Moscow: Bauman Press; 2011. 344 p. (in Russ.).
15. Mazepa R.B., Mikhailov V.Yu. *Osnovy informatsionnykh tekhnologii. Vvedenie v protsessy informatsionnogo vzaimodeistviya (Fundamentals of Information Technology. Introduction to Information Interaction Processes)*. Moscow: Vuzovskaya kniga; 2012. 60 p. (in Russ.).

16. Magazov S.S. *Teoriya formal'nykh yazykov. Regulyarnye yazyki (Theory of Formal Languages. Regular Languages)*: eBook. Moscow: Bauman Press; 2023. 52 p. (in Russ.).
17. Harary F., Palmer E. *Perechislenie grafov (Graphical Enumeration)*: transl. from Engl. Moscow: Mir; 1977. 328 p. (in Russ.). [Harary F., Palmer E. *Graphical Enumeration*. New York, London: Academic Press; 1973. 271 p.]
18. Fomenko A.T., Fuks D.B. *Kurs gomotopicheskoi topologii (Course on Homotopic Topology)*. Moscow: URSS; 2024. 512 p. (in Russ.).
19. Hatcher A. *Algebraicheskaya topologiya (Algebraic Topology)*: transl. from Engl. Moscow: MTsNMO; 2011. 688 p. (in Russ.). [Hatcher A. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press; 2005. 556 p.]
20. Giarratano J., Riley G. *Ekspertnye sistemy: printsipy razrabotki i programmirovaniye (Expert Systems: Principles of Development and Programming)*: transl. from Engl. Moscow: Vil'yams; 2007. 1152 p. (in Russ.). [Giarratano J., Riley G. *Expert Systems: Principles and Programming*. Thomson Course Technology; 2005. 842 p.]
21. Bodrov O.A., Medvedev R.E. *Predmetno-orientirovannyye ekonomicheskie informatsionnyye sistemy (Subject-Oriented Economic Information Systems)*. Moscow: Goryachaya liniya – Telekom; 2013. 244 p. (in Russ.).
22. Ruchkin V.N., Fulin V.A. *Universal'nyi iskusstvennyi intellekt i ekspertnye sistemy (Universal Artificial Intelligence and Expert Systems)*. St. Petersburg: BKhV-Peterburg; 2009. 224 p. (in Russ.).
23. Sutton R.S., Barto A.G. *Reinforcement Learning: An Introduction*. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press; 2018. 526 p.

Об авторах

Шевцов Евгений Сергеевич, аспирант, кафедра технологий искусственного интеллекта, Институт искусственного интеллекта, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: shevcov@mirea.ru. <http://orcid.org/0009-0007-8881-9406>

Шамин Роман Вячеславович, д.ф.-м.н., профессор, кафедра индустриального программирования, Институт перспективных технологий и индустриального программирования, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: roman@shamin.ru. Scopus Author ID 6506250832, SPIN-код РИНЦ 8966-0169, <https://orcid.org/0000-0002-3198-7501>

About the authors

Evgeniy S. Shevtsov, Postgraduate Student, Department of Artificial Intelligence Technologies, Institute of Artificial Intelligence, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: shevcov@mirea.ru. <http://orcid.org/0009-0007-8881-9406>

Roman V. Shamin, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Department of Industrial Programming, Institute for Advanced Technologies and Industrial Programming, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: roman@shamin.ru. Scopus Author ID 6506250832, RSCI SPIN-code 8966-0169, <https://orcid.org/0000-0002-3198-7501>

УДК 621.314.1+681.586.7

<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-2-36-45>

EDN TIPRXB



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Проектирование DC/DC-преобразователя, построенного по Zeta-топологии на базе драйвера TPS40200

В.К. Битюков ¹,
А.И. Лавренов ^{1, @},
Д.А. Малицкий ²

¹ МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, 119454 Россия

² ООО «СПУТНИКС», Москва, 121205 Россия

@ Автор для переписки, e-mail: lavrenov@mirea.ru

Резюме

Цели. Целью работы является исследование типовых характеристик разработанного Zeta-преобразователя на основе драйвера TPS40200 (Texas Instruments, США) при различных входных напряжениях и нагрузках и сравнение экспериментальных характеристик Zeta-преобразователя с аналогичными, полученными при помощи SPICE¹-моделирования в системе автоматизированного проектирования (САПР) *Multisim*, а также с помощью предельной непрерывной математической модели.

Методы. Использована предельная непрерывная математическая модель Zeta-преобразователя и САПР *Multisim*. Принципиальная электрическая схема преобразователя разработана по методике расчета обвязки драйвера TPS40200, представленной в его технической документации. С использованием САПР *Altium Designer* произведена разводка печатной платы.

Результаты. Спроектирован и создан экспериментальный стенд DC/DC-преобразователя, построенного по Zeta-топологии со связанными дросселями на базе драйвера TPS40200. Результаты исследования показали высокую корреляцию как его нагрузочных характеристик, так и его постоянных и переменных составляющих токов, протекающих через обмотки дросселей, и напряжений на конденсаторах от входного напряжения при двух сопротивлениях нагрузки 50 и 100 Ом, полученных различными методами: экспериментальным, расчетным и моделированием.

Выводы. Предельная непрерывная математическая модель преобразователя и метод расчета, основанный на ней, являются базой для проектирования DC/DC-преобразователей, построенных по топологии Zeta. Экспериментально доказана достоверность математической модели, а также метода проектирования. Предложенный метод проектирования позволяет учесть магнитную связь и активное сопротивление обмоток дросселей. Учет магнитной связи позволяет уменьшить номиналы дросселей до двух раз при неизменных пульсациях либо уменьшить пульсации до двух раз при неизменных номиналах дросселей.

Ключевые слова: DC/DC-преобразователь, топология Zeta, преобразователь, математическая модель, метод проектирования, TPS40200, Altium Designer, Multisim, печатная плата

¹ SPICE (англ. Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis) – программа-симулятор электронных схем общего назначения с открытым исходным кодом. [SPICE (Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis) is an open source simulator of general-purpose electronic circuits.]

• Поступила: 05.06.2024 • Доработана: 16.08.2024 • Принята к опубликованию: 06.02.2025

Для цитирования: Битюков В.К., Лавренов А.И., Малицкий Д.А. Проектирование DC/DC-преобразователя, построенного по Zeta-топологии на базе драйвера TPS40200. *Russian Technological Journal*. 2025;13(2):36–45. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-2-36-45>, <https://elibrary.ru/TIPRXB>

Прозрачность финансовой деятельности: Авторы не имеют финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

RESEARCH ARTICLE

Zeta topology DC/DC converter design based on TPS40200 driver

Vladimir K. Bityukov ¹,
Aleksey I. Lavrenov ^{1, @},
Daniil A. Malitskiy ²

¹ MIREA – Russian Technological University, Moscow, 119454 Russia

² Sputniks, Moscow, 121205 Russia

@ Corresponding author, e-mail: lavrenov@mirea.ru

Abstract

Objectives. The study set out to investigate typical characteristics of a Zeta converter developed by the authors based on the TPS40200 driver under various input voltages and loads and compare the experimental characteristics of the Zeta converter with those obtained through SPICE¹ simulation in the *Multisim* computer-aided design (CAD) system, as well as with the results derived from a continuous-time mathematical model.

Methods. A continuous-time mathematical model of the Zeta converter and the *Multisim* CAD system were used. The schematic diagram of the converter was developed according to the TPS40200 driver circuit design methodology presented in its datasheet. The printed circuit board layout was created using the *Altium Designer* CAD system.

Results. An experimental test bench of the Zeta topology DC/DC converter was designed and built using coupled chokes based on the TPS40200 driver. The results of the study showed a high correlation of both its load characteristics and its DC and AC components of currents flowing through the choke windings and capacitor voltages from the input voltage at two load resistances of 50 and 100 Ohm obtained by experimental, computational, and modeling methods.

Conclusions. The continuous-time mathematical model of the converter, along with the calculation method based on it, forms a foundation for the design of DC/DC converters using the Zeta topology. The experiment confirms the validity of both the mathematical model and the calculation method. The proposed design methods takes the magnetic coupling and the active resistance of inductors into account. The magnetic coupling permits a two-fold reduction of inductor values while maintaining the same ripple or a reduction in the ripple by up to half with unchanged inductor values.

Keywords: DC/DC converter, Zeta topology, converter, mathematical model, design method, TPS40200, Altium Designer, Multisim, printed circuit board

¹ SPICE (Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis) is an open source simulator of general-purpose electronic circuits.

• Submitted: 05.06.2024 • Revised: 16.08.2024 • Accepted: 06.02.2025

For citation: Bityukov V.K., Lavrenov A.I., Malitskiy D.A. Zeta topology DC/DC converter design based on TPS40200 driver. *Russian Technological Journal*. 2025;13(2):36–45. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-2-36-45>, <https://elibrary.ru/TIPRXB>

Financial disclosure: The authors have no financial or proprietary interest in any material or method mentioned.

The authors declare no conflicts of interest.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальной тенденцией развития современных автономных радиоустройств является уменьшение массогабаритных параметров и улучшение тактико-технических характеристик используемых в них преобразователей электроэнергии [1–3]. Традиционно для электропитания подобных устройств используются дроссельные DC/DC-преобразователи различных топологий [4–6]. В топологиях, где используются два дросселя для накопления и передачи энергии, уже долгое время принято использовать связанные дроссели, что позволяет уменьшить их массогабаритные параметры, а также улучшить основные характеристики стабилизатора [7, 8]. Примеры современных устройств, построенных на основе связанных дросселей, приведены в [9, 10]. Основой проектирования таких преобразователей часто являются их математические модели [11–15]. Экспериментальное исследование преобразователя, построенного с использованием метода расчета, предложенного в [16], ранее не проводилось, а проверка достоверности этого метода выполнена сравнением расчетных характеристик с результатами моделирования. Поэтому было принято решение об экспериментальном исследовании DC/DC-преобразователя, построенного по Zeta-топологии со связанными дросселями.

1. ПРИНЦИПИАЛЬНАЯ СХЕМА ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ НА ОСНОВЕ ДРАЙВЕРА TPS40200

В качестве драйвера для построения Zeta-преобразователя выбрана микросхема TPS40200 (Texas Instruments, США) по ряду причин. Во-первых, данный драйвер может обеспечить коэффициент полезного действия до 95% при различных токах нагрузки и в широком диапазоне входных и выходных напряжений¹. Во-вторых, эта микросхема

достаточно простая, и весь необходимый функционал настраивается с помощью внешней обвязки, что позволяет использовать этот драйвер для управления Zeta-преобразователем, хотя подобный функционал производителем не заявлен. В-третьих, значимыми факторами выбора именно этого драйвера были его цена и доступность.

Принципиальная электрическая схема DC/DC-преобразователя, построенного на драйвере TPS40200, состоит из двух функциональных частей, рассчитываемых отдельно друг от друга (рис. 1). Первая часть, отвечающая за логику устройства, – это драйвер TPS40200 и все прилегающие к нему элементы. Вторая часть – силовая часть преобразователя, построенного по топологии Zeta, отвечающая за преобразование постоянного тока. Номиналы элементов Zeta-топологии были рассчитаны с помощью метода проектирования [16], основанного на предельной непрерывной математической модели преобразователя.

С помощью частотно-задающей цепи R1C1 на первом контакте RC драйвера TPS40200 формируется пилообразный сигнал необходимой частоты. Частота коммутации силового ключа VT1 выбрана равной 500 кГц, но из-за отклонений параметров элементов электронной компонентной базы в пределах технологических допусков реальная частота коммутации может варьироваться.

Часть схемы, отвечающая за пороговое значение входного тока Zeta-преобразователя, состоит из токоопределяющего резистора R7 и сглаживающего фильтра R6C6, необходимого для снижения влияния высокочастотной составляющей, возникающей при переключении силового ключа VT1. C2 – запускающий конденсатор, определяющий время запуска 9 мс. C3C4R2 – частотно-компенсирующая цепочка, частота среза которой примерно в 6–10 раз меньше частоты коммутации.

На принципиальной электрической схеме рассмотрены выводы PLS-40, обозначенные TP и P, для контроля токов и напряжений, соответственно.

¹ TPS40200 Datasheet. TPS40200 Wide Input Range Non-Synchronous Voltage Mode Controller datasheet (Rev. G). Texas Instruments. SLUS659G–FEBRUARY 2006–REVISED NOVEMBER 2014.

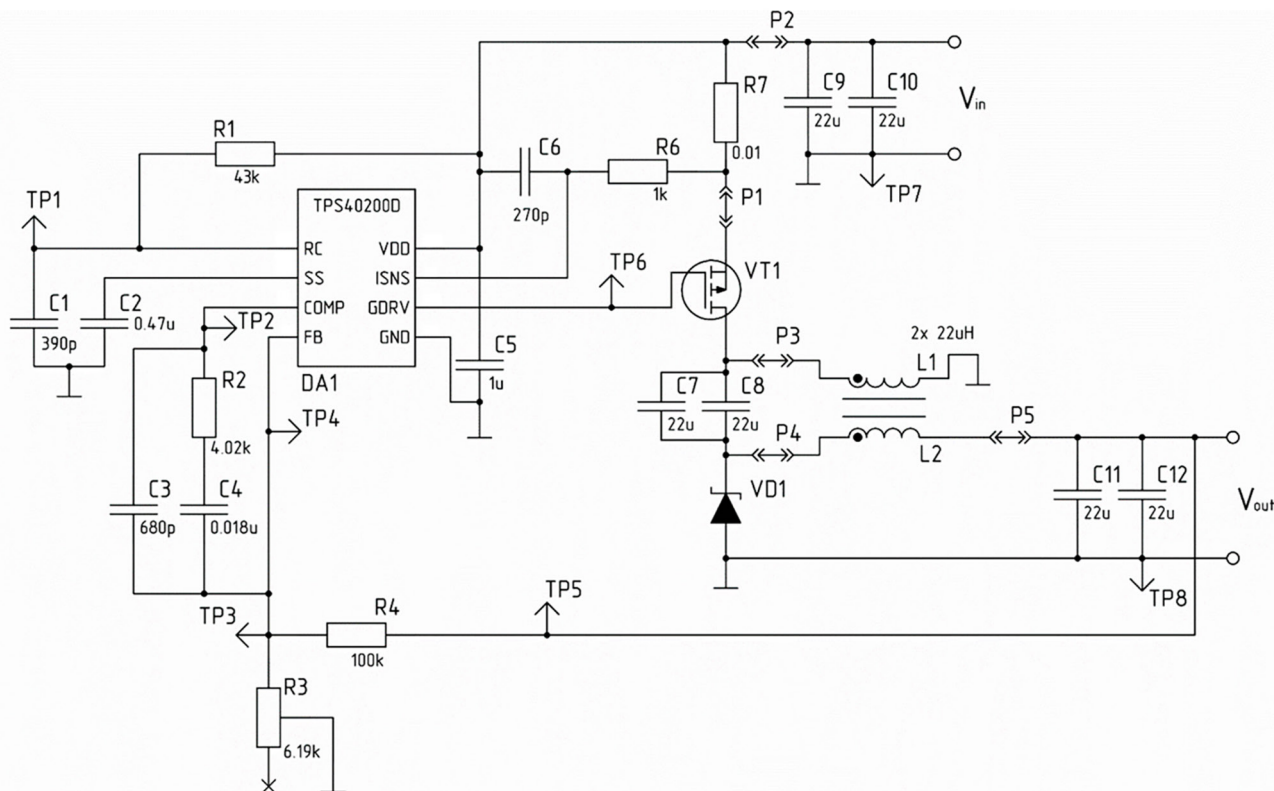


Рис. 1. Принципиальная электрическая схема DC/DC-преобразователя понижающе-повышающего типа, построенного по топологии Zeta. Здесь и на следующих рисунках обозначения элементов схем соответствуют обозначениям, принятым в ГОСТ 2.710-81²

2. ТРАССИРОВКА ПЕЧАТНОЙ ПЛАТЫ ЗЕТА-ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ

Трассировка печатной платы (ПП) производилась в системе автоматизированного проектирования (САПР) *Altium Designer*³ с учетом требований простоты пайки и удобства измерений с помощью мультиметра или осциллографа (рис. 2 и 3).

Транзистор VT1 выбран р-канальный MOSFET WMO25P06T1 (Wayon Electronics Co., Ltd., Китай) с максимальной рассеиваемой мощностью до 2.5 Вт и динамическими характеристиками, позволяющими работать с частотой переключения до 1 МГц⁴. В качестве драйвера транзистора использована микросхема TPS40200 с большим входным напряжением питания до 52 В, изменяемой частотой переключения до 500 кГц и формирующая ток затвора до 300 мА, что обеспечивает время нарастания напряжения на затворе (длительность фронта) транзистора равное 0.025–0.040 мкс.

Погонная индуктивность по усредненной ширине (2 мм) дорожки от стока транзистора до положительного полюса выхода составляет 0.3 нГн/мм, длина дорожки ~60 мм, что эквивалентно индуктивности 20 нГн.

Межслойная емкость составляет примерно 60 пФ/см². Учитывая номиналы дискретных элементов, влияние паразитных составляющих на параметры устройства минимальны. Большое влияние оказывает существенная толщина диэлектрика, т.к. связь сигнальных линий верхнего слоя с нижним слоем «земли» слабая, что может привести к существенным перекрестным помехам, в частности, в цепи обратной связи.

Рабочая частота преобразователя составляет около 500 кГц, что эквивалентно длине волны 600 м. Это существенно больше размеров платы и длин проводников.

Общий вид разработанной платы с компонентами показан на рис. 4.

² ГОСТ 2.710-81. Межгосударственный стандарт. *Единая система конструкторской документации. Обозначения буквенно-цифровые в электрических схемах*. М.: Стандартинформ; 2008. [GOST 2.710-81. Interstate Standard. Unified system for design documentation. *Alpha-numerical designations in electrical diagrams*. Moscow: Standartinform; 2008 (in Russ.).]

³ <https://www.altium.com/altium-designer>. Дата обращения 24.05.2024. / Accessed May 24, 2024.

⁴ WMO25P06T1 Datasheet. 60V P-Channel Enhancement Mode Power MOSFET. Rev. 3.0, 2020. P. 6.

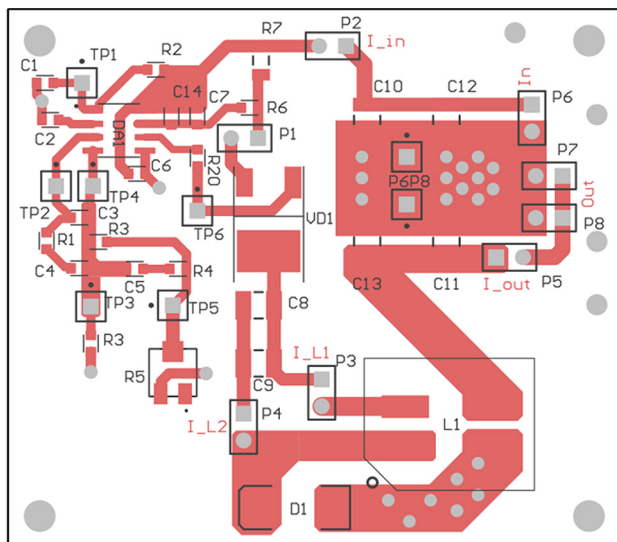


Рис. 2. Верхний слой ПП

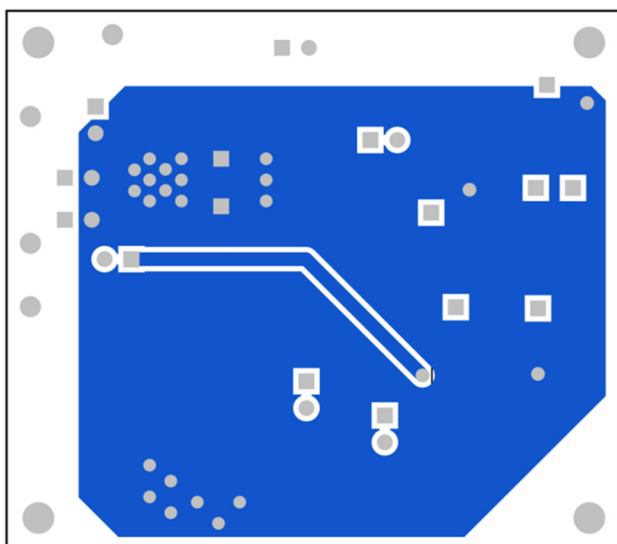


Рис. 3. Нижний слой ПП

В качестве материала подложки платы использован FR4 Tg135 (производитель печатной платы Резонит, Россия) с относительной диэлектрической проницаемостью 4.3 и толщиной 1.93 мм. Толщина металлизации равна 0.035 мм. Тип платы: двухсторонняя. Размеры платы: 58 × 51 мм.

3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗЕТА-ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ НА ОСНОВЕ ДРАЙВЕРА TPS40200

Исследование проводилось на кафедре радиоволновых процессов и технологий Института радиоэлектроники и информатики РТУ МИРЭА. Экспериментальный стенд, представленный

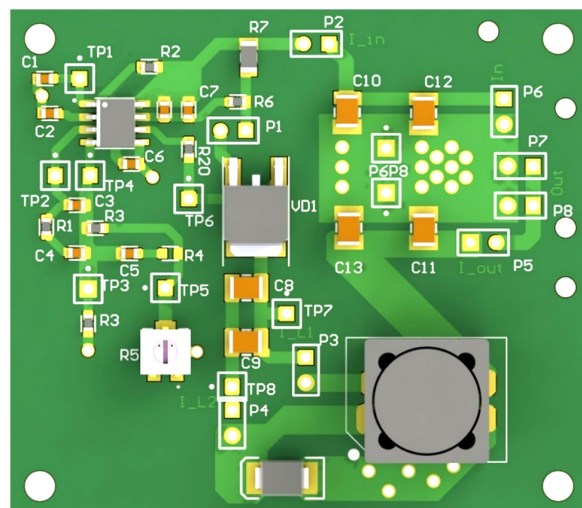


Рис. 4. Общий вид разработанной платы с компонентами

на рис. 5, состоит из Zeta-преобразователя, персонального компьютера, лабораторного источника питания, осциллографа, мультиметра, датчика тока и комплекта проб/проводов для подключения ПП. Для исследования использовалось приборно-аппаратное обеспечение компании Rohde & Schwarz (Германия)⁵, а именно: источник питания NGE100, осциллограф RTB2002 и универсальный мультиметр HMC8012.

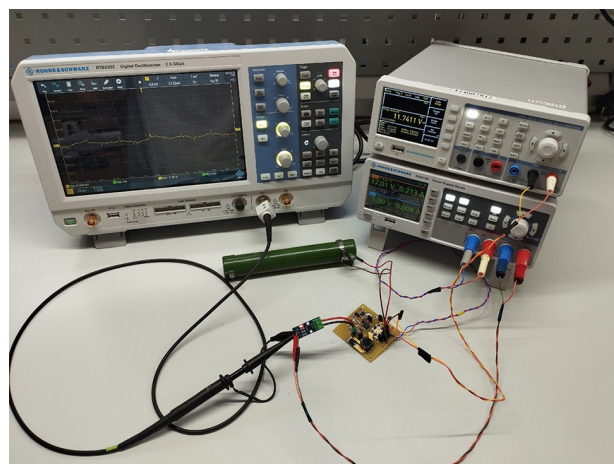


Рис. 5. Стенд для экспериментального исследования

Назначение стенда – экспериментальное исследование типовых характеристик DC/DC-преобразователя, с которыми можно сравнить аналогичные характеристики, но полученные методом проектирования, основанным на предельной непрерывной математической модели преобразователя, и методом моделирования с помощью САПР Multisim⁶.

⁵ <https://www.rohde-schwarz.com/>. Дата обращения 11.07.2024. / Accessed July 11, 2024.

⁶ <https://www.ni.com/ru-ru/shop/product/multisim.html>. Дата обращения 19.02.2024. / Accessed February 19, 2024.

К типовым характеристикам преобразователей традиционно относят нагрузочную характеристику (НХ), представляющую собой зависимость его выходного напряжения $U_{\text{ВЫХ}}$ от тока нагрузки $I_{\text{Н}}$ при постоянном входном напряжении $U_{\text{ВХ}}$, т.е. $U_{\text{ВЫХ}} = f(I_{\text{Н}})$ при $U_{\text{ВХ}} = \text{const}$, а также зависимости постоянных и переменных составляющих токов i_{L1} , i_{L2} и напряжений $u_{C7, C8}$, $u_{C11, C12}$ от входного напряжения $U_{\text{ВХ}}$ при различных сопротивлениях нагрузки.

На рис. 6–8 представлены НХ преобразователя, полученные в экспериментальном исследовании при входном напряжении, равном 6.5, 12.0 и 17.5 В.

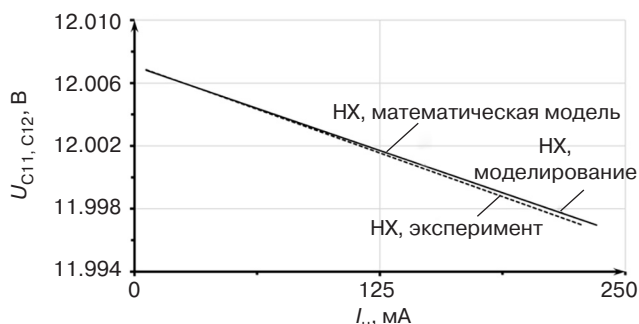


Рис. 6. Нагрузочная характеристика при входном напряжении 6.5 В

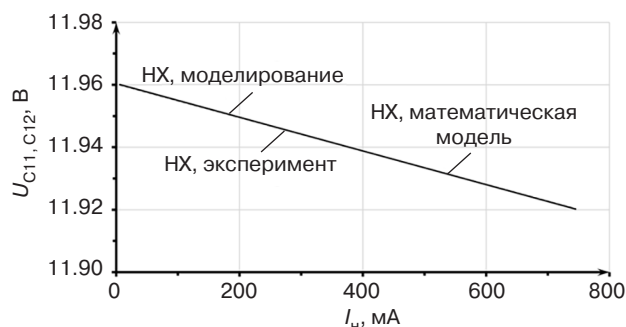


Рис. 7. Нагрузочная характеристика при входном напряжении 12.0 В

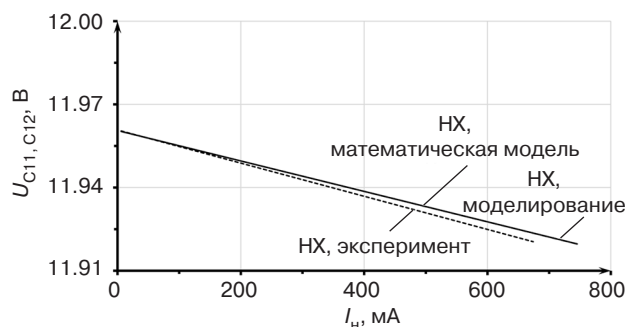


Рис. 8. Нагрузочная характеристика при входном напряжении 17.5 В

Постоянный ток заряда выходного конденсатора пренебрежимо мал по сравнению с током нагрузки. Поэтому можно считать, что ток второго дросселя равен току нагрузки $I_{L2} = I_{\text{Н}}$. Отличие экспериментального значения тока нагрузки $I_{\text{Н}}$ (рис. 6–8)

от расчетного значения не превышает 10% при входном напряжении 17.5 В. Стоит отметить, что при входном напряжении 6.5 В максимальное их различие составляет 3%, а при 12.0 В – 4%.

На рис. 9–16 представлены результаты исследований зависимостей постоянных и переменных составляющих токов i_{L1} , i_{L2} и напряжений $u_{C7, C8}$, $u_{C11, C12}$ от входного напряжения $U_{\text{ВХ}}$ при двух сопротивлениях нагрузки 50 и 100 Ом.

Графики зависимостей постоянных токов, протекающих через обмотки дросселей L1 и L2, от входного напряжения $U_{\text{ВХ}}$ (рис. 9) и напряжений на конденсаторах C7, C8 и C11, C12 от входного напряжения $U_{\text{ВХ}}$ (рис. 10) при сопротивлении нагрузки 50 Ом показывают хорошее совпадение экспериментальных и расчетных значений. Различие постоянных составляющих тока I_{L1} в среднем составило 13%, различие тока I_{L2} – 15%, а различие напряжения $U_{C11, C12}$ – 0.27%. Аналогично для размахов пульсаций соответствующих токов и напряжений получены значения различий: Δi_{L1} – 5%, Δi_{L2} – 21%, $\Delta u_{C11, C12}$ – 15%.

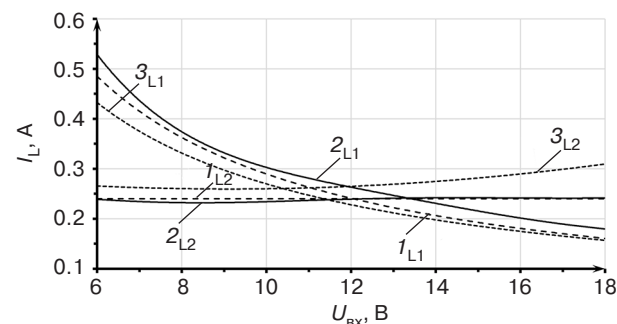


Рис. 9. Зависимости постоянных токов, протекающих через обмотки дросселей L1 и L2, от входного напряжения $U_{\text{ВХ}}$ при сопротивлении нагрузки 50 Ом: 1 – расчет, 2 – моделирование, 3 – эксперимент

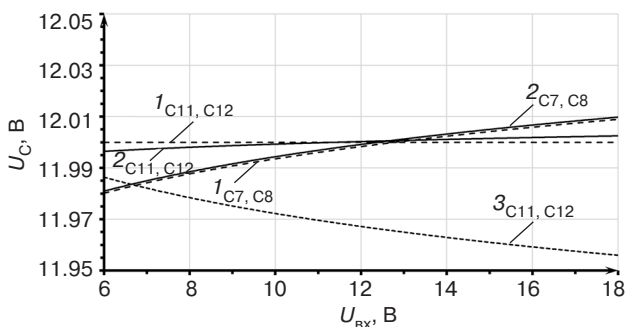


Рис. 10. Зависимости напряжений на конденсаторах C7, C8 и C11, C12 от входного напряжения $U_{\text{ВХ}}$ при сопротивлении нагрузки 50 Ом: 1 – расчет, 2 – моделирование, 3 – эксперимент

Графики зависимостей размахов пульсаций токов Δi_{L1} и Δi_{L2} , протекающих через обмотки дросселей L1 и L2, от входного напряжения $U_{\text{ВХ}}$ (рис. 11) и размахов пульсаций напряжений $\Delta u_{C7, C8}$ и $\Delta u_{C11, C12}$ (рис. 12) на конденсаторах C7, C8 и C11, C12

от входного напряжения U_{BX} при сопротивлении нагрузки 50 Ом показывают хорошее совпадение экспериментальных и расчетных значений.

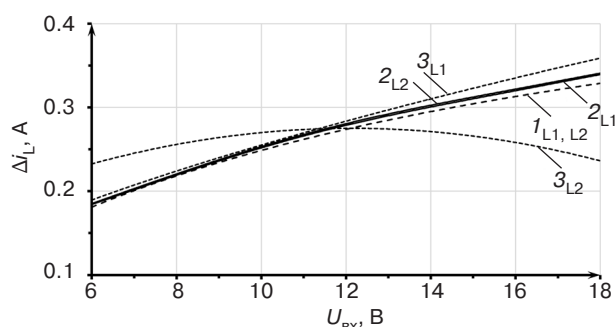


Рис. 11. Зависимости размахов пульсаций токов, протекающих через обмотки дросселей L1 и L2 от входного напряжения U_{BX} при сопротивлении нагрузки 50 Ом: 1 – расчет, 2 – моделирование, 3 – эксперимент

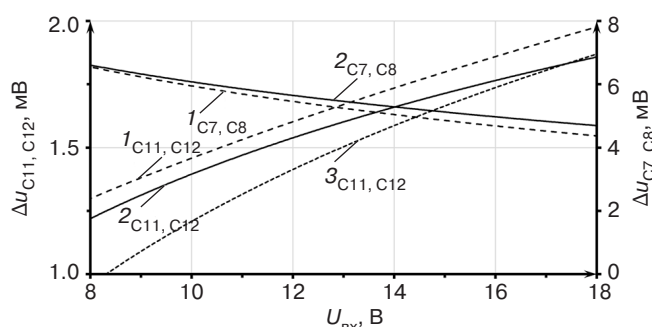


Рис. 12. Зависимости размахов пульсаций напряжений на конденсаторах C7, C8 и C11, C12 от входного напряжения U_{BX} при сопротивлении нагрузки 50 Ом: 1 – расчет, 2 – моделирование, 3 – эксперимент

Для сопротивления нагрузки $R_H = 100$ Ом получены аналогичные зависимости постоянных и переменных составляющих токов i_{L1} , i_{L2} (рис. 13) и напряжений $u_{C7, C8}$, $u_{C11, C12}$ (рис. 14) от входного напряжения U_{BX} . Различие постоянных составляющих тока I_{L1} в среднем составило 16%, различие I_{L2} – 9.0%, а различие $U_{C11, C12}$ – 0.10%. Для размахов пульсаций соответствующих токов и напряжений получены различия: Δi_{L1} – 13%, Δi_{L2} – 30%, $\Delta u_{C11, C12}$ – 38%.

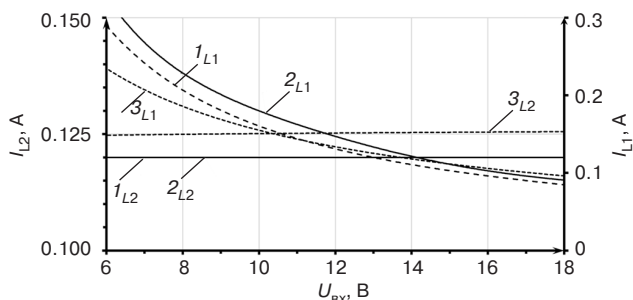


Рис. 13. Зависимости токов, протекающих через обмотки дросселей L1 и L2, от входного напряжения U_{BX} при сопротивлении нагрузки 100 Ом: 1 – расчет, 2 – моделирование, 3 – эксперимент

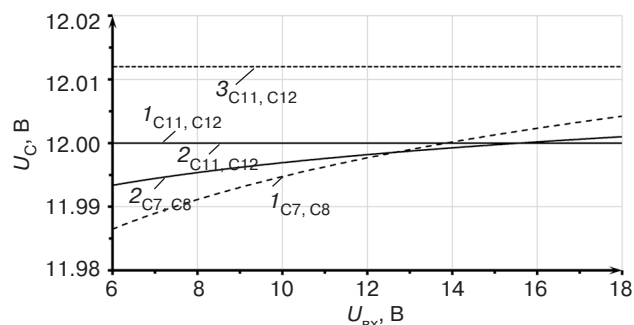


Рис. 14. Зависимость напряжений на конденсаторах C7, C8 и C11, C12 от входного напряжения U_{BX} при сопротивлении нагрузки 100 Ом: 1 – расчет, 2 – моделирование, 3 – эксперимент

Графики зависимостей размахов пульсаций токов Δi_{L1} и Δi_{L2} , протекающих через обмотки дросселей L1 и L2, от входного напряжения U_{BX} (рис. 15) и размахов пульсаций напряжений $\Delta u_{C7, C8}$ и $\Delta u_{C11, C12}$ (рис. 16) на конденсаторах C7, C8 и C11, C12 от входного напряжения U_{BX} при сопротивлении нагрузки 100 Ом показывают хорошее совпадение экспериментальных и расчетных значений.

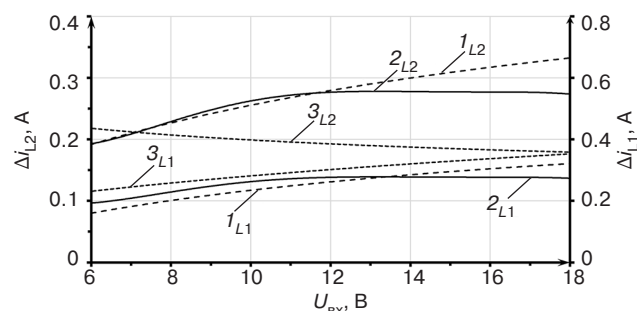


Рис. 15. Зависимость размахов пульсаций токов, протекающих через обмотки дросселей L1 и L2, от входного напряжения U_{BX} при сопротивлении нагрузки 100 Ом: 1 – расчет, 2 – моделирование, 3 – эксперимент

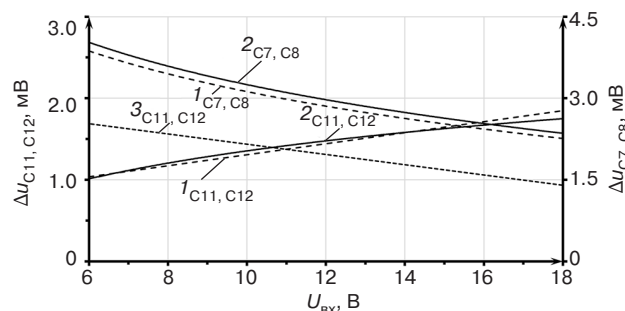


Рис. 16. Зависимость размахов пульсаций напряжений на конденсаторах C7, C8 и C11, C12 от входного напряжения U_{BX} при сопротивлении нагрузки 100 Ом: 1 – расчет, 2 – моделирование, 3 – эксперимент

Результаты исследования Zeta-преобразователя с индуктивно связанными дросселями показали высокую корреляцию как его НХ, так и зависимостей постоянных и переменных составляющих токов i_{L1} , i_{L2} , протекающих через обмотки дросселей L1 и L2, и напряжений u_{C7} , u_{C8} и u_{C11} , u_{C12} на конденсаторах C7, C8 и C11, C12 от входного напряжения $U_{вх}$ при двух сопротивлениях нагрузки 50 и 100 Ом, полученных различными методами: экспериментальным, расчетным и моделированием. При этом наблюдается практически полное совпадение расчетных значений и значений, полученных при помощи SPICE⁷-моделирования. Приведенные в работе различия экспериментальных характеристик и характеристик, полученных расчетным путем и моделированием, можно считать несущественными.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Спроектирован и создан экспериментальный стенд DC/DC-преобразователя, построенного по Zeta-топологии со связанными дросселями на базе драйвера TPS40200. Проведено экспериментальное исследование типовых зависимостей преобразователя при различных значениях входного напряжения и сопротивлениях нагрузки. Выполнено сравнение экспериментальных зависимостей с аналогичными характеристиками, полученными при моделировании с помощью САПР *Multisim* и расчетным методом, базирующемся на предельной непрерывной математической модели преобразователя. Сравнение данных, полученных этими тремя методами, показало их высокую корреляцию.

Вклад авторов

Все авторы в равной степени внесли свой вклад в исследовательскую работу.

Authors' contribution

All authors equally contributed to the research work.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коротков С.М., Лукин А.В. Источники питания для светодиодного освещения. *Практическая силовая электроника*. 2012;2(46):3–9. <https://www.elibrary.ru/papuhr>
2. Образцов А., Образцов С. Схемотехника DC/DC-преобразователей. *Современная электроника*. 2005;3:36–43.
3. Бодин О.Н., Безбородова О.Е., Митрошин А.Н., Чувькин Б.В., Мартынов Д.В., Едемский М.В. Интеллектуальная телемедицинская информационная система. *Биомедицинская радиоэлектроника*. 2024;27(2):103–110. <https://doi.org/10.18127/j15604136-202402-14>
4. Битюков В.К., Симачков Д.С., Бабенко В.П. *Схемотехника электропреобразовательных устройств*. Вологда: Инфра-Инженерия; 2023. 384 с. ISBN 978-5-9729-1439-5. <https://www.elibrary.ru/pqyagy>
5. Мананникова Н.Г., Шевцов Д.А. Новая структура двухтранзисторного силового каскада для однотактного прямо-обратноходового преобразователя электроэнергии. *Практическая силовая электроника*. 2023;1(89):17–20. <https://www.elibrary.ru/cuolqz>
6. Анисимова Т.В., Данилина А.Н., Крючков В.В. Повышающий преобразователь постоянного напряжения с плавающим конденсатором. *Практическая силовая электроника*. 2021;1(81):28–33. <https://www.elibrary.ru/ijaakd>
7. Минибаев Л.М. Использование техники нулевых пульсаций при проектировании источников питания. В сб.: *Проблемы и тенденции научных преобразований в условиях трансформации общества: сборник статей Всероссийской научно-практической конференции*. Уфа: Аэтерна; 2020. С. 23–26. <https://www.elibrary.ru/pazzxq>
8. Zhu F., Li Q. Coupled Inductors with an Adaptive Coupling Coefficient for Multiphase Voltage Regulators. *IEEE Trans. Power Electron.* 2023;38(1):739–749. <https://doi.org/10.1109/TPEL.2022.3203855>, <https://www.elibrary.ru/hizbts>
9. Zhang Ch., Yuan X., Wang J., et al. Si/WBG Hybrid Half-Bridge Converter Using Coupled Inductors for Power Quality Improvement and Control Simplification. *IEEE Trans. Power Electron.* 2024;39(3):3339–3352. <https://doi.org/10.1109/TPEL.2023.3342133>, <https://www.elibrary.ru/kbwvtg>
10. Tseng K.Ch., Huang G.Yu., Hsiung H.Yu. An isolated high step-down DC–DC converter with dual coupled inductors for ultracapacitor charger applications. *Int. J. Circuit Theor. Appl.* 2024;52(7):3341–3356. <https://doi.org/10.1002/cta.3905>, <https://www.elibrary.ru/bfcarn>
11. Битюков В.К., Лавренов А.И., Петров Д.Р. Математическая модель Zeta-преобразователя с индуктивно связанными дросселями (часть 2). *Вопросы электромеханики. Труды ВНИИЭМ*. 2023;195(4):48–52. <https://elibrary.ru/mnusik>
12. Битюков В.К., Лавренов А.И., Петров Д.Р. Пульсации токов и напряжений Zeta преобразователя с индуктивно связанными дросселями (часть 2). *Проектирование и технология электронных средств*. 2023;4:27–31. <https://www.elibrary.ru/dspqqt>

⁷ SPICE (англ. Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis) – программа-симулятор электронных схем общего назначения с открытым исходным кодом. [SPICE (Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis) is an open source simulator of general-purpose electronic circuits.]

13. Коршунов А.И. Предельная непрерывная модель системы с периодическим высокочастотным изменением структуры. *Силовая электроника*. 2021;5(92):48–51. <https://www.elibrary.ru/sxwxqb>
14. Белов Г.А. Структурные динамические модели импульсных преобразователей постоянного напряжения в ППТ. *Практическая силовая электроника*. 2019;1(73):2–8. <https://www.elibrary.ru/jvniqr>
15. Амелина М.А., Амелин С.А. Непрерывные модели составных преобразователей постоянного напряжения. В сб.: *Энергетика, информатика, инновации – 2021: Сборник трудов XI Международной научно-технической конференции*. Т. 1. Смоленск: Универсум; 2021. С. 323–325. <https://www.elibrary.ru/klxdeg>
16. Битюков В.К., Лавренов А.И. Метод проектирования DC/DC-преобразователей, построенных по Zeta-топологии. *Russian Technological Journal*. 2025;13(1):59–67. <https://doi.org/10.32362/2500316X-2025-13-1-59-67>

REFERENCES

1. Korotkov S.M., Lukin A.V. Power sources for LED lighting. *Prakticheskaya silovaya elektronika = Practical Power Electronics*. 2012;2(46):3–9 (in Russ.). <https://www.elibrary.ru/papuhr>
2. Obratsov A., Obratsov S. Circuit design of DC/DC converters. *Sovremennaya elektronika = Modern Electronics*. 2005;3:36–43 (in Russ.).
3. Bodin O.N., Bezborodova O.E., Mitroshin A.N., Chuvykin B.V., Martynov D.V., Edemskii M.V. Intelligent telemedicine information system. *Biomeditsinskaya radioelektronika = Biomedical Radioelectronics*. 2024;27(2):103–110 (in Russ.). <https://doi.org/10.18127/j15604136-202402-14>
4. Bitukov V.K., Simachkov D.S., Babenko V.P. *Skhemotekhnika elektropreobrazovatel'nykh ustroystv (Circuitry of Electrical Converter Devices)*. Vologda: Infra-Inzheneriya; 2023. 384 p. (in Russ.). ISBN 978-5-9729-1439-5. <https://www.elibrary.ru/pqyagy>
5. Manannikova N.G., Shevtsov D.A. New Topology for the two-transistor power stage for a single-ended power converter. *Prakticheskaya silovaya elektronika = Practical Power Electronics*. 2023;1(89):17–20 (in Russ.). <https://www.elibrary.ru/cuolqz>
6. Anisimova T.V., Danilina A.N., Kryuchkov V.V. DC Boost Converter with Flying Capacitor. *Prakticheskaya silovaya elektronika = Practical Power Electronics*. 2021;1(81):28–33 (in Russ.). <https://www.elibrary.ru/jjaakd>
7. Minibaev L.M. Using zero ripple techniques in power supply designing. In: *Problems and Trends of Scientific Transformations in the Conditions of Society Transformation: Proceedings of the All-Russian Scientific and Practical Conference*. Ufa: Aeterna; 2020. P. 23–26 (in Russ.). <https://www.elibrary.ru/pazzxq>
8. Zhu F., Li Q. Coupled Inductors with an Adaptive Coupling Coefficient for Multiphase Voltage Regulators. *IEEE Trans. Power Electron.* 2023;38(1):739–749. <https://doi.org/10.1109/TPEL.2022.3203855>, <https://www.elibrary.ru/hizbts>
9. Zhang Ch., Yuan X., Wang J., et al. Si/WBG Hybrid Half-Bridge Converter Using Coupled Inductors for Power Quality Improvement and Control Simplification. *IEEE Trans. Power Electron.* 2024;39(3):3339–3352. <https://doi.org/10.1109/TPEL.2023.3342133>, <https://www.elibrary.ru/kbwvtg>
10. Tseng K.Ch., Huang G.Yu., Hsiung H.Yu. An isolated high step-down DC–DC converter with dual coupled inductors for ultracapacitor charger applications. *Int. J. Circuit Theor. Appl.* 2024;52(7):3341–3356. <https://doi.org/10.1002/cta.3905>, <https://www.elibrary.ru/bfcarn>
11. Bitukov V.K., Lavrenov A.I., Petrov D.R. Mathematical model of a ZETA-converter with inductively coupled chokes (Part 2). *Voprosy elektromekhaniki. Trudy VNIEM = Elektromechanical Matters. VNIEM Studies*. 2023;195(4):48–52 (in Russ.). <https://elibrary.ru/mnusik>
12. Bitukov V.K., Lavrenov A.I., Petrov D.R. Current and voltage pulsations of Zeta converter with inductively coupled inductors (Part 2). *Proektirovanie i tekhnologiya elektronnykh sredstv = Design and Technology of Electronic Means*. 2023;4:27–31 (in Russ.). <https://www.elibrary.ru/dspqrt>
13. Korshunov A.I. Limiting continuous model of a system with periodic high-frequency structure variation. *Silovaya elektronika = Power Electronics*. 2021;5(92):48–51 (in Russ.). <https://www.elibrary.ru/sxwxqb>
14. Belov G.A. Structural dynamic models of pulsed DC-DC switched mode converters in discontinuous current mode. *Prakticheskaya silovaya elektronika = Practical Power Electronics*. 2019;1(73):2–8 (in Russ.). <https://www.elibrary.ru/jvniqr>
15. Amelina M.A., Amelin S.A. Continuous Models of Composite DC-DC Converters. In: *Power Engineering, Computer Sciences, and Innovations – 2021: Proceedings of the 11th International Scientific and Technical Conference, Smolensk*. Smolensk: Universum; 2021. V. 1. P. 323–325 (in Russ.). <https://www.elibrary.ru/klxdeg>
16. Bitukov V.K., Lavrenov A.I. Method for designing DC/DC converters based on Zeta topology. *Russian Technological Journal*. 2025;13(1):59–67 (in Russ.). <https://doi.org/10.32362/2500316X-2025-13-1-59-67>

Об авторах

Битюков Владимир Ксенофонтович, д.т.н., профессор, кафедра радиоволновых процессов и технологий, Институт радиоэлектроники и информатики, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: bitukov@mirea.ru. Scopus Author ID 6603797260, ResearcherID Y-8325-2018, SPIN-код РИНЦ 3834-5360, <https://orcid.org/0000-0001-6448-8509>

Лавренов Алексей Игоревич, аспирант, ассистент, кафедра радиоволновых процессов и технологий, Институт радиоэлектроники и информатики, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: lavrenov@mirea.ru. SPIN-код РИНЦ 6048-5027, <https://orcid.org/0000-0001-5722-541X>

Малицкий Даниил Александрович, инженер-схемотехник, ООО «СПУТНИКС» (121205, Россия, Москва, Технопарк «Сколково», Большой бульвар, д. 42, стр. 1, оф. 358, 359). E-mail: malickij@mirea.ru. SPIN-код РИНЦ 4912-3018, <https://orcid.org/0000-0003-4558-9085>

About the authors

Vladimir K. Bityukov, Dr. Sci. (Eng.), Professor, Department of Radio Wave Processes and Technology, Institute of Radio Electronics and Informatics, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: bitukov@mirea.ru. ResearcherID Y-8325-2018, Scopus Author ID 6603797260, RSCI SPIN-code 3834-5360, <https://orcid.org/0000-0001-6448-8509>

Aleksey I. Lavrenov, Postgraduate Student, Assistant, Department of Radio Wave Processes and Technology, Institute of Radio Electronics and Informatics, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: lavrenov@mirea.ru. RSCI SPIN-code 6048-5027, <https://orcid.org/0000-0001-5722-541X>

Daniil A. Malitskiy, Circuit Engineer, SPUTNIX (Office 358, 359, 42/1, Bol'shoi bul'var, Skolkovo Technopark, Moscow, 121205 Russia). E-mail: malickij@mirea.ru. RSCI SPIN-code 4912-3018, <https://orcid.org/0000-0003-4558-9085>

Микро- и нанoeлектроника. Физика конденсированного состояния
Micro- and nanoelectronics. Condensed matter physics

УДК 536.2

<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-2-46-56>

EDN TNQTWK



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Распределение напряженности температурного поля на поверхности включений графена в матричном композите

И.В. Лавров[@],
В.В. Бардушкин,
В.Б. Яковлев

Институт нанотехнологий микроэлектроники, Российская академия наук, Москва, 119334 Россия

[@] Автор для переписки, e-mail: iglavr@mail.ru

Резюме

Цели. Цель работы – получить аналитическое выражение для распределения напряженности температурного поля на поверхностях анизотропных включений в форме тонких дисков в матричном композите и применить полученные выражения для прогнозирования величины напряженности температурного поля на поверхности графеновых включений со стороны матрицы.

Методы. Включение в форме тонкого кругового диска является частным предельным случаем эллипсоидального включения. Для получения требуемых аналитических выражений используется ранее полученное авторами более общее выражение для оператора концентрации напряженности электрического поля на поверхности эллипсоидального включения, поскольку задачи нахождения электростатического и температурного поля в стационарном случае математически эквивалентны. Данный оператор связывает напряженность поля на поверхности включения со стороны матрицы со средней напряженностью поля в образце композита, выражение для него получено в обобщенном сингулярном приближении.

Результаты. Получены аналитические выражения для оператора концентрации напряженности температурного поля на поверхности включения в форме тонкого диска из многослойного графена в матричном композите с учетом анизотропии включения в зависимости от положения точки на поверхности включения, от объемной доли включений в материале, от ориентации включения. Рассмотрены два вида распределения ориентаций включений: одинаково ориентированные включения и равномерное распределение ориентаций включений. Проведены модельные расчеты величины напряженности температурного поля в точках ребра включения-диска в зависимости от угла между радиус-вектором данной точки и направлением напряженности приложенного поля.

Выводы. Показано, что в случае графеновых многослойных включений в точках на их ребрах величина напряженности поля может на несколько порядков превышать напряженность приложенного поля.

Ключевые слова: композит, матрица, графен, включение, операторы концентрации напряженности температурного поля, обобщенное сингулярное приближение

• Поступила: 17.07.2024 • Доработана: 06.08.2024 • Принята к опубликованию: 28.01.2025

Для цитирования: Лавров И.В., Бардушкин В.В., Яковлев В.Б. Распределение напряженности температурного поля на поверхности включений графена в матричном композите. *Russian Technological Journal*. 2025;13(2):46–56. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-2-46-56>, <https://elibrary.ru/TNQTWK>

Прозрачность финансовой деятельности: Авторы не имеют финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

RESEARCH ARTICLE

Distribution of temperature field strength on the surface of graphene inclusions in a matrix composite

Igor V. Lavrov[@],
Vladimir V. Bardushkin,
Victor B. Yakovlev

Institute of Nanotechnology of Microelectronics, Russian Academy of Sciences, Moscow, 119334 Russia
[@] Corresponding author, e-mail: iglavr@mail.ru

Abstract

Objectives. The study sets out to obtain an analytical expression for the distribution of the temperature field strength on the surfaces of anisotropic graphene inclusions taking the form of thin disks in the matrix composite and to use the obtained expressions to predict the strength of the temperature field on the surface of inclusions from the matrix side.

Methods. An inclusion taking the form of a thin circular disk represents a special limit case of an ellipsoidal inclusion. To obtain the corresponding analytical expressions, the authors use their previously derived more general expression for the operator of the concentration of the electric field strength on the surface of ellipsoidal inclusion. The approach is justified by the mathematical equivalence of problems of finding the electrostatic and temperature field in the stationary case. The operator relates the field strength on the inclusion surface from the matrix side to the average field strength in the composite sample; the corresponding expression is obtained in a generalized singular approximation.

Results. Analytical expressions were obtained for the operator of the concentration of the temperature field strength on the surface of the inclusion taking the form of a thin disk of multilayer graphene in a matrix composite. The expressions take into account inclusion anisotropy, the position of the point on the inclusion surface, the volume fraction of inclusions in the material, and the inclusion orientation. Two types of inclusion orientation distributions were considered: equally oriented inclusions and uniform distribution of inclusion orientations. Model calculations of the value for the temperature field strength at the points of the inclusion disk edge as a function of the angle between the radius vector of this point and the direction of the applied field strength were carried out.

Conclusions. In the case of graphene multilayer inclusions, it is shown that the field strength at points on their edges can exceed the applied field strength by several orders of magnitude.

Keywords: composite, matrix, graphene, inclusion, operators of temperature field strength concentration, generalized singular approximation

• Submitted: 17.07.2024 • Revised: 06.08.2024 • Accepted: 28.01.2025

For citation: Lavrov I.V., Bardushkin V.V., Yakovlev V.B. Distribution of temperature field strength on the surface of graphene inclusions in a matrix composite. *Russian Technological Journal*. 2025;13(2):46–56. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-2-46-56>, <https://elibrary.ru/TNQTWK>

Financial disclosure: The authors have no financial or proprietary interest in any material or method mentioned.

The authors declare no conflicts of interest.

ВВЕДЕНИЕ

Графен является перспективным материалом, который обладает исключительными электро-, теплофизическими и механическими свойствами [1–4]. Например, значение коэффициента теплопроводности однослойного графена достигает 5000 Вт/(м·К) [4, 5]. В многослойном графене наблюдается меньшее значение коэффициента теплопроводности, что может быть объяснено увеличением рассеяния фононов вследствие взаимодействия слоев между собой [6]. Однако и в многослойном графене величина теплопроводности в плоскости слоя остается достаточно высокой, что можно использовать при создании композитных материалов для улучшения их теплопроводящих свойств, имеющих наряду с их механическими свойствами большое значение при интенсивных внешних воздействиях различного физического характера. Например, в трибокомпозитах в процессе эксплуатации происходит неравномерный нагрев поверхностных и объемных слоев, который влияет на диффузионные и сегрегационные процессы в материале. В результате этого могут существенно изменяться физико-механические свойства трибокомпозитов [7, 8]. Как один из вариантов уменьшения величины градиента температурного поля при эксплуатации можно рассмотреть использование материалов с повышенными теплопроводящими свойствами. Поэтому графен с его очень высокой теплопроводностью вдоль слоев представляется чрезвычайно перспективным материалом для использования его в качестве малых добавок в композиты с целью увеличения их теплопроводящих характеристик без потери высоких механико-прочностных качеств [9].

Следует заметить, что в неоднородных материалах значительная величина градиента температурного поля может возникать на микроуровне, вблизи границ раздела однородных компонентов, существенно отличающихся по теплопроводящим характеристикам. Это может приводить к изменению свойств частиц компонентов неоднородного материала, к ослаблению связи между включениями и матрицей в композите, что в конечном итоге повлечет ухудшение эксплуатационных характеристик материала. В связи с этим актуальной является задача прогнозирования локальных температурных полей на границе между включениями и связующим (матрицей) в матричном композите.

Существует большое количество работ, посвященных теоретическому или экспериментальному исследованию эффективных теплопроводящих характеристик композитов, из последних можно выделить, например, работы [9–12]. Имеются также работы, посвященные прогнозированию распределения локальных температурных полей в композитах, например, [13]. В то же время практически отсутствуют работы, в которых исследуется распределение температурного поля на границах включений и матрицы.

В работе [14] получены базовые соотношения для оценки распределения напряженности электрического поля на границе включения в матричном композите. В силу математической эквивалентности постановок задач в стационарном случае для распределения электростатического потенциала и температурного поля [15] данные результаты могут быть использованы для решения задачи нахождения распределения напряженности температурного поля на границе включений в матричном композите. В настоящей работе рассматривается матричный композит с полимерной матрицей типа ЭД-20 и графеновыми многослойными включениями в виде тонких чешуек, форма которых аппроксимируется тонкими круговыми дисками. Получены аналитические выражения для оператора концентрации напряженности температурного поля и вектора напряженности температурного поля на поверхности графеновых включений со стороны матрицы в зависимости от расположения точки на поверхности включения. Рассмотрены два случая распределения ориентаций включений в композите: 1) одинаково ориентированные включения; 2) равномерное распределение ориентаций включений в пространстве.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОПЕРАТОР КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕННОСТИ ПОЛЯ НА ПОВЕРХНОСТИ ВКЛЮЧЕНИЯ В МАТРИЧНОМ КОМПОЗИТЕ

Рассмотрим образец объемом V статистически однородного матричного композита с эллипсоидальными включениями одного типа. Матрица (matrix) – изотропная с теплопроводностью k^m , включения (particles) – анизотропные с тензором теплопроводности $\mathbf{k}^p$, объемная доля включений равна f . Предполагается, что форма всех включений одинаковая, а главные оси тензоров теплопроводности совпадают с осями

соответствующих эллипсоидов. Также будем считать, что все включения случайным образом распределены по объему образца, а их ориентации распределены по некоторому вероятностному закону. Предполагается также отсутствие внутренних источников тепла в материале.

Температурное поле в образце в настоящей работе обозначается $T(\mathbf{r}, t)$, где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор точки пространства, t – время, как в классических монографиях по теории теплопроводности, например, в [16, 17]. Что касается напряженности температурного поля, то в ряде работ это понятие, обозначающее векторную величину, противоположную градиенту температурного поля, не вводится, т.е. в математических формулировках используется непосредственно градиент температурного поля (в частности, в работах [16–18]). В то же время во многих работах, посвященных теплофизическим свойствам неоднородных сред, для удобства вводится специальное обозначение для вектора напряженности температурного поля: $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = -\nabla T(\mathbf{r}, t)$ (например, в работах [9, 19, 20]).

Пусть к границе S данного образца приложено постоянное во времени однородное температурное поле $T_0(\mathbf{r})$ с напряженностью $\mathbf{H}_0 = \text{const}$ (однородное температурное поле, по аналогии с однородным электростатическим, – это поле с постоянной напряженностью). Тогда в образце установится некоторое стационарное температурное поле $T(\mathbf{r})$ с напряженностью $\mathbf{H}(\mathbf{r})$. Ставится задача найти распределение напряженности температурного поля на границе S_p произвольного включения со стороны матрицы в данном образце композита.

В работе [14] рассмотрена аналогичная задача для нахождения распределения электрического поля на границе включения в композите. Пользуясь полной математической аналогией задач нахождения электростатического и температурного полей в стационарном случае, выражение для напряженности температурного поля в точке $\mathbf{r}$ поверхности S_p эллипсоидального включения со стороны матрицы можно записать в виде:

$$\mathbf{H}^m(\mathbf{r}) = \mathbf{K}^H(\mathbf{r})\langle \mathbf{H} \rangle, \quad \mathbf{r} \in S_p, \quad (1)$$

где $\langle \mathbf{H} \rangle$ – средняя напряженность температурного поля в образце, которая при данных граничных условиях задачи равна напряженности приложенного поля [21]: $\langle \mathbf{H} \rangle = \mathbf{H}_0$; $\mathbf{K}^H(\mathbf{r})$ – полный оператор концентрации напряженности температурного поля на поверхности включения со стороны матрицы.

В свою очередь, $\mathbf{K}^H(\mathbf{r})$ можно представить в следующей форме [14]:

$$\mathbf{K}^H(\mathbf{r}) = \mathbf{K}^{sH}(\mathbf{r})\mathbf{K}^{vH}, \quad \mathbf{r} \in S_p, \quad (2)$$

где $\mathbf{K}^{sH}(\mathbf{r})$ – оператор поверхностной концентрации поля, связывающий напряженность поля в данной точке поверхности включения со стороны матрицы и среднюю напряженность поля в матрице, $\mathbf{K}^{vH}$ – оператор объемной концентрации поля, связывающий среднюю напряженность поля в матрице и среднюю напряженность поля в образце. Данные операторы в обобщенном приближении Максвелла – Гарнетта имеют вид [14]:

$$\mathbf{K}^{sH}(\mathbf{r}) = (\mathbf{I} + \mathbf{A}(\mathbf{r})(\mathbf{k}^p - \mathbf{k}^m \mathbf{I})) \times \\ \times [\mathbf{I} - \mathbf{g}(\mathbf{k}^p - \mathbf{k}^m \mathbf{I})]^{-1}, \quad \mathbf{r} \in S_p, \quad (3)$$

$$\mathbf{K}^{vH} = \left[(1-f)\mathbf{I} + f \langle (\mathbf{I} - \mathbf{g}(\mathbf{k}^p - \mathbf{k}^m \mathbf{I}))^{-1} \rangle \right]^{-1}, \quad (4)$$

где $\mathbf{I}$ – единичный тензор 2-го ранга; $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ – тензор 2-го ранга, определяющийся выражением

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{n}(\mathbf{r}) \otimes \mathbf{n}(\mathbf{r})}{\mathbf{n}(\mathbf{r}) \cdot (\mathbf{k}^m \mathbf{n}(\mathbf{r}))}, \quad \mathbf{r} \in S_p,$$

$\mathbf{n}(\mathbf{r})$ – внешняя единичная нормаль к поверхности S_p в точке $\mathbf{r}$; $\mathbf{k}^m$ – тензор теплопроводности матрицы. Поскольку матрица изотропная, т.е. $\mathbf{k}^m = k^m \mathbf{I}$, то последнее выражение можно переписать в более простом виде:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{k^m} (\mathbf{n}(\mathbf{r}) \otimes \mathbf{n}(\mathbf{r})). \quad (5)$$

Усреднение в (4) проводится по всем включениям, погруженным в матрицу. Также в выражениях (3), (4) используется тензор 2-го ранга $\mathbf{g}$, связанный с данным включением и применяющийся в обобщенном сингулярном приближении [22]. Компоненты тензора $\mathbf{g}$ в системе координат, связанной с осями эллипсоидального включения, вычисляются по формуле [23]:

$$g_{ij} = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{n_i n_j}{n_\alpha k_{\alpha\beta}^m n_\beta} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (6)$$

где компоненты нормали n_i ($i = 1, 2, 3$) к поверхности включения выражаются через сферические углы ϑ, φ ; α, β – номера компонент у векторных и тензорных величин. Поскольку в случае изотропной матрицы $k_{\alpha\beta}^m = k^m \delta_{\alpha\beta}$ ($\delta_{\alpha\beta}$ – символ Кронекера), выражение (6) можно переписать в виде:

$$g_{ij} = -\frac{1}{4\pi k^m} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} n_i n_j \sin \vartheta d\vartheta d\varphi, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (7)$$

ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ АНИЗОТРОПНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ В ФОРМЕ ТОНКИХ КРУГОВЫХ ДИСКОВ

Пусть включения в матричном композите – анизотропные в форме круговых дисков радиусом a . Рассмотрим конкретное включение, занимающее область V_p с поверхностью S_p . Пусть плоскость данного диска образует угол α с направлением вектора напряженности приложенного поля $\mathbf{H}_0$. Введем систему координат $\xi\eta\zeta$, связанную с данным включением, следующим образом. Начало координат O возьмем в центре диска; если $\alpha > 0$, направим ось ξ вдоль проекции вектора $\mathbf{H}_0$ на плоскость диска, ось ζ – вдоль проекции $\mathbf{H}_0$ на ось вращения диска, ось η – перпендикулярно осям ξ и ζ так, чтобы система координат $\xi\eta\zeta$ была правой. Если $\alpha = 0$, т.е. вектор $\mathbf{H}_0$ лежит в плоскости диска, направим ось ξ вдоль $\mathbf{H}_0$, ось η направим в плоскости диска перпендикулярно оси ξ , а ось ζ направим перпендикулярно плоскости диска, чтобы система $\xi\eta\zeta$ была правой. Рассмотрим две точки на поверхности S_p данного диска: точку M на боковой поверхности диска и точку Q на верхней грани диска. Пусть радиус-вектор точки M составляет угол θ с осью ξ , тогда для внешней единичной нормали к поверхности S_p в точке M имеем: $\mathbf{n}(M) = (\cos\theta \sin\theta \ 0)^T$. Для нормали в точке Q : $\mathbf{n}(Q) = (0 \ 0 \ 1)^T$. Тогда для тензора $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ в этих точках в системе $\xi\eta\zeta$ получим по формуле (5):

$$\mathbf{A}(M) = \frac{1}{k^m} \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta & 0 \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$\mathbf{A}(Q) = \frac{1}{k^m} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Для тензора $\mathbf{g}$ включения в форме диска по формуле (7) найдем:

$$\mathbf{g} = -\frac{1}{k^m} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Для включения из многослойного графена тензор теплопроводности в системе $\xi\eta\zeta$ имеет вид:

$$\mathbf{k}^p = \begin{pmatrix} k_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & k_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & k_{\parallel} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

где $k_{\perp}$ и $k_{\parallel}$ – главные компоненты теплопроводности вдоль и поперек слоев графена соответственно.

Для удобства введем тензор 2-го ранга λ , связанный с конкретным включением, по формуле:

$$\lambda = [\mathbf{I} - \mathbf{g}(\mathbf{k}^p - k^m \mathbf{I})]^{-1}. \quad (12)$$

С учетом (10), (11) получим его вид в системе $\xi\eta\zeta$:

$$\lambda' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k^m/k_{\parallel} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Тогда выражение для полного оператора концентрации напряженности температурного поля на поверхности включения с учетом формул (2)–(4), (12) примет вид:

$$\mathbf{K}^H(\mathbf{r}) = (\mathbf{I} + \mathbf{A}(\mathbf{r})(\mathbf{k}^p - k^m \mathbf{I})) \lambda \times \\ \times [(1-f)\mathbf{I} + f \langle \lambda \rangle]^{-1}, \quad \mathbf{r} \in S_p, \quad (14)$$

где вид тензора $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ зависит от точки на поверхности включения: для точки M на ребре диска он имеет вид (8), для точки Q на грани диска – вид (9). Усреднение в (14) проводится по всем включениям, погруженным в матрицу. Поскольку все включения предполагаются одинаковыми, то данное усреднение проводится по всем ориентациям включений в системе координат $x\eta z$, связанной с текстурой образца композита.

Рассмотрим два случая распределения ориентаций включений в композите: 1) одинаково ориентированные включения; 2) равномерное распределение ориентаций включений. В первом случае композит получится анизотропный, ориентации всех систем $\xi\eta\zeta$, связанных с включениями, одинаковы, поэтому в качестве системы координат $x\eta z$ удобно взять систему с такой же ориентацией. Тогда $\langle \lambda \rangle = \lambda'$, и для $\mathbf{K}^H(\mathbf{r})$ получим:

$$\mathbf{K}^H(\mathbf{r}) = (\mathbf{I} + \mathbf{A}(\mathbf{r})(\mathbf{k}^p - k^m \mathbf{I})) \lambda' \times \\ \times [(1-f)\mathbf{I} + f \lambda']^{-1}, \quad \mathbf{r} \in S_p.$$

Учитывая вид λ' (13), найдем:

$$\mathbf{K}^H(\mathbf{r}) = (\mathbf{I} + \mathbf{A}(\mathbf{r})(\mathbf{k}^p - k^m \mathbf{I})) \times \\ \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k^m}{(1-f)k_{\parallel} + f k^m} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

В случае равномерного распределения ориентаций включений [24]

$$\langle \lambda \rangle = \frac{1}{3}(\lambda'_{11} + \lambda'_{22} + \lambda'_{33})\mathbf{I},$$

где $\lambda'_{11}, \lambda'_{22}, \lambda'_{33}$ – главные компоненты тензора λ , т.е. в данном случае с учетом (13) имеем:

$$\langle \lambda \rangle = \frac{1}{3} \left(2 + \frac{k^m}{k_{\parallel}} \right) \mathbf{I},$$

$$[(1-f)\mathbf{I} + f\langle \lambda \rangle]^{-1} = \frac{3k_{\parallel}}{3k_{\parallel} - f(k_{\parallel} - k^m)} \mathbf{I},$$

и для оператора $\mathbf{K}^H(\mathbf{r})$ получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^H(\mathbf{r}) = & (\mathbf{I} + \mathbf{A}(\mathbf{r})(\mathbf{k}^p - k^m\mathbf{I}))\lambda' \times \\ & \times \frac{3k_{\parallel}}{3k_{\parallel} - f(k_{\parallel} - k^m)}, \quad \mathbf{r} \in S_p. \end{aligned} \quad (16)$$

В обоих случаях распределения ориентаций включений $\mathbf{K}^H(\mathbf{r})$ будет диагональным.

Рассмотрим частный случай, когда точка M на ребре диска лежит на оси ξ , т.е. при $\theta = 0$. В этом случае

$$\mathbf{A}(M) = \frac{1}{k^m} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Тогда для диагональных компонент оператора $\mathbf{K}^H(\mathbf{r})$ в случае одинаковой ориентации включений из (15) с учетом (11) будем иметь:

$$\begin{aligned} K_{11}^H(M(0)) &= \frac{k_{\perp}}{k^m}, \quad K_{22}^H(M(0)) = 1, \\ K_{33}^H(M(0)) &= \frac{k^m}{(1-f)k_{\parallel} + fk^m}. \end{aligned} \quad (18)$$

В случае равномерного распределения ориентаций включений из (16), (17), (11) получим:

$$\begin{aligned} K_{11}^H(M(0)) &= \frac{3k_{\perp}k_{\parallel}}{k^m(3k_{\parallel} - f(k_{\parallel} - k^m))}, \\ K_{22}^H(M(0)) &= \frac{3k_{\parallel}}{3k_{\parallel} - f(k_{\parallel} - k^m)}, \\ K_{33}^H(M(0)) &= \frac{3k^m}{3k_{\parallel} - f(k_{\parallel} - k^m)}. \end{aligned} \quad (19)$$

Если для графеновых многослойных включений теплопроводность считать приблизительно равной теплопроводности графита высокого качества, то в данном случае имеем следующие значения компонент теплопроводности (Вт/(м·К)): $k_{\perp} = 2000$, $k_{\parallel} = 5.7$ [25], для эпоксидной матрицы вида ЭД-20 $k^m = 0.2$ [26]. Тогда по формуле (18) получим для случая одинаково ориентированных включений $K_{11}^H(M(0)) = 10^4$, т.е. компонента H_1 напряженности температурного поля в точке M границы включения со стороны матрицы в 10^4 раз превышает соответствующую компоненту приложенного поля.

Получим теперь выражения для $\mathbf{K}^H(\mathbf{r})$ в точке Q на грани включения. Подставляя (9) в (15), получим для диагональных компонент оператора $\mathbf{K}^H(Q)$ при одинаково ориентированных включениях:

$$\begin{aligned} K_{11}^H(Q) &= 1, \quad K_{22}^H(Q) = 1, \\ K_{33}^H(Q) &= \frac{k_{\parallel}}{(1-f)k_{\parallel} + fk^m}. \end{aligned} \quad (20)$$

Для случая равномерного распределения ориентаций включений:

$$K_{11}^H(Q) = K_{22}^H(Q) = K_{33}^H(Q) = \frac{3k_{\parallel}}{3k_{\parallel} - f(k_{\parallel} - k^m)}. \quad (21)$$

Как видно из формул (20) и (21), напряженность поля в точке Q на грани включения имеет такой же порядок величины, как и напряженность приложенного поля.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И ОБСУЖДЕНИЕ

На основе полученных выражений для полного оператора концентрации напряженности температурного поля были проведены модельные расчеты для композита с матрицей вида ЭД-20 и многослойными графеновыми включениями в форме тонкого кругового диска. Вычислялись отношения компонент и модуля напряженности температурного поля в точке M на ребре включения-диска к модулю напряженности приложенного поля в зависимости от угла θ между радиус-вектором данной точки и осью ξ при различных объемных долях включений, при различных величинах угла α между напряженностью приложенного поля и плоскостью включения. Некоторые результаты представлены на рис. 1–3. Во всех случаях распределение ориентаций включений считалось равномерным.

На рис. 1 представлены зависимости отношения H_i/H_0 компонент напряженности температурного

поля в точках M на ребре графенового включения к напряженности приложенного поля от угла между радиус-вектором к точке M и напряженностью $\mathbf{H}_0$ приложенного поля для случая, когда $\mathbf{H}_0$ лежит в плоскости включения. Анализ данных зависимостей показывает, что при фиксированной величине напряженности приложенного поля значения компонент H_1 и H_2 в точках на краю дисков со стороны матрицы существенно зависят от угла θ между радиус-вектором данной точки и вектором напряженности приложенного поля, но в подавляющем большинстве таких точек величина соответствующей компоненты напряженности имеет очень большую величину по сравнению с приложенным полем. В то же время компонента H_3 имеет несущественную, близкую к нулю величину.

На рис. 2. приведены аналогичные зависимости отношения $H(M)/H_0$ абсолютной величины напряженности температурного поля к напряженности приложенного поля, из которых видно, что модуль напряженности поля в точках края диска в диапазонах $\theta \in [0^\circ; 84^\circ]$ и $\theta \in [96^\circ; 180^\circ]$ имеет величину, более чем в 10^3 раз превышающую напряженность приложенного поля. С увеличением объемной доли включений в композите при равномерном распределении их ориентаций абсолютные величины компонент и модуль напряженности поля в точках на краю дисков немного увеличиваются. При этом изменение объемной доли включений никак не сказывается на величинах компонент H_1 и H_2 при одинаковой ориентации включений в композите. Это непосредственно следует из формул (18).

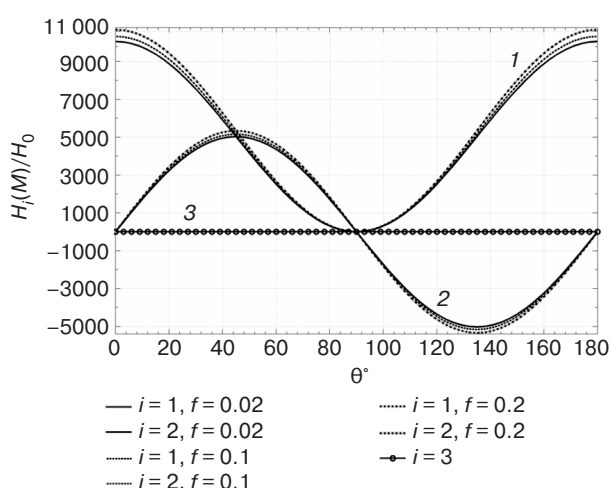


Рис. 1. Зависимости отношения H_i/M_0 от угла между радиус-вектором к точке M и напряженностью $\mathbf{H}_0$ приложенного поля при различных объемных долях включений. Номера компонент указаны вблизи соответствующих кривых

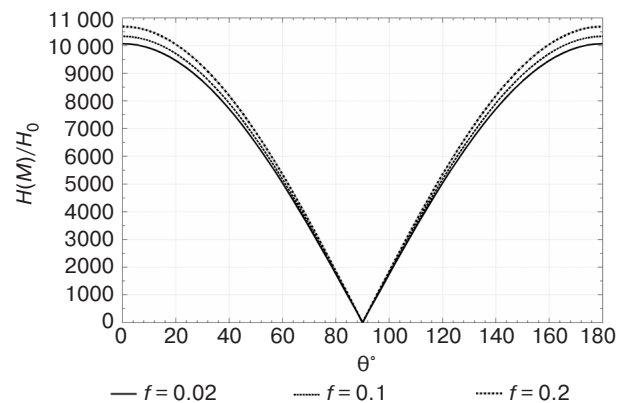


Рис. 2. Зависимости отношения $H(M)/H_0$ от угла между радиус-вектором к точке M и вектором напряженности $\mathbf{H}_0$ приложенного поля при различных объемных долях включений

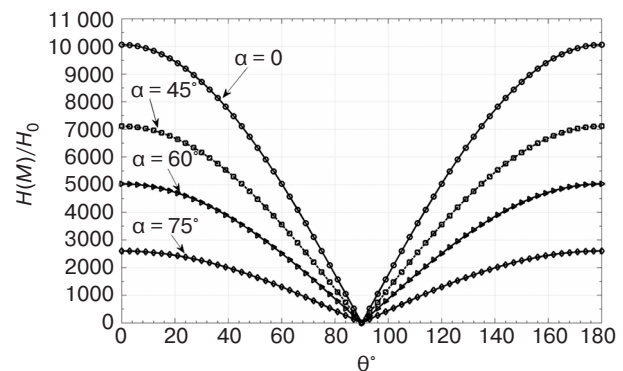


Рис. 3. Зависимости отношения $H(M)/H_0$ от угла θ между радиус-вектором к точке M и проекцией вектора $\mathbf{H}_0$ на плоскость диска при различных величинах угла α между вектором $\mathbf{H}_0$ и плоскостью включений. Объемная доля включений $f = 0.02$

В общем случае плоскости дисков-включений ориентированы различным образом по отношению к направлению вектора $\mathbf{H}_0$ напряженности приложенного поля. На рис. 3 приведены зависимости отношения $H(M)/H_0$ от угла θ между радиус-вектором точки M и проекцией вектора $\mathbf{H}_0$ на плоскость диска при различных величинах угла α между вектором $\mathbf{H}_0$ и плоскостью включений. Данные зависимости показывают, что увеличение угла между плоскостью диска и $\mathbf{H}_0$ приводит к уменьшению величины напряженности поля в точках на ребре диска, но при этом все равно данная величина имеет значения, намного превосходящие H_0 . Так, например, при величине угла $\alpha = 75^\circ$ отношение напряженностей поля на поверхности и приложенного поля превышает 10^3 для точек в диапазонах $\theta \in [0^\circ; 66^\circ]$ и $\theta \in [114^\circ; 180^\circ]$.

Из полученных результатов можно сделать вывод о том, что вследствие значительных величин напряженности температурного поля в областях вблизи краев графеновых дисков физические

характеристики связующего могут претерпевать существенные изменения из-за интенсификации диффузионных и сегрегационных процессов, протекающих в них. При малых объемных долях графеновых включений эти изменения несущественно влияют на макроскопические свойства композиционного материала. Однако при увеличении объемной доли включений доля областей связующего материала, в которых происходят указанные изменения, также увеличивается, что в итоге может приводить к значительному ухудшению эксплуатационных характеристик материала, что согласуется, в частности, с результатами, полученными в [27].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основным результатом настоящей работы являются выражения (15), (16) для операторов концентрации напряженности температурного поля на поверхности анизотропных включений в форме диска в матричном композите, которые позволяют прогнозировать значения данных величин в любой точке поверхности данных включений в зависимости от внешнего приложенного поля, от объемных долей и материальных характеристик компонентов композита, от ориентации

включения по отношению к направлению напряженности приложенного поля. Проведены модельные расчеты для случая графеновых многослойных включений. Показано, что в точках поверхности на ребрах графеновых включений напряженность температурного поля может на несколько порядков превышать напряженность приложенного поля.

Вклад авторов

И.В. Лавров – литературный обзор, вывод расчетных формул, написание компьютерных программ, проведение модельных расчетов, построение графиков, обсуждение результатов.

В.В. Бардушкин – проверка математической корректности вывода расчетных формул, корректура текста статьи, обсуждение результатов.

В.Б. Яковлев – постановка задачи, идея вывода расчетных соотношений, обсуждение результатов.

Authors' contributions

I.V. Lavrov – literature review, deducing the calculation formulas, writing the computer programs, model calculations, plotting, discussion of the results.

V.V. Bardushkin – checking the mathematical correctness of deducing the calculation formulas, proofreading the text of the article, discussion of the results.

V.B. Yakovlev – problem statement, the idea of deducing the calculation formulas, discussion of the results.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Novoselov K.S., Geim A.K., Morozov S.V., Jiang D., Zhang Y., Dubonos S.V., Grigorieva I.V., Firsov A.A. Electric field effect in atomically thin carbon films. *Science*. 2004;306(5696):666–669. <https://doi.org/10.1126/science.1102896>
2. Новоселов К.С. Графен: материалы Флатландии. *Успехи физических наук (УФН)*. 2011;81(12):1299–1311. <https://doi.org/10.3367/UFNr.0181.201112f.1299>
3. Bunch J.S., Van der Zande A.M., Verbridge S.S., Frank I.W., Tanenbaum D.M., Parpia J.M., Craighead H.G., McEuen P.L. Electromechanical resonators from graphene sheets. *Science*. 2007;315(5811):490–493. <https://doi.org/10.1126/science.1136836>
4. Yan Zh., Nika D.L., Balandin A.A. Thermal properties of graphene and few-layer graphene: applications in electronics. *IET Circuits, Devices & Systems*. 2015;9(1):4–12. <https://doi.org/10.1049/iet-cds.2014.0093>
5. Ткачев С.В., Буслаева Е.Ю., Губин С.П. Графен – новый углеродный наноматериал. *Неорганические материалы*. 2011;47(1):5–14.
6. Елецкий А.В., Искандарова И.М., Книжник А.А., Красиков Д.Н. Графен: методы получения и теплофизические свойства. *Успехи физических наук (УФН)*. 2011;181(3):233–268.
7. Колесников В.И. *Теплофизические процессы в металлополимерных трибосистемах*. М.: Наука; 2003. 279 с. ISBN 5-02-002843-6
8. Колесников В.И., Козаков А.Т., Сидашов А.В., Кравченко В.Н., Сычев А.П. Диффузионные и сегрегационные процессы в металлополимерной трибосистеме. *Трение и износ*. 2006;27(4):361–365.
9. Лавров И.В., Бардушкин В.В., Яковлев В.Б. Прогнозирование эффективной теплопроводности композитов с графеновыми включениями. *Тепловые процессы в технике*. 2023;15(7):299–308.
10. Zarubin V.S., Zimin V.N., Kuvyrkin G.N., Savelyeva I.Y., Novozhilova O.V. Two-sided estimate of effective thermal conductivity coefficients of a textured composite with anisotropic ellipsoidal inclusions. *Z. Angew. Math. Phys. (ZAMP)*. 2023;74(4):139. <https://doi.org/10.1007/s00033-023-02039-0>
11. Bonfoh N., Dinartz F., Sabar H. New exact multi-coated ellipsoidal inclusion model for anisotropic thermal conductivity of composite materials. *Appl. Math. Modell.* 2020;87(12):584–605. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.06.005>
12. Шалыгина Т.А., Мележик А.В., Ткачев А.Г., Воронина С.Ю., Ворончихин В.Д., Власов А.Ю. Синергический эффект гибридного наполнителя на основе графеновых нанопластин и многостенных нанотрубок для повышения теплопроводности эпоксидного композита. *Письма в ЖТФ*. 2021;47(7):3–6. <https://doi.org/10.21883/PJTF.2021.07.50789.18609>

13. Колесников В.И., Лавров И.В., Бардушкин В.В., Сычев А.П., Яковлев В.Б. Метод оценки распределений локальных температурных полей в многокомпонентных композитах. *Наука Юга России*. 2017;13(2):13–20. <https://doi.org/10.23885/2500-0640-2017-13-2-13-20>
14. Колесников В.И., Яковлев В.Б., Лавров И.В., Сычев А.П., Бардушкин А.В. Распределение электрических полей на поверхности включений в матричном композите. *Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки*. 2023;513(1):34–40. <https://doi.org/10.31857/S2686740023060093>, <https://elibrary.ru/htskme>
15. Milton G. *The Theory of Composites*. Cambridge: Cambridge University Press; 2004. 719 p.
16. Лыков А.В. *Теория теплопроводности*. М.: Высшая школа; 1967. 600 с.
17. Карташов Э.М., Кудинов В.А. *Аналитические методы теории теплопроводности и ее приложений*. М.: ЛЕНАНД; 2018. 1072 с. ISBN 978-5-9710-4994-4
18. Карташов Э.М. Новый энергетический эффект в областях нецилиндрического типа с термоизолированной движущейся границей. *Russian Technological Journal*. 2023;11(5):106–117. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2023-11-5-106-117>
19. Benveniste Y., Miloh T. The effective conductivity of composites with imperfect thermal contact at constituent interfaces. *Int. J. Eng. Sci.* 1986;24(9):1537–1552. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(86\)90162-X](https://doi.org/10.1016/0020-7225(86)90162-X)
20. Benveniste Y. On the effective thermal conductivity of multiphase composites. *Z. Angew. Math. Phys. (ZAMP)*. 1986;37:696–713. <https://doi.org/10.1007/BF00947917>
21. Stroud D. Generalized effective-medium approach to the conductivity of an inhomogeneous material. *Phys. Rev. B*. 1975;12(8):3368–3373. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.12.3368>
22. Шермергор Т.Д. *Теория упругости микроненормодных сред*. М.: Наука; 1977. 399 с.
23. Колесников В.И., Яковлев В.Б., Бардушкин В.В., Лавров И.В., Сычев А.П., Яковлева Е.Н. О методе анализа распределений локальных электрических полей в композиционном материале. *Доклады академии наук (ДАН)*. 2016;467(3):275–279. <https://doi.org/10.7868/S0869565216090097>
24. Лавров И.В. Диэлектрическая проницаемость композиционных материалов с текстурой: эллипсоидальные анизотропные кристаллиты. *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*. 2009;1:52–58.
25. Григорьев И.С., Мейлихов Е.З. *Физические величины: справочник*. М.: Энергоатомиздат; 1991. 1232 с.
26. Ли Х., Невилл К. *Справочное руководство по эпоксидным смолам*: пер. с англ. М.: Энергия; 1973. 415 с.
27. Шейнерман А.Г., Красницкий С.А. Моделирование влияния агломерации графена на механические свойства керамических композитов с графеном. *Письма в ЖТФ*. 2021;47(17):37–40. <https://doi.org/10.21883/PJTF.2021.17.51385.18844>

REFERENCES

1. Novoselov K.S., Geim A.K., Morozov S.V., Jiang D., Zhang Y., Dubonos S.V., Grigorieva I.V., Firsov A.A. Electric field effect in atomically thin carbon films. *Science*. 2004;306(5696):666–669. <https://doi.org/10.1126/science.1102896>
2. Novoselov K.S. Graphene: Materials in the Flatland. *Uspekhi Fizicheskikh Nauk*. 2011;181(12):1299–1311 (in Russ.). <https://doi.org/10.3367/UFNr.0181.201112f.1299>
3. Bunch J.S., Van der Zande A.M., Verbridge S.S., Frank I.W., Tanenbaum D.M., Parpia J.M., Craighead H.G., McEuen P.L. Electromechanical resonators from graphene sheets. *Science*. 2007;315(5811):490–493. <https://doi.org/10.1126/science.1136836>
4. Yan Zh., Nika D.L., Balandin A.A. Thermal properties of graphene and few-layer graphene: applications in electronics. *IET Circuits, Devices & Systems*. 2015;9(1):4–12. <https://doi.org/10.1049/iet-cds.2014.0093>
5. Tkachev S.V., Buslaeva E.Y., Gubin S.P. Graphene: a novel carbon nanomaterial. *Neorg. Mater.* 2011;47(1):1–10. <https://doi.org/10.1134/S0020168511010134>
[Original Russian Text: Tkachev S.V., Buslaeva E.Y., Gubin S.P. Graphene: a novel carbon nanomaterial. *Neorganicheskie materialy*. 2011;47(1):5–14 (in Russ.).]
6. Eletsii A.V., Iskandarova I.M., Knizhnik A.A., Krasikov D.N. Graphene: fabrication methods and thermophysical properties. *Phys.-Usp.* 2011;54(3):227–258. <https://doi.org/10.3367/UFNe.0181.201103a.0233>
[Original Russian Text: Eletsii A.V., Iskandarova I.M., Knizhnik A.A., Krasikov D.N. Graphene: fabrication methods and thermophysical properties. *Uspekhi Fizicheskikh Nauk*. 2011;181(3):233–268 (in Russ.).]
7. Kolesnikov V.I. *Teplofizicheskie protsessy v metallopolymernykh tribosistemakh (Thermophysical Processes in Metal-Polymeric Tribosystems)*. Moscow: Nauka, 2003. 279 p. (in Russ.). ISBN 5-02-002843-6
8. Kolesnikov V.I., Kozakov A.T., Sidashov A.V., Kravchenko V.N., Sychev A.P. Diffusion and segregation processes in metal-polymer tribosystem. *Trenie i iznos = Friction and Wear*. 2006;27(4):361–365 (in Russ.).
9. Lavrov I.V., Bardushkin V.V., Yakovlev V.B. Prediction of the effective thermal conductivity of composites with graphene inclusions. *Teplovye protsessy v tekhnike = Thermal Processes in Engineering*. 2023;15(7):299–308 (in Russ.).
10. Zarubin V.S., Zimin V.N., Kuvyrkin G.N., Savelyeva I.Y., Novozhilova O.V. Two-sided estimate of effective thermal conductivity coefficients of a textured composite with anisotropic ellipsoidal inclusions. *Z. Angew. Math. Phys. (ZAMP)*. 2023;74(4):139. <https://doi.org/10.1007/s00033-023-02039-0>
11. Bonfoh N., Dinart F., Sabar H. New exact multi-coated ellipsoidal inclusion model for anisotropic thermal conductivity of composite materials. *Appl. Math. Modell.* 2020;87(12):584–605. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.06.005>

12. Shalygina T.A., Melezhik A.V., Tkachev A.G., et al. The Synergistic Effect of a Hybrid Filler Based on Graphene Nanoplates and Multiwalled Nanotubes for Increasing the Thermal Conductivity of an Epoxy Composite. *Tech. Phys. Lett.* 2021;47(7):364–367. <https://doi.org/10.1134/S1063785021040143>
[Original Russian Text: Shalygina T.A., Melezhik A.V., Tkachev A.G., Voronina S.Yu., Voronchikhin V.D., Vlasov A.Yu. The Synergistic Effect of a Hybrid Filler Based on Graphene Nanoplates and Multiwalled Nanotubes for Increasing the Thermal Conductivity of an Epoxy Composite. *Pis'ma v Zhurnal tekhnicheskoi fiziki.* 2021;47(7):3–5 (in Russ.). <https://doi.org/10.21883/PJTF.2021.07.50789.18609>]
13. Kolesnikov V.I., Lavrov I.V., Bardushkin V.V., Sychev A.P., Yakovlev V.B. A method of the estimation of the local thermal fields' distribution in multicomponent composites. *Nauka Yuga Rossii = Science in the South Russia.* 2017;13(2):13–20 (in Russ.). <https://doi.org/10.23885/2500-0640-2017-13-2-13-20>
14. Kolesnikov V.I., Yakovlev V.B., Lavrov I.V., et al. Distribution of Electric Fields on the Surface of Inclusions in a Matrix Composite. *Dokl. Phys.* 2023;68(11):370–375. <https://doi.org/10.1134/S1028335823110058>
[Original Russian Text: Kolesnikov V.I., Yakovlev V.B., Lavrov I.V., Sychev A.P., Bardushkin V.V. Distribution of Electric Fields on the Surface of Inclusions in a Matrix Composite. *Doklady Rossiiskoi akademii nauk. Fizika, tekhnicheskie nauki.* 2023;513(1):34–40 (in Russ.). <https://doi.org/10.31857/S2686740023060093>]
15. Milton G. *The Theory of Composites*. Cambridge: Cambridge University Press; 2004. 719 p.
16. Lykov A.V. *Teoriya teploprovodnosti (Theory of Thermal Conductivity)*. Moscow: Vysshaya shkola; 1967. 600 p. (in Russ.).
17. Kartashov E.M., Kudinov V.A. *Analiticheskie metody teorii teploprovodnosti i ee prilozhenii (Analytical Methods of the Theory of Thermal Conductance and its Applications)*. Moscow: Lenand; 2018. 1072 p. (in Russ.). ISBN 978-5-9710-4994-4
18. Kartashov E.M. New energy effect in non-cylindrical domains with a thermally insulated moving boundary. *Russian Technological Journal.* 2023;11(5):106–117 (in Russ.). <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2023-11-5-106-117>
19. Benveniste Y., Miloh T. The effective conductivity of composites with imperfect thermal contact at constituent interfaces. *Int. J. Eng. Sci.* 1986;24(9):1537–1552. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(86\)90162-X](https://doi.org/10.1016/0020-7225(86)90162-X)
20. Benveniste Y. On the effective thermal conductivity of multiphase composites. *Z. Angew. Math. Phys. (ZAMP).* 1986;37: 696–713. <https://doi.org/10.1007/BF00947917>
21. Stroud D. Generalized effective-medium approach to the conductivity of an inhomogeneous material. *Phys. Rev. B.* 1975;12(8):3368–3373. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.12.3368>
22. Shermergor T.D. *Teoriya uprugosti mikroneodnorodnykh sred (Micromechanics of Inhomogeneous Medium)*. Moscow: Nauka; 1977. 399 p. (in Russ.).
23. Kolesnikov V.I., Yakovlev V.B., Bardushkin V.V., Lavrov I.V., Sychev A.P., Yakovleva E.N. A Method of Analysis of Distributions of Local Electric Fields in Composites. *Dokl. Phys.* 2016;61(3):124–128. <https://doi.org/10.1134/S1028335816030101>
[Original Russian Text: Kolesnikov V.I., Yakovlev V.B., Bardushkin V.V., Lavrov I.V., Sychev A.P., Yakovleva E.N. A Method of Analysis of Distributions of Local Electric Fields in Composites. *Doklady akademii nauk.* 2016;467(3): 275–279 (in Russ.). <https://doi.org/10.7868/S0869565216090097>]
24. Lavrov I.V. Permittivity of composite material with texture: ellipsoidal anisotropic inclusions. *Ekologicheskii vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation.* 2009;1:52–58 (in Russ.).
25. Grigor'ev I.S., Meilikhov E.Z. *Fizicheskie velichiny: spravochnik (Physical Quantities: A Handbook)*. Moscow: Energoatomizdat; 1991. 1232 p. (in Russ.).
26. Lee H., Neville K. *Spravochnoe rukovodstvo po epoksidnym smolam (Handbook of Epoxy Resins)*; transl. from Engl. Moscow: Energiya; 1973. 415 p. (in Russ.).
[Lee H., Neville K. *Handbook of Epoxy Resins*. N.-Y.: McGraw-Hill; 1967. 922 p.]
27. Sheinerman A.G., Krasnitskii S.A. Modeling of the Influence of Graphene Agglomeration on the Mechanical Properties of Ceramic Composites with Graphene. *Tech. Phys. Lett.* 2021;47(12):873–876. <https://doi.org/10.1134/S106378502109011X>
[Original Russian Text: Sheinerman A.G., Krasnitskii S.A. Modeling of the Influence of Graphene Agglomeration on the Mechanical Properties of Ceramic Composites with Graphene. *Pis'ma v Zhurnal tekhnicheskoi fiziki.* 2021;47(17):37–40 (in Russ.). <https://doi.org/10.21883/PJTF.2021.17.51385.18844>]

Об авторах

Лавров Игорь Викторович, к.ф.-м.н., доцент, старший научный сотрудник, ФГБУН «Институт нанотехнологий микроэлектроники Российской академии наук» (119334, Россия, Москва, Ленинский пр-т, д. 32А). E-mail: iglavr@mail.ru. Scopus Author ID 35318030100, ResearcherID D-1011-2017, SPIN-код РИНЦ 2322-7217, <https://orcid.org/0000-0002-1467-5100>

Бардушкин Владимир Валентинович, д.ф.-м.н., доцент, главный научный сотрудник, ФГБУН «Институт нанотехнологий микроэлектроники Российской академии наук» (119334, Россия, Москва, Ленинский пр-т, д. 32А). E-mail: bardushkin@mail.ru. Scopus Author ID 55620242900, ResearcherID D-1010-2017, SPIN-код РИНЦ 4294-9040, <https://orcid.org/0000-0002-8805-5764>

Яковлев Виктор Борисович, д.ф.-м.н., профессор, главный научный сотрудник и ученый секретарь, ФГБУН «Институт нанотехнологий микроэлектроники Российской академии наук» (119334, Россия, Москва, Ленинский пр-т, д. 32А). E-mail: yakvb@mail.ru. Scopus Author ID 7201907574, ResearcherID E-7995-2017, SPIN-код РИНЦ 4318-0749, <https://orcid.org/0000-0001-8515-3951>

About the authors

Igor V. Lavrov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assistant Professor, Senior Researcher, Institute of Nanotechnology of Microelectronics, Russian Academy of Sciences (32A, Leninskii pr., Moscow, 119334 Russia). E-mail: iglavr@mail.ru. Scopus Author ID 35318030100, ResearcherID D-1011-2017, RSCI SPIN-code 2322-7217, <https://orcid.org/0000-0002-1467-5100>

Vladimir V. Bardushkin, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Assistant Professor, Chief Researcher, Institute of Nanotechnology of Microelectronics, Russian Academy of Sciences (32A, Leninskii pr., Moscow, 119334 Russia). E-mail: bardushkin@mail.ru. Scopus Author ID 55620242900, ResearcherID D-1010-2017, RSCI SPIN-code 4294-9040, <https://orcid.org/0000-0002-8805-5764>

Victor B. Yakovlev, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Chief Researcher, Scientific Secretary, Institute of Nanotechnology of Microelectronics, Russian Academy of Sciences (32A, Leninskii pr., Moscow, 119334 Russia). E-mail: yakvb@mail.ru. Scopus Author ID 7201907574, ResearcherID E-7995-2017, RSCI SPIN code 4318-0749, <https://orcid.org/0000-0001-8515-3951>

УДК 621.382.3

<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-2-57-73>

EDN TTUFNR



ОБЗОР

Тепловые и механические механизмы деградаций в гетероструктурных полевых транзисторах на нитриде галлия

В.М. Миннебаев[@]

АО «Микроволновые системы», Москва, 105122 Россия

[@] Автор для переписки, e-mail: vm@mwsystems.ru

Резюме

Цели. Гетероструктурные полевые транзисторы на нитриде галлия (GaN HFET, heterostructural field-effect transistor) являются наиболее перспективными полупроводниковыми устройствами для силовой и сверхвысокочастотной электроники. За последние 10–15 лет GaN HFET прочно заняли место в аппаратуре радиоэлектронных средств передачи, приема и обработки информации, а также в изделиях силовой электроники за счет существенных преимуществ в энергетических и тепловых параметрах. При этом вопросы обеспечения их долговременной надежности стоят не менее остро, чем для приборов на других полупроводниковых материалах. Целью исследования является обзор тепловых и механических механизмов деградаций в GaN HFET, обусловленных физико-химическими особенностями применяемых материалов, ростовыми и пост-ростовыми процессами, и способов купирования этих механизмов при разработке, производстве и эксплуатации.

Методы. Основным методом исследования является аналитический обзор результатов публикаций широкого круга специалистов в области физики полупроводников, технологии производства гетероэпитаксиальных структур и активных приборов на их основе, моделирования и проектирования модулей и аппаратуры, надежности и эксплуатации.

Результаты. Описаны причины снижения показателей качества GaN HFET, вызываемые тепловыми перегревами, механическими деградациями, проблемами с горячими электронами и фононами в нитриде галлия, а также представлен обзор исследований, посвященных этим явлениям и методам снижения их воздействия на технические параметры транзисторов и показатели качества.

Выводы. По итогам исследования отмечено, что сильные электрические поля и высокая удельная тепловая нагруженность мощных GaN HFET вызывают физические, поляризационные, пьезоэлектрические и тепловые явления, способные приводить к перераспределению механических напряжений в активной области, деградации электрических характеристик и снижению надежности транзистора в целом. Установлено, что наличие полевой платы и пассивирующего слоя из нитрида кремния SiN приводят к снижению значений механических напряжений в области затвора в 1.3–1.5 раз, эффекты тепловой деградации в усилителях класса АВ выражены сильнее, чем эффекты воздействия сильных полей в усилителях класса Е, при температуре активной зоны GaN HFET более 320–350 °С резко снижается время средней наработки до отказа.

Ключевые слова: GaN HFET, гетероструктура, двухканальный HFET, HFET со связанными каналами, ток, саморазогрев, теплопроводность, деградация, легирование

• Поступила: 14.05.2024 • Доработана: 12.07.2024 • Принята к опубликованию: 11.02.2025

Для цитирования: Миннебаев В.М. Тепловые и механические механизмы деградаций в гетероструктурных полевых транзисторах на нитриде галлия. *Russian Technological Journal*. 2025;13(2):57–73. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-2-57-73>, <https://elibrary.ru/TTUFNR>

Прозрачность финансовой деятельности: Автор не имеет финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

REVIEW ARTICLE

Thermal and mechanical degradation mechanisms in heterostructural field-effect transistors based on gallium nitride

Vadim M. Minnebaev[@]

Microwave Systems, Moscow, 105122 Russia

[@] Corresponding author, e-mail: vm@mwsystems.ru

Abstract

Objectives. Gallium nitride heterostructural field-effect transistors (GaN HFET) are among the most promising semiconductor devices for power and microwave electronics. Over the past 10–15 years, GaN HFETs have firmly established their position in radio-electronic equipment for transmitting, receiving, and processing information, as well as in power electronics products, due to their significant advantages in terms of energy and thermal parameters. At the same time, issues associated with ensuring their reliability are no less acute than for devices based on other semiconductor materials. The aim of the study is to review the thermal and mechanical mechanisms of degradation in GaN HFETs due to the physicochemical characteristics of the materials used, as well as their corresponding growth and post-growth processes. Methods for preventing or reducing these mechanisms during development, production, and operation are evaluated.

Methods. The main research method consists in an analytical review of the results of publications by a wide range of specialists in the field of semiconductor physics, production technology of heteroepitaxial structures and active devices based on them, as well as the modeling and design of modules and equipment in terms of their reliable operation.

Results. As well as describing the problems of GaN HFET quality degradation caused by thermal overheating, mechanical degradation, problems with hot electrons and phonons in gallium nitride, the article provides an overview of research into these phenomena and methods for reducing their impact on transistor technical parameters and quality indicators.

Conclusions. The results of the study show that strong electric fields and high specific thermal loading of high-power GaN HFETs can cause physical, polarization, piezoelectric and thermal phenomena that lead to redistribution of mechanical stresses in the active region, degradation of electrical characteristics, and a decrease in the reliability of the transistor as a whole. It is shown that the presence of a field-plate and a passivating SiN layer leads to a decrease in the values of mechanical stress in the gate area by 1.3–1.5 times. The effects of thermal degradation in class AB amplifiers are more pronounced than the effects of strong fields in class E amplifiers; moreover, the mean time to failure sharply decreases at GaN HFET active zone temperatures over 320–350°C.

Keywords: GaN HFET, heterostructure, dual-channel HFET, coupled-channel HFET, current, self-heating, thermal conductivity, degradation, doping

• Submitted: 14.05.2024 • Revised: 12.07.2024 • Accepted: 11.02.2025

For citation: Minnebaev V.M. Thermal and mechanical degradation mechanisms in heterostructural field-effect transistors based on gallium nitride. *Russian Technological Journal*. 2025;13(2):57–73. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-2-57-73>, <https://elibrary.ru/TTUFNR>

Financial disclosure: The author has no financial or proprietary interest in any material or method mentioned.

The author declares no conflicts of interest.

ВВЕДЕНИЕ

Достижения последних лет в создании силовых и мощных устройств сверхвысоких частот (СВЧ) в основном связаны с III-нитридными материалами, приборами и устройствами на их основе [1–3]. Полевые гетероструктурные транзисторы на нитриде галлия (GaN) являются наиболее перспективными для мощных СВЧ и силовых применений вследствие достаточно высокой подвижности в них электронов, большой плотности носителей заряда и высоких пробивных напряжений, что особенно ярко проявляется при их работе в импульсных режимах [4].

В конце 1960-х гг. впервые была предложена идея накопления зарядов на интерфейсе гетероперехода, приводящая к возможности создания усилительного устройства. Однако лишь после разработки в 1970-х гг. методов высококачественного высокоточного эпитаксиального роста задача превращения полевого транзистора (field-effect transistor, FET) в гетероструктурный полевой транзистор (heterostructural field-effect transistor, HFET), также известный как транзистор с высокой подвижностью электронов (high electron mobility transistor, HEMT), могла быть решена [5].

В 1978 г. впервые продемонстрировано достижение высокой подвижности электронов, полученной с помощью модулирующего допирования, а в 1980 г. Университет Иллинойса показал и прибор, названный модулированно-легированным полевым транзистором (modulated-doped field-effect transistor, MODFET). В течение 1980–2000-х гг. усилия инженеров и ученых разных стран привели к появлению более сложных устройств, таких как полевые транзисторы с двойным гетеропереходом [6]. Простейшая структура GaN/AlGa_xN HFET, включающая нитрид алюминия-галлия AlGa_xN, показана на рис. 1 [7]. Многослойные гетероструктуры AlN/AlGa_xN/GaN/AlGa_xN стали основой новой компонентной базы твердотельной СВЧ-электроники.

Эта структура – не единственная для GaN HFET. Например, структура InAlN/AlN/GaN, включающая нитрид индия-алюминия InAlN, – еще одна конструкция, используемая для этой цели. Хотя обе структуры обладают поляризацией, разновидность AlGa_xN имеет более сильную пьезоэлектрическую поляризацию, эффект от которой может быть усилен

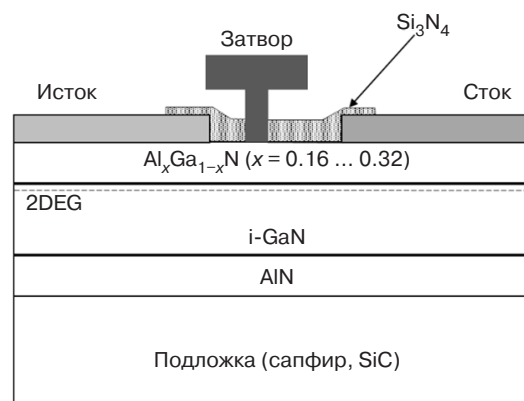


Рис. 1. Простейшая структура GaN/AlGa_xN HFET. 2DEG (two-dimensional electron gas) – двумерный электронный газ, AlN – буферный слой нитрида алюминия, минимизирующий различия в параметрах кристаллической решетки гетероструктуры и подложки, SiC – подложка из карбида кремния

вследствие структурных характеристик. Например, в случае GaN/AlGa_xN пьезоэлектрический эффект проявляется сильнее, чем в случае InAlN/AlN из-за несоответствия решеток между слоями [8]. В то же время спонтанная поляризация для структуры InAlN/AlN/GaN играет единственную роль за исключением случаев, когда используется интерфейсный слой нитрида алюминия AlN [9].

В зависимости от структуры GaN/AlGa_xN HFET можно разделить на три основных типа (рис. 2). Первая структура, которая является классической типичной, состоит из одного канала двумерного электронного газа (2DEG), при этом классической она является лишь потому, что другие структуры HFET обычно сравнивают с ней для оценки улучшения свойств.

Типовая структура HFET начинается со слоя AlN, выращенного на подложке (Al₂O₃, SiC, Si), за которым следует толстый буферный слой GaN. Первые слои буфера должны действовать как полуизолирующие, и это является причиной использования GaN на AlN (рассогласование решеток). После выращивания GaN продолжают рост разделительного слоя AlN. Обнаружено, что высокочастотные характеристики AlGa_xN/GaN HFET ухудшаются из-за переноса электронов с высокой энергией от GaN к барьеру AlGa_xN. Слой AlN нужно выращивать между ними для предотвращения перемещения электронов

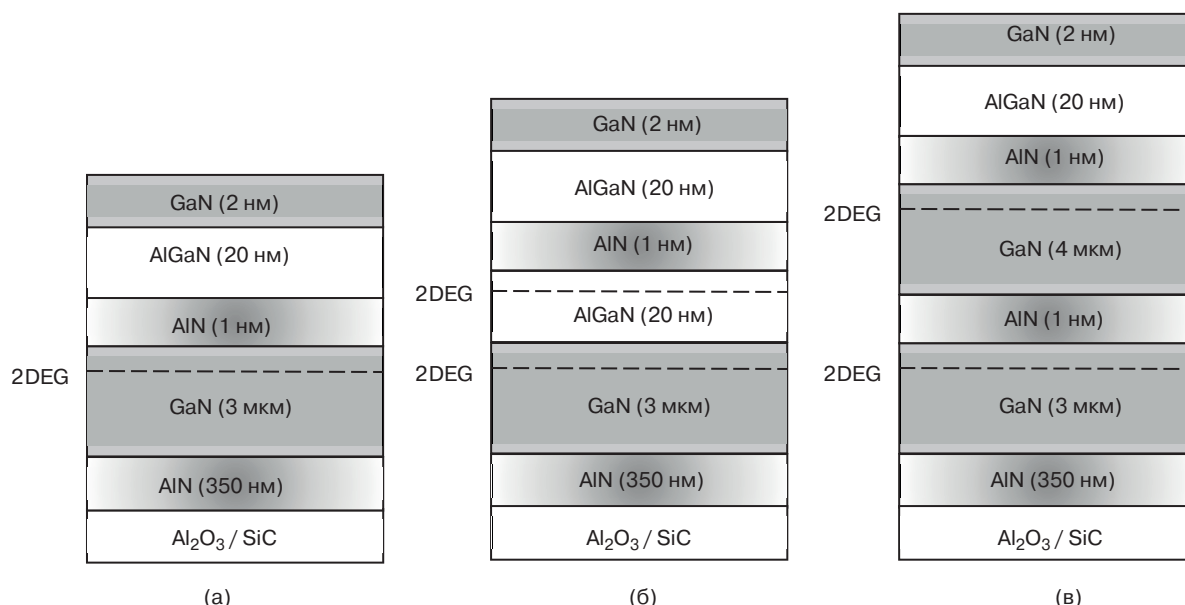


Рис. 2. Условное схематическое изображение гетероструктуры GaN HFET:
(а) одноканальная (классическая), (б) двухканальная, (в) связанная

с высокой энергией в слой AlGaIn, удерживая электроны в GaN и создавая 2DEG высокой плотности. Однако этот слой не должен быть толстым (обычно порядка 2 нм) из-за несоответствия решеток GaN и AlN, что вызывает релаксацию деформации и растрескивание [10]. Проникновение электронов в материал барьера фактически изменяет эффективную массу и скорость рассеяния электронов, поэтому он используется для лучшего ограничения канала 2DEG вследствие более широкой запрещенной зоны. Затем AlGaIn выращивают таким образом, чтобы заставить электроны формировать канал в GaN вследствие разницы поляризации между ним и слоем GaN ниже. Последний слой GaN толщиной 2 нм используется для защиты AlGaIn от окисления. Кроме того, лучший металлический контакт получается к GaN, чем к AlGaIn. Эта структура и показана на рис. 2а.

Еще один тип структуры, используемый для HFET – двухканальный HFET (рис. 2б), имеющий более высокую плотность электронов. Третьим типом структуры HFET, показанной на рис. 2в, является HFET со связанными каналами. В этой структуре, в отличие от двухканальной, два канала находятся на одном уровне энергии, поэтому они могут быть связаны, образуя канал, называемый трехмерным электронным газом или 3DEG.

1. ИСТОЧНИКИ И МЕХАНИЗМЫ ОТКАЗОВ GaN HFET

Из-за сильных электрических полей, присутствующих в GaN HFET, а также взаимодействия тепловых, физических, поляризационных явлений и т.д.,

в HFET существует несколько путей (направлений) деградации, вызываемых перегревом, приводящим к снижению удельного тока, а также к росту тока утечки затвора и ограничению надежности. Рассеивание мощности, связанное с взаимодействиями горячих электронов и горячих фононов, может быть вызвано несколькими механизмами. В целом ряде работ были исследованы эти механизмы деградации и описаны способы снижения их воздействия. В зависимости от времени работы полупроводникового прибора существуют три основных периода отказов (рис. 3) [11]. Как видно, наличие отказа устройства не зависит от времени его работы, и все разработчики стремятся к исключению отказов на стадиях I и II, а также максимальному их снижению на периоде старения.

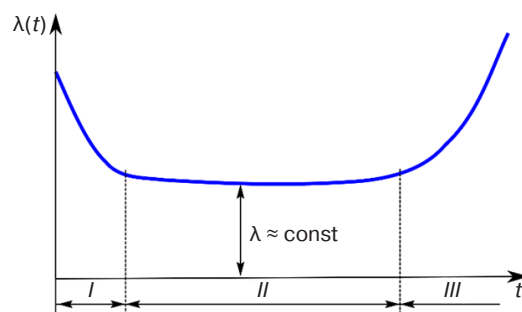


Рис. 3. Типовая зависимость интенсивности отказов λ от времени работы t :
I – период приработки и отказов некачественных изделий;
II – период нормальной эксплуатации (интенсивность отказов приблизительно постоянна);
III – период старения (отказы вызваны износом и/или старением материалов)

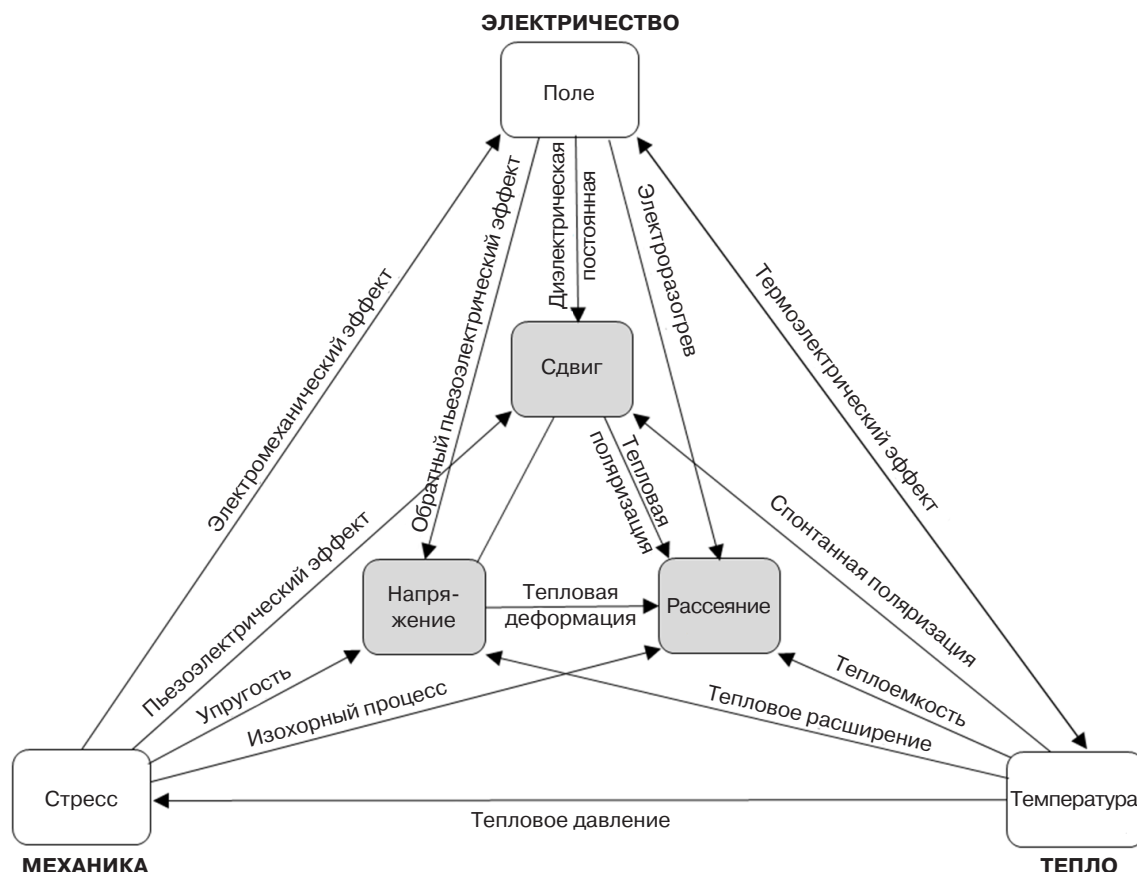


Рис. 4. Полный «волшебный треугольник взаимодействий»

Для описания вышеупомянутых деградаций определимся с их механизмами. Хотя классифицировать все механизмы деградации достаточно сложно, для лучшего понимания разделим их на три основных группы: электрические, тепловые и механические. Эти механизмы и их взаимосвязь показаны в так называемом «волшебном треугольнике взаимодействий», демонстрирующем связи между электрическим, механическим и тепловым взаимодействиями (рис. 4) [7].

На примере простейшей структуры GaN/AlGaN HFET покажем расположение основных источников отказов транзисторов, наиболее часто проявляющихся при работе (рис. 5).

Рис. 4 и 5 показывают, что механизмы отказов в GaN HFET тесно взаимосвязаны. При этом источники 1 и 4 свойственны GaN-приборам вследствие наличия в гетероструктурах AlGaIn/GaN поляризационных полей – спонтанной и пьезоэлектрической, источники отказов 2 и 3 обусловлены наличием горячих электронов, возникающих при высоких уровнях напряжения питания, а источники 5–8 активируются при повышении температуры [13].

Вопросы, связанные с повышением надежности, и способы их решения требуют понимания механизмов деградаций GaN HFET, способных создавать серьезную проблему из-за особенностей физики устройств

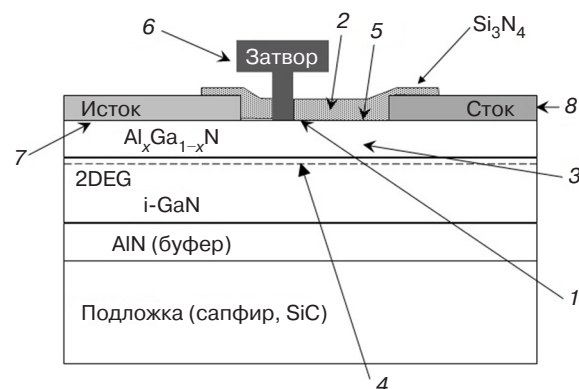


Рис. 5. Основные выявленные механизмы отказов [12]:

- 1 – электрическое поле, вызывающее деградацию края затвора и ранее существовавшие температурные дефекты,
- 2 – захват электронов в пассивирующем слое,
- 3 – генерация ловушек горячими электронами,
- 4 – генерация ловушек вследствие электротермомеханического повреждения (температура, электрическое поле, механические деформации),
- 5 – термоиндуцированное отслоение пассивации,
- 6 – деградация металлического соединения с затвором вследствие электротермомеханического повреждения, вызванного ловушками,
- 7 – деградация межслойных соединений,
- 8 – деградация омических контактов

GaN, несовершенства исходных материалов, ростовых и пост-ростовых процессов изготовления приборов. В [14–18] отмечено, что некоторые эффекты деградации проявляются даже когда устройства находятся в выключенном состоянии (без подачи напряжений смещения) или во время двухпозиционных смещений затвора Шоттки [14–18]. В этом случае основным проявлением деградации является катастрофический рост утечки тока затвора. Существование критического напряжения, при превышении которого происходит деградация параметров GaN HFET, привело к предложению механизма деградации, основанного на формировании дефектов вследствие обратного пьезоэлектрического эффекта [13]. Механизмы отказов 5–8 относятся к теплоактивированным механизмам деградации, которые ранее наблюдались и в устройствах, созданных на иных полупроводниковых материалах (Si, GaAs, InP, SiC и т.п.). Это говорит о том, что эти механизмы отказов больше связаны с технологиями и материалами металлизации, а не относятся к самому нитриду галлия [13], но вследствие особенностей ростовых и пост-ростовых технологий могут проявляться более ярко.

Электрические механизмы деградации GaN HFET подробно рассмотрены в [19]. Теперь перейдем к анализу тепловых и механических механизмов отказа, а также их взаимосвязи с электрическими механизмами.

2. ТЕПЛОВЫЕ МЕХАНИЗМЫ ДЕГРАДАЦИИ GaN HFET

А. Проблема саморазогрева

В случае, когда кристаллическая решетка полупроводникового материала не может полностью рассеивать тепло, генерируемое горячими электронами через излучение горячих LO-фононов¹, это излишнее количество теплоты накапливается в структуре, взаимодействует с более горячими электронами и вызывает еще больше тепла, в то время как эффективный механизм рассеивания отсутствует. Следовательно, температура прибора повышается, что приводит к ухудшению его характеристик. Этот механизм, называемый саморазогревом, является важной проблемой для GaN HFET, работающих при больших токах и мощностях.

В [20] явление саморазогрева AlGaIn/GaN HFET исследовано при использовании сапфира или SiC в качестве подложки. Отмечается, что в AlGaIn/GaN HFET, выращенных на подложках 6H-SiC, допустимая максимальная рассеиваемая мощность как минимум в 3 раза выше, чем у выращенных на сапфире в тех

же условиях. Это результат более высокой теплопроводности 6H-SiC по сравнению с сапфиром. Однако проблема использования SiC в качестве подложки заключается в его высокой стоимости. Чтобы лучше понять эффект саморазогрева, приведем результаты моделирования изменения температуры в AlGaIn/GaN HFET с различной геометрией, конструкцией гетероструктуры, плотностью легирования и типом подложки, полученные в [21].

Чтобы рассчитать повышение температуры, авторы начали с уравнения нелинейного потока и продолжили моделирование в легированном и нелегированном AlGaIn/GaN HFET-каналах на SiC. Структура, используемая для моделирования, и результат моделирования показаны на рис. 6 и 7 соответственно [20]. Из рисунка видно, что образец с нелегированным канальным слоем GaN 2DEG рассеивает тепло в существенно меньшей степени по сравнению с образцом с легированным канальным слоем GaN.

Из физики твердого тела известно, что существуют два механизма, способствующие теплопроводности. Теплопроводность может быть результатом вибрации узлов решетки, а также электронной проводимости. Решеточный вклад в теплопроводность чистых кристаллов определяется выражением:

$$k_{\text{реш}}(T) = \frac{1}{3} V_s C_{\text{реш}}(T) L(T), \quad (1)$$

где T – температура, V_s – скорость звука в полупроводнике, $C_{\text{реш}}(T)$ – теплоемкость решетки, $L(T)$ – средняя длина свободного пробега фононов.

Вклад электронной проводимости в теплопроводность незначителен при концентрации легирования менее 10^{19} см^{-3} . С другой стороны, поскольку понижающие дислокации снижают V_s и увеличивают рассеяние фононов, теплопроводность материала уменьшается за счет увеличения плотности дислокаций (GaN как чистый материал имеет гораздо более высокую теплопроводность по сравнению с эпитаксиальными слоями GaN). При этом увеличение рассеяния фононов из-за увеличения концентрации легирования преобладает над увеличением вклада электронной проводимости.

Следовательно, теплопроводность снижается за счет увеличения концентрации легирования ($k_{\text{реш}}$ уменьшается примерно в 2 раза на каждую декаду увеличения концентрации n), что согласуется с выводами [20, 22].

В [21] показано, что при большем увеличении температуры подвижность электронов начинает уменьшаться, кроме того, при уменьшении размеров транзистора отрицательное влияние легирования становится еще более выраженным из-за увеличения плотности дислокаций и увеличения относительного количества дефектов вследствие уменьшения размеров.

¹ LO-фонон относится к продольным оптическим фононам в полупроводниковых кристаллах. [LO Phonon – longitudinal optical phonon in semiconductor crystals.]

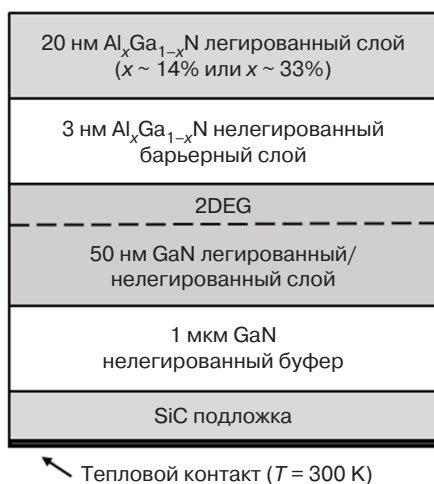


Рис. 6. Структура легированного/нелегированного HFET, использованная при моделировании [20]

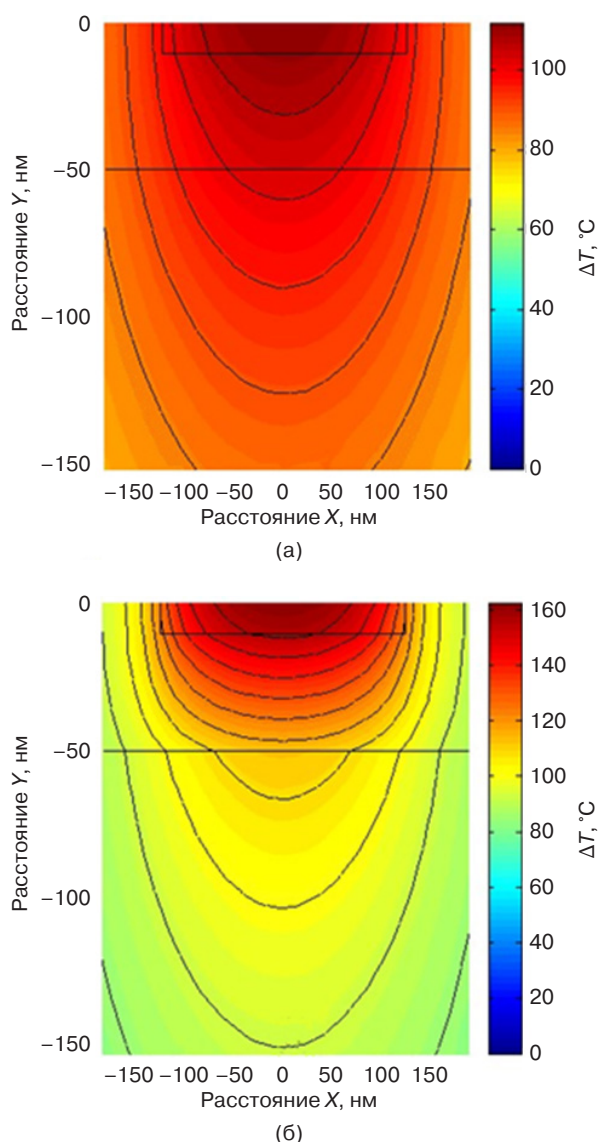


Рис. 7. Профиль повышения температуры в нелегированном (а) и легированном (б) каналах AlGaIn/GaN HFET, выращенных на подложке SiC [20]

Б. Деградации, связанные с тепловым воздействием

Чтобы выявить конкретный эффект деградации устройства, необходимо определить условия испытаний таким образом, чтобы другие механизмы деградации не влияли на полученные результаты. Когда затвор смещен в обратном направлении (транзистор «заперт»), ток стока очень мал и поэтому при увеличении температуры можно считать, что в канале нет никаких других эффектов, кроме приложенной тепловой энергии. Таким образом, можно отслеживать эффекты деградации, вызванные термическим воздействием. Применяв это условие испытаний к GaN HFET, можно понять, как тепловая энергия рассеивается в канале.

Тепловое рассеяние связано с теплопроводностью материала. Известно, что чем больше акустических фононных мод занято в структуре полупроводника, тем больше его теплопроводность. В [23] показано, что групповая скорость акустических фононов намного выше, чем оптических. Следовательно, при низких температурах моды оптических фононов не заняты, а заняты только акустические моды. Однако это верно только для малых электрических полей, чего обычно не бывает в мощных HFET, если измерения не проводятся при очень малых смещениях стока и затвора. Можно также сказать, что согласно (1), при низких температурах длина свободного пробега L является относительно большой, и в ней преобладают конечный размер кристалла (размерный эффект), количество дефектов (в случае чистого кристалла он незначителен) и тепловая проводимость решетки $C_{\text{реш}}(T) \sim \left(\frac{T}{\theta_D} \right)$, где θ_D – температура Дебая.

С ростом температуры теплопроводность $C_{\text{реш}}(T)$ сначала начинает насыщаться, а при очень высоких температурах теплопроводность падает из-за процессов фонон-фононного и фонон-электронного рассеяния [20] (рис. 8).

В исследовании [24] для лучшего понимания тепловых свойств AlGaIn/GaN HFET были применены различные методы исследования, такие как рамановская микротермография, микро-фотолюминесцентная спектроскопия и тепловое моделирование. Подтверждено, что в объемном GaN теплопроводность выше, чем в эпитаксиальных слоях, из-за того, что объемный материал имеет меньшую плотность дислокаций. При этом, если качество объемного GaN достаточно хорошее, эпитаксиальные слои также будут более качественными при прочих равных условиях. Доказано, что тепловое сопротивление в GaN-на-SiC очень близко к тепловому сопротивлению GaN-на-GaN, хотя GaN имеет несколько меньшую теплопроводность $C_{\text{GaN}} \sim 260 \text{ Вт/(м·К)}$ для

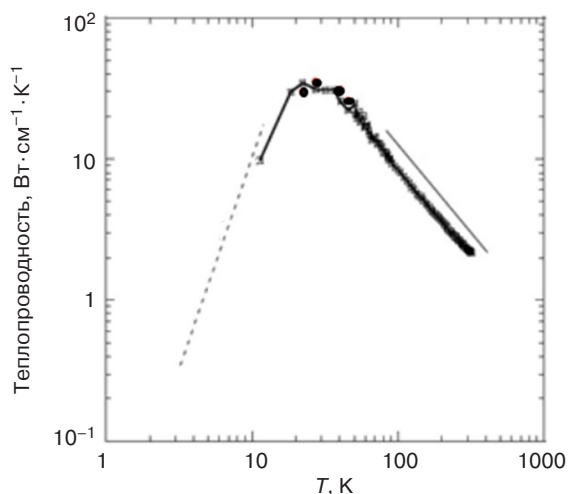


Рис. 8. Зависимость теплопроводности GaN HFET с шириной затвора $W_3 = 200$ мкм от температуры: пунктирная линия – предел рассеяния при длине свободного пробега фононов 500 мкм из-за размерного эффекта, сплошная линия – зависимость $T^{-1.22}$ [20]

объемного GaN по сравнению с $C_{\text{SiC}} \sim 480$ Вт/(м·К) для SiC. Причина может быть связана с отсутствием теплового граничного сопротивления между слоями прибора и подложкой [24]. На рис. 9 показаны температура поверхности и профиль глубины в центре AlGaIn/GaN HFET размером 30×80 мкм, рассчитанные в 3D-симуляторе, а также измеренные с помощью фотолюминесцентной и рамановской микроспектроскопии. Используя этот рисунок и допущение о нулевом термическом граничном сопротивлении ($\text{TBR}_{\text{eff}}^2$) на границе GaN–GaN и однородной теплопроводности GaN, а также аппроксимируя измеренную кривую с помощью тепловой модели 3D-T со стандартной температурной зависимостью теплопроводности $T^{-1.22}$, получаем теплопроводность $C_{\text{GaN}} \sim 260$ Вт/(м·К), в отличие от тонкого эпитаксиального слоя, обладающего величиной $C_{\text{epiGaN}} \sim 150$ Вт/(м·К).

В [25] представлена разработанная совмещенная электронная модель ML-TCAD³, позволяющая прогнозировать снижение коэффициента усиления и коэффициент полезного действия GaN HEMT, индуцированные эффектами горячих электронов, и не требующая знания физики надежности и результатов долгосрочных экспериментальных испытаний.

² Thermal boundary resistance.

³ ML-TCAD – электронная модель транзистора, созданная на основе машинного обучения (machine learning – ML), для существенного ускорения расчетов в среде TCAD за счет минимизации прямых физических вычислений. [ML-TCAD is an electronic model of a transistor created on machine learning (ML) basis to significantly speed up calculations in the TCAD (Technology Computer-Aided Design) environment by minimizing physical calculations.]

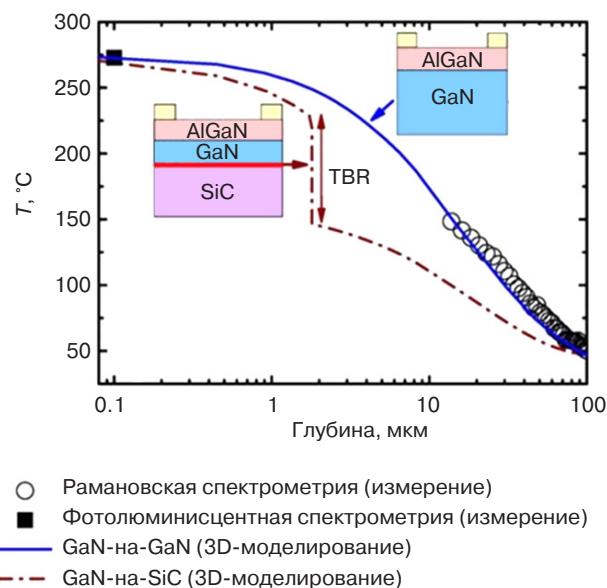


Рис. 9. Зависимость температуры T на поверхности от толщины подложки [24]

Полученная модель с высокой достоверностью предсказывает результаты изменения тока стока в GaN HEMT под действием напряжения горячих электронов. Кроме того, модель позволяет по кривым деградации вольтамперной характеристики (ВАХ) определить расположение, распределение, концентрации и уровни энергии ловушек в GaN HEMT, что безусловно полезно для дальнейшего изучения механизма физической деградации GaN HEMT в условиях воздействия горячих электронов.

В. Дегерация омических контактов и пассивирующих покрытий

В HFET на основе AlGaIn/GaN используют омические контакты со стандартной металлизацией с применением золота, что, по-видимому, гарантирует достаточную стабильность при испытаниях на повышенную температуру до определенного предела. В [24] GaN HFET с омическими контактами Ti/Al/Pt/Au подвергали ступенчатому напряжению в течение 48 ч. Было обнаружено, что омические контакты начинают деградировать при температуре перехода более 300°C – саморазогрев транзистора приводит к ухудшению характеристик приборов и блоков за счет деградации омического контакта [13, 24].

В [26] исследовалась деградация AlGaIn/GaN/SiC HFET с длиной затвора 25 мкм и различными пассивирующими покрытиями, связанная с температурным режимом функционирования транзистора. Было показано, что деградация порогового напряжения начинается в диапазоне температур $310\text{--}330^\circ\text{C}$. Анализ изменений в структуре транзистора проводился

путем измерения электролюминесценции и при использовании просвечивающей электронной микроскопии (ПЭМ). Было обнаружено образование пустот и диффузия золота в AlGaIn/GaN. Эти процессы ответственны за деградацию приборов при обычных технологиях пассивации.

При этом повышение температуры активной области и самого кристалла транзистора зависит, в т.ч., и от выбора рабочей точки, и от уровня входной СВЧ-мощности. На рис. 10 представлено тепловое распределение по поверхности кристалла в сечении «от входа к выходу» AlGaIn/GaN/SiC HFET с габаритными размерами $480 \times 800 \times 100$ мкм, длиной затвора $L_3 = 25$ мкм и периферией затвора $W_3 = 6 \times 200$ мкм. Испытания проведены при температуре основания корпуса 120°C .

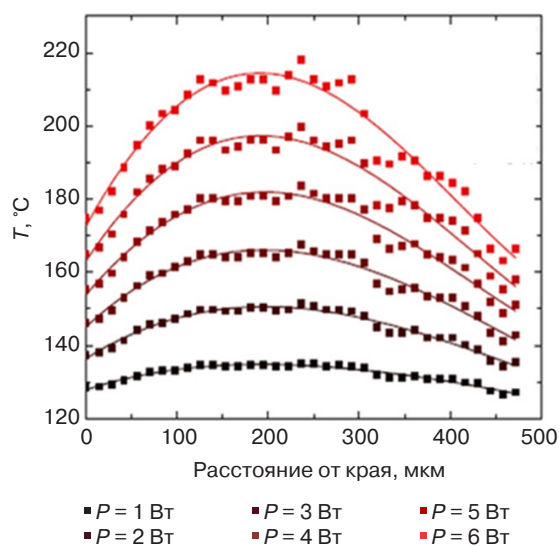


Рис. 10. Распределение температуры T на поверхности кристалла при разных уровнях мощности входного СВЧ-сигнала [26]

Видно, что при увеличении мощностной нагрузки P резко меняется распределение температуры по площади транзистора. Возникающая неравномерность температуры, безусловно, будет являться причиной последующих отказов транзистора. Дополнительные исследования подтверждают, что прирост температуры поверхности кристалла зависит и от температуры корпуса, и от рассеиваемой мощности (рис. 11).

В результате исследования установлено, что при воздействии повышенной температуры возрастает ток затвора, а пороговое напряжение затвора смещается в отрицательную сторону, и это связано с пассивирующими слоями.

В [27] представлены результаты исследования микроскопического происхождения уязвимости материалов из состава GaN HFET и устройств на их основе к высоким температурам

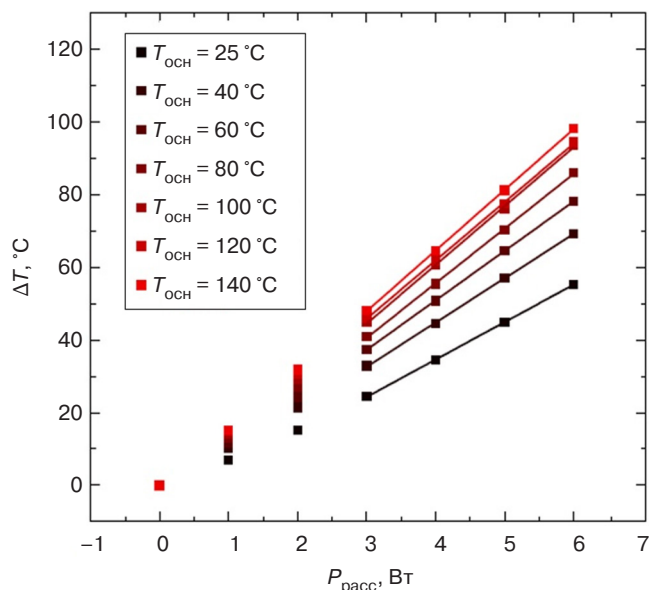


Рис. 11. Зависимость прироста температуры поверхности транзистора ΔT от рассеиваемой мощности $P_{\text{расс}}$ при разных температурах основания [26]

путем мониторинга начала структурной деградации в различных температурных условиях в режиме реального времени. Исследования проведены с помощью ПЭМ. Электронно-прозрачные образцы изготавливали из объемного материала и нагревали вплоть до 800°C . ПЭМ высокого разрешения (high-resolution transmission electron microscopy), сканирующая ПЭМ (scanning transmission electron microscopy), энергодисперсионная рентгеновская спектроскопия (energy-dispersive X-ray spectroscopy) и геометрический фазовый анализ (geometric phase analysis – GPA) выполнялись для оценки качества кристаллов, исследования диффузии материалов и процессов распространения деформации в образце перед и после нагрева. Отмечено, что уменьшение площади контакта затвора заметно, начиная с температуры 470°C , и оно сопровождается перемешиванием Ni/Au вблизи границы раздела «затвор/AlGaIn». Повышенные температуры вызывают значительное расширение решетки вне плоскости на границе раздела SiN_x/GaN/AlGaIn, как показывают карты деформации GPA с геометрической фазой, в то время как деформации в плоскости остаются относительно постоянными. В этом исследовании показано, что воздействие температур, превышающих 500°C , приводит к увеличению тока утечки в GaN HFET на 2 порядка. Результаты этого исследования дают визуальную информацию в режиме реального времени для определения первоначального места деградации и подчеркивают влияние температуры на структуру GaN HFET, его электрические свойства и деградацию материалов.

Г. Испытания на безотказность и срок службы

Тепловое воздействие – одна из основных проблем, снижающих технические характеристики и надежность полупроводникового прибора. Это наиболее распространенный механизм, поскольку AlGaIn/GaN HFET в основном работает при относительно высоких температурах.

Надежность устройства – очень важный вопрос. В настоящее время на каждом предприятии есть отдельные подразделения, в которых основное внимание уделяется качеству и надежности своих устройств. Для любых производимых устройств требуется определение области безопасной работы, средней наработки до отказа и срока сохранения приборов и устройств. Поэтому промышленность уделяет большое внимание надежности своих изделий – образцы подвергаются многочисленным тестам, в т.ч. на кратковременную и длительную безотказность и сохраняемость. Как можно понять из названия, эти тесты проводятся для оценки срока службы устройства. Так как нельзя ждать 10 или 25 лет, чтобы увидеть, что произойдет с полупроводниковым прибором, применяются специальные условия для проведения относительно коротких по времени испытаний для оценки среднего времени наработки до отказа (mean time to failure, MTTF).

Эти ускоренные испытания на срок службы в основном проводят для трех различных температур, и для каждой измеряется MTTF. Экстраполяцией полученных значений к температуре, при которой функционирует прибор (при этом температура активной области прибора выше температуры корпуса), можно получить MTTF для устройства. На рис. 12 показано, как оценивается MTTF в испытании на отказ: измеряется среднее время работы до отказа при трех температурах активной области прибора: 260, 285 и 310 °C и путем экстраполяции определяется, что при рабочей температуре активной области 150 °C среднее время наработки до отказа составит более 10^7 ч, энергия активации $E_a = 2.0$. Обычно испытывается минимально возможное количество устройств, но таким образом, чтобы измерения не теряли точности [7].

При допустимой рабочей температуре p - n -перехода T_j активной зоны кристалла GaN HFET, равной 200 °C, средняя наработка до отказа составляет 10^5 ч (11.57 лет). Продемонстрирована также стойкость приборов к рассогласованию нагрузки до коэффициента стоячей волны напряжения, равного 10 в режиме большого сигнала. Быстрое (в течение нескольких часов) разрушение возникает в современных GaN-гетеротранзисторах при температурах активной зоны 320–350 °C [13].

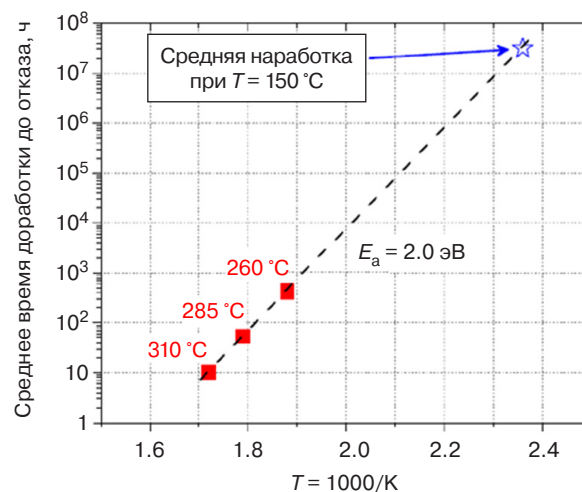


Рис. 12. Определение среднего времени наработки до отказа методом измерения при трех температурах

В [28] экспериментально исследованы эффекты деградации, наблюдаемые в GaN HFET с длиной затвора 0.15 мкм при работе в реальных условиях усилителя мощности, т.е. при подаче на вход СВЧ-мощности высокого уровня. Измерения проводились для серии приборов в режиме loud-pull измерений. Следовательно, данный режим эксперимента предоставляет информацию, соответствующую работе с СВЧ-сигналом, и позволяет преимущественно выявлять изменения электрических величин, которые невозможно непосредственно обнаружить на ВАХ или высоких частотах. Такие величины, как сопротивление затвора, в настоящее время играют фундаментальную роль в анализе надежности технологий. Эксперименты выполнялись на GaN HFET с одной и той же периферией затвора при работе в режиме класса АВ – режим насыщения, в котором подчеркиваются эффекты деградации, вызванные высокими температурами вследствие увеличения рассеиваемой мощности и в режиме класса Е, в котором деградации усиливаются под воздействием сильных электрических полей. Эксперименты проведены при $T_1 = 23$ °C и $T_2 = 100$ °C. В результате установлено, что:

- уровень ухудшения состояния GaN HFET зависит от фактического радиочастотного режима;
- эффекты термической деградации, усиливающиеся в режиме класса АВ, более выражены, чем эффекты воздействия сильных полей, в режиме класса Е;
- характеристика GaN HFET в условиях реальных СВЧ-нагрузок должна использоваться для точного и глубокого исследования механизмов деградации и отказов с целью определения MTTF в практических СВЧ-приложениях.

3. МЕХАНИЧЕСКИЕ МЕХАНИЗМЫ ДЕГРАДАЦИИ GaN HFET

А. Обратный пьезоэлектрический эффект

Механические воздействия также важны как часть треугольника взаимодействий (рис. 4). Механические напряжения оказывают важное влияние на параметры и надежность СВЧ GaN HFET. Нитрид галлия является полярным материалом, т.е. валентные электроны не распределяются между двумя соседями равномерно – это вызывает локальную поляризацию кристалла полупроводника. Однако глобально вектор поляризации GaN равен нулю. Следовательно, при приложении механического давления кристаллическая структура может изгибаться или расширяться (в зависимости от направления силы) и вызывать результирующую поляризацию, которая может действовать как электрическое поле. Это явление называется пьезоэлектрическим эффектом.

С другой стороны, если мы приложим к этому кристаллу электрическое поле, кристалл снова может изгибаться или расширяться (в зависимости от направления электрического поля). В этом случае электрическое поле вызывает механическую силу – этот эффект называется обратным пьезоэлектрическим полем. При приложении напряжения затвор-исток $U_{з.и.}$ обратного смещения затвора канал все больше и больше истощается. Если приложить слишком большое электрическое поле в направлении, противоположном направлению релаксации кристалла, это вызовет большую механическую силу и может вызвать механическое повреждение кристалла. Такой эффект и называется обратным пьезоэлектрическим эффектом. Именно это происходит с GaN при приложении слишком большого напряжения $U_{з.и.}$.

Процессы изготовления и условия эксплуатации также влияют на механические напряжения. В [29], в частности, обсуждается связь механических напряжений с надежностью нитрид-галлиевых гетеротранзисторов. В работе исследовались структуры $Al_{0.2}Ga_{0.8}N(20\text{ нм})/GaN(2\text{ мкм})$ на подложке толщиной 75 мкм. Проведенные расчеты показывают, что пассивирующий слой SiN толщиной 100 нм создает в месте примыкания к затвору механическое напряжение до 300 МПа [13]. Растягивающие напряжения являются критическими с точки зрения надежности транзистора ввиду того, что они способствуют образованию «ямок» на поверхности гетероструктуры. На рис. 13 показана расчетная величина механических биаксиальных напряжений в области затвора в зависимости от удельной рассеиваемой мощности $P_{\text{расс.уд}}$ для двух конструкций GaN HFET:

- традиционной – без пассивирующего покрытия SiN и полевой платы (field-plate);

- улучшенной – при наличии SiN и field-plate, применяемых обычно для увеличения пробивных напряжений в HFET.

Приведенные данные показывают, что наличие полевой платы и слоя SiN приводят к снижению значений механических напряжений в области затвора в 1.3–1.5 раз в зависимости от удельной рассеиваемой мощности. Безусловно, механические напряжения зависят и от температуры подложки, и от температуры p - n -перехода.

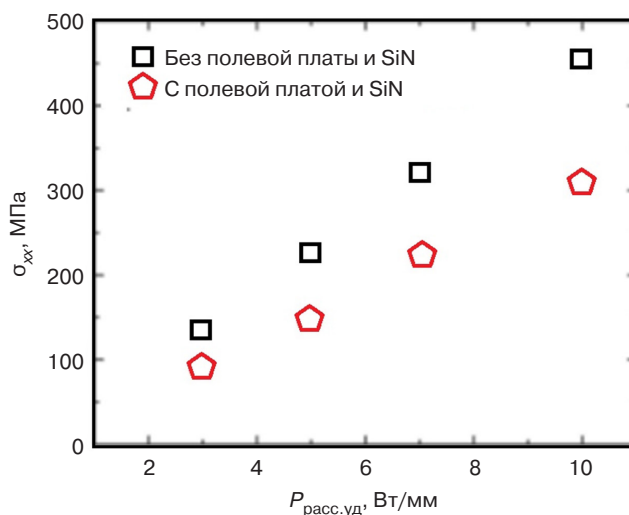


Рис. 13. Зависимость величины механических биаксиальных напряжений σ_{xx} от удельной рассеиваемой мощности $P_{\text{расс.уд}}$ в GaN HFET [13]

Также в [29] проведены расчеты значений механических биаксиальных напряжений σ_{xx} в GaN HFET, возникающих вследствие обратного пьезоэлектрического эффекта (рис. 14), следствием которого является возникновение электрического поля. Для сравнения на рис. 14 очерчена область, соответствующая значениям напряженности электрического поля ($V_{с.и.}$), возникающего в транзисторе при напряжениях между стоком и истоком $U_{с.и.} = 50\text{--}70\text{ В}$.

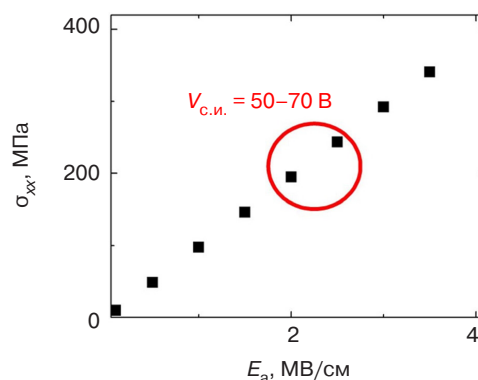


Рис. 14. Зависимость величины механических биаксиальных напряжений σ_{xx} от напряженности электрического поля в GaN HFET [29]

Из приведенных в [29] данных следует, что значения указанных выше механических напряжений, вызываемых рассеиваемой в транзисторе мощностью, сравнимы по величине с напряжениями, возникающими вследствие обратного пьезоэффекта.

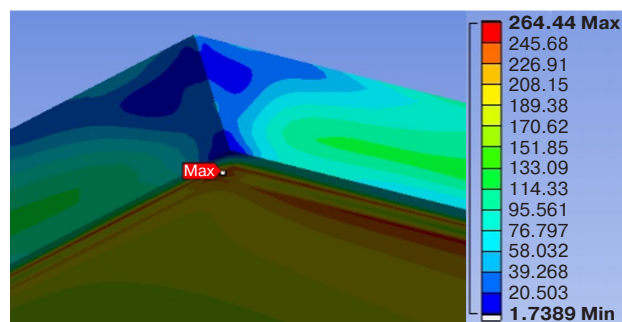
Омические контакты также создают механические напряжения. Таким образом, механические напряжения в GaN-гетеротранзисторах являются одной из причин снижения их надежности.

Б. Взаимосвязь тепловых и механических деградаций

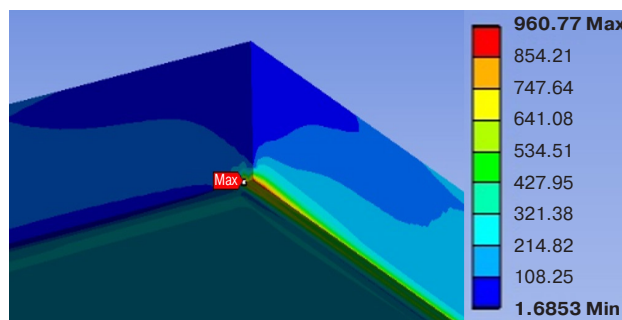
В [30] показано, что высокая удельная тепловая нагрузка мощных AlGaIn/GaN/SiC-транзисторов требует особо тщательного подхода к обеспечению теплосъема в рабочих режимах. Предупредительные меры, направленные на исключение любых дефектов сборки мощных AlGaIn/GaN-транзисторов, крайне важны. Например, дефект вертикального наклона кристалла после пайки его на основание приводит к неодинаковой толщине слоя припоя по периферии между кристаллом и основанием. Оценка напряжений, возникающих в кристалле при разогреве в зависимости от различных вариантов расположения кристалла в пространстве, а также их влияние на потенциальную надежность структуры кристалла показаны в [30], где значения и характер распределения механических напряжений в кристалле определялись с помощью расчета напряженно-деформированного состояния модели кристалла с дефектом смещения по грани или по углу методом конечных элементов. Смещением по грани в данном случае называется равномерное увеличение/уменьшение толщины припоя между двумя параллельными гранями кристалла транзистора, а смещением по углу – изменение толщины припоя по диагонали плоскости припайки.

На рис. 15 показано трехмерное распределение основных термических напряжений в слое SiC. На основании полученных значений эквивалентных напряжений для вариантов положения кристалла рассчитан коэффициент надежности (safety factor). Коэффициент надежности определяет, насколько фактически проектируемая структура сможет выдерживать индуцированное тепловое напряжение.

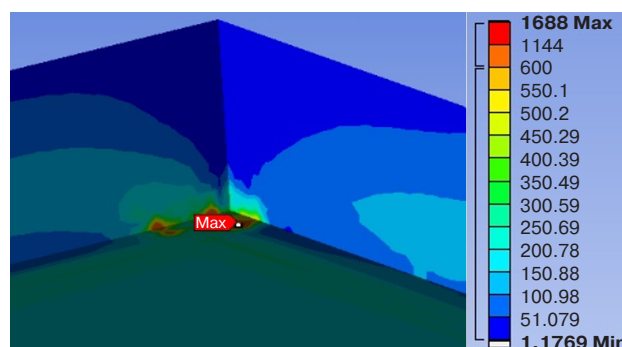
В [30] показано, что надежность кристалла AlGaIn/GaN/SiC-транзисторов ухудшается в 6.5 раз при максимальном наклоне угла и в 3.6 раза при максимальном наклоне грани. Таким образом, показано, что смещение плоскости кристалла значительно увеличивает механические напряжения в теле кристалла в областях с утончающимся слоем припоя, что, в свою очередь, означает потенциальное развитие механических разрушений структуры, особенно, при циклических термических нагрузках.



(a)



(б)



(в)

Рис. 15. Распределение основных напряжений в кристалле при непрерывном рассеивании мощности для случая:

- (а) равномерной постоянной толщины припоя,
- (б) непостоянной толщины по грани,
- (в) непостоянной толщины по углу [30]

В. Взаимосвязь электрических и механических повреждений

Деградация может иметь обратимый или необратимый характер. Если изделие после завершения стрессового воздействия возвращается в свое нормальное состояние, можно говорить об обратимой деградации. Однако иногда после окончания деградации устройство необратимо изменяется, что и трактуется как повреждение или необратимая деградация.

Электрическая деградация характеризуется значением критического приложенного напряжения, ниже которого деградация является обратимой. Применение напряжений, больших чем критическое,

вызывает необратимую деградацию. В [31] показаны значительные кристаллографические повреждения, вызываемые сильными электромагнитными полями, а также корреляция между электрической деградацией (резкое падение тока потребления, коллапс тока, рост тока утечки затвора, лавинная инжекция и т.п.) и деградацией материала как механическим эффектом. Чтобы найти корреляцию между электрическими и физическими повреждениями, измеряют глубину и ширину ямок для различных образцов по изображениям, полученным методом ПЭМ. Затем строят график деградации в процентных отношениях значений тока насыщения $I_{с.и.нас}$ между стоком и истоком и тока коллапса $I_{с.и.кол}$ в зависимости от глубины дефектной области, чтобы получить количественное сравнение между электрическими и механическими повреждениями. Это показано на рис. 16 [32] и означает, что эти механизмы взаимосвязаны и кристаллографические повреждения ответственны за электрическую деградацию.

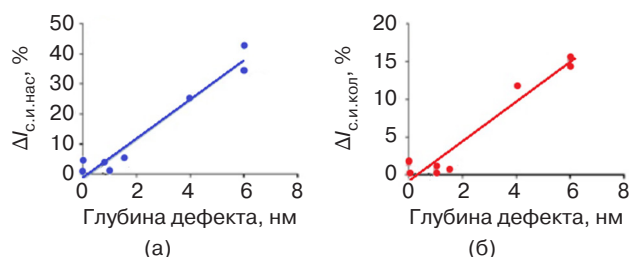


Рис. 16. Корреляция между величинами $I_{с.и.нас}$, $I_{с.и.кол}$ и глубиной дефектов [32]

На рис. 17 схематически показано распределение механических напряжений в области затвора при подаче на затвор отрицательного напряжения относительно стока и истока [33].

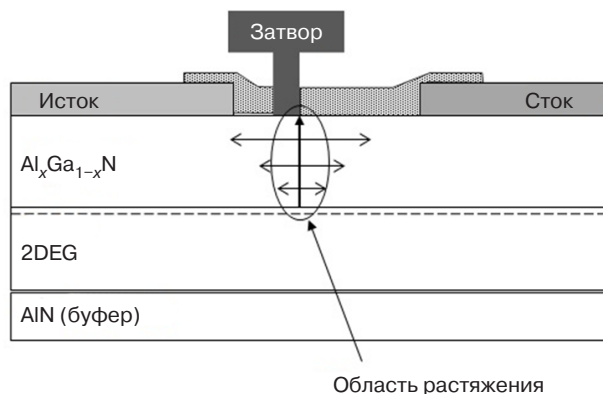


Рис. 17. Области растяжения слоя AlGa_xN, возникающие вследствие обратного пьезоэлектрического эффекта

При работе транзистора в импульсном режиме указанные на рис. 17 механические напряжения то увеличиваются, то уменьшаются. Если усилители

на основе СВЧ GaN HFET должны работать в течение 15–20 лет, то в транзисторе возникают миллиарды или даже триллионы таких циклов. В конечном счете возникает трещина в области затвора со стороны стока. Это связано с тем, что растягивающие механические напряжения со стороны стока относительно затвора в рабочем режиме при подаче напряжения на сток больше, чем со стороны истока. В начальной стадии процесса образуются дефекты в виде ямок – со стороны истока менее глубокие и редкие, со стороны стока – более глубокие и частые. На рис. 18 показано развитие процесса по времени [34].

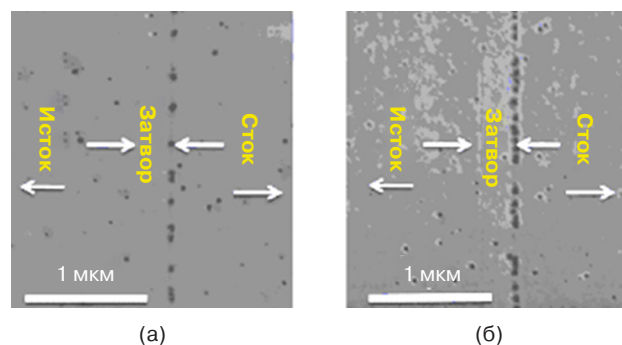


Рис. 18. Эволюция формирования трещины из дефектов в виде ямок во времени [34]: (а) через 10 мин, (б) через 1000 мин

Исследованы механизмы деградации усилителя мощности в виде 3-каскадной монолитной интегральной схемы (МИС) W-диапазона на основе нитрида галлия при воздействии входного СВЧ-сигнала высокого уровня мощности⁴. Те же эксперименты проведены и на дискретном транзисторе с периферией затвора, равной периферии затвора выходного каскада МИС. Исследования не выявили какого-либо сдвига порогового напряжения ($U_{пор}$) после воздействия мощного СВЧ-сигнала, однако, смоделированные линии динамической нагрузки показали, что колебания выходного напряжения превышают пробивное напряжение ($U_{с.и.проб}$) в условиях воздействия входного СВЧ-сигнала с высоким уровнем мощности. Таким образом, из эксперимента можно сделать вывод, что обратный пьезоэлектрический эффект будет являться основным фактором деградации характеристик, приводя к возникновению дефектов и дислокаций в кристалле на стороне стока.

Авторы [35] подтверждают, что довольно быстрое развитие усилителей мощности на основе нитрида галлия, ориентированного на высокие выходную мощность и коэффициент полезного действия, создало критическую проблему для управления температурой устройств в целом. В результате проведенного

⁴ Jimenez J. *Advanced Reliability Aspects of GaN FETs*. Presented at European Microwave Week (EuMW), 2010.

теплового проектирования и анализа транзисторов и МИС на основе карт тепловых режимов, измеренных инфракрасной камерой в непрерывных и импульсных режимах работы, установлено, что тепловое сопротивление R_t «переход–корпус GaN-кристалла» при работе на постоянном токе составляет $1.63\text{ }^{\circ}\text{C}/\text{Вт}$, а в импульсном режиме $R_t = 1.05\text{ }^{\circ}\text{C}/\text{Вт}$. Таким образом, экспериментально доказано, что для обеспечения требуемых показателей надежности при проектировании GaN МИС должна использоваться только тепловая модель, достоверно подтвержденная функциональным тестированием.

Наличие дислокационных ямок на поверхности исходной подложки ведет к последующему образованию трещин [33]. Тонкая химическая обработка ее поверхности приводит к исключению или, по крайней мере, к уменьшению образования ямок травления («pitting»). Посторонние примеси (загрязнения) также стимулируют процесс деградации. Двойной верхний слой GaN («сар») над барьером AlGaIn уменьшает вероятность последующей деградации. Указанные явления, снижающие надежность GaN СВЧ-транзисторов, были учтены в разработках компаний Cree⁵ (США) и UMS⁶ (Германия) при разработке СВЧ GaN HFET для космических применений [36].

В отчетном докладе European Social Innovation Competition (Европейские пластины GaN на SiC подложках высокого качества для применения в космической технике) отражено следующее⁷:

- с целью повышения надежности и уменьшения напряжений, показанных на рис. 17, была уменьшена концентрация алюминия в барьерном слое; барьерный слой толщиной 22 нм состоит из Al(16%)Ga(84%)N-барьера и верхнего защитного GaN слоя толщиной 3 нм;
- слоевая концентрация носителей в 2DEG канале была немного ниже $6 \cdot 10^{12}\text{ см}^{-2}$ (Cree) и ниже $3 \cdot 10^{12}\text{ см}^{-2}$ (SiCrystal). Эти значения являются типичными значениями для HEMT-структур с 18% Al (Cree) и 16% Al (SiCrystal) при 22 нм AlGaIn барьерного слоя, соответственно.
- среднее значение кривизны составляет 10.4 мкм, среднее значение изгиба – 4.96 мкм.

В [37] показано, что ультрафиолетовое (УФ) освещение очень сильно снижает пробивное напряжение в GaN-на-Si, но для GaN-на-SiC этот эффект незначителен. Считая, что качество выращенного материала достаточно хорошее (что может быть

не так, особенно для GaN-на-SiC), можно предположить, что УФ-засветка заставляет электроны расщепляться и попадать в ловушки вследствие наличия электрического поля, вызванного обратным пьезоэлектрическим эффектом. Поэтому в GaN-на-Si этот эффект более выражен из-за большего количества ловушек. И это еще один из эффектов, подтверждающих корреляционную связь между величиной пробивного напряжения GaN HFET и количеством ловушек в GaN, иными словами, между электрической деградацией и физическими изменениями.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сильные электрические поля, присутствующие в GaN HFET, вызывают тепловые, физические и поляризационные явления, что приводит к деградациям характеристик активного элемента в виде уменьшения удельного тока стока, роста тока утечки затвора, смещения порогового напряжения, снижения пробивных напряжений, уменьшения удельной выходной мощности и снижения надежности в целом.

Высокая удельная тепловая нагруженность мощных AlGaIn/GaN-транзисторов вызывает перераспределение механических напряжений в кристалле и, как следствие, обратный пьезоэлектрический эффект, что приводит к развитию механических разрушений структуры и снижению надежности. Наличие полевой платы и слоя SiN приводят к снижению значений механических напряжений в области затвора в 1.3–1.5 раз в зависимости от удельной рассеиваемой мощности.

Ухудшение состояния GaN HFET зависит от фактических режимов питания, уровня входной мощности и класса работы усилителя. При этом эффекты термической деградации, усиливающиеся в режиме класса АВ, более выражены, чем эффекты воздействия сильных полей в режиме класса Е. Поэтому с целью определения среднего времени наработки до отказа в практических СВЧ-приложениях характеристика GaN HFET должна проводиться в условиях реальных напряжений питания, СВЧ-мощности и класса работы усилителя мощности.

Резкое снижение времени средней наработки до отказа и быстрое (в течение нескольких часов) разрушение возникает в современных GaN-гетеротранзисторах при температуре активной зоны более 320–350 °С.

Вследствие наличия описанных механизмов деградации можно утверждать, что, хотя GaN HFET превосходят по своим техническим и эксплуатационным характеристикам другие полупроводники, применяемые в настоящее время в промышленности (такие как GaAs, Si, InP и др.), при проектировании и производстве необходимо учитывать физические ограничения для исключения возможностей возникновения деградаций в эксплуатации и, кроме того, контролировать тепловые и электрические режимы GaN HFET при эксплуатации.

⁵ www.wolfspeed.com. Дата обращения 12.01.2024. / Accessed January 12, 2024.

⁶ www.ums-rf.com. Дата обращения 12.01.2024. / Accessed January 12, 2024.

⁷ Final Report Summary – EUSIC (High Quality European GaN-Wafer on SiC Substrates for Space Applications). <https://cordis.europa.eu/project/id/242360/reporting/pl>. Дата обращения 12.01.2024. / Accessed January 12, 2024.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акинин В.Е., Борисов О.В., Иванов К.А., Колковский Ю.В., Миннебаев В.М., Редька Ал.В. 350-Ваттный твердотельный усилитель мощности X-диапазона частот с воздушным охлаждением. *Наноиндустрия*. 2020;13;S4(99):465–467. <https://doi.org/10.22184/1993-8578.2020.13.4s.465.467>
2. Белолипецкий А.В., Борисов О.В., Колковский Ю.В., Легай Г.В., Миннебаев В.М., Редька А.В., Редька А.В. Антенный электронный блок для спутниковой АФАР X-диапазона. *Электронная техника. Серия 2: Полупроводниковые приборы*. 2017;3(246):15–25.
3. Борисов О.В., Зубков А.М., Иванов К.А., Миннебаев В.М., Редька А.В. Широкополосный 70-ваттный GaN усилитель мощности X-диапазона. *Электронная техника. Серия 2: Полупроводниковые приборы*. 2014;2(233):4–9.
4. Аболдурев И.М., Гарбер Г.З., Зубков А.М., Иванов К.А., Колковский Ю.В., Миннебаев В.М., Редька А.В., Ушаков А.В. Импульсный режим работы мощных СВЧ гетерополевых AlGaIn/GaN транзисторов. *Электронная техника. Серия 2: Полупроводниковые приборы*. 2012;1(228):48–53.
5. Ghovanloo M. *Dual-Heterojunction High Electron Mobility Transistors on GaAs Substrate*. University of Michigan. Ann Arbor MI 48109-2122. 2008. 18 p.
6. Hamaguchi C., Miyatsuji K., Hihara H. Proposal of single quantum well transistor (SQWT) self-consistent calculations of 2D electrons in a quantum well with external voltage. *Jpn. J. Appl. Phys.* 1984;23(3):132–134. <https://doi.org/10.1143/JJAP.23.L132>
7. Morkoc H. *Handbook of Nitride Semiconductors and Devices*. V. 3. *GaN-based Optical and Electronic Devices*. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. 2008. 902 p. <http://doi.org/10.1002/9783527628445>
8. Butte R., Carlin J.-F., Felten E., Gonschorek M., Nicolay S., Christmann G., Simeonov D., Castiglia A., Dorsaz J., Buehlmann H.J., Christopoulos S., von Hogerthal B.H., Grundy G.A.J.D., Mosca M., Pinquier C., Py M.A., Demangeot F., Frandon J., Lagoudakis P.G., Baumberg J.J., Grandjean N. Current status of AlInN layers lattice-matched to GaN for photonics and electronics. *J. Phys. D: Appl. Phys.* 2007;40(20):6328–6344. <https://doi.org/10.1088/0022-3727/40/20/S16>
9. Ramonas M., Matulionis A., Liberis J., Eastman L.F., Chen X., Sun Y.-J. Hot-phonon effect on power dissipation in a biased AlGaIn/AlN/GaN channel. *Phys. Rev. B*. 2005;71(7):075324. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.71.075324>
10. Kasahara K., Miyamoto N., Ando Y., Okamoto Y., Nakayama T., Kuzuhara M. Ka-band 2.3W power AlGaIn–GaN heterojunction FET. *IEDM Tech. Dig.* 2002:667–680. <http://doi.org/10.1109/IEDM.2002.1175929>
11. Половко А.М. *Основы теории надежности*. М.: Наука; 1964. 446 с.
12. Meneghesso G., Meneghini M., Tazzoli A., et al. Reliability issues of Gallium Nitride High Electron Mobility Transistors. *Int. J. Microw. Wirel. Technol.* 2010;2(1):39–50. <https://doi.org/10.1017/S1759078710000097>
13. Колковский Ю.В., Концевой Ю.А. Проблемы надежности GaN СВЧ гетеротранзисторов. Обзор. *Электронная техника. Серия 2. Полупроводниковые приборы*. 2022;4(267):27–41. <https://elibrary.ru/kacktk>
14. Joh J., del Alamo J.A. Critical voltage for electrical degradation of GaN high electron mobility transistors. *IEEE Elect. Device Lett.* 2008;29(4):287–289. <https://doi.org/10.1109/LED.2008.917815>
15. Joh J., del Alamo J.A. Mechanisms for electrical degradation of GaN high-electron mobility transistors. In: *Proc. of the IEEE Int. Elect. Device Meeting (IEDM), Tech. Dig.* 2006. P. 415–418. <https://doi.org/10.1109/IEDM.2006.346799>
16. Joh J., Xia L., del Alamo J.A. Gate current degradation mechanisms of GaN high electron mobility transistors. In: *Proc. of the IEEE Int. Elect. Device Meeting (IEDM)*. 2007. P. 385–388. <http://doi.org/10.1109/IEDM.2007.4418953>
17. Meneghesso G., Verzellesi G., Danesin F., et al. Reliability of GaN high-electron-mobility transistors: state of the art and perspectives. *IEEE Trans. Device Mater. Reliab.* 2008;8(2):332–343. <https://doi.org/10.1109/TDMR.2008.923743>
18. Zanoni E., Meneghesso G., Verzellesi G., et al. A review of failure modes and mechanisms of GaN-based HEMTs. In: *Proc. of the IEEE Int. Elect. Device Meeting (IEDM)*. 2007. P. 381–384. <https://doi.org/10.1109/IEDM.2007.4418952>
19. Миннебаев В.М. Электрические механизмы деградации полевых гетероструктурных транзисторов на основе нитрида галлия. *Электронная техника. Серия 2. Полупроводниковые приборы*. 2021;3(262):4–24. <https://elibrary.ru/catpkn>
20. Kittel Ch. *Introduction to Solid State Physics*. 8th ed. N.Y.: John Wiley & Sons Inc.; 2005. 703 p.
21. Filippov K.A., Balandin A.A. Self-Heating Effects in GaN/AlGaIn Heterostructure Field-Effect Transistors and Device Structure Optimization. In: *TechConnet. Briefs. V. 3. Proceed. of the ACRS Nanotech. Conf.* 2003;3:333–336.
22. Manoi A., Pomeroy J.W., Killat N., Kuball M. Benchmarking of thermal boundary resistance in AlGaIn/GaN HEMTs on SiC substrates: Implications of the nucleation layer microstructure. *IEEE Elect. Device Lett.* 2010;31(12):1395–1397. <https://doi.org/10.1109/LED.2010.2077730>
23. Killat N., Montes M., Pomeroy J.W., et al. Thermal Properties of AlGaIn/GaN HFETs on Bulk GaN Substrates. *IEEE Elect. Device Lett.* 2012;33(3):366–368. <https://doi.org/10.1109/LED.2011.2179972>
24. Rampazzo F., Pierobon R., Pacetta D., et al. Hot carrier aging degradation phenomena in GaN based MESFETs. *Microelectron. Reliability*. 2004;44(9–11):1375–1380. <https://doi.org/10.1016/j.microrel.2004.07.017>
25. Wang K., Jiang H., Liao Y., Xu Y., Yan F., Ji X. Degradation Prediction of GaN HEMTs under Hot-Electron Stress Based on ML-TCAD Approach. *Electronics*. 2022;11(21):3582. <https://doi.org/10.3390/electronics11213582>
26. Stopel A., Khramtsov A., Katz O., et al. Direct monitoring of hot-carrier accumulated charge in GaN HEMT and PHEMT devices. *Proc. Of the Int. Conf. on GaAs Manufact. Technol.* New Orleans. 2005;14–19. URL: <https://cris.tau.ac.il/en/publications/direct-monitoring-of-hot-carrier-accumulated-charge-in-gan-hemt-a>

27. Rasel M.A.J., Zhang D., Chen A., Thomas M., House S.D., Kuo W., Watt J., Islam A., Glavin N., Smyth M., Haque A., Wolfe D.E., Pearton S.J. Temperature-Induced Degradation of GaN HEMT: An *In situ* Heating Study. *J. Vacuum Sci. Technol. B*. May 2024;42(3):032209. <https://doi.org/10.1116/6.0003490>
28. Bosi G., Raffo A., Vadalà V., Giofrè R., Crupi G., Vannini G. A Thorough Evaluation of GaN HEMT Degradation under Realistic Power Amplifier Operation. *Electronics*. 2023;12(13):2939. <https://doi.org/10.3390/electronics12132939>
29. Dammann M., Baeumler M., Brückner P., et al. Degradation of 0.25 μm GaN HEMTs under high temperature stress test. *Microelectron. Reliability*. 2015;55(9–10):1667–1671. <https://doi.org/10.1016/j.microrel.2015.06.042>
30. Joglekar A., Lian C., Baskaran R., et al. Finite Element Analysis of Fabrication- and Operation-Induced Mechanical Stress in AlGaIn/GaN Transistors. *IEEE Trans. Semiconduct. Manufact.* 2016;29(4):349–354. <https://doi.org/10.1109/TSM.2016.2600593>
31. Климов А.О. Исследование термомеханического отклика кристалла ПТБШ при изменении его вертикальной ориентации в припое. *Электронная техника. Серия 2. Полупроводниковые приборы*. 2019;2(253):64–71.
32. Joh J., del Alamo J.A., Langworthy K., Xie S., Zheleva T. Role of stress voltage on structural degradation of GaN high-electron-mobility transistors. *Microelectron. Reliability*. 2011;51(2):201–206. <https://doi.org/10.1016/j.microrel.2010.08.021>
33. Morkoc H. *Handbook of Nitride Semiconductors and Devices*. V. 3. *Materials Properties, Physics and Growth*. Weinheim: Wiley-VCH Verlag GmbH & Co; 2008. 850 p. ISBN 978-3-527-40838-2
34. Ancona M.G., Binari S.C., Meyer D.J. Fully coupled thermoelectromechanical analysis of GaN high electron mobility transistor degradation. *J. Appl. Phys.* 2012;111(7):074504. <https://doi.org/10.1063/1.3698492>
35. Tsao Y.-F., Wang Y., Chiu P.-H., Hsu H.-T. Reliability Assessment of 60-GHz GaN Power Amplifier Under High-Level Input RF Stress. *IEEE Trans. Elect. Devices*. 2024;71(7):4087–4092. <https://doi.org/10.1109/TED.2024.3397634>
36. Han Y., Tang G., Lau B.L Thermal Characterization and Management of GaN-on-SiC High Power Amplifier MMIC. In: *IEEE 73rd Electronic Components and Technology Conference (ECTC)*. IEEE; 2023. P. 1989–1993. <http://doi.org/10.1109/ectc51909.2023.00342>
37. Demirtas S., del Alamo J.A. Effect of Trapping on the Critical Voltage for Degradation in GaN High Electron Mobility Transistors. In: *IEEE International Reliability Physics Symposium (IRPS)*. IEEE; 2010. P. 134–138. <https://doi.org/10.1109/IRPS.2010.5488838>

REFERENCES

1. Akinin V.E., Borisov O.V., Ivanov K.A., Kolkovskiy Yu.V., Minnebaev V.M., Redka A.I.V. 350-Watt solid-state amplifier of X-band frequencies with air cooling. *Nanoindustrial = Nanoindustry*. 2020;13;S4(99):465–467 (in Russ.). <https://doi.org/10.22184/1993-8578.2020.13.4s.465.467>
2. Belolipeckiy A.V., Borisov O.V., Kolkovsky Yu.V., Legal G.V., Minnebaev V.M., Redka A.I.V., Redka A.N.V. Electronic antenna unit for X-band space application AESA. *Elektronnaya tekhnika. Seriya 2: Poluprovodnikovye pribory = Electronic Engineering. Series 2. Semiconductor Devices*. 2017;3(246):15–25 (in Russ.).
3. Borisov O.V., Zubkov A.V., Ivanov K.A., Minnebaev V.M., Redka A.V. X-band 70-W GaN broadband power amplifier. *Elektronnaya tekhnika. Seriya 2: Poluprovodnikovye pribory = Electronic Engineering. Series 2. Semiconductor Devices*. 2014;2(233):4–9 (in Russ.).
4. Abolduyev I.M., Garber G.Z., Zubkov A.V., Ivanov K.A., Kolkovsky Yu.V., Minnebaev V.M., Redka A.V., Ushakov A.V. The pulse mode operation of the microwave power AlGaIn/GaN HFE. *Elektronnaya tekhnika. Seriya 2: Poluprovodnikovye pribory = Electronic Engineering. Series 2. Semiconductor Devices*. 2012;1(228):48–53 (in Russ.).
5. Ghovanloo M. *Dual-Heterojunction High Electron Mobility Transistors on GaAs Substrate*. University of Michigan. Ann Arbor MI 48109-2122. 2008. 18 p.
6. Hamaguchi C., Miyatsuji K., Hihara H. Proposal of single quantum well transistor (SQWT) self-consistent calculations of 2D electrons in a quantum well with external voltage. *Jpn. J. Appl. Phys. Part 2*. 1984;23(3):132–134. <https://doi.org/10.1143/JJAP.23.L132>
7. Morkoc H. *Handbook of Nitride Semiconductors and Devices*. V. 3. *GaN-based Optical and Electronic Devices*. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. 2008. 902 p. <http://doi.org/10.1002/9783527628445>
8. Butte R., Carlin J.-F., Feltin E., Gonschorek M., Nicolay S., Christmann G., Simeonov D., Castiglia A., Dorsaz J., Buehlmann H.J., Christopoulos S., von Hogerthal B.H., Grundy G.A.J.D., Mosca M., Pinquier C., Py M.A., Demangeot F., Frandon J., Lagoudakis P.G., Baumberg J.J., Grandjean N. Current status of AlInN layers lattice-matched to GaN for photonics and electronics. *J. Phys. D: Appl. Phys.* 2007;40(20):6328–6344. <https://doi.org/10.1088/0022-3727/40/20/S16>
9. Ramonas M., Matulionis A., Liberis J., Eastman L.F., Chen X., Sun Y.-J. Hot-phonon effect on power dissipation in a biased AlGaIn/AlN/GaN channel. *Phys. Rev. B*. 2005;71(7):075324. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.71.075324>
10. Kasahara K., Miyamoto N., Ando Y., Okamoto Y., Nakayama T., Kuzuhara M. Ka-band 2.3W power AlGaIn–GaN heterojunction FET. *IEDM Tech. Dig.* 2002:667–680. <http://doi.org/10.1109/IEDM.2002.1175929>
11. Polovko A.M. *Osnovy teorii nadezhnosti (Fundamentals of Reliability Theory)*. Moscow: Nauka; 1964. 446 p. (in Russ.).
12. Meneghesso G., Meneghini M., Tazzoli A., et al. Reliability issues of Gallium Nitride High Electron Mobility Transistors. *Int. J. Microw. Wirel. Technol.* 2010;2(1):39–50. <https://doi.org/10.1017/S1759078710000097>
13. Kolkovskiy Yu.V., Kontcevoi Yu.A. Problems of reliability of GaN microwave heterotransistors. (Review). *Elektronnaya tekhnika. Seriya 2: Poluprovodnikovye pribory = Electronic Engineering. Series 2. Semiconductor Devices*. 2022;4(267):27–41 (in Russ.). <https://elibrary.ru/kacktk>
14. Joh J., del Alamo J.A. Critical voltage for electrical degradation of GaN high electron mobility transistors. *IEEE Elect. Device Lett.* 2008;29(4):287–289. <https://doi.org/10.1109/LED.2008.917815>

15. Joh J., del Alamo J.A. Mechanisms for electrical degradation of GaN high-electron mobility transistors. In: *Proc. of the IEEE Int. Elect. Device Meeting (IEDM), Tech. Dig.* 2006. P. 415–418. <https://doi.org/10.1109/IEDM.2006.346799>
16. Joh J., Xia L., del Alamo J.A. Gate current degradation mechanisms of GaN high electron mobility transistors. In: *Proc. of the IEEE Int. Elect. Device Meeting (IEDM)*. 2007. P. 385–388. <http://doi.org/10.1109/IEDM.2007.4418953>
17. Meneghesso G., Verzellesi G., Danesin F., et al. Reliability of GaN high-electron-mobility transistors: state of the art and perspectives. *IEEE Trans. Device Mater. Reliabil.* 2008;8(2):332–343. <https://doi.org/10.1109/TDMR.2008.923743>
18. Zanoni E., Meneghesso G., Verzellesi G., et al. A review of failure modes and mechanisms of GaN-based HEMTs. In: *Proc. of the IEEE Int. Elect. Device Meeting (IEDM)*. 2007. P. 381–384. <https://doi.org/10.1109/IEDM.2007.4418952>
19. Minnebaev V.M. Electrical Degradation of GaN heterostructure field-effect transistors. *Elektronnaya tekhnika. Seriya 2: Poluprovodnikovye pribory = Electronic Engineering. Series 2. Semiconductor Devices*. 2021;3(262):4–24 (in Russ.). <https://elibrary.ru/catpkn>
20. Charles Kittel. *Introduction to Solid State Physics*. 8th ed. N.Y.: John Wiley & Sons Inc.; 2005. 703 p.
21. Filippov K.A., Balandin A.A. Self-Heating Effects in GaN/AlGaN Heterostructure Field-Effect Transistors and Device Structure Optimization. In: *TechConnet. Briefs. V. 3. Proceed. of the ACRS Nanotech. Conf.* 2003;3:333–336.
22. Manoi A., Pomeroy J.W., Killat N., Kuball M. Benchmarking of thermal boundary resistance in AlGaN/GaN HEMTs on SiC substrates: Implications of the nucleation layer microstructure. *IEEE Elect. Device Lett.* 2010;31(12):1395–1397. <https://doi.org/10.1109/LED.2010.2077730>
23. Killat N., Montes M., Pomeroy J.W., et al. Thermal Properties of AlGaN/GaN HFETs on Bulk GaN Substrates. *IEEE Elect. Device Lett.* 2012;33(3):366–368. <https://doi.org/10.1109/LED.2011.2179972>
24. Rampazzo F., Pierobon R., Pacetta D., et al. Hot carrier aging degradation phenomena in GaN based MESFETs. *Microelectron. Reliability*. 2004;44(9–11):1375–1380. <https://doi.org/10.1016/j.microrel.2004.07.017>
25. Wang K., Jiang H., Liao Y., Xu Y., Yan F., Ji X. Degradation Prediction of GaN HEMTs under Hot-Electron Stress Based on ML-TCAD Approach. *Electronics*. 2022;11(21):3582. <https://doi.org/10.3390/electronics11213582>
26. Stopel A., Khramtsov A., Katz O., et al. Direct monitoring of hot-carrier accumulated charge in GaN HEMT and PHEMT devices *Proc. Of the Int. Conf. on GaAs Manufact. Technol.* New Orleans. 2005;14–19. Available from URL: <https://cris.tau.ac.il/en/publications/direct-monitoring-of-hot-carrier-accumulated-charge-in-gan-hemt-a>
27. Rasel M.A.J., Zhang D., Chen A., Thomas M., House S.D., Kuo W., Watt J., Islam A., Glavin N., Smyth M., Haque A., Wolfe D.E., Pearton S.J. Temperature-Induced Degradation of GaN HEMT: An *In situ* Heating Study. *J. Vacuum Sci. Technol. B*. May 2024;42(3):032209. <https://doi.org/10.1116/6.0003490>
28. Bosi G., Raffo A., Vadalà V., Giofrè R., Crupi G., Vannini G. A Thorough Evaluation of GaN HEMT Degradation under Realistic Power Amplifier Operation. *Electronics*. 2023;12(13):2939. <https://doi.org/10.3390/electronics12132939>
29. Dammann M., Baeumler M., Brückner P., et al. Degradation of 0.25 μm GaN HEMTs under high temperature stress test. *Microelectron. Reliability*. 2015;55(9–10):1667–1671. <https://doi.org/10.1016/j.microrel.2015.06.042>
30. Joglekar A., Lian C., Baskaran R., et al. Finite Element Analysis of Fabrication- and Operation-Induced Mechanical Stress in AlGaN/GaN Transistors. *IEEE Trans. Semiconduct. Manufact.* 2016;29(4):349–354. <https://doi.org/10.1109/TSM.2016.2600593>
31. Klimov A.O. Thermomechanical response study of the FET crystal changing its vertical orientation in Solder. *Elektronnaya tekhnika. Seriya 2: Poluprovodnikovye pribory = Electronic Engineering. Series 2. Semiconductor Devices*. 2019;2(253):64–71 (in Russ.).
32. Joh J., del Alamo J.A., Langworthy K., Xie S., Zheleva T. Role of stress voltage on structural degradation of GaN high-electron-mobility transistors. *Microelectron. Reliability*. 2011;51(2):201–206. <https://doi.org/10.1016/j.microrel.2010.08.021>
33. Morkoc H. *Handbook of Nitride Semiconductors and Devices*. V. 3. *Materials Properties, Physics and Growth*. Weinheim: Wiley-VCH Verlag GmbH & Co; 2008. 850 p. ISBN 978-3-527-40838-2
34. Ancona M.G., Binari S.C., Meyer D.J. Fully coupled thermoelectromechanical analysis of GaN high electron mobility transistor degradation. *J. Appl. Phys.* 2012;111(7):074504. <https://doi.org/10.1063/1.3698492>
35. Tsao Y.-F., Wang Y., Chiu P.-H., Hsu H.-T. Reliability Assessment of 60-GHz GaN Power Amplifier Under High-Level Input RF Stress. *IEEE Trans. Elect. Devices*. 2024;71(7):4087–4092. <https://doi.org/10.1109/TED.2024.3397634>
36. Han Y., Tang G., Lau B.L. Thermal Characterization and Management of GaN-on-SiC High Power Amplifier MMIC. In: *IEEE 73rd Electronic Components and Technology Conference (ECTC)*. IEEE; 2023. P. 1989–1993. <http://doi.org/10.1109/ectc51909.2023.00342>
37. Demirtas S., del Alamo J.A. Effect of Trapping on the Critical Voltage for Degradation in GaN High Electron Mobility Transistors. In: *IEEE International Reliability Physics Symposium (IRPS)*. IEEE; 2010. P. 134–138. <https://doi.org/10.1109/IRPS.2010.5488838>

Об авторе

Миннебаев Вадим Минхатович, к.т.н., доцент, заместитель генерального директора по развитию ЭКБ, АО «Микроволновые системы» (105122, Россия, Москва, Щёлковское шоссе, д. 5, стр. 1). E-mail: vm@mwsystems.ru. Scopus Author ID 6602931676, SPIN-код РИНЦ 8336-0490, <https://orcid.org/0000-0002-3992-5196>

About the author

Vadim M. Minnebaev, Cand. Sci. (Eng.), Assistant Professor, Deputy General Director on the Development of Electronic Components, Microwave Systems JSC (5-1, Shchelkovskoye sh., Moscow, 105122 Russia). E-mail: vm@mwsystems.ru. Scopus Author ID 6602931676, RSCI SPIN-code 8336-0490, <https://orcid.org/0000-0002-3992-5196>

Математическое моделирование
Mathematical modeling

УДК 539.3, 621.762

<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-2-74-92>

EDN KРQMIJ



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Математическое моделирование процесса горячего изостатического прессования труб из порошковых материалов

В.А. Головешкин^{1, 2, @}, А.А. Николаенко¹, В.Н. Самаров³,
Ж. Рейссон⁴, Д.М. Фисунова¹

¹ МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, 119454 Россия

² Институт прикладной механики, Российская академия наук, Москва, 125040 Россия

³ ООО «Лаборатория новых технологий», Москва, 121352 Россия

⁴ Клермон Ферран, Франция

@ Автор для переписки, e-mail: vag-1953@yandex.ru

Резюме

Цели. Цель работы – создание модели, которая позволяет с помощью математического моделирования исследовать процесс горячего изостатического прессования (ГИП) длинных труб из порошковых материалов. Напряженно-деформируемое состояние исследуется вдали от верхней и нижней границ капсулы в цилиндрической системе координат, поэтому осевая скорость деформации в каждый момент процесса предполагается постоянной по объему.

Методы. Используются методы математического моделирования. Порошковый материал моделируется как пластически сжимаемая сплошная среда. Для описания его механических свойств в процессе деформации используется модель Грина. Для анализа механического поведения материала капсулы применяется модель идеальной пластичности при условии несжимаемости. Температурное поле предполагается постоянным по объему и по времени в течение всего процесса.

Результаты. Поскольку, как правило, толщина стенок труб существенно меньше их радиуса, то в процессе исследования принималась гипотеза о постоянстве относительной плотности порошкового материала по объему в каждый момент процесса. Принятая гипотеза позволила свести задачу определения скоростей деформаций на каждом шаге процесса к решению некоторой системы двух уравнений с двумя неизвестными. По известным скоростям деформации определяются скорости перемещений, что позволяет получить конечные размеры трубы (при относительной плотности порошкового материала равной единице). Анализируются усадки всех размеров трубы (вертикального, внутреннего радиуса, наружного радиуса), как функции относительной плотности.

Выводы. Предложенная модель описания процесса ГИП длинных труб из порошковых материалов позволяет учитывать все особенности данного процесса в зависимости от параметров системы. Показана возможность использования трубчатых образцов для определения функций, входящих в условие Грина.

Ключевые слова: математическое моделирование, пластически сжимаемая среда, горячее изостатическое прессование, порошковый материал, условие Грина, идеальная пластичность

• Поступила: 25.06.2024 • Доработана: 29.08.2024 • Принята к опубликованию: 06.02.2025

Для цитирования: Головешкин В.А., Николаенко А.А., Самаров В.Н., Рейссон Ж., Фисунова Д.М. Математическое моделирование процесса горячего изостатического прессования труб из порошковых материалов. *Russian Technological Journal*. 2025;13(2):74–92. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-2-74-92>, <https://elibrary.ru/KPQMIJ>

Прозрачность финансовой деятельности: Авторы не имеют финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

RESEARCH ARTICLE

Mathematical modeling of hot isotatic pressing of tubes from powder materials

Vasiliy A. Goloveshkin^{1, 2, @}, Artem A. Nickolaenko¹, Victor N. Samarov³,
Gerard Raison⁴, Daria M. Fisunova¹

¹ MIREA – Russian Technological University, Moscow, 119454 Russia

² Institute of Applied Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, 125040 Russia

³ Laboratory of new technologies, Moscow, 121352 Russia

⁴ Clermond Ferrand, France

@ Corresponding author, e-mail: vag-1953@yandex.ru

Abstract

Objectives. The work set out to create a mathematical model to investigate the process of hot isostatic pressing (HIP) process of long tubes from powder materials in metal capsules. By analyzing the stress-strain state in the areas far from the top and bottom borders in the cylindrical system of coordinates, the axial strain rate at every moment of the process can be considered to be constant through the entire volume.

Methods. Mathematical modeling methods were used to describe mechanical properties in the process of HIP deformation by Green's model of porous compressible media. The HIP capsule material, which is considered to be non-compressible, is described by the ideal plasticity model. The temperature field is assumed to be uniform over the volume and constant during the time of deformation.

Results. The hypothesis of the uniform density over the cross section at each moment of the process was considered during analysis to the extent that the wall thickness of the tube is substantially less than its diameter. This hypothesis allowed us to reduce the task of determining the strain rates at every step of the process to a solution comprising two equations having two variables. When the strain rates are determined, the deformation field is built to obtain the final dimensions of the tube when the powder material is fully consolidated at the end of the HIP process.

Conclusions. The proposed model for describing the process hot isostatic pressing of long tubes from powder materials takes all the features of this process into account depending on the system parameters. The possibility of using tubular samples to determine the functions included in the Green's condition is demonstrated.

Keywords: mathematical modeling, plastically compressible media, Hot Isostatic Pressing, powder material, plastically irreversible compressible media, Green's plasticity criterion, ideal plasticity

• Submitted: 25.06.2024 • Revised: 29.08.2024 • Accepted: 06.02.2025

For citation: Goloveshkin V.A., Nickolaenko A.A., Samarov V.N., Raison G., Fisunova D.M. Mathematical modeling of hot isotatic pressing of tubes from powder materials. *Russian Technological Journal*. 2025;13(2):74–92. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-2-74-92>, <https://elibrary.ru/KPQMIJ>

Financial disclosure: The authors have no financial or proprietary interest in any material or method mentioned.

The authors declare no conflicts of interest.

ВВЕДЕНИЕ

Процесс горячего изостатического прессования (ГИП) – это процесс высокотемпературного уплотнения (~1000 °C) порошковых материалов под действием внешнего давления (~1000 атм.). Процесс ГИП применяется для изготовления изделий методом порошковой металлургии. Эти изделия обладают высокими эксплуатационными характеристиками. Однако именно в силу высоких прочностных свойств их последующая обработка затруднена. Это требует максимальной точности на стадии изготовления. В процессе ГИП порошковый материал помещается в металлический контейнер (капсула). Капсула деформируется вместе с порошковым материалом до полного уплотнения последнего, потом удаляется химическим или механическим путем. Задача капсулы состоит в том, чтобы после окончания процесса порошковый монолит принял нужную форму. Цель математического моделирования процесса – спроектировать такую капсулу, чтобы после окончания процесса порошковый монолит принял нужную геометрическую форму.

Можно выделить две основные проблемы математического моделирования процесса ГИП. Первая: для процесса ГИП характерны большие деформации (начальная плотность порошка примерно 65% от плотности монолита) Математически это означает, что определяющие соотношения будут нелинейными, а граничные условия ставятся на переменной во времени границе. Вторая проблема более принципиальна – это трудность построения определяющих соотношений (под определяющими соотношениями понимаются соотношения, определяющие связь тензора напряжений в среде с параметрами, характеризующими состояние среды). Эта проблема характерна для всех задач механики деформируемого твердого тела, исследующих его поведение за пределом упругости. Так как любые определяющие соотношения будут приближенными, тогда, даже если исключить математические проблемы, любой расчет будет носить приближенный характер. Поэтому реальный процесс изготовления порошковых изделий должен быть итерационным процессом, схема которого изложена в [1]. Суть состоит в следующем: строится математическая модель, на основании этой

модели проектируется капсула, изготавливается изделие. Его параметры сравниваются с требуемыми, на основании этого сопоставления проводится уточнение математической модели. Этот метод является некоторым аналогом метода СН-ЭВМ¹, предложенного А.А. Ильюшиным в [2, 3]. Приемлемой математической моделью процесса ГИП считается модель, удовлетворяющая следующим требованиям:

- 1) она дает близкое первое приближение;
- 2) правильно учитывает влияние параметров;
- 3) позволяет вносить изменения в параметры модели на основании результатов эксперимента и в случае необходимости вводить дополнительные параметры.

Обычно для запуска изделия в производство требуются 2–3 экспериментальные итерации. На современном этапе задач математического моделирования является стабильное получение нужной геометрии на второй экспериментальной итерации. Для этого, как показывает опыт, необходимо на первой итерации иметь погрешность порядка 10%.

Существуют различные подходы к описанию поведения порошковой среды, некоторые из них, например [4], рассматривают среду как дискретную. При таких подходах, рассматривая взаимодействие отдельных частиц, необходимо учитывать эффекты, возникающие на поверхности их взаимодействия [5, 6]. Использование подобного подхода требует привлечения статистических методов [7]. Чаше порошковый материал рассматривается как единый континуум, и поскольку в процессе ГИП нас интересуют кинематические аспекты поведения, то, как показано в [8–10], кинематические аспекты поведения порошковых материалов не отличаются существенно от поведения сплошных сред.

Определяющие соотношения для порошковых материалов обладают одним существенным отличием от используемых в классических теориях пластичности [11–14], поскольку эти работы исходят, как правило, из малых объемных деформаций или равенства их нулю. Для порошковых материалов объемная деформация (или эквивалентные параметры: относительная плотность, пористость) является

¹ Сложное нагружение – электронно-вычислительная машина. [The complex loading computer method.]

важным параметром, характеризующим состояние среды. Необходимо отметить, что реальный интерес при описании процесса ГИП представляет как раз сдвиговая часть тензора деформаций. Поскольку целью ГИП является получение монолитного изделия, а начальную плотность можно определить с высокой степенью точности, то объемную составляющую тензора деформации можно считать известной. Время процесса уплотнения достаточно точно (при известной температуре и давлении) может быть определено по диаграммам уплотнения (диаграмма Эшби) [15–18]. Различные модели, описывающие поведение пластически сжимаемых сред, представлены в работах Друянова Б.А. [19], Грина Р.Дж [20], Штерна М.Б. [21], Скорохода В.В. [22].

Наличие капсулы приводит к тому, что ее стенки «экранируют» внешнее давление по-разному

в различных направлениях. Особенно это проявляется при изготовлении труб из порошковых материалов. В данном процессе существуют фактически три внешние границы: внешняя и внутренняя радиальные границы, и граница на торцах. Как показано в [23], при определенных условиях это может приводить к петлеобразному движению внутренней стенки. Особенности поведения труб из порошковых материалов на начальном этапе процесса исследованы в [24]. Цель данной работы – разработать модель, позволяющую качественно оценивать изменение основных параметров, определяющих геометрию трубы, на всем этапе процесса ГИП, а также выяснить принципиальную возможность использования экспериментов по прессованию труб для определения параметров, характеризующих механическое поведение порошкового материала.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть в цилиндрической системе координат (r, z) имеется следующая система: при $R_1 < r < R_2, 0 < z < H$ имеется капсула с идеально пластическим материалом с пределом текучести T_1 ; при $R_3 < r < R_4, 0 < z < H$ имеется капсула с идеально пластическим материалом с пределом текучести T_2 ; при $R_2 < r < R_3, 0 < z < H$ имеется порошковый материал, поведение которого описывается моделью Грина, с пределом текучести монолита Y . Здесь R_1, R_2, R_3, R_4, H – текущие геометрические размеры трубы.

Для описания механических свойств порошкового материала используется эллиптическое условие текучести Грина [20, 22]:

$$\frac{\sigma^2}{f_2^2} + \frac{s^2}{f_1^2} = Y^2, \quad (1.1)$$

где $\sigma = \sigma_{ij}/3$ – первый инвариант тензора напряжений (σ_{ij} – составляющие тензора напряжений); s – интенсивность девиатора тензора напряжений, $s^2 = (3/2)s_{ij}s_{ij}$, $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}$; индексы i, j принимают целые значения 1, 2, 3, при этом оси r соответствует индекс 1, оси φ – 2, оси z – 3; δ_{ij} – символ Кронекера ($\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$, $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$); f_1, f_2 – известные из эксперимента функции относительной плотности ρ .

Согласно закону течения

$$\varepsilon_{ij} = \omega \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (1.2)$$

где ε_{ij} – составляющие тензора скоростей деформации; $\Phi(\sigma_{ij}) = 0$ – уравнение поверхности текучести (1.1); ω – коэффициент пропорциональности, определяемый в каждой точке пространства в процессе решения.

Процесс исследуется вдали от торцов трубы. Это позволяет предположить, что скорость деформации ε_z постоянна по всему объему системы. Тогда, в силу сделанного предположения и осевой симметрии, $\varepsilon_{rz} = \varepsilon_{r\varphi} = \varepsilon_{z\varphi} = 0$, также $\sigma_{rz} = \sigma_{r\varphi} = \sigma_{z\varphi} = 0$. Используя (1.1), (1.2), с учетом последних замечаний получаем:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \omega/9 \left[(2/f_2^2 + 18/f_1^2)\sigma_r + (2/f_2^2 - 9/f_1^2)\sigma_\varphi + (2/f_2^2 - 9/f_1^2)\sigma_z \right], \\ \varepsilon_\varphi &= \omega/9 \left[(2/f_2^2 - 9/f_1^2)\sigma_r + (2/f_2^2 + 18/f_1^2)\sigma_\varphi + (2/f_2^2 - 9/f_1^2)\sigma_z \right], \\ \varepsilon_z &= \omega/9 \left[(2/f_2^2 - 9/f_1^2)\sigma_r + (2/f_2^2 - 9/f_1^2)\sigma_\varphi + (2/f_2^2 + 18/f_1^2)\sigma_z \right]. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Рассматривая (1.3) как систему уравнений относительно напряжений, получаем:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= 1/(18\omega) \left[(9f_2^2 + 4f_1^2)\varepsilon_r + (9f_2^2 - 2f_1^2)\varepsilon_\varphi + (9f_2^2 - 2f_1^2)\varepsilon_z \right], \\ \sigma_\varphi &= 1/(18\omega) \left[(9f_2^2 - 2f_1^2)\varepsilon_r + (9f_2^2 + 4f_1^2)\varepsilon_\varphi + (9f_2^2 - 2f_1^2)\varepsilon_z \right], \\ \sigma_z &= 1/(18\omega) \left[(9f_2^2 - 2f_1^2)\varepsilon_r + (9f_2^2 - 2f_1^2)\varepsilon_\varphi + (9f_2^2 + 4f_1^2)\varepsilon_z \right].\end{aligned}\quad (1.4)$$

Подставляя (1.4) в (1.1), получаем:

$$\frac{1}{\omega} = \frac{6Y}{\sqrt{(9f_2^2 - 2f_1^2)(\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z)^2 + 6f_1^2(\varepsilon_r^2 + \varepsilon_\varphi^2 + \varepsilon_z^2)}}. \quad (1.5)$$

Мощность внутренних сил в единице объема w определяется соотношением

$$w = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}. \quad (1.6)$$

Согласно (1.4)–(1.6)

$$w = \frac{Y}{3} \sqrt{(9f_2^2 - 2f_1^2)(\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z)^2 + 6f_1^2(\varepsilon_r^2 + \varepsilon_\varphi^2 + \varepsilon_z^2)}. \quad (1.7)$$

Материал капсулы предполагаем несжимаемым. Его поведение описывается законом идеальной пластичности.

$$s^2 = T^2, \quad (1.8)$$

где T – предел текучести.

Согласно закону течения (1.2) и уравнению поверхности текучести (1.8),

$$\varepsilon_r = \omega \left[2\sigma_r - \sigma_\varphi - \sigma_z \right], \quad \varepsilon_\varphi = \omega \left[2\sigma_\varphi - \sigma_r - \sigma_z \right], \quad \varepsilon_z = \omega \left[2\sigma_z - \sigma_\varphi - \sigma_r \right]. \quad (1.9)$$

Полагаем

$$\sigma_r + \sigma_\varphi + \sigma_z = -3p. \quad (1.10)$$

Так как в силу условия несжимаемости

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z = 0, \quad (1.11)$$

то из (1.9)–(1.11) имеем:

$$\sigma_r = -p + \varepsilon_r / 3\omega, \quad \sigma_\varphi = -p + \varepsilon_\varphi / 3\omega, \quad \sigma_z = -p + \varepsilon_z / 3\omega. \quad (1.12)$$

Согласно (1.8), (1.12),

$$\frac{1}{\omega} = \frac{T\sqrt{6}}{\sqrt{(\varepsilon_r^2 + \varepsilon_\varphi^2 + \varepsilon_z^2)}}. \quad (1.13)$$

Мощность внутренних сил в единице объема:

$$w = T \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\varepsilon_r^2 + \varepsilon_\varphi^2 + \varepsilon_z^2)}. \quad (1.14)$$

С учетом осевой симметрии радиальное уравнение равновесия в квазистатическом приближении имеет вид:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{(\sigma_r - \sigma_\varphi)}{r} = 0. \quad (1.15)$$

Уравнение равновесия по оси z удовлетворяется интегрально, т.е. суммарные усилия напряжений σ_z в каждом сечении $z = \text{const}$ уравниваются внешним давлением на торец капсулы:

$$2\pi \int_{R_1}^{R_4} \sigma_z r dr = -\pi P (R_4^2 - R_1^2), \quad (1.16)$$

где P – внешнее давление.

На границах $r = R_2$, $r = R_3$ принимается условие равенства радиальных скоростей U_r . На границах $r = R_1$, $r = R_4$ полагаем

$$\sigma_r = -P. \quad (1.17)$$

В силу предположения о постоянстве скорости деформации ε_z по объему, поскольку постановка задачи допускает перемещение системы как жесткого тела вдоль оси z , можно положить следующее выражение для осевой скорости U_z :

$$U_z = (V / H) z, \quad (1.18)$$

где V – значение скорости U_z при $z = H$, определяемое в процессе решения.

Радиальная скорость в каждый момент является функцией только радиуса $U_r = U_r(r)$. Для скоростей деформаций имеем следующие соотношения:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial U_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{U_r}{r}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial U_z}{\partial z} = V / H. \quad (1.19)$$

Соотношения (1.1)–(1.13), (1.15), (1.19) при дополнительных условиях (1.16)–(1.18) математически определяют задачу нахождения поля скоростей в каждый момент времени при известном распределении относительной плотности порошкового материала.

Закон изменения плотности порошкового материала определяется уравнением неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\rho U_r r)}{\partial r} = 0, \quad (1.20)$$

где t – время.

2. ПОЛЕ СКОРОСТЕЙ

Как показано в [24], при прессовании трубы возникает неоднородное распределение плотности по радиусу. Однако, как правило, толщина стенок трубы существенно меньше ее радиуса. В этих условиях можно приближенно положить, что относительная плотность порошкового материала постоянна по радиусу в каждый момент процесса. Следовательно, для радиальной скорости перемещений U_r в порошковом материале имеем приближенное представление:

$$U_r = Ar + B/r, \quad (2.1)$$

где A , B – коэффициенты, определяемые в процессе решения.

Значение скорости U_z определяется соотношением (1.18).

Из условия несжимаемости (1.11) в материале капсулы имеем: $\frac{dU_r}{dr} + \frac{U_r}{r} + \varepsilon_z = 0$. Следовательно:

$$U_r = -1/2 \varepsilon_z r + C/r, \quad (2.2)$$

где C – коэффициент, определяемый в процессе решения.

Полагаем, что

$$U_r = U_1 \text{ при } r = R_2; \quad U_r = U_2 \text{ при } r = R_3. \quad (2.3)$$

Окончательно, с учетом (2.3) и условия непрерывности скоростей при $r = R_2$, $r = R_3$, скорости во всей области равны:

при $R_1 < r < R_2$, $0 < z < H$ (капсула)

$$\begin{aligned} U_z &= V / H, \\ U_r &= -(1/2)\varepsilon_z r + C_1 / r, \\ C_1 &= (1/2)\varepsilon_z R_2^2 + U_1 R_2; \end{aligned} \quad (2.4)$$

при $R_3 < r < R_4$, $0 < z < H$ (капсула)

$$\begin{aligned} U_z &= V / H, \\ U_r &= -(1/2)\varepsilon_z r + C_3 / r, \\ C_3 &= (1/2)\varepsilon_z R_3^2 + U_2 R_3; \end{aligned} \quad (2.5)$$

при $R_2 < r < R_3$, $0 < z < H$ (порошок)

$$\begin{aligned} U_z &= (V / H)z, \\ U_r &= Ar + B_1 R_3^2 / r, \\ A &= (U_2 R_3 - U_1 R_2) / (R_3^2 - R_2^2), B_1 = (U_1 R_2 - U_2 R_3^2 / R_3) / (R_3^2 - R_2^2). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Согласно (2.4)–(2.6), (1.19) скорости деформаций во всей области:

при $R_1 < r < R_2$, $0 < z < H$ (капсула)

$$\varepsilon_z = V / H, \quad \varepsilon_r = -(1/2)\varepsilon_z - C_1 / r^2, \quad \varepsilon_\varphi = -(1/2)\varepsilon_z + C_1 / r^2; \quad (2.7)$$

при $R_3 < r < R_4$, $0 < z < H$ (капсула)

$$\varepsilon_z = V / H, \quad \varepsilon_r = -(1/2)\varepsilon_z - C_3 / r^2, \quad \varepsilon_\varphi = -(1/2)\varepsilon_z + C_3 / r^2; \quad (2.8)$$

при $R_2 < r < R_3$, $0 < z < H$ (порошок)

$$\varepsilon_z = V / H, \quad \varepsilon_r = A - B_1 R_3^2 / r^2, \quad \varepsilon_\varphi = A + B_1 R_3^2 / r^2. \quad (2.9)$$

Суммарная мощность внутренних сил W состоит из трех составляющих: $W = W_1 + W_2 + W_3$, где W_1 – мощность внутренних сил во внутренней капсуле при $R_1 < r < R_2$, $0 < z < H$; W_3 – мощность внутренних сил во внешней капсуле при $R_3 < r < R_4$, $0 < z < H$; W_2 – мощность внутренних сил в порошке при $R_2 < r < R_3$, $0 < z < H$.

При $R_1 < r < R_2$, $0 < z < H$ мощность внутренних сил в единице объема, согласно (1.14), (2.7), равна $w_1 = T_1 \sqrt{2/3} \sqrt{(3/2)\varepsilon_z^2 + 2C_1^2 / r^4}$, где T_1 – предел текучести. Тогда полная мощность во внутренней капсуле:

$$W_1 = 2\pi H T_1 \sqrt{2/3} \int_{R_1}^{R_2} \sqrt{(3/2)\varepsilon_z^2 + 2C_1^2 / r^4} r dr.$$

После соответствующих вычислений:

$$W_1 = \pi H T_1 \sqrt{\frac{1}{3}} \left\{ \left[\sqrt{3\varepsilon_z^2 R_2^4 + 4C_1^2} - \sqrt{3\varepsilon_z^2 R_1^4 + 4C_1^2} \right] + 2C_1 \ln \left(\frac{R_2^2}{R_1^2} \cdot \frac{2C_1 + \sqrt{3\varepsilon_z^2 R_1^4 + 4C_1^2}}{2C_1 + \sqrt{3\varepsilon_z^2 R_2^4 + 4C_1^2}} \right) \right\}. \quad (2.10)$$

При $R_3 < r < R_4$, $0 < z < H$ мощность внутренних сил в единице объема, согласно (1.14), (2.8), равна $w_3 = T_2 \sqrt{2/3} \sqrt{(3/2)\varepsilon_z^2 + 2C_3^2 / r^4}$, где T_2 – предел текучести. Полная мощность:

$$W_3 = 2\pi HT_2 \sqrt{2/3} \int_{R_3}^{R_4} \sqrt{(3/2)\varepsilon_z^2 + 2C_3^2 / r^4} r dr.$$

Вычисляя, получаем:

$$W_3 = \pi HT_2 \sqrt{\frac{1}{3}} \left\{ \left[\sqrt{3\varepsilon_z^2 R_4^4 + 4C_3^2} - \sqrt{3\varepsilon_z^2 R_3^4 + 4C_3^2} \right] + 2C_3 \ln \left(\frac{R_4^2}{R_3^2} \cdot \frac{2C_3 + \sqrt{3\varepsilon_z^2 R_3^4 + 4C_3^2}}{2C_3 + \sqrt{3\varepsilon_z^2 R_4^4 + 4C_3^2}} \right) \right\}. \quad (2.11)$$

При $R_2 < r < R_3$, $0 < z < H$ (в порошке) мощность внутренних сил в единице объема, согласно (1.7), (2.9), равна $w_2 = \frac{Y}{3} \sqrt{\left[(9f_2^2 - 2f_1^2)(2A + \varepsilon_z)^2 + 6f_1^2(\varepsilon_z^2 + 2A^2) \right] + \frac{12f_1^2 R_3^4 B_1^2}{r^4}}$. Полная мощность:

$$W_2 = (2/3)\pi HY \int_{R_2}^{R_3} \sqrt{\left[(9f_2^2 - 2f_1^2)(2A + \varepsilon_z)^2 + 6f_1^2(\varepsilon_z^2 + 2A^2) \right] + 12f_1^2 R_3^4 B_1^2 / r^4} r dr.$$

Интегрируя, приходим к выражению:

$$\begin{aligned} W_2 = \pi HY R_3^2 / 3 \left\{ \sqrt{\left[(9f_2^2 - 2f_1^2)(2A + \varepsilon_z)^2 + 6f_1^2(\varepsilon_z^2 + 2A^2) \right] + 12f_1^2 B_1^2} - \right. \\ \left. - \sqrt{\left[(9f_2^2 - 2f_1^2)(2A + \varepsilon_z)^2 + 6f_1^2(\varepsilon_z^2 + 2A^2) \right] R_2^4 / R_3^4 + 12f_1^2 B_1^2} + \right. \\ \left. + 2\sqrt{3}f_1 B_1 \ln \left(\frac{R_3^2}{R_2^2} \frac{\sqrt{12}f_1 B_1 + \sqrt{\left[(9f_2^2 - 2f_1^2)(2A + \varepsilon_z)^2 + 6f_1^2(\varepsilon_z^2 + 2A^2) \right] R_2^4 / R_3^4 + 12f_1^2 B_1^2}}{\sqrt{12}f_1 B_1 + \sqrt{\left[(9f_2^2 - 2f_1^2)(2A + \varepsilon_z)^2 + 6f_1^2(\varepsilon_z^2 + 2A^2) \right] + 12f_1^2 B_1^2}} \right) \right\}. \quad (2.12) \end{aligned}$$

Пусть P – внешнее давление. Определим мощность внешних сил. Суммарная мощность внешних сил содержит три составляющих: N_1 – мощность внешних сил на границе $z = H$; N_2 – мощность внешних сил на границе $r = R_1$; N_3 – мощность внешних сил на границе $r = R_4$. После соответствующих вычислений получаем:

$$\begin{aligned} N_1 &= -\pi P V (R_4^2 - R_1^2), \\ N_2 &= 2\pi P R_1 H \left(-1/2\varepsilon_z R_1 + 1/2\varepsilon_z R_2^2 / R_1 + U_1 R_2 / R_1 \right), \\ N_3 &= -2\pi P R_4 H \left(-1/2\varepsilon_z R_4 + 1/2\varepsilon_z R_3^2 / R_4 + U_2 R_3 / R_4 \right). \end{aligned}$$

Суммарная мощность $N = N_1 + N_2 + N_3$.

С учетом, что $\varepsilon_z = V/H$:

$$N = -PH (R_3^2 - R_2^2) \pi \left[V/H + 2(U_2 R_3 - U_1 R_2) / (R_3^2 - R_2^2) \right]. \quad (2.13)$$

Из условия $N = W_1 + W_2 + W_3$ получаем:

$$P = - \frac{W_1 + W_2 + W_3}{H (R_3^2 - R_2^2) \pi \left[\frac{V}{H} + 2 \left(U_2 \frac{R_3}{R_3^2 - R_2^2} - U_1 \frac{R_2}{R_3^2 - R_2^2} \right) \right]}. \quad (2.14)$$

Так как скорости определены с точностью до постоянного множителя и в постановке задачи отсутствует характерное время, то можно положить:

$$\left[\frac{V}{H} + 2 \left(U_2 \frac{R_3}{R_3^2 - R_2^2} - U_1 \frac{R_2}{R_3^2 - R_2^2} \right) \right] = -1. \quad (2.15)$$

Представим внешнее давление P в виде:

$$P = T_1 M_1 + Y M_2 + T_2 M_3. \quad (2.16)$$

Обозначим:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= T_1 / Y, \quad \beta_2 = T_2 / Y, \\ \alpha_1 &= R_2 / R_1, \quad \alpha_2 = R_3 / R_2, \quad \alpha_3 = R_4 / R_3, \\ \mu_1 &= U_1 / R_2, \quad \mu_2 = U_2 / R_3. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Соотношения (2.15), (2.16) примут вид:

$$P/Y = \beta_1 M_1 + M_2 + \beta_2 M_3, \quad (2.18)$$

$$\varepsilon_z + 2(\alpha_2^2 \mu_2 - \mu_1) / (\alpha_2^2 - 1) = -1. \quad (2.19)$$

Тогда, согласно (2.10)–(2.14), (2.16)–(2.19):

$$\begin{aligned} M_1 = M_1(\mu_1, \varepsilon_z) &= \frac{1}{\sqrt{3}(\alpha_2^2 - 1)} \left\{ \left[\sqrt{3\varepsilon_z^2 + (2\mu_1 + \varepsilon_z)^2} - \sqrt{\frac{3\varepsilon_z^2}{\alpha_1^4} + (2\mu_1 + \varepsilon_z)^2} \right] + \right. \\ &\quad \left. + (2\mu_1 + \varepsilon_z) \ln \left(\frac{(2\mu_1 + \varepsilon_z)\alpha_1^2 + \sqrt{3\varepsilon_z^2 + \alpha_1^4(2\mu_1 + \varepsilon_z)^2}}{(2\mu_1 + \varepsilon_z) + \sqrt{3\varepsilon_z^2 + (2\mu_1 + \varepsilon_z)^2}} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} M_3 = M_3(\mu_2, \varepsilon_z) &= \frac{\alpha_2^2}{\sqrt{3}(\alpha_2^2 - 1)} \left\{ \left[\sqrt{3\varepsilon_z^2 \alpha_3^4 + (2\mu_2 + \varepsilon_z)^2} - \sqrt{3\varepsilon_z^2 + (2\mu_2 + \varepsilon_z)^2} \right] + \right. \\ &\quad \left. + (2\mu_2 + \varepsilon_z) \ln \left(\alpha_3^2 \frac{(2\mu_2 + \varepsilon_z) + \sqrt{3\varepsilon_z^2 + (2\mu_2 + \varepsilon_z)^2}}{(2\mu_2 + \varepsilon_z) + \sqrt{3\varepsilon_z^2 \alpha_3^4 + (2\mu_2 + \varepsilon_z)^2}} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} M_2 = M_2(A, B_1) &= \frac{\alpha_2^2}{3(\alpha_2^2 - 1)} \left\{ \sqrt{9f_2^2 + 4f_1^2(1+3A)^2} + 12f_1^2 B_1^2 - \sqrt{\frac{1}{\alpha_2^4} [9f_2^2 + 4f_1^2(1+3A)^2] + 12f_1^2 B_1^2} + \right. \\ &\quad \left. + 2\sqrt{3}f_1 B_1 \ln \frac{\sqrt{12}\alpha_2^2 f_1 B_1 + \sqrt{9f_2^2 + 4f_1^2(1+3A)^2} + 12\alpha_2^4 f_1^2 B_1^2}{\sqrt{12}f_1 B_1 + \sqrt{9f_2^2 + 4f_1^2(1+3A)^2} + 12f_1^2 B_1^2} \right\}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

где

$$A = (\mu_2 \alpha_2^2 - \mu_1) / (\alpha_2^2 - 1), \quad B_1 = (\mu_1 - \mu_2) / (\alpha_2^2 - 1). \quad (2.23)$$

3. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НЕИЗВЕСТНЫХ

На каждом шаге процесса ГИП необходимо определить неизвестные величины μ_1 , μ_2 , ε_z , P . При известных значениях μ_1 , μ_2 величины ε_z , P определяются соотношениями (2.18), (2.19). Сами значения μ_1 , μ_2 определяются из условия минимума P в области, ограниченной линиями $\mu_1 \geq \mu_2$; $\mu_2 \leq 0$, $\varepsilon_z \leq 0$ на плоскости параметров μ_1 , μ_2 (рисунок).

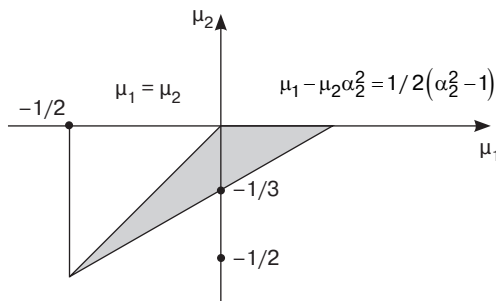


Рисунок. Область отыскания минимума

Согласно (2.18) система уравнений для определения μ_1 , μ_2 получается из условий:

$$\frac{\partial}{\partial \mu_1} (\beta_1 M_1 + M_2 + \beta_2 M_3) = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu_2} (\beta_1 M_1 + M_2 + \beta_2 M_3) = 0. \quad (3.2)$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial \mu_1} &= 2 / (\alpha_2^2 - 1), \quad \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial \mu_2} = -2\alpha_2^2 / (\alpha_2^2 - 1); \\ \frac{\partial A}{\partial \mu_1} &= -1 / (\alpha_2^2 - 1), \quad \frac{\partial A}{\partial \mu_2} = \alpha_2^2 / (\alpha_2^2 - 1); \\ \frac{\partial B_1}{\partial \mu_1} &= 1 / (\alpha_2^2 - 1), \quad \frac{\partial B_1}{\partial \mu_2} = -1 / (\alpha_2^2 - 1). \end{aligned}$$

Следовательно, соотношения (3.1), (3.2) примут вид:

$$\beta_1 \frac{\partial M_1}{\partial \mu_1} + \frac{\partial M_1}{\partial \varepsilon_z} \frac{2\beta_1}{(\alpha_2^2 - 1)} - \frac{\partial M_2}{\partial A} \frac{1}{(\alpha_2^2 - 1)} + \frac{\partial M_2}{\partial B_1} \frac{1}{(\alpha_2^2 - 1)} + \frac{\partial M_3}{\partial \varepsilon_z} \frac{2\beta_2}{(\alpha_2^2 - 1)} = 0, \quad (3.3)$$

$$-\frac{\partial M_1}{\partial \varepsilon_z} \frac{2\beta_1 \alpha_2^2}{(\alpha_2^2 - 1)} + \frac{\partial M_2}{\partial A} \frac{\alpha_2^2}{(\alpha_2^2 - 1)} - \frac{\partial M_2}{\partial B_1} \frac{1}{(\alpha_2^2 - 1)} + \beta_2 \frac{\partial M_3}{\partial \mu_2} - \frac{\partial M_3}{\partial \varepsilon_z} \frac{2\beta_2 \alpha_2^2}{(\alpha_2^2 - 1)} = 0. \quad (3.4)$$

Для указанных выше производных соответствующие соотношения имеют вид:

$$\frac{\partial M_1}{\partial \mu_1} = \frac{1}{(\alpha_2^2 - 1)} \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \left(\frac{(2\mu_1 + \varepsilon_z) \alpha_1^2 + \sqrt{3\varepsilon_z^2 + \alpha_1^4 (2\mu_1 + \varepsilon_z)^2}}{(2\mu_1 + \varepsilon_z) + \sqrt{3\varepsilon_z^2 + (2\mu_1 + \varepsilon_z)^2}} \right), \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_1}{\partial \varepsilon_z} &= \\ &= \frac{1}{(\alpha_2^2 - 1)} \sqrt{\frac{1}{3}} \left\{ \ln \left(\frac{(2\mu_1 + \varepsilon_z) \alpha_1^2 + \sqrt{3\varepsilon_z^2 + \alpha_1^4 (2\mu_1 + \varepsilon_z)^2}}{(2\mu_1 + \varepsilon_z) + \sqrt{3\varepsilon_z^2 + (2\mu_1 + \varepsilon_z)^2}} \right) + \frac{1}{\alpha_1^4} \frac{3\varepsilon_z (\alpha_1^4 - 1)}{\sqrt{3\varepsilon_z^2 + (2\mu_1 + \varepsilon_z)^2} + \sqrt{3\varepsilon_z^2 / \alpha_1^4 + (2\mu_1 + \varepsilon_z)^2}} \right\}, \quad (3.6) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial M_3}{\partial \mu_2} = \frac{\alpha_2^2}{(\alpha_2^2 - 1)} \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \left(\alpha_3^2 \frac{(2\mu_2 + \varepsilon_z) + \sqrt{3\varepsilon_z^2 + (2\mu_2 + \varepsilon_z)^2}}{(2\mu_2 + \varepsilon_z) + \sqrt{3\varepsilon_z^2 \alpha_3^4 + (2\mu_2 + \varepsilon_z)^2}} \right), \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_3}{\partial \varepsilon_z} = & \frac{\alpha_2^2}{(\alpha_2^2 - 1)} \sqrt{\frac{1}{3}} \left\{ \ln \left(\alpha_3^2 \frac{(2\mu_2 + \varepsilon_z) + \sqrt{3\varepsilon_z^2 + (2\mu_2 + \varepsilon_z)^2}}{(2\mu_2 + \varepsilon_z) + \sqrt{3\varepsilon_z^2 \alpha_3^4 + (2\mu_2 + \varepsilon_z)^2}} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{3\varepsilon_z(\alpha_3^4 - 1)}{\sqrt{3\varepsilon_z^2 \alpha_3^4 + (2\mu_2 + \varepsilon_z)^2} + \sqrt{3\varepsilon_z^2 + (2\mu_2 + \varepsilon_z)^2}} \right\}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial A} = \frac{4f_1^2(1+3A)(\alpha_2^2+1)}{\alpha_2^2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\left[9f_2^2 + 4f_1^2(1+3A)^2\right] + 12f_1^2B_1^2} + \sqrt{\left[9f_2^2 + 4f_1^2(1+3A)^2\right] \frac{1}{\alpha_2^4} + 12f_1^2B_1^2}} \right\}, \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial B_1} = \frac{\alpha_2^2}{(\alpha_2^2 - 1)} \frac{2}{\sqrt{3}} f_1 \left[\ln \left(\alpha_2^2 \frac{\sqrt{12}f_1B_1 + \sqrt{\left[9f_2^2 + 4f_1^2(1+3A)^2\right] \frac{1}{\alpha_2^4} + 12f_1^2B_1^2}}{\sqrt{12}f_1B_1 + \sqrt{\left[9f_2^2 + 4f_1^2(1+3A)^2\right] + 12f_1^2B_1^2}} \right) \right]. \quad (3.10)$$

Уравнение (3.3) неявно при заданном значении μ_2 определяет μ_1 . При определенных условиях уравнение может не иметь решения в исследуемой области параметров, и тогда значение μ_1 находится на границе области. То есть, можно утверждать с учетом высказанного выше замечания, что уравнение (3.3) неявно определяет μ_1 как функцию μ_2 , т.е. $-\mu_1 = \mu_1(\mu_2)$. Тогда, используя уравнение (3.4), с учетом того, что $\mu_1 = \mu_1(\mu_2)$, можно определить μ_2 . Опять же уравнение может и не иметь решения, и точка минимума может находиться на границе области. Знание параметров μ_1, μ_2 позволяет определить все остальные параметры процесса. Для определения характера изменения параметров трубы осталось выяснить, что имелось в виду под понятием времени, когда принималось условие (2.20). Из закона сохранения массы порошкового материала следует:

$$\rho\pi H(R_3^2 - R_2^2) = \rho_0\pi H_0(R_{30}^2 - R_{20}^2),$$

где ρ_0 – начальная относительная плотность; R_{20}, R_{30} – начальные размеры трубы.

Дифференцируя данное соотношение, после некоторых упрощений получаем:

$$d\rho H(R_3^2 - R_2^2) + \rho V(R_3^2 - R_2^2)dt + 2\rho H(R_3U_2 - R_2U_1)dt = 0. \quad (3.11)$$

Преобразуем его к виду

$$d\rho / \rho + \left[\varepsilon_z + 2(\alpha_2^2\mu_2 - \mu_1) / (\alpha_2^2 - 1) \right] dt = 0. \quad (3.12)$$

Тогда, учитывая (2.19), имеем:

$$dt = d\rho / \rho. \quad (3.13)$$

Следовательно, в качестве параметра процесса вместо времени t может быть взята относительная плотность порошкового материала ρ . Тогда законы изменения значений H, R_2, R_3 определяются соотношениями:

$$dH = \varepsilon_z H dt \Rightarrow dH = \varepsilon_z H d\rho / \rho \Rightarrow dH / d\rho = \varepsilon_z H / \rho, \quad (3.14)$$

$$dR_2 = U_1 dt \Rightarrow dR_2 = \mu_1 R_2 d\rho / \rho \Rightarrow dR_2 / d\rho = \mu_1 R_2 / \rho, \quad (3.15)$$

$$dR_3 = U_2 dt \Rightarrow dR_3 = \mu_2 R_3 d\rho / \rho \Rightarrow dR_3 / d\rho = \mu_2 R_3 / \rho. \quad (3.16)$$

При известных H, R_2, R_3 значения R_1, R_4 определяются из условия несжимаемости материала капсулы.

$$\pi(R_2^2 - R_1^2)H = \pi(R_{20}^2 - R_{10}^2)H_0, \quad (3.17)$$

$$\pi(R_4^2 - R_3^2)H = \pi(R_{40}^2 - R_{30}^2)H_0, \quad (3.18)$$

где R_{10}, R_{40} – начальные размеры трубы.

В табл. 1 приведены результаты расчета процесса ГИП трубы с исходными параметрами – начальными размерами в миллиметрах: $R_{10} = 18, R_{20} = 20, R_{30} = 30, R_{40} = 32, H_0 = 100$, начальная относительная плотность $\rho_0 = 0.6$.

При расчете принимались следующие значения функций:

$$f_1(\rho) = \sqrt{(\rho - \rho_0) / (1 - \rho_0)},$$

$$f_2(\rho) = \sqrt{(\rho - \rho_0) / (1 - \rho)}.$$

Таблица 1. Результаты расчета параметров как функции относительной плотности

ρ	0.659	0.719	0.778	0.838	0.897	0.937	0.977
P/Y	0.447	0.682	0.932	1.249	1.742	2.357	4.083
H/H_0	0.977	0.954	0.933	0.915	0.898	0.889	0.882
R_1/R_{10}	0.976	0.949	0.923	0.901	0.881	0.870	0.863
R_2/R_{20}	0.983	0.963	0.946	0.930	0.916	0.909	0.905
R_3/R_{30}	0.973	0.948	0.925	0.905	0.887	0.876	0.867
R_4/R_{40}	0.978	0.957	0.939	0.923	0.909	0.900	0.893

Приведем еще один пример расчета соотношений начальных и конечных размеров при других условиях. $\beta_1 = \beta_2 = 2/9, R_{10} = 15, R_{20} = 20, R_{30} = 30, R_{40} = 45, H_0 = 100, \rho_0 = 0.6, \rho = 0.978, P/Y = 4.309, H/H_0 = 1, R_1/R_{10} = 1, R_2/R_{20} = 1, R_3/R_{30} = 0.886, R_4/R_{40} = 0.918$.

В последнем случае усадка для порошка носила направленный в сторону уменьшения радиуса характер. Вертикальная усадка не наблюдалась. Внутренняя капсула оставалась недеформируемой. Минимум достигался на границе области.

4. ВОЗМОЖНОСТЬ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ

Традиционно функции $f_1(\rho), f_2(\rho)$ определяются на основании двух экспериментов [25, 26]. Первый эксперимент – процесс ГИП цилиндрического образца в тонкостенной капсуле до определенной относительной плотности ρ . Второй – свободная осадка полученного образца после удаления капсулы. При этом надо исходить из того, что первый эксперимент (он считается основным для определения функции $f_2(\rho)$) из-за влияния капсулы не обеспечивает равномерное всестороннее сжатие. Второй эксперимент – осадка (он считается основным для определения функции $f_1(\rho)$) не прост в осуществлении, особенно при малых значениях относительной плотности ρ . Вторым недостатком эксперимента на свободную осадку цилиндрического образца состоит в следующем. В реальном процессе ГИП все деформации в подавляющем большинстве случаев носят сжимающий характер, а в эксперименте на осадку две деформации из трех главных носят характер растяжения. Как показано в [27], реальный вектор главных скоростей деформаций в процессе ГИП составляет существенно меньший угол с вектором равномерного сжатия по сравнению с полученным при свободной осадке. Идеальным в этом плане является эксперимент по одномерному прессованию порошкового слоя, однако в силу технических проблем он трудноосуществим. В [27–29] показано, что существует принципиальная возможность определять обе функции в одном эксперименте, если в каждый момент эксперимента знать отношение скоростей деформации. В [28] показана принципиальная возможность определять искомые

функции на основании экспериментов с одними и теми цилиндрическими образцами, прерванных при разных значениях относительной плотности. Недостаток этих экспериментов стоит в том, что их результаты лежат довольно близко от гидростатической оси (равномерное всестороннее сжатие). Использование трубчатых образцов позволяет в определенной степени устранить этот недостаток. Цель настоящего раздела состоит в определении принципиальной возможности определения функций $f_1(\rho), f_2(\rho)$.

Складывая соотношения (3.3) и (3.4), получаем:

$$\beta_1 \partial M_1 / \partial \mu_1 - 2\beta_1 \partial M_1 / \partial \varepsilon_z + \partial M_2 / \partial A + \beta_2 \partial M_3 / \partial \mu_2 - 2\beta_2 \partial M_3 / \partial \varepsilon_z = 0. \quad (4.1)$$

Используя (3.9), перепишем уравнение (4.1) в виде:

$$\frac{4f_1^2(1+3A)(\alpha_2^2+1)}{\alpha_2^2 \left\{ \sqrt{9f_2^2 + 4f_1^2(1+3A)^2} + 12f_1^2 B_1^2 + \sqrt{9f_2^2 + 4f_1^2(1+3A)^2} \frac{1}{\alpha_2^4} + 12f_1^2 B_1^2 \right\}} =$$

$$= -\beta_1 \partial M_1 / \partial \mu_1 + 2\beta_1 \partial M_1 / \partial \varepsilon_z - \beta_2 \partial M_3 / \partial \mu_2 + \beta_2 \partial M_3 / \partial \varepsilon_z. \quad (4.2)$$

Обозначим:

$$\Psi_1 = \varepsilon_z / \mu_2, \quad \Psi_2 = \mu_1 / \mu_2. \quad (4.3)$$

Тогда

$$(3A+1) / B_1 = \Delta_1 = (\alpha_2^2 - \Psi_2) / (\Psi_2 - 1) - \Psi_1 (\alpha_2^2 - 1) / (\Psi_2 - 1), \quad (4.4)$$

$$1 / B_1 = \Delta_2 = -\Psi_1 (\alpha_2^2 - 1) / (\Psi_2 - 1) - 2(\alpha_2^2 - \Psi_2) / (\Psi_2 - 1). \quad (4.5)$$

Согласно (3.5)–(3.10), (4.3)–(4.5) получаем

$$\frac{\partial M_1}{\partial \mu_1} = \frac{1}{(\alpha_2^2 - 1)} \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \left(\frac{-(2\Psi_2 + \Psi_1)\alpha_1^2 + \sqrt{3\Psi_1^2 + \alpha_1^4(2\Psi_2 + \Psi_1)^2}}{-(2\Psi_2 + \Psi_1) + \sqrt{3\Psi_1^2 + (2\Psi_2 + \Psi_1)^2}} \right),$$

$$\frac{\partial M_3}{\partial \mu_2} = \frac{\alpha_2^2}{(\alpha_2^2 - 1)} \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \left(\alpha_3^2 \frac{-(2 + \Psi_1) + \sqrt{3\Psi_1^2 + (2 + \Psi_1)^2}}{-(2 + \Psi_1) + \sqrt{3\Psi_1^2 \alpha_3^4 + (2 + \Psi_1)^2}} \right),$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial \varepsilon_z} = \frac{1}{(\alpha_2^2 - 1)} \sqrt{\frac{1}{3}} \times$$

$$\times \left\{ \ln \left(\alpha_1^2 \frac{-(2\Psi_2 + \Psi_1) + \sqrt{3\Psi_1^2 \frac{1}{\alpha_1^4} + (2\Psi_2 + \Psi_1)^2}}{-(2\Psi_2 + \Psi_1) + \sqrt{3\Psi_1^2 + (2\Psi_2 + \Psi_1)^2}} \right) - \frac{3\Psi_1(\alpha_1^4 - 1)}{\alpha_1^4 \left[\sqrt{3\Psi_1^2 + (2\Psi_2 + \Psi_1)^2} + \sqrt{3\Psi_1^2 \frac{1}{\alpha_1^4} + (2\Psi_2 + \Psi_1)^2} \right]} \right\},$$

$$\frac{\partial M_3}{\partial \varepsilon_z} = \frac{\alpha_2^2}{(\alpha_2^2 - 1)} \sqrt{\frac{1}{3}} \times$$

$$\times \left\{ \ln \left(\alpha_3^2 \frac{-(2 + \Psi_1) + \sqrt{3\Psi_1^2 + (2 + \Psi_1)^2}}{-(2 + \Psi_1) + \sqrt{3\Psi_1^2 \alpha_3^4 + (2 + \Psi_1)^2}} \right) - \frac{3\Psi_1(\alpha_3^4 - 1)}{\left[\sqrt{3\Psi_1^2 \alpha_3^4 + (2 + \Psi_1)^2} + \sqrt{3\Psi_1^2 + (2 + \Psi_1)^2} \right]} \right\}.$$

Пусть $x^2 = \left[(3/4)\Delta_2^2 f_2^2 + (1/3)\Delta_1^2 f_1^2 \right]$. Тогда, согласно (4.2):

$$\frac{f_1^2}{\sqrt{x^2 + f_1^2} + \sqrt{x^2 \gamma^2 + f_1^2}} = \Omega_1(\Psi_1, \Psi_2), \quad (4.6)$$

где

$$\gamma = \frac{1}{\alpha_2^2} < 1; \quad \Omega_1(\Psi_1, \Psi_2) = \frac{\alpha_2^2 \sqrt{3}}{2\Delta_1(\alpha_2^2 + 1)} \left(-\beta_1 \frac{\partial M_1}{\partial \mu_1} + 2\beta_1 \frac{\partial M_1}{\partial \varepsilon_z} - \beta_2 \frac{\partial M_3}{\partial \mu_2} + 2\beta_2 \frac{\partial M_3}{\partial \varepsilon_z} \right). \quad (4.7)$$

Обозначим

$$z = x/f_1. \quad (4.8)$$

Следовательно, имеем:

$$f_1 \left(\sqrt{z^2 + 1} + \sqrt{z^2 \gamma^2 + 1} \right) = \Omega_1. \quad (4.9)$$

Уравнение (2.19) представим в виде:

$$M_2 = P/Y - \beta_1 M_1 - \beta_2 M_3. \quad (4.10)$$

Согласно (4.7), (2.23), имеем:

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha_2^2}{(\alpha_2^2 - 1)} \frac{1}{3} \left\{ \sqrt{\left[9f_2^2 + 4f_1^2(1 + 3A)^2 \right] + 12f_1^2 B_1^2} - \sqrt{\left[9f_2^2 + 4f_1^2(1 + 3A)^2 \right] \frac{1}{\alpha_2^4} + 12f_1^2 B_1^2} + \right. \\ & \left. + 2\sqrt{3} f_1 B_1 \ln \left(\alpha_2^2 \frac{\sqrt{12} f_1 B_1 + \sqrt{\left[9f_2^2 + 4f_1^2(1 + 3A)^2 \right] \frac{1}{\alpha_2^4} + 12f_1^2 B_1^2}}{\sqrt{12} f_1 B_1 + \sqrt{\left[9f_2^2 + 4f_1^2(1 + 3A)^2 \right] + 12f_1^2 B_1^2}} \right) \right\} = \frac{P}{Y} - \beta_1 M_1 - \beta_2 M_3. \end{aligned}$$

С учетом (4.3)–(4.5), (4.8) преобразуем данное уравнение к виду:

$$\sqrt{x^2 + f_1^2} - \sqrt{x^2 \gamma^2 + f_1^2} + f_1 \ln \left(\frac{1}{\gamma} \frac{f_1 + \sqrt{x^2 \gamma^2 + f_1^2}}{f_1 + \sqrt{x^2 + f_1^2}} \right) = \frac{\sqrt{3}(\alpha_2^2 - 1)\Delta_2}{2\alpha_2^2} \left(\frac{P}{Y} - \beta_1 M_1 - \beta_2 M_3 \right). \quad (4.11)$$

Заметим, что согласно (4.3), (2.21), (2.22)

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\Psi_1(\alpha_2^2 - 1) + 2(\alpha_2^2 - \Psi_2)} \left\{ \left[\sqrt{3\Psi_1^2 + (2\Psi_2 + \Psi_1)^2} - \sqrt{3\Psi_1^2 \frac{1}{\alpha_1^4} + (2\Psi_2 + \Psi_1)^2} \right] - \right. \\ & \quad \left. - (2\Psi_2 + \Psi_1) \ln \left(\frac{-(2\Psi_2 + \Psi_1)\alpha_1^2 + \sqrt{3\Psi_1^2 + \alpha_1^4(2\Psi_2 + \Psi_1)^2}}{-(2\Psi_2 + \Psi_1) + \sqrt{3\Psi_1^2 + (2\Psi_2 + \Psi_1)^2}} \right) \right\}, \\ M_3 &= \sqrt{\frac{1}{3}} \frac{\alpha_2^2}{\Psi_1(\alpha_2^2 - 1) + 2(\alpha_2^2 - \Psi_2)} \left\{ \left[\sqrt{3\Psi_1^2 \alpha_3^4 + (2 + \Psi_1)^2} - \sqrt{3\Psi_1^2 + (2 + \Psi_1)^2} \right] - \right. \\ & \quad \left. - (2 + \Psi_1) \ln \left(\alpha_3^2 \frac{-(2 + \Psi_1) + \sqrt{3\Psi_1^2 + (2 + \Psi_1)^2}}{-(2 + \Psi_1) + \sqrt{3\Psi_1^2 \alpha_3^4 + (2 + \Psi_1)^2}} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение (4.11) может быть представлено в виде:

$$f_1 \left\{ \sqrt{z^2 + 1} - \sqrt{z^2 \gamma^2 + 1} + \ln \frac{1}{\gamma} \frac{1 + \sqrt{z^2 \gamma^2 + 1}}{1 + \sqrt{z^2 + 1}} \right\} = \Omega_2(\Psi_1, \Psi_2), \quad (4.12)$$

где $\Omega_2 = \sqrt{3}(\alpha_2^2 - 1)\Delta_2 / (2\alpha_2^2)(P/Y - \beta_1 M_1 - \beta_2 M_3)$.

Из уравнений (4.9), (4.12) следует

$$\left(\sqrt{z^2 + 1} + \sqrt{z^2 \gamma^2 + 1} \right) \left\{ \sqrt{z^2 + 1} - \sqrt{z^2 \gamma^2 + 1} + \ln \left(\frac{1}{\gamma} \frac{1 + \sqrt{z^2 \gamma^2 + 1}}{1 + \sqrt{z^2 + 1}} \right) \right\} = \Omega(\Psi_1, \Psi_2), \quad (4.13)$$

где $\Omega(\Psi_1, \Psi_2) = \Omega_2 / \Omega_1$.

Рассмотрим функцию

$$f(z) = \left(\sqrt{z^2 + 1} + \sqrt{z^2 \gamma^2 + 1} \right) \left\{ \sqrt{z^2 + 1} - \sqrt{z^2 \gamma^2 + 1} + \ln \left(\frac{1}{\gamma} \frac{1 + \sqrt{z^2 \gamma^2 + 1}}{1 + \sqrt{z^2 + 1}} \right) \right\}.$$

Данная функция является монотонно возрастающей при $z > 0$. Следовательно, уравнение (4.13) имеет единственное решение $z > 0$ при условии, что $f(0) < \Omega$.

Пусть $H^-, H^+; R_2^-, R_2^+; R_3^-, R_3^+$ – предыдущее и последующее значения соответствующих параметров. Тогда в качестве $\varepsilon_z, \mu_1, \mu_2$ могут быть приняты:

$$\begin{aligned} \varepsilon_z &\approx 2(H^+ - H^-) / (H^+ + H^-), \\ \mu_1 &\approx 2(R_2^+ - R_2^-) / (R_2^+ + R_2^-), \\ \mu_2 &\approx 2(R_3^+ - R_3^-) / (R_3^+ + R_3^-). \end{aligned}$$

Следовательно, имеем $\Psi_1 \approx \varepsilon_z / \mu_2; \Psi_2 \approx \mu_1 / \mu_2$.

Если найдено значение z , то $f_1 = H_1(\sqrt{z^2 + 1} + \sqrt{z^2 \gamma^2 + 1})$. Поскольку $x^2 = z^2 f_1^2$, то из соотношения $(3/4)\Delta_2^2 f_2^2 + (1/3)\Delta_1^2 f_1^2 = z^2 f_1^2$ имеем:

$$f_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{(z^2 - \Delta_1^2 / 3)}{\Delta_2^2}} f_1.$$

Ниже приведены результаты приближенного определения функций на основании расчета в условиях, которые использовались в табл. 1.

Таблица 2. Исходные данные для расчета функций $f_1(\rho), f_2(\rho)$

Параметры	1 (начальное состояние)	2	3	4
ρ	0.6198	0.6396	0.6594	0.6792
P/Y	0.2544	0.3594	0.4468	0.5272
H	99.2634	98.4711	97.6770	96.8966
R_2	19.9027	19.7805	19.6517	19.5218
R_3	29.7277	29.4550	29.1885	28.9299

За начальное состояние принималось значение, представленное в столбце 1 табл. 2.

1. Конечное состояние – столбец 2. Приращение относительной плотности 2%. Теоретические значения: $f_2 = 0.3324, f_1 = 0.3154$. Расчетные значения: $f_2 = 0.3329, f_1 = 0.3180$.
2. Конечное состояние – столбец 3. Приращение относительной плотности 4%. Теоретические значения: $f_2 = 0.4184, f_1 = 0.3860$. Расчетные значения: $f_2 = 0.42281, f_1 = 0.3646$.
3. Конечное состояние – столбец 4. Приращение относительной плотности 6%. Теоретические значения: $f_2 = 0.4977, f_1 = 0.4455$. Расчетные значения: $f_2 = 0.5026, f_1 = 0.4079$.

Как видно из представленных результатов, даже при шаге относительной плотности 6%, получаем вполне приемлемое совпадение теоретических и расчетных данных.

Следует отметить, однако, что приведенный метод определения функций неприемлем, если реализуется плоская деформация (см. второй пример расчета). В этом случае, как правило, одна из стенок капсулы остается недеформируемой. То есть, она находится в жестком состоянии. А в этом случае уравнения для определения функций уже неверны, поскольку минимум достигается на границе области, а уравнения (4.1), (4.10) получены в предположении, что вся система деформируется.

ВЫВОДЫ

Разработана модель процесса ГИП для порошковой трубы. Для описания механических свойств порошкового материала принята модель Грина, для материала капсулы – модель идеально пластического тела с условием несжимаемости. Применение этой модели требует знания следующих механических характеристик материалов: предела текучести материалов капсулы, предела текучести монолита порошкового материала, двух экспериментально определяемых функций относительной плотности $f_1(\rho)$, $f_2(\rho)$. Модель позволяет анализировать различные возможные варианты процесса – полное деформирование системы и вариант плоской деформации с одной неподвижной границей. Применение данной модели позволяет использовать сравнительно простой математический аппарат.

Показана принципиальная возможность использования трубчатых образцов для экспериментального определения функций, входящих в условие текучести Грина.

Вклад авторов

В.А. Головешкин, В.Н. Самаров, Ж. Рейссон – постановка задачи, создание математической модели, исследование модели, анализ результатов.

А.А. Николаенко, Д.М. Фисунова – исследование модели, проведение расчетов, анализ результатов.

Authors' contributions

V.A. Goloveshkin, V.N. Samarov, G. Raison – problem statement, mathematical model creation, model research, analysis of results.

A.A. Nickolaenko, D.M. Fisunova – model research, calculations, analysis of results.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Анохина А.В., Головешкин В.А., Самаров В.Н., Селиверстов Д.Г., Raison G. Математическая модель расчета процесса горячего изостатического прессования деталей сложной формы при наличии периодической структуры закладных элементов. *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2002;8(2):245–254. <https://elibrary.ru/jwprwnd>
2. Ильющин А.А. *Пластичность. Основы общей математической теории*. СПб.: Ленанд; 2020. 272 с. ISBN 978-5-9710-7092-4
3. Ильющин А.А. *Механика сплошной среды*. М.: Изд-во МГУ; 1990. 312 с. ISBN 5-211-00940-1
4. Cundall P.A., Strack O.D.L. A discrete numerical model for granular assemblies. *Geotechnique*. 1979;29(1):47–65. <https://doi.org/10.1680/geot.1979.29.1.47>
5. Гордон В.А., Шоркин В.С. Нелокальная теория приповерхностного слоя твердого тела. В сб.: *Итоги развития механики в Туле. Международная конференция: Тезисы докладов*. Тула: ТулГУ; 1998. С. 24.
6. Гордон В.А., Шоркин В.С. Нелокальная теория приповерхностного слоя твердого тела. *Известия ТулГУ. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 1998;4(2):55–57.
7. Ломакин В.А. *Статистические задачи механики твердых деформируемых тел*. М.: Наука; 1970. 138 с.
8. Бальшин М.Ю., Кипарисов С.С. *Основы порошковой металлургии*. М.: Металлургия; 1978. 184 с.
9. Бальшин М.Ю. *Научные основы порошковой металлургии и металлургии волокна*. М.: Металлургия; 1972. 336 с.
10. Федорченко И.М., Андриевский Р.А. *Основы порошковой металлургии*. Киев: Изд-во АН УССР; 1963. 420 с.
11. Ильющин А.А. *Пластичность. Ч. I. Упруго-пластические деформации*. М.; Л.: Гостехиздат; 1948. 376 с.
12. Качанов Л.М. *Основы теории пластичности*. М.: Наука; 1969. 420 с.
13. Соколовский В.В. *Теория пластичности*. М.: Высшая Школа; 1969. 608 с.
14. Хилл Р. *Математическая теория пластичности*: пер. с англ. М.: Гостехиздат; 1956. 408 с.
15. Фрост Г., Эшби М.Ф. *Карты механизмов деформаций*: пер. с англ. Челябинск: Металлургия; 1989. 327 с.

16. Arzt E., Ashby M.F., Easterling K.E. Practical application of Hot-Isostatic Pressing diagrams: four case studies. *Metall. Trans.* 1983;14A(1):211–221. <https://doi.org/10.1007/BF02651618>
17. Ashby M.F. A first report of sintering diagrams. *Acta Metall.* 1974;22(3):275–289. [https://doi.org/10.1016/0001-6160\(74\)90167-9](https://doi.org/10.1016/0001-6160(74)90167-9)
18. Helle A.S., Easterling K.E., Ashby M.F. Hot Isostatic Pressing diagrams: New development. *Acta Metall.* 1985;33(12):2163–2174. [https://doi.org/10.1016/0001-6160\(85\)90177-4](https://doi.org/10.1016/0001-6160(85)90177-4)
19. Друянов Б.А. *Прикладная теория пластичности пористых тел*. М.: Машиностроение; 1989. 168 с.
20. Green R.J. A plasticity theory for porous solids. *Int. J. Mech. Sci.* 1972;14(4):215–224. [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(72\)90063-X](https://doi.org/10.1016/0020-7403(72)90063-X)
21. Штерн М.Б., Сердюк Г.Г., Максименко Л.А., Трухан Ю.В., Шуляков Ю.М. *Феноменологические теории прессования порошков*. Киев: Наукова думка; 1982. 140 с.
22. Скороход В.В. *Реологические основы теории спекания*. Киев: Наукова думка; 1972. 152 с.
23. Goloveshkin V.A., Kazberovich A.M., Samarov V.N., Seliverstov D.G. New Regularities of the Shape-Changing of Hollow Parts During HIP. In: Koizumi M. (Ed.). *Hot Isostatic Pressing Theory and Applications*. Springer; 1992. P. 281–287. https://doi.org/10.1007/978-94-011-2900-8_43
24. Анохина А.В., Головешкин В.А., Пирумов А.Р., Флакс М.Я. Исследование начального процесса прессования труб из порошковых материалов с учетом вертикальной усадки. *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2003;9(2):123–132.
25. Dutton R.E., Shamasundar S., Semiatin S.L. Modeling the Hot Consolidation of Ceramic and Metal Powders. *Metall. Mater. Trans. A*. 1995;26A:2041–2051. <https://doi.org/10.1007/BF02670676>
26. Власов А.В., Селиверстов Д.Г. Определение функций пластичности порошковых материалов, применяемых при ГИП. В сб.: *Исследование в области теории, технологии и оборудования штамповочного производства: Сб. научных трудов*. Тула; 1998. С. 46–49.
27. Raison G., Goloveshkin V., Samarov V. Identification of Porous Materials Rheological Coefficient Using Experimental Determination of the Radial and Longitudinal Strain Rate Ratio. In: *Hot Isostatic Pressing – HIP'22. Materials Research Proceedings*. 2023. V. 38. P. 150–159. <https://doi.org/10.21741/9781644902837-21>
28. Raison G., Goloveshkin V., Khomyakov E., Samarov V. Effect of Experimental Determination Process on Shear Stress Coefficient of Green Equation Describing HIP. In: *Hot Isostatic Pressing – HIP'22. Materials Research Proceedings*. 2023. V. 38. P. 172–176. <https://doi.org/10.21741/9781644902837-24>
29. Bochkov A., Kozyrev Yu., Ponomarev A., Raison G. Theoretical Evaluation of Capsule Material Strain Hardening on the Deformation of Long Cylindrical Blanks During HIP Process. In: *Hot Isostatic Pressing – HIP'22. Materials Research Proceedings*. 2023. V. 38. P. 177–183. <https://doi.org/10.21741/9781644902837-25>

REFERENCES

1. Anokhina A.V., Goloveshkin V.A., Samarov V.N., Seliverstov D.G., Raison G. A Mathematical model for calculating the process of hot isostatic pressing of parts of complex-shaped parts in the presence of a periodic structure of embedded elements. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktii = Mechanics of Composite Materials and Structures*. 2002;8(2):245–254 (in Russ.). <https://elibrary.ru/jwpwnnd>
2. Plyushin A.A. *Plastichnost'. Osnovy obshchei matematicheskoi teorii (Plasticity. Fundamentals of General Mathematical Theory)*. St. Petersburg: Lenand; 2020. 272 p. (in Russ.). ISBN 978-5-9710-7092-4
3. Plyushin A.A. *Mekhanika sploshnoi sredy (Continuum Mechanics)*. Moscow: MSU; 1990. 310 p. (in Russ.). ISBN 5-211-00940-1
4. Cundall P.A., Strack O.D.L. A discrete numerical model for granular assemblies. *Geotechnique*. 1979;29(1):47–65. <https://doi.org/10.1680/geot.1979.29.1.47>
5. Gordon V.A., Shorkin V.S. The nonlocal theory of the near-surface layer of a solid. In: *Results of the Development of Mechanics in Tula. International Conference: Abstracts of the Reports*. Tula; 1998. P. 24 (in Russ.).
6. Gordon V.A., Shorkin V.S. The nonlocal theory of the near-surface layer of a solid. *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika = Bulletin of Tula State University. Series: Mathematics. Mechanics. Computer Science*. 1998;4(2):55–57 (in Russ.).
7. Lomakin V.A. *Statisticheskie zadachi mekhaniki tverdykh deformiruemyykh tel (Statistical Problems of Mechanics of Solid Deformable Bodies)*. Moscow: Nauka; 1970. 138 p. (in Russ.).
8. Balshin M.Yu., Kiparisov S.S. *Osnovy poroshkovoi metallurgii (Fundamentals of Powder Metallurgy)*. Moscow: Metallurgiya; 1978. 184 p. (in Russ.).
9. Balshin M.Yu. *Nauchnye osnovy poroshkovoi metallurgii i metallurgii volokna (Scientific Foundations of Powder Metallurgy and Fiber Metallurgy)*. Moscow: Metallurgiya; 1972. 336 p. (in Russ.).
10. Fedorchenko I.M., Andrievskii R.A. *Osnovy poroshkovoi metallurgii (Fundamentals of Powder Metallurgy)*. Kiev: Publishing House of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR; 1963. 420 p. (in Russ.).
11. Plyushin A.A. *Plastichnost'. Ch. 1. Uprugo-plasticheskie deformatsii (Plasticity. Part 1. Elastic-plastic deformations)*. Moscow; Leningrad: Gostekhizdat; 1948. 376 p. (in Russ.).
12. Kachanov L.M. *Osnovy teorii plastichnosti (Fundamentals of the Theory of Plasticity)*. Moscow: Nauka; 1969. 420 p. (in Russ.).

13. Sokolovskii V.V. *Teoriya plastichnosti (Theory of Plasticity)*. Moscow: Vysshaya Shkola; 1969. 608 p. (in Russ.).
14. Hill R. *Matematicheskaya teoriya plastichnosti (Mathematical Theory of Plasticity)*: transl. from Engl. Moscow: Gostekhizdat; 1956. 408 p. (in Russ.).
[Hill R. *The Mathematical Theory of Plasticity*. Oxford: Clarendon Press; 1950. 356 p.]
15. Frost H.J., Ashby M.F. *Karty mekhanizmov deformatsiy (Deformation Mechanism Maps)*: transl. from Engl. Chelyabinsk: Metallurgiya; 1989. 327 p. (in Russ.).
[Frost H.J., Ashby M.F. *Deformation Mechanism Maps*. Oxford: Pergamon Press; 1982.]
16. Arzt E., Ashby M.F., Easterling K.E. Practical application of Hot-Isostatic Pressing diagrams: four case studies. *Metall. Trans.* 1983;14A(1):211–221. <https://doi.org/10.1007/BF02651618>
17. Ashby M.F. A first report of sintering diagrams. *Acta Metall.* 1974;22(3):275–289. [https://doi.org/10.1016/0001-6160\(74\)90167-9](https://doi.org/10.1016/0001-6160(74)90167-9)
18. Helle A.S., Easterling K.E., Ashby M.F. Hot Isostatic Pressing diagrams: New development. *Acta Metall.* 1985;33(12):2163–2174. [https://doi.org/10.1016/0001-6160\(85\)90177-4](https://doi.org/10.1016/0001-6160(85)90177-4)
19. Druyanov B.A. *Prikladnaya teoriya plastichnosti poristykh tel (Applied Theory of Plasticity of Porous Bodies)*. Moscow: Mashinostroyeniye; 1989. 168 p. (in Russ.).
20. Green R.J. A plasticity theory for porous solids. *Int. J. Mech. Sci.* 1972;14(4):215–224. [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(72\)90063-X](https://doi.org/10.1016/0020-7403(72)90063-X)
21. Shtern M.B., Serdyuk G.G., Maksimenko L.A., et al. *Fenomenologicheskie teorii pressovaniya poroshkov (Phenomenological Theories of Powder Pressing)*. Kiev: Naukova dumka; 1982. 140 p. (in Russ.).
22. Skorokhod V.V. *Reologicheskie osnovy teorii spekaniya (Rheological Foundations of Sintering Theory)*. Kiev: Naukova dumka; 1972. 152 p. (in Russ.).
23. Goloveshkin V.A., Kazberovich A.M., Samarov V.N., Seliverstov D.G. New Regularities of the Shape-Changing of Hollow Parts During HIP. In: Koizumi M. (Ed.). *Hot Isostatic Pressing Theory and Applications*. Springer; 1992. P. 281–287. https://doi.org/10.1007/978-94-011-2900-8_43
24. Anokhina A.V., Goloveshkin V.A., Pirumov A.R., Flaks M.Ya. Investigation of the initial process of pressing pipes made of powder materials, taking into account vertical shrinkage. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktivnykh materialov = Mechanics of Composite Materials and Structures*. 2003;9(2):123–132 (in Russ.).
25. Dutton R.E., Shamasundar S., Semiatin S.L. Modeling the Hot Consolidation of Ceramic and Metal Powders. *Metall. Mater. Trans. A*. 1995;26A:2041–2051. <https://doi.org/10.1007/BF02670676>
26. Vlasov A.V., Seliverstov D.G. Determination of the plasticity functions of powder materials used in HIP. In: *Research in the Field of Theory, Technology and Equipment for Stamping Production: Collection of Scientific Papers*. Tula; 1998. P. 46–49 (in Russ.).
27. Raisson G., Goloveshkin V., Samarov V. Identification of Porous Materials Rheological Coefficient Using Experimental Determination of the Radial and Longitudinal Strain Rate Ratio. In: *Hot Isostatic Pressing – HIP'22. Materials Research Proceedings*. 2023. V. 38. P. 150–159. <https://doi.org/10.21741/9781644902837-21>
28. Raisson G., Goloveshkin V., Khomyakov E., Samarov V. Effect of Experimental Determination Process on Shear Stress Coefficient of Green Equation Describing HIP. In: *Hot Isostatic Pressing – HIP'22. Materials Research Proceedings*. 2023. V. 38. P. 172–176. <https://doi.org/10.21741/9781644902837-24>
29. Bochkov A., Kozyrev Yu., Ponomarev A., Raisson G. Theoretical Evaluation of Capsule Material Strain Hardening on the Deformation of Long Cylindrical Blanks During HIP Process. In: *Hot Isostatic Pressing – HIP'22. Materials Research Proceedings*. 2023. V. 38. P. 177–183. <https://doi.org/10.21741/9781644902837-25>

Об авторах

Головешкин Василий Адамович, д.т.н., профессор, кафедра высшей математики, Институт кибербезопасности и цифровых технологий, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78); ведущий научный сотрудник, ФГБУН «Институт прикладной механики Российской академии наук» (125040, Россия, Москва, Ленинградский пр-т, д. 7, стр. 1). E-mail: vag-1953@yandex.ru. Scopus Author ID 6602872377, <https://orcid.org/0000-0002-5413-8625>

Николаенко Артем Андреевич, студент, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: temanickolaenko2004@yandex.ru. <https://orcid.org/0009-0003-2483-4392>

Самаров Виктор Наумович, д.т.н., технический директор, ТОО «Лаборатория Новых Технологий» (117556, Россия, Москва, Симферопольский б-р, д. 15). E-mail: Samarov13@Aol.com. Scopus Author ID 6603606878

Рейссон Жерар, консультант, Клермон Ферран, Франция. E-mail: gerard.raisson@gmail.com. Scopus Author ID 6603152593

Фисунова Дарья Михайловна, студент, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: daria.fisunova@gmail.com. <https://orcid.org/0009-0008-2857-3499>

About the authors

Vasiliy A. Goloveshkin, Dr. Sci. (Eng.), Professor, Higher Mathematics Department, Institute of Cybersecurity and Digital Technologies, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia); Leading Researcher, Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Sciences (7-1, Leningradskii pr., Moscow, 125040 Russia). E-mail: vag-1953@yandex.ru. Scopus Author ID 6602872377, <https://orcid.org/0000-0002-5413-8625>

Artem A. Nickolaenko, Student, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: temanickolaenko2004@yandex.ru. <https://orcid.org/0009-0003-2483-4392>

Victor N. Samarov, Dr. Sci. (Eng.), Technical Director, Laboratory of New Technologies (15, Simferopol'skii bul., Moscow, 117556 Russia). E-mail: Samarov13@Aol.com. Scopus Author ID 6603606878

Gerard Raison, Retired Consultant, Clermond Ferrand, France, E-mail: gerard.raisson@gmail.com. Scopus Author ID 6603152593

Daria M. Fisunova, Student, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: daria.fisunova@gmail.com. <https://orcid.org/0009-0008-2857-3499>

Математическое моделирование
Mathematical modeling

УДК 519.224.22, 519.246.8, 330.322.54
<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-2-93-110>
EDN JCRKUO



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Динамическая модель управления BSF-портфелем без ограничений

А.А. Мицель,
Е.В. Викторенко [®]

Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, Томск, 634050
Россия

[®] Автор для переписки, e-mail: viktorenko.e@gmail.com

Резюме

Цели. Рассматриваются модели управления инвестиционными портфелями, носящими динамический характер, проводится сравнение исследований, посвященных BSF-портфелям (состоящим из безрискового актива (bond), акции (stock) и потока платежей (cash flow)) с древовидной структурой цен рискованного актива. Целью работы является разработка динамической модели управления BSF-портфелем, включающим безрисковый, рискованный активы и депозит. В отличие от проведенных ранее исследований, в разрабатываемой модели цены рискованного актива изменяются случайным образом, следуя древовидной структуре. К исследованию предлагается два подхода формирования портфеля: 1) начальный капитал вкладывается в безрисковый актив, управление происходит за счет рискованного актива; 2) начальный капитал вкладывается в рискованный актив, управление происходит за счет безрискового актива.

Методы. Использована биномиальная модель для моделирования цен рискованного актива. Динамическая модель управления на основе древовидной структуры цен рискованного актива позволяет учитывать изменения в ценах активов. Сравнительный анализ результатов моделирования выявляет оптимальный способ управления.

Результаты. Разработана динамическая модель управления BSF-портфелем без ограничений. Показано, что динамическая модель управления на основе древовидной структуры цен рискованного актива позволяет повысить точность оценки объема вложений от 2.4 до 2.7 раз для первого подхода и от 1.7 до 2.7 раз – для второго. Повышение точности оценки объемов вложений по сравнению с ранее предложенными моделями достигается путем усреднения цен по различным вершинам дерева.

Выводы. Проведенное исследование позволяет говорить о том, что применение динамической модели управления, основанной на древовидной структуре цен, позволяет значительно повысить точность оценки объема вложений в инвестиционный портфель.

Ключевые слова: оптимальное управление, динамическая система со случайными параметрами, динамическое программирование, инвестиционный портфель, слежение за эталонным портфелем, биномиальная структура цен рискованного актива

• Поступила: 26.02.2024 • Доработана: 24.06.2024 • Принята к опубликованию: 17.02.2025

Для цитирования: Мицель А.А., Викторенко Е.В. Динамическая модель управления BSF-портфелем без ограничений. *Russian Technological Journal*. 2025;13(2):93–110. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-2-93-110>, <https://elibrary.ru/JCRKUO>

Прозрачность финансовой деятельности: Авторы не имеют финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

RESEARCH ARTICLE

Dynamic model of BSF portfolio management

Artur A. Mitsel,
Elena V. Viktorenko @

Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics, Tomsk, 634050 Russia

@ Corresponding author, e-mail: viktorenko.e@gmail.com

Abstract

Objectives. The work compares studies on BSF portfolios consisting of a risk-free Bond (B) asset, a Stock (S), and a cash Flow (F) that represents risky asset prices in the form of a tree structure. On the basis of existing models for managing dynamic investment portfolios, the work develops a dynamic model for managing a BSF portfolio that combines risk-free and risky assets with a deposit. Random changes in the prices of a risky asset are reflected in the developed model according to a tree structure. Two approaches to portfolio formation are proposed for the study: (1) initial capital is invested in a risk-free asset, while management is conducted at the expense of a risky asset; (2) the initial capital is invested in a risky asset, but management is carried out at the expense of a risk-free asset.

Methods. A binomial model was used to predict the prices of risky assets. Changes in risky asset prices in the model are dynamically managed via a branching tree structure. A comparative analysis of modeling results reveals the optimal control method.

Results. A dynamic model for unrestricted management of a BSF portfolio has been developed. By presenting risky asset prices according to a tree structure, the model can be used to increase the accuracy of evaluating investments by from 2.4 to 2.7 times for the first approach and from 1.7 to 2.7 times for the second. The increased accuracy of evaluating investments as compared with previously proposed models is achieved by averaging prices at various vertices of the tree.

Conclusions. The results of the research suggest that the use of a dynamic management model based on a tree-like price structure can significantly increase the accuracy of evaluating investments in an investment portfolio.

Keywords: optimal control, dynamic system with random parameters, dynamic programming, investment portfolio, tracking a reference portfolio, binomial price structure of a risky asset

• Submitted: 26.02.2024 • Revised: 24.06.2024 • Accepted: 17.02.2025

For citation: Mitsel A.A., Viktorenko E.V. Dynamic model of BSF portfolio management. *Russian Technological Journal*. 2025;13(2):93–110. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-2-93-110>, <https://elibrary.ru/JCRKUO>

Financial disclosure: The authors have no financial or proprietary interest in any material or method mentioned.

The authors declare no conflicts of interest.

ВВЕДЕНИЕ

Проблемы управления портфелем ценных бумаг (инвестиционным портфелем – ИП) можно рассматривать как многопериодные задачи динамического принятия решений, когда транзакции происходят в дискретные моменты времени. Инвестор оценивает возможные будущие изменения процентных ставок, цен, денежных потоков от ценных бумаг, на этой информации основываются дальнейшие действия по покупке или продаже, решения об открытии вкладов или кредитовании, т.е. решения по реформированию ИП. Статья посвящена разработке и проверке динамической модели управления портфелем, включающим в себя рисковый актив (РА), безрисковый актив (БА) и депозит.

Модели управления ИП, носящими динамический характер, подробно исследовались в работах [1–12]. В научной работе В.В. Домбровского [1] освещаются проблемы управления дискретными стохастическими системами и применение квадратичного критерия в такой сфере. Автор подробно рассматривает системы, где присутствуют различные случайные параметры, аддитивные и мультипликативные шумы. Данные системы отличаются тем, что их функционирование зависит от состояний и управляющих воздействий. В результате исследования получены соответствующие уравнения для оптимальных линейных статических и динамических регуляторов по выходу. Полученные выводы применяются для решения задачи динамической оптимизации ИП. Предметом исследования [1] является портфель, состоящий из финансовых активов с переменной волатильностью цен и анализируемый в дискретном времени. Практическое значение работы заключается в возможности разработки эффективных стратегий управления ИП. В [3] рассматриваются задачи синтеза стратегий управления в дискретных системах с использованием прогнозирующей модели. В этих системах, аналогично исследованию, проведенному в [1], присутствуют случайные параметры, аддитивные и мультипликативные шумы, которые зависят от состояний и управлений. Целью работы [3] является разработка стратегий управления с применением прогнозирования для замкнутой и разомкнутой систем. Результаты, полученные в ходе исследования, применяются для решения задачи динамической оптимизации ИП с учетом ограничений на объемы торговых операций. Исследование [3] имеет важное практическое значение, т.к. позволяет разработать эффективные стратегии управления ИП с учетом случайных факторов и ограничений. В [8] рассмотрена проблема управления ИП, состоящим из РА и БА, с учетом динамического отслеживания

эталонного портфеля и достижения желаемой эффективности. Предполагается, что изменения цен на РА описываются стохастическими уравнениями с гауссовскими и импульсными пуассоновскими возмущениями. В работе применяется метод определения оптимальной стратегии управления с использованием обратной связи. Этот метод основывается на применении квадратичного критерия, который позволяет оценить качество управления и выбрать наилучшую стратегию. Оптимальная стратегия управления подбирается таким образом, чтобы минимизировать неопределенность и достичь наилучших результатов. Исследование [8] представляет научный вклад в области управления ИП с использованием методов стохастического анализа и обратной связи. В исследовании Д.В. Домбровского и Е.А. Ляшенко [9] осуществляется анализ динамики модели управления ИП с учетом ограничений на объемы торговых операций. Предполагается, что данная модель включает в себя стохастические разностные уравнения со случайной волатильностью, описывающие динамику цен рисковых финансовых активов в составе данного ИП. Рассматривается важная проблема управления ИП, а именно, эффективное управление инвестированием в условиях ограничений на объемы торговых операций. Это необходимо для минимизации рисков и достижения наилучших результатов в условиях финансовых рынков, где цены на активы подвержены случайным колебаниям. Волатильность цен рассматривается как случайная величина, которая является важным фактором в оценке и управлении рисками в инвестиционных стратегиях. В диссертационном исследовании Т.Ю. Пашинской¹ осуществлен синтез результатов исследований, посвященных управлению нелинейными дискретными системами со случайными параметрами при ограничениях. Основная цель автора заключалась в разработке методики отслеживания гипотетического эталонного портфеля с заранее заданной траекторией роста в области управления ИП. По результатам исследования получены уравнения, которые определяют оптимальные стратегии управления ИП с обратной связью при наличии ограничений. Работа Т.Ю. Пашинской представляет собой важный вклад

¹ Пашинская Т.Ю. *Управление с прогнозированием нелинейными дискретными системами со случайными параметрами при ограничениях*: дис. ... д. ф.-м. н.: 05.13.01. Томск: Том. гос. ун-т, 2021. <http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Repository/koha:000702951>. Дата обращения 26.02.2024. [Pashinskaya T.Yu. *Control with prediction of nonlinear discrete systems with random parameters under constraints*: Cand. Sci. Thesis (Phys.-Math.). Tomsk: Tomsk State University; 2021. <http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Repository/koha:000702951> (in Russ.). Accessed February 26, 2024.]

в развитие области управления ИП и имеет практическую значимость для финансовых учреждений и инвесторов. В [13] разработана динамическая модель управления ИП с использованием линейного критерия качества.

Исследования, посвященные BSF-портфелям (состоящим из БА (B, Bond), акции (S, Stock) и потока платежей (F, Cash Flow)) с древовидной структурой цен РА, проведены в работах [14–21]. В этих исследованиях выполнен анализ структуры рынка, включающего такие активы, как акции, БА и поток платежей. Авторы работ раскрывают сущность модели и устанавливают определенные условия полноты и отсутствия арбитража на рынке. Кроме того, описывается численный подход к разработке самофинансируемой стратегии, которая при начальном портфеле минимальной стоимости обеспечивает платежную функцию, превосходящую установленную в терминальных вершинах дерева цен. В работах [17–21] проведен анализ свойств (B, S)-рынка при возникновении нарушений условий рыночной полноты и безарбитражности. Особое внимание уделяется проблемам, связанным с недостаточной адекватностью модельного представления эволюции цен РА в процессе биржевых торгов, осуществляемых с использованием биномиального механизма ценообразования в условиях неполного (B, S)-рынка. Также были рассмотрены методы учета воздействия рыночных трендов на процесс эволюции цен РА.

В данном исследовании предлагается новая динамическая модель управления BSF-портфелем, включающая БА, РА и депозит. В отличие от работ [1–12], в этой модели цены РА изменяются случайным образом, следуя древовидной структуре. Новизной модели является повышение точности оценки объемов вложений по сравнению с предыдущей моделью, описанной в работе Т.Ю. Пашинской. Этот эффект достигается путем усреднения цен по различным вершинам дерева.

ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ

Рассмотрим портфель, состоящий из БА, РА и депозита. Будем рассматривать дискретные моменты времени $0, 1, 2, \dots, n$. Обозначим за $r_1(t)$ ставку доходности БА. Цена БА известна в каждый момент времени. Цена РА изменяется случайным образом, причем она может принимать одно из двух возможных значений, т.е. возможные цены акции имеют структуру бинарного дерева (рис. 1) с терминальными вершинами (рис. 2). Обозначим за p вероятность того, что цена РА увеличилась на случайную величину η , а за $q = 1 - p$ – вероятность того, что цена актива уменьшилась на случайную величину η .

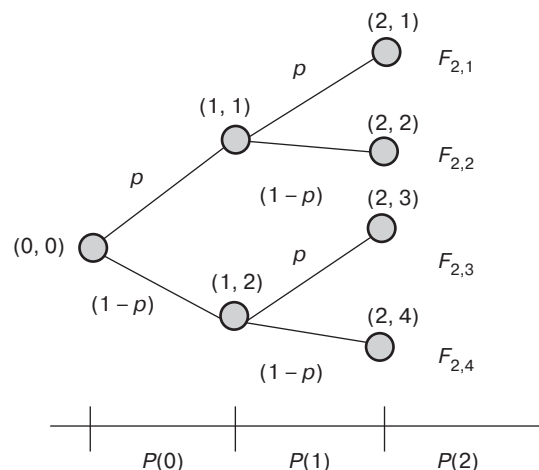


Рис. 1. Двухпериодное дерево РА. $F_{t,i}$ – функция платежа для точки с номером (t, i) , $P(t)$ – платеж для временного шага t

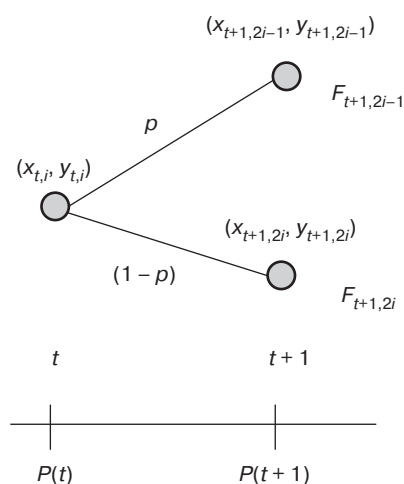


Рис. 2. Терминальные вершины дерева РА

Обозначим за x долю БА, а за y – долю РА. Наследниками (t, i) -й вершины являются вершины с номерами $(t + 1, 2i - 1)$ и $(t + 1, 2i)$. Цена БА в вершине с номером (t, i) , соответствующей моменту времени t , равна $C(t)$, а цена БА в вершинах с номерами $(t + 1, 2i - 1)$ и $(t + 1, 2i)$, соответствующих моменту времени $t + 1$, равна $C'(t + 1)$. Цена РА в вершине с номером (t, i) , соответствующей моменту времени t , равна $C''_{t,i}$, а цены РА в вершинах с номерами $(t + 1, 2i - 1)$ и $(t + 1, 2i)$, соответствующих моменту времени $t + 1$, равны $C''_{t+1,2i-1} = C''_{t,i}(1 + \eta_i)$ и $C''_{t+1,2i} = C''_{t,i}(1 - \eta_i)$ соответственно. Для каждого временного шага t установлены платежи $P(t)$.

Предположим, что на начальном этапе все имеющиеся средства были вложены в БА и не было использовано заемных средств. Важно отметить, что как БА, так и РА могут быть приобретены или отчуждены в любой момент времени, что подразумевает их высокую степень доступности и готовность к торговле [15, 16]. Одной из ключевых особенностей платежного потока является его ограниченная

ликвидность, где платежи заранее определены. Каждый путь от исходной вершины древовидной структуры цен к терминальной вершине представляет собой определенный сценарий развития событий и, следовательно, является случайным.

Метод управления портфелем активов заключается в определении в каждой точке дерева цен объемов БА x_i и РА y_i при соблюдении следующих условий [16, 17]:

- а) для каждой конечной точки дерева определена функция платежа $F_{t,i} \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, 2^t$, представляющая собой сумму, которую инвестор ожидает получить при достижении цен на активы соответствующей вершины дерева, после продажи активов и осуществления выплат или поступлений средств по потоку платежей;
- б) за займы активов предусмотрена плата. Например, при займе x единиц БА в следующий момент времени следует вернуть λx единиц (БА), а μ – плата за займ РА;
- в) рынок является самофинансируемым, т.е. инвестор может покупать и продавать активы, обеспечивая выплаты и поступления по потоку платежей так, чтобы стоимость портфеля в каждый момент времени не менялась, но при этом средняя по вершинам стоимость портфеля со временем изменялась по заданному закону в соответствии с законом изменения средней по вершинам платежной функции. Для конкретных вершин математически это записывается следующим образом:

$$C'(t+1)\lambda x_{t,i} + C''_{t+1,2i-1} \mu y_{t,i} + P(t+1) = C'(t+1)x_{t+1,2i-1} + C''_{t+1,2i-1}y_{t+1,2i-1}, \quad (1)$$

$$C'(t+1)\lambda x_{t,i} + C''_{t+1,2i} \mu y_{t,i} + P(t+1) = C'(t+1)x_{t+1,2i} + C''_{t+1,2i}y_{t+1,2i} \quad (2)$$

при $i = \overline{1, 2^t}$.

В терминальных вершинах должны выполняться неравенства:

$$C'(t+1)\lambda x_{t,i} + C''_{t+1,2i-1} \mu y_{t,i} + P(t+1) \geq F_{t+1,2i-1}, \quad (3)$$

$$C'(t+1)\lambda x_{t,i} + C''_{t+1,2i} \mu y_{t,i} + P(t+1) \geq F_{t+1,2i}. \quad (4)$$

Построение динамической модели BSF-портфеля с одним РА и одним БА

Будем анализировать ИП, где составляющими являются РА с переменными доходностями и безрисковый вклад с постоянной доходностью. В момент

времени t средства, инвестированные в РА, равны $V''(t)$, в БА – $V'(t)$. Тогда общий объем вложений в момент времени t будет равен с учетом депозита

$$V(t) = V'(t) + V''(t) - P(t). \quad (5)$$

Используя формулы (1), (2) для момента времени $t = 1$ (вершины (1, 1) и (1, 2)), получим

$$\begin{aligned} C'(1)x_{1,1} + C''_{1,1}y_{1,1} - P(1) &= C'(1)\lambda x_{0,0} + \mu C''_{1,1}y_{0,0}, \\ C'(1)x_{1,2} + C''_{1,2}y_{1,2} - P(1) &= C'(1)\lambda x_{0,0} + \mu C''_{1,2}y_{0,0}. \end{aligned}$$

Учитывая тот факт, что цены РА в вершинах (1, 1) и (1, 2) являются случайными, принимающими значения $C''_{1,1}$ и $C''_{1,2}$ с вероятностями p и $q = 1 - p$ соответственно, стоимость портфеля в момент времени $t = 1$ будет равна

$$V(1) = \lambda C'(1)x_{0,0} + \mu C''(1)y_{0,0}. \quad (6)$$

Здесь $C'(1)x_{0,0}$ – стоимость БА в момент времени $t = 1$; $C''(1)y_{0,0}$ – стоимость РА в момент времени $t = 1$; $C''(1)$ – среднее значение цены РА в момент времени $t = 1$.

$$C''(1) = pC''_{1,1} + qC''_{1,2}. \quad (7)$$

Для момента времени $t = 2$ (вершины (2, 1), (2, 2), (2, 3) и (2, 4)) получим:

$$V(2) = \lambda C'(2)x_1 + \mu C''(2)y_1. \quad (8)$$

Здесь

$$C''(2) = p(pC''_{2,1} + qC''_{2,2}) + q(pC''_{2,3} + qC''_{2,4}) \quad (9)$$

является средним по вершинам значением цены РА в момент времени $t = 2$; x_1 – среднее значение доли БА в момент времени $t = 1$; y_1 – среднее значение доли РА в момент времени $t = 1$.

Для момента времени $t = 3$ (вершины (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (3, 7), (3, 8)) получим:

$$V(3) = \lambda C'(3)x_2 + \mu C''(3)y_2, \quad (10)$$

где x_2 – среднее значение доли БА в момент времени $t = 2$; y_2 – среднее значение доли РА в момент времени $t = 2$; $C''(3)$ – среднее значение цены РА в момент времени $t = 3$.

$$\begin{aligned} C''(3) &= p(p(pC''_{3,1} + qC''_{3,2}) + q(pC''_{3,3} + qC''_{3,4})) + \\ &+ q(p(pC''_{3,5} + qC''_{3,6}) + q(pC''_{3,7} + qC''_{3,8})). \end{aligned} \quad (11)$$

Продолжая этот процесс, получим:

$$V(t) = \lambda C'(t)x_{t-1} + \mu C''(t)y_{t-1}, \quad t = 1, 2, 3, \dots \quad (12)$$

где $x_0 = x_{0,0}$, $y_0 = y_{0,0}$. Здесь x_{t-1} – среднее по вершинам значение доли БА в момент времени $t - 1$; y_{t-1} – среднее значение доли РА в момент времени $t - 1$; $C''(t)$ – среднее значение цены РА в момент времени t ; y_t – среднее значение доли РА в момент времени t .

Введем величины

$$m_{t,i} = pC''_{t,2i-1} + qC''_{t,2i}, \quad i = \overline{1, 2^{t-1}}. \quad (13)$$

Тогда средняя цена РА в моменты времени $1, 2, 3, \dots$ может быть представлена в виде

$$C''(1) = m_{1,1}, \quad (14)$$

$$C''(2) = pm_{1,1} + qm_{2,2}, \quad (15)$$

$$C''(3) = p(pm_{3,1} + qm_{3,2}) + q(pm_{3,3} + qm_{3,4}). \quad (16)$$

Нетрудно показать, что для любого момента времени t сумма вероятностей равна 1. Действительно,

$$\sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k} = (p + q)^n = 1, \quad (17)$$

где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ – биномиальные коэффициенты.

В терминальных вершинах должны выполняться неравенства:

для момента времени $t = 1$

$$\lambda C'(1)x_{0,0} + \mu C''(1)y_{0,0} + P(1) \geq F(1); \quad (18)$$

для момента времени $t = 2$

$$\lambda C'(2)x_1 + \mu C''(2)y_1 + P(2) \geq F(2); \quad (19)$$

для момента времени t

$$\lambda C'(t)x_{t-1} + \mu C''(t)y_{t-1} + P(t) \geq F(t), \quad t = \overline{1, n}. \quad (20)$$

Здесь $F(t)$ – среднее значение платежной функции в момент времени t . В нашем случае это детерминированная априори известная величина.

В соответствии с подходом, обозначенным в диссертационном исследовании Т.Ю. Пашинской, введем ставку доходности РА за период времени $[t, t + 1]$:

$$v(t+1) = \frac{C''(t+1) - C''(t)}{C''(t)}. \quad (21)$$

Ранее была введена величина $r_1(t)$ – ставка доходности БА. Введем величину $r_2(t)$ – ставку по займу БА (ставка по депозиту).

Динамика цены БА и безрискового займа определяются выражениями:

$$C'(t+1) = C'(t)(1 + r_1(t+1)), \quad (22)$$

$$P(t+1) = P(t)(1 + r_2(t+1)). \quad (23)$$

Тогда из формул (20), (22) и (23) для момента времени $t + 1$ следует:

$$\lambda C'(t)(1 + r_1(t+1))x_t + \mu C''(t)(1 + v(t+1))y_t + P(t)(1 + r_2(t+1)) \geq F(t+1)$$

или

$$\lambda V'(t)(1 + r_1(t+1)) + \mu V''(t)(1 + v(t+1)) + P(t)(1 + r_2(t+1)) \geq F(t+1). \quad (24)$$

Модель 1

Рассмотрим изменение капитала ИП в дискретном времени. Такое изменение можно записать при помощи уравнения с учетом условия (24) и формулы (5):

$$V(t+1) = \lambda(1 + r_1(t+1))V(t) + V''(t)[\mu(1 + v(t+1)) - \lambda(1 + r_1(t+1))] + [\lambda(1 + r_1(t+1)) - (1 + r_2(t+1))]P(t), \quad (25)$$

$$t = 0, 2, \dots, n-1,$$

где n – глубина дерева.

Капитал, помещенный в БА, равен

$$V'(t) = V(t) - V''(t) + P(t). \quad (26)$$

Заметим, что выражение (25) совпадает с аналогичной формулой для динамики капитала при $\lambda = 1$, $\mu = 1$, полученной в работах В.В. Домбровского [10] и Т.Ю. Пашинской для случайной ставки РА.

Уравнение эталонного портфеля определим выражением для платежной функции:

$$F(t+1) = [1 + \mu_0(t)]F(t), \quad (27)$$

где $\mu_0(t)$ – заданная ставка эталонного портфеля. Данный показатель характеризует склонность инвестора к риску: чем он больше, тем выше склонность к риску. $F(0) = V(0)$ (в начальный момент времени капитал эталонного портфеля совпадает с капиталом реального ИП).

Введем обозначения $u1_1(t) = V''(t)$, $u1_2(t) = P(t)$,

$$A1(t) = \begin{pmatrix} \lambda(1 + r_1(t+1)) & 0 \\ 0 & (1 + \mu_0(t+1)) \end{pmatrix}, \quad (28)$$

$$\mathbf{B1}(t) = \begin{pmatrix} \mu(1+v(t+1)) - \lambda(1+r_1(t+1)) & \lambda(1+r_1(t+1)) - (1+r_2(t+1)) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (29)$$

$$\mathbf{z}(t) = (V(t) \ F(t))^T. \quad (30)$$

С учетом (29), (30) и (31) выражение (27) примет вид:

$$\mathbf{z}(t+1) = \mathbf{A1}(t)\mathbf{z}(t) + \mathbf{B1}(t)\mathbf{u1}(t), \quad (31)$$

где

$$\mathbf{u1}(t) = (V''(t) \ P(t))^T. \quad (32)$$

Управляющими переменными здесь являются величины

$$u1_1(t) = V''(t), \ u1_2(t) = P(t).$$

Стоимость безрисковой части портфеля при этом равна

$$\begin{aligned} V'(t) &= V(t) - V''(t) + P(t) = \\ &= V(t) - u1_1(t) + u1_2(t). \end{aligned} \quad (33)$$

Модель 2

Динамику капитала ИП в дискретном времени опишем уравнением с учетом условия (24) и формулы (5):

$$\begin{aligned} V(t+1) &= \mu(1+v(t+1))V(t) + \\ &+ V'(t)[\lambda(1+r_1(t+1)) - \mu(1+v(t+1))] + \\ &+ [\mu(1+v(t+1)) - (1+r_2(t+1))]P(t), \\ &t = 0, 2, \dots, n-1, \end{aligned} \quad (34)$$

где n – глубина дерева.

Тогда матрицы для модели 2 будут иметь следующий вид:

$$\mathbf{A2}(t) = \begin{pmatrix} \mu(1+v(t)) & 0 \\ 0 & (1+\mu_0(t)) \end{pmatrix}, \quad (35)$$

$$\mathbf{B2}(t) = \begin{pmatrix} \lambda(1+r_1(t)) - \mu(1+v(t)) & \mu(1+v(t)) - (1+r_2(t)) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (36)$$

В качестве вектора управления теперь будет

$$\mathbf{u2}(t) = (V''(t) \ P(t))^T. \quad (37)$$

Стоимость рискованной части портфеля при этом равна

$$\begin{aligned} V''(t) &= V(t) - V'(t) + P(t) = \\ &= V(t) - u2_1(t) + u2_2(t). \end{aligned} \quad (38)$$

Задача слежения

В качестве критерия оптимальности выберем квадратичный функционал

$$\begin{aligned} J &= \sum_{t=0}^{n-1} [V(t) - F(t)]^2 + (\mathbf{u}(t))^T \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t) + [V(n) - F(n)]^2 \rightarrow \\ &\rightarrow \min_u \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \end{aligned} \quad (39)$$

$\mathbf{R}(t)$ – диагональная матрица весовых коэффициентов размерности 2×2 . Здесь под $\mathbf{u}(t)$ понимается либо $\mathbf{u1}(t)$, либо $\mathbf{u2}(t)$.

Второе слагаемое в функционале (39) накладывает ограничения на размеры денежных сумм, которые используются для купли/продажи ценных бумаг.

Запишем функционал (39) следующим образом:

$$J = \sum_{t=0}^{n-1} [\mathbf{z}^T(t) \mathbf{h}^T \mathbf{h} \mathbf{z}(t) + (\mathbf{u}(t))^T \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t) + \mathbf{z}^T(n) \mathbf{h}^T \mathbf{h} \mathbf{z}(n)], \quad (40)$$

где $\mathbf{h} = [1, -1]$.

Для определения оптимальной стратегии управления с обратной связью по квадратичному критерию используется линейный закон управления вида

$$\mathbf{u}(t) = K_1(t)V(t) + K_2(t)F(t) = \mathbf{K}(t)\mathbf{z}(t), \quad (41)$$

где $\mathbf{K}(t) = [K_1(t), K_2(t)]$ – матрица коэффициентов обратной связи – выбирается из условия минимума функционала (40).

Функционал (40) можно переписать в виде

$$J = \text{tr} \left\{ \sum_{t=0}^{n-1} [\mathbf{h}^T \mathbf{h} \mathbf{S}(t) + \mathbf{K}^T(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{K}(t) \mathbf{S}(t)] + \mathbf{h}^T \mathbf{h} \mathbf{S}(n) \right\}, \quad (42)$$

где $\text{tr}\{\cdot\}$ – след матрицы, а матрица $\mathbf{S}(t) = \mathbf{z}(t)\mathbf{z}^T(t) = \begin{pmatrix} (V(t))^2 & V(t) \cdot F(t) \\ V(t) \cdot F(t) & (F(t))^2 \end{pmatrix}$.

Уравнение состояния

На основании (31) и (41) динамика матрицы $\mathbf{S}(t) = \mathbf{z}(t)\mathbf{z}^T(t)$ определяется выражением:

$$\mathbf{S}(t+1) = [\mathbf{A}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{K}(t)]\mathbf{S}(t)[\mathbf{A}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{K}(t)]^T. \quad (43)$$

Здесь в качестве $\mathbf{A}(t)$ и $\mathbf{B}(t)$ берутся либо $\mathbf{A1}(t)$, $\mathbf{B1}(t)$, либо $\mathbf{A2}(t)$, $\mathbf{B2}(t)$.

Оптимальная стратегия управления определяется путем решения задачи оптимизации системы [22, 23]. В этой задаче рассматривается уравнение динамики состояний (43), где матрица $\mathbf{K}(t)$ представляет собой управляющее воздействие, а функционал (44) служит критерием качества.

В контексте данной задачи требуется минимизировать критерий (42) при динамических ограничениях, которые описываются разностным матричным уравнением (43). Для решения этой задачи применяется принцип максимума в матричной формулировке, который был разработан ранее в [3, 4].

Алгоритм поиска решения

1. Находим $\mathbf{Q}(t)$, $t = n, n-1, \dots, 1, 0$ из уравнения

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{Q}(t+1)\mathbf{A}(t) + \mathbf{A}(t)\mathbf{Q}(t+1)\mathbf{B}(t) \times \\ \times (\mathbf{R}(t) - \mathbf{B}^T(t)\mathbf{Q}(t+1)\mathbf{B}(t))^{-1} (\mathbf{B}^T(t)\mathbf{Q}(t+1)\mathbf{A}(t)) - \mathbf{h}^T \mathbf{h}.$$

2. Вычисляем $\mathbf{K}(t)$, $t = 0, 1, \dots, n-1$ в соответствии с формулой

$$\mathbf{K}(t) = (\mathbf{R}(t) - \mathbf{B}^T(t)\mathbf{Q}(t+1)\mathbf{B}(t))^{-1} (\mathbf{B}^T(t)\mathbf{Q}(t+1)\mathbf{A}(t)).$$

3. По найденному $\mathbf{K}(t)$ вычисляем $\mathbf{S}(t)$, $t = 1, 2, \dots, n$,

$$\text{где } \mathbf{S}(t) = \begin{pmatrix} (V(t))^2 & V(t)F(t) \\ V(t)F(t) & (F(t))^2 \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы $\mathbf{S}(t)$ и матрица $\mathbf{K}(t)$ являются искомым решением задачи слежения за эталонным портфелем.

Зная матрицу $\mathbf{S}(t)$, имеем:

$$F(t) = \sqrt{S_{22}(t)}; V(t) = S_{12}(t) / F(t),$$

где $V(t)$ – объем вложений в реальный портфель.

Управление портфелем вычисляем по формуле

$$\mathbf{u}(t) = K_1(t)V(t) + K_2(t)F(t).$$

4. Для вычисления объема вложения в портфель необходимо решить систему соотношений:

$$\mathbf{u}(t) = K_1(t)V(t) + K_2(t)F(t) = \mathbf{K}(t)\mathbf{z}(t), \quad t = \overline{0, n-1}; \quad (44) \\ \mathbf{z}(t+1) = \mathbf{A}(t)\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t).$$

Здесь для модели 1: $\mathbf{A}(t) = \mathbf{A1}(t)$, $\mathbf{B}(t) = \mathbf{B1}(t)$,

$$\mathbf{z}(t) = \begin{pmatrix} V(t) \\ F(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} V''(t) \\ P(t) \end{pmatrix}; \quad \text{для модели 2:}$$

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{A2}(t), \mathbf{B}(t) = \mathbf{B2}(t), \mathbf{z}(t) = \begin{pmatrix} V(t) \\ F(t) \end{pmatrix}, \mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} V'(t) \\ P(t) \end{pmatrix}.$$

5. Объем вложений в БА вычисляем по формуле (33) (для модели 1)

$$V'(t) = V(t) - V''(t) + P(t)$$

либо объем вложений в РА вычисляем по формуле (38) (для модели 2)

$$V''(t) = V(t) - V'(t) + P(t).$$

6. Вычисляем доли РА и БА в портфеле

$$x_t = \begin{cases} [V'(t) / C'(t)], & \text{если } V'(t) \geq 0, \\ [|V''(t)| / (\lambda C''(t))], & \text{если } V'(t) < 0, \end{cases} \quad t = \overline{0, n}, \quad (45)$$

$$y_t = \begin{cases} [V''(t) / C''(t)], & \text{если } V''(t) \geq 0, \\ [|V'(t)| / (\mu C''(t))], & \text{если } V''(t) < 0, \end{cases} \quad t = \overline{0, n}. \quad (46)$$

Здесь $[\cdot]$ – целая часть числа.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Моделирование цен РА проводилось на основе смеси двух нормальных распределений с параметрами:

$$m1_j = C01 + h1 \cdot j, \quad j = \overline{0, 500}, \quad \sigma1;$$

$$m2_j = C02 + h2 \cdot j, \quad j = \overline{0, 500}, \quad \sigma2,$$

где $m1_j$, $m2_j$ – распределения цен; $C01$, $C02$ – начальная цена для соответствующего распределения; $h1$, $h2$ – возможные колебания цен при заданном объеме выборки; $\sigma1$, $\sigma2$ – среднеквадратические отклонения.

Значения параметров составили: $C01 = 100$, $C02 = 90$, $h1 = 0.04$, $h2 = 0.02$, $\sigma1 = 10$, $\sigma2 = 15$.

На рис. 3 приведены рассчитанные цены РА. Здесь и далее денежные величины показаны в условных единицах.

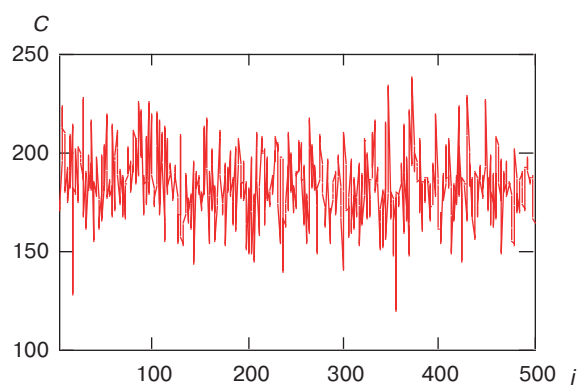


Рис. 3. Цены РА. C – цена РА, усл. ден. ед.; j – количество реализаций

На рис. 4 приведено полученное вероятностное распределение цен РА.

Это распределение рассматривается как аналог эмпирического распределения. Затем на основе этого распределения моделируются цены РА в вершинах дерева. Вероятность роста цены была оценена на основе построенного распределения для разности цен $C''_i - C'_i$, $i = \overline{1, 500}$. Вероятность роста цены (вероятность того, что $C''_i - C'_i > 0$) составила $p = 0.495$.

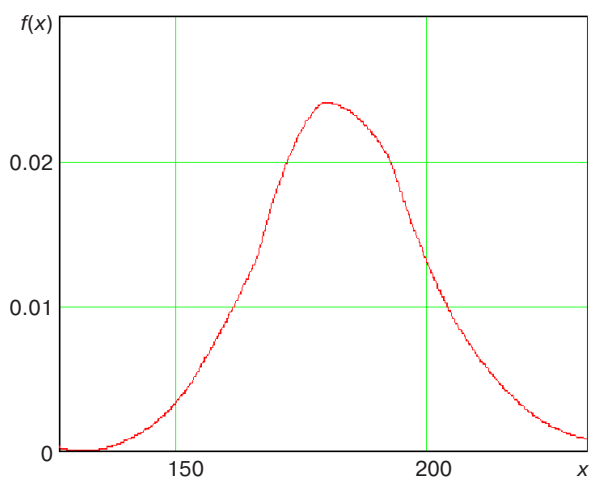


Рис. 4. Вероятностное распределение цен РА.
 $f(x)$ – плотность распределения вероятностей;
 x – цена РА, усл. ден. ед.

Значения остальных параметров были следующие: $C''(0) = 150$, $C'(0) = 10$, $\lambda = 1.02$, $\mu = 1.02$, $F(0) = 10000$, $V(0) = 10000$, $P(0) = 0$, $r_1(t) = 0.02$, $r_2(t) = 0.015$, $\mu_0(t) = 0.02$, глубина дерева $n = 5$.

Значения объемов вложений были взяты следующие. Для модели 1 $V'(0) = 10000$, $V''(0) = 0$, т.е. в начальный момент времени все средства были вложены в БА. Для модели 2 $V'(0) = 0$, $V''(0) = 10000$ – все средства вложены в РА.

Результаты моделирования приведены в табл. 1–5.

На рис. 5 приведены графики слежения за желаемой стоимостью портфеля. Здесь и далее на графиках время t указано в относительных единицах.

На рис. 6 приведены графики необходимых изменений объемов вложений в РА для достижения стоимости портфеля не меньше желаемой.

Таблица 1. Глубина дерева до $n = 1$

Глубина дерева	Модель 1				Модель 2			
	Объем вложений в портфель	Доля БА	Доля РА	Депозит	Объем вложений в портфель	Доля БА	Доля РА	Депозит
0	10000	1	0	0	10000	0	1	0
1	10340	1.028	-0.028	-0.368	11750	0.725	0.272	-35.890

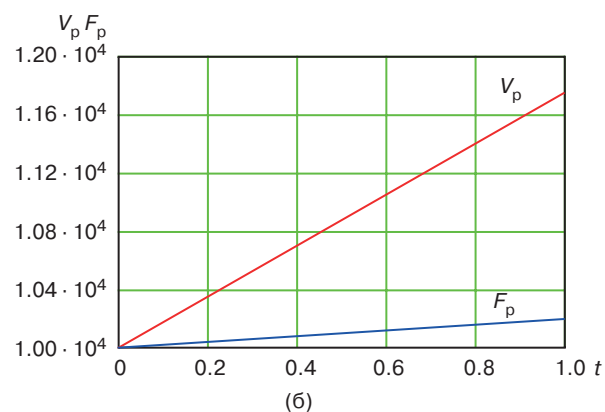
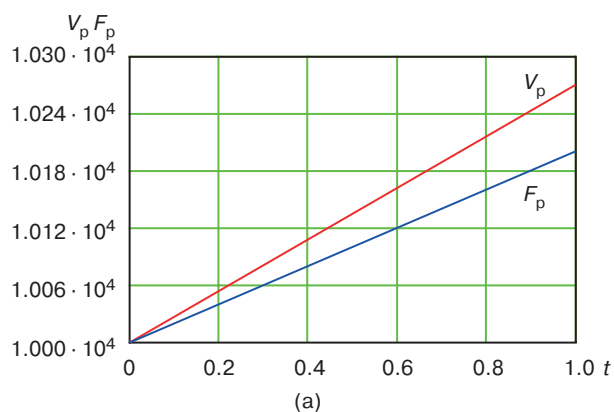


Рис. 5. Графики слежения: (а) модель 1, (б) модель 2. V_p – объем вложений или капитал портфеля, усл. ден. ед.; F_p – платежная функция, усл. ден. ед.; t – время, усл. ед.

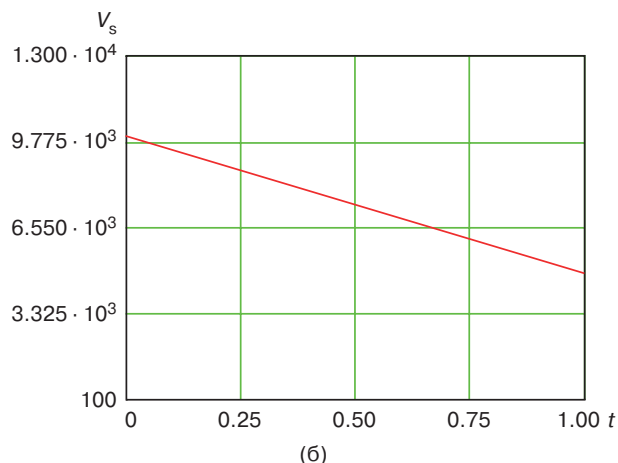
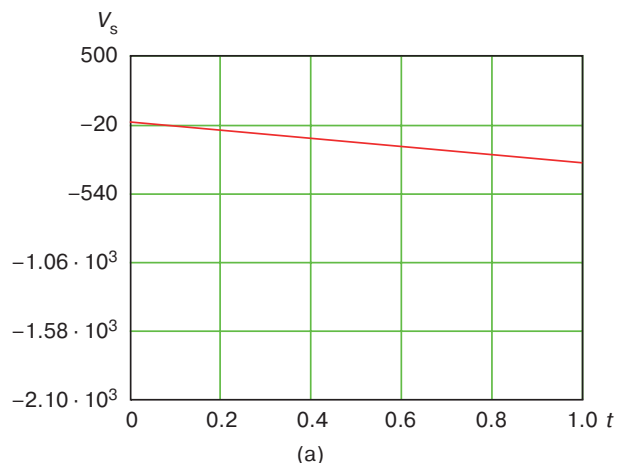


Рис. 6. Графики необходимых изменений объемов вложений в РА:
(а) модель 1, (б) модель 2. V_s – объем вложений в РА, усл. ден. ед.; t – время, усл. ед.

На рис. 7 приведены графики необходимых изменений объемов вложений в БА для достижения стоимости портфеля не меньше желаемой.

На рис. 8 приведены графики слежения за платежной функцией (желаемой стоимостью портфеля).

На рис. 9 приведены графики необходимых изменений объемов вложений в РА для достижения стоимости портфеля не меньше желаемой.

На рис. 10 приведены графики необходимых изменений объемов вложений в БА для достижения стоимости портфеля не меньше желаемой.

На рис. 11 приведены графики слежения за платежной функцией (желаемой стоимостью портфеля).

На рис. 12 приведены графики необходимых изменений объемов вложений в РА для достижения стоимости портфеля не меньше желаемой.

На рис. 13 приведены графики необходимых изменений объемов вложений в БА для достижения стоимости портфеля не меньше желаемой.

На рис. 14 приведены графики слежения за платежной функцией (желаемой стоимостью портфеля).

На рис. 15 приведены графики необходимых изменений объемов вложений в РА для достижения стоимости портфеля не меньше желаемой.

На рис. 16 приведены графики необходимых изменений объемов вложений в БА для достижения стоимости портфеля не меньше желаемой.

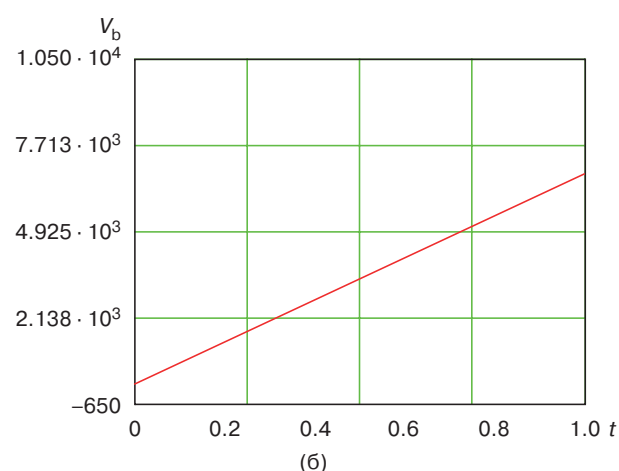
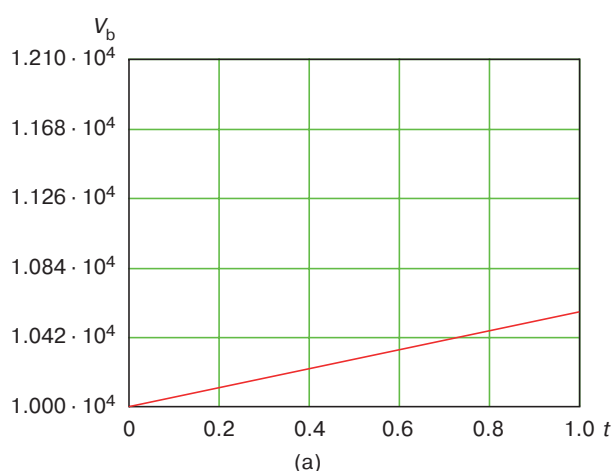


Рис. 7. Графики необходимых изменений объемов вложений в БА: (а) модель 1, (б) модель 2.
 V_b – объем вложений в БА, усл. ден. ед.; t – время, усл. ед.

Таблица 2. Глубина дерева до $n = 2$

Глубина дерева	Модель 1				Модель 2			
	Объем вложений в портфель	Доля БА	Доля РА	Депозит	Объем вложений в портфель	Доля БА	Доля РА	Депозит
0	10000	1	0	0	10000	0	1	0
1	10260	1.067	-0.067	-0.874	11400	0.427	0.568	-54.988
2	10690	1.079	-0.079	-1.089	11820	0.698	0.294	-93.140

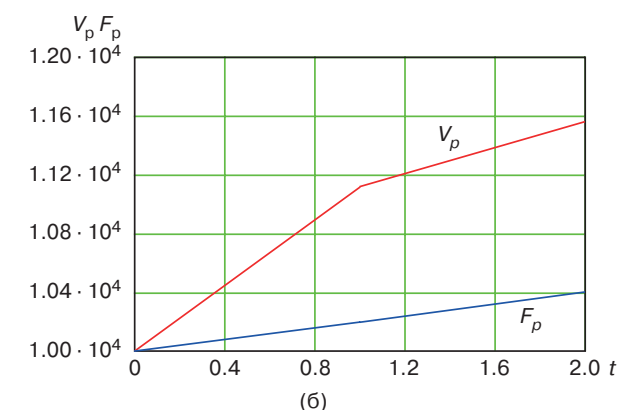
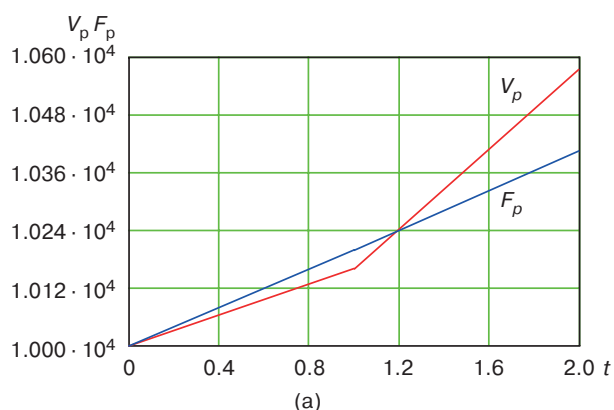


Рис. 8. Графики слежения за платежной функцией: (а) модель 1, (б) модель 2.

V_p – объем вложений или капитал портфеля, усл. ден. ед.; F_p – платежная функция, усл. ден. ед.; t – время, усл. ед.

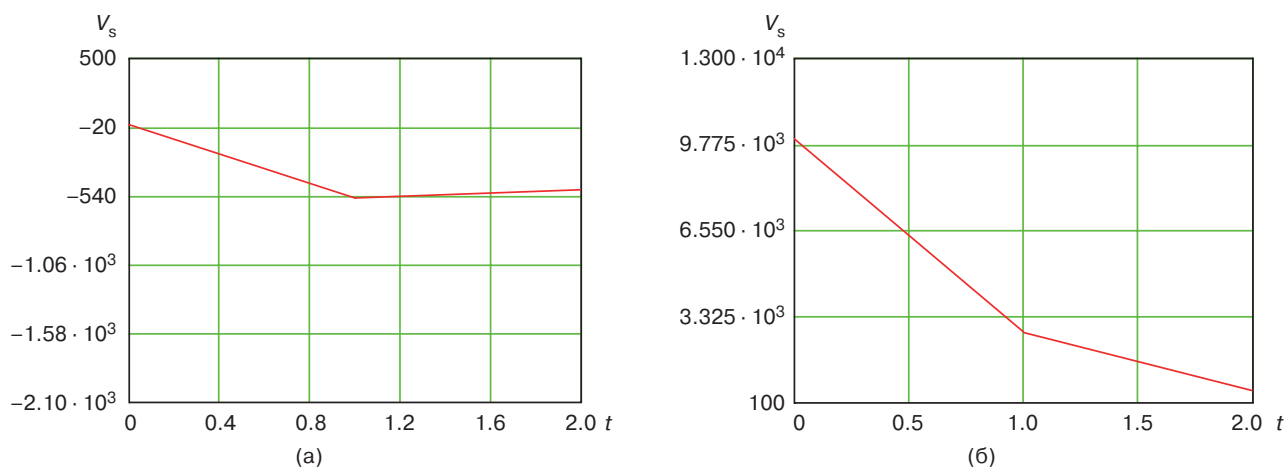


Рис. 9. Графики необходимых изменений объемов вложений в РА: (а) модель 1, (б) модель 2.
 V_s – объем вложений в РА, усл. ден. ед.; t – время, усл. ед.

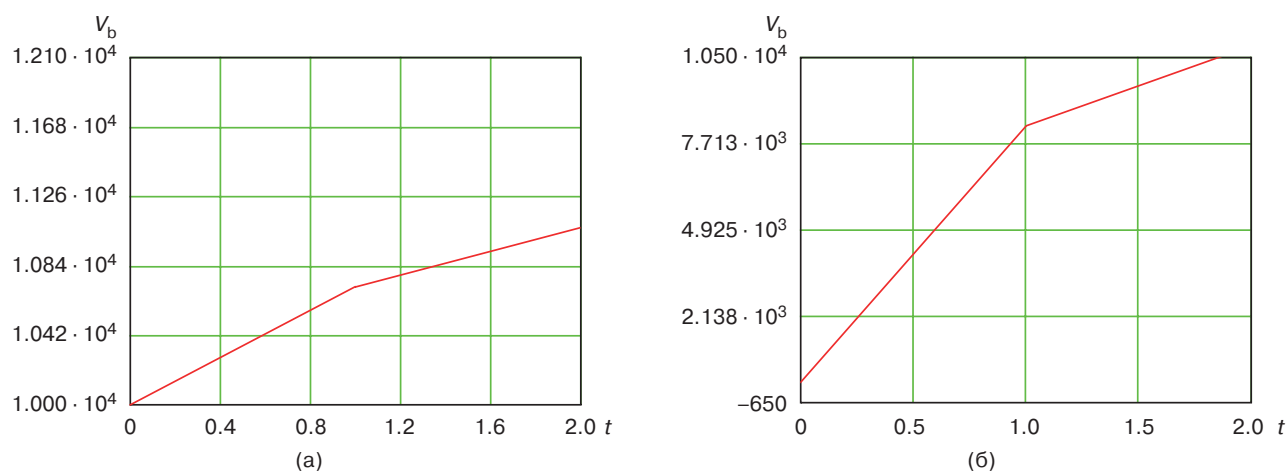


Рис. 10. Графики необходимых изменений объемов вложений в БА: (а) модель 1, (б) модель 2.
 V_b – объем вложений в БА, усл. ден. ед.; t – время, усл. ед.

Таблица 3. Глубина дерева до $n = 3$

Глубина дерева	Модель 1				Модель 2			
	Объем вложений в портфель	Доля БА	Доля РА	Депозит	Объем вложений в портфель	Доля БА	Доля РА	Депозит
0	10000	1	0	0	10000	0	1	0
1	10180	1.110	-0.111	-1.484	11190	0.538	0.456	-67.938
2	10610	1.100	-0.103	-1.450	11610	0.814	0.177	-106.597
3	11030	0.975	0.018	-2.705	11850	-0.024	1.024	-3.375

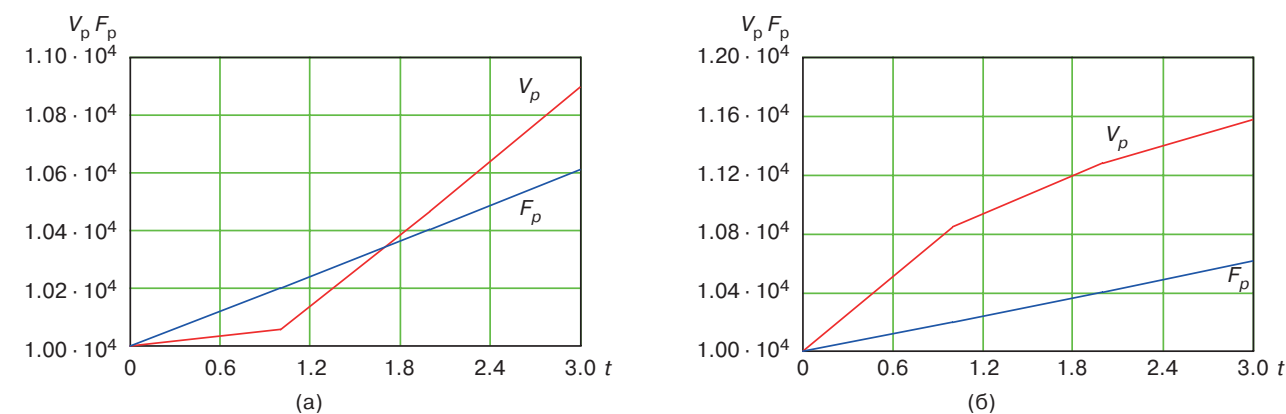


Рис. 11. Графики слежения за платежной функцией: (а) модель 1, (б) модель 2.

V_p – объем вложений или капитал портфеля, усл. ден. ед.; F_p – платежная функция, усл. ден. ед.; t – время, усл. ед.

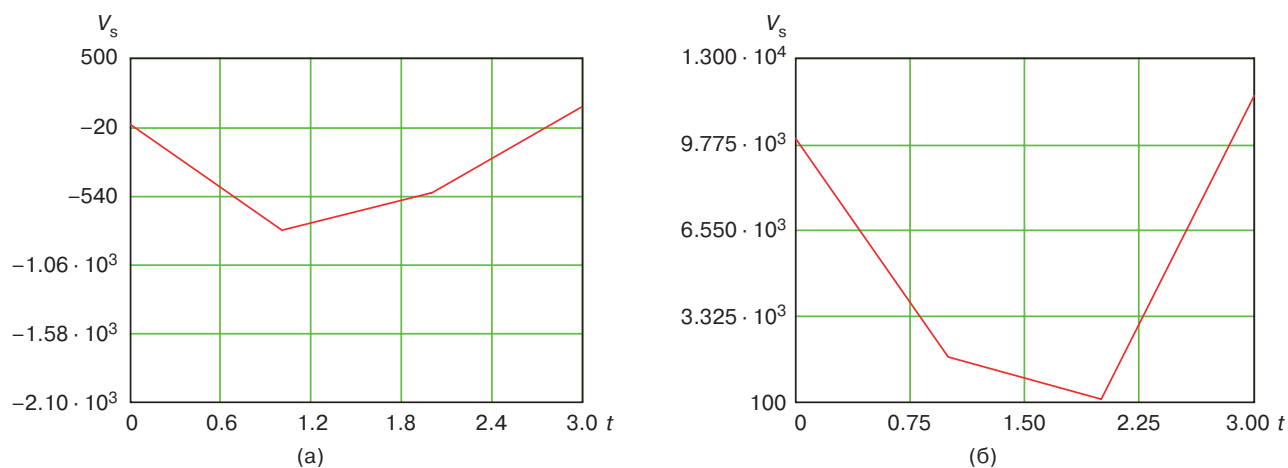


Рис. 12. Графики необходимых изменений объемов вложений в РА: (а) модель 1, (б) модель 2.
 V_s – объем вложений в РА, усл. ден. ед.; t – время, усл. ед.

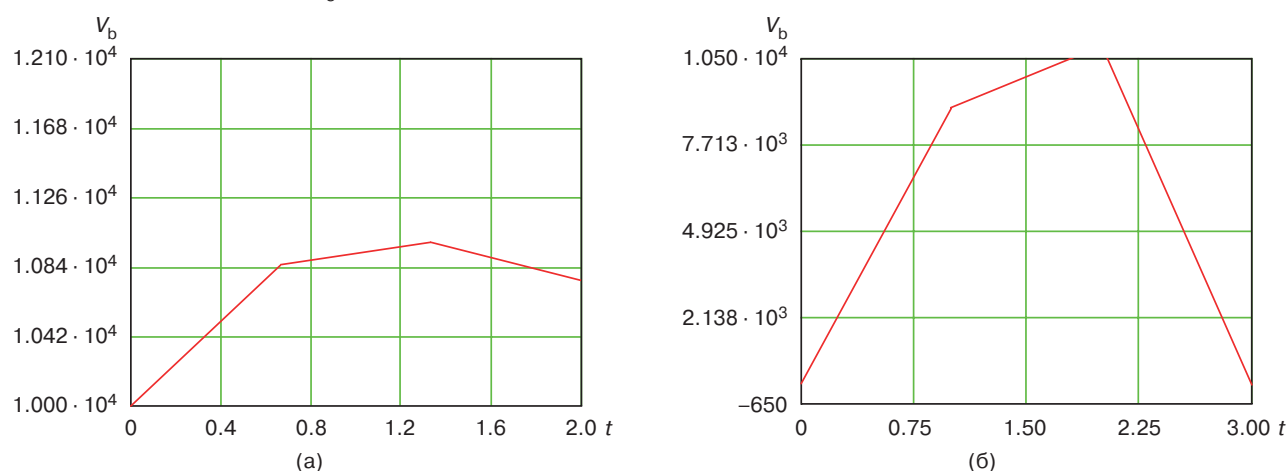


Рис. 13. Графики необходимых изменений объемов вложений в БА: (а) модель 1, (б) модель 2.
 V_b – объем вложений в БА, усл. ден. ед.; t – время, усл. ед.

Таблица 4. Глубина дерева до $n = 4$

Глубина дерева	Модель 1				Модель 2			
	Объем вложений в портфель	Доля БА	Доля РА	Депозит	Объем вложений в портфель	Доля БА	Доля РА	Депозит
0	10000	1	0	0	$1 \cdot 10^4$	0	1	0
1	10080	1.159	-0.159	-2.078	$1.057 \cdot 10^4$	0.913	0.078	-100.38
2	10510	1.119	-0.119	-1.653	$1.1 \cdot 10^4$	0.977	0.013	-111.746
3	10930	0.970	0.030	-4.141	$1.124 \cdot 10^4$	-0.027	1.026	-1.617
4	11370	0.977	0.023	-3.411	$1.146 \cdot 10^4$	$3.502 \cdot 10^{-3}$	0.996	-3.804

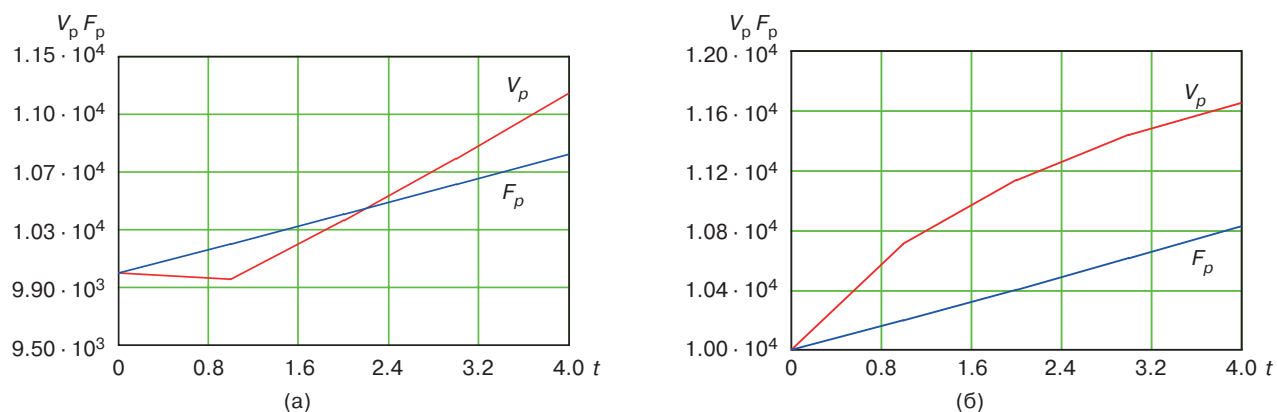


Рис. 14. Графики слежения за платежной функцией: (а) модель 1, (б) модель 2.

V_p – объем вложений или капитал портфеля, усл. ден. ед.; F_p – платежная функция, усл. ден. ед.; t – время, усл. ед.

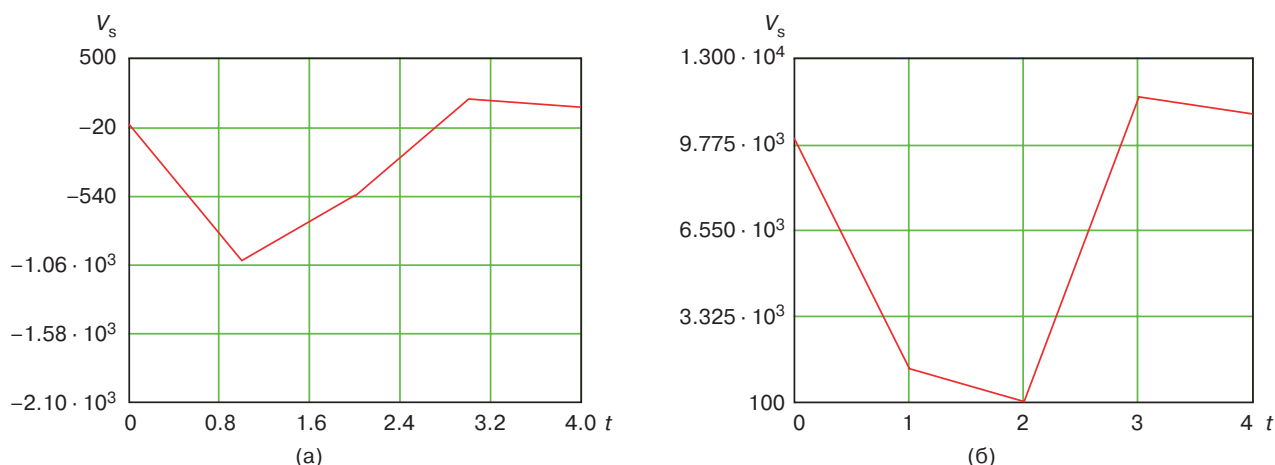


Рис. 15. Графики необходимых изменений объемов вложений в РА: (а) модель 1, (б) модель 2.
 V_s – объем вложений в РА, усл. ден. ед.; t – время, усл. ед.

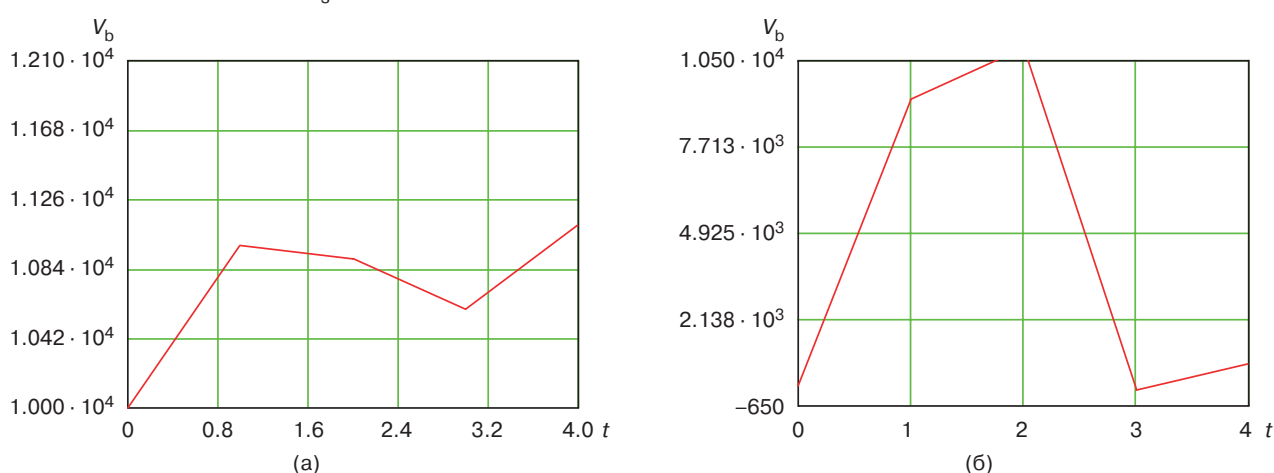


Рис. 16. Графики необходимых изменений объемов вложений в БА: (а) модель 1, (б) модель 2.
 V_b – объем вложений в БА, усл. ден. ед.; t – время, усл. ед.

Таблица 5. Глубина дерева до $n = 5$

Глубина дерева	Модель 1				Модель 2			
	Объем вложений в портфель	Доля БА	Доля РА	Депозит	Объем вложений в портфель	Доля БА	Доля РА	Депозит
0	10000	1	0	0	10000	0	1	0
1	9815	1.095	-0.095	-0.379	10480	0.934	0.056	-101.88
2	10220	1.034	-0.034	-0.140	10910	0.979	0.011	-111.062
3	10630	0.971	0.028	-3.587	11130	-0.025	1.025	-2.593
4	11060	0.976	0.023	-3.602	11350	0.003	0.996	-4.519
5	11500	0.980	0.019	-2.986	11580	-0.01	1.01	-1.555

На рис. 17 приведены графики слежения за платежной функцией (желаемой стоимостью портфеля).

На рис. 18 приведены графики необходимых изменений объемов вложений в РА для достижения стоимости портфеля не меньше желаемой.

На рис. 19 приведены графики необходимых изменений объемов вложений в БА для достижения стоимости портфеля не меньше желаемой.

Отрицательные доли вложений, которые наблюдаются в табл. 1–5, можно интерпретировать как «короткие продажи». Отрицательные доли депозита, присутствующие в табл. 1–5, означают заем средств. Такие результаты в рамках данной динамической модели объясняются тем, что не было наложено ограничений на объемы вложений и депозита.

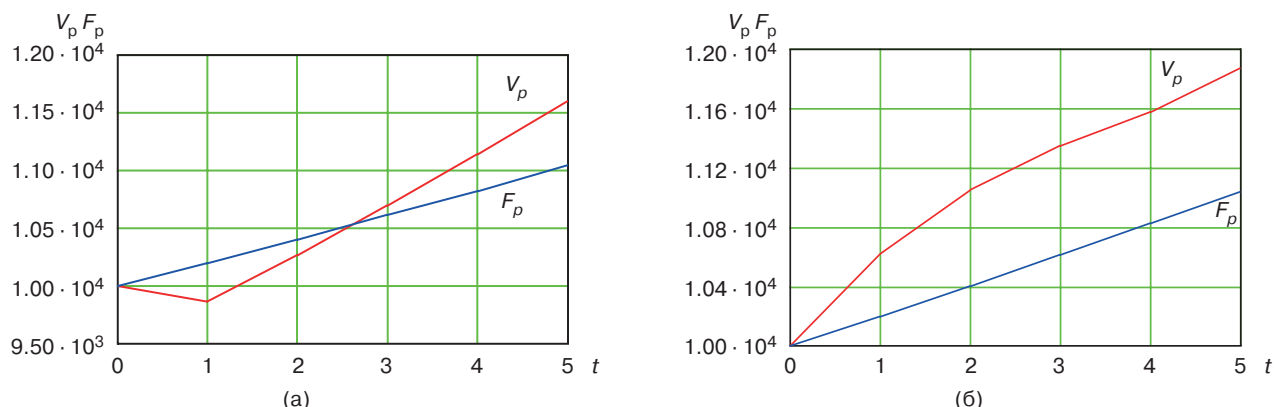


Рис. 17. Графики слежения за платежной функцией: (а) модель 1, (б) модель 2.

V_p – объем вложений или капитал портфеля, усл. ден. ед.; F_p – платежная функция, усл. ден. ед.; t – время, усл. ед.

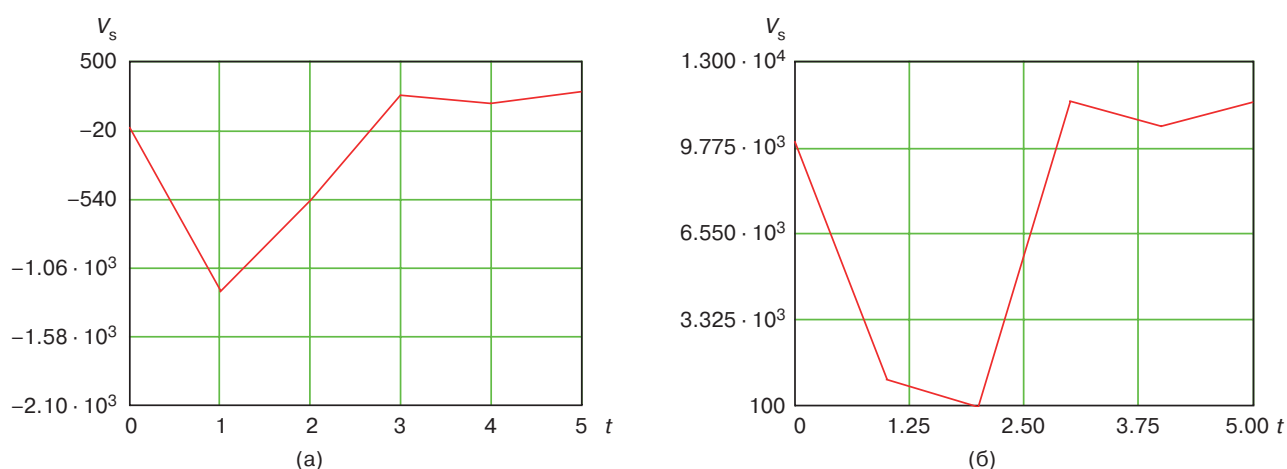


Рис. 18. Графики необходимых изменений объемов вложений в РА: (а) модель 1, (б) модель 2.

V_s – объем вложений в РА, усл. ден. ед.; t – время, усл. ед.

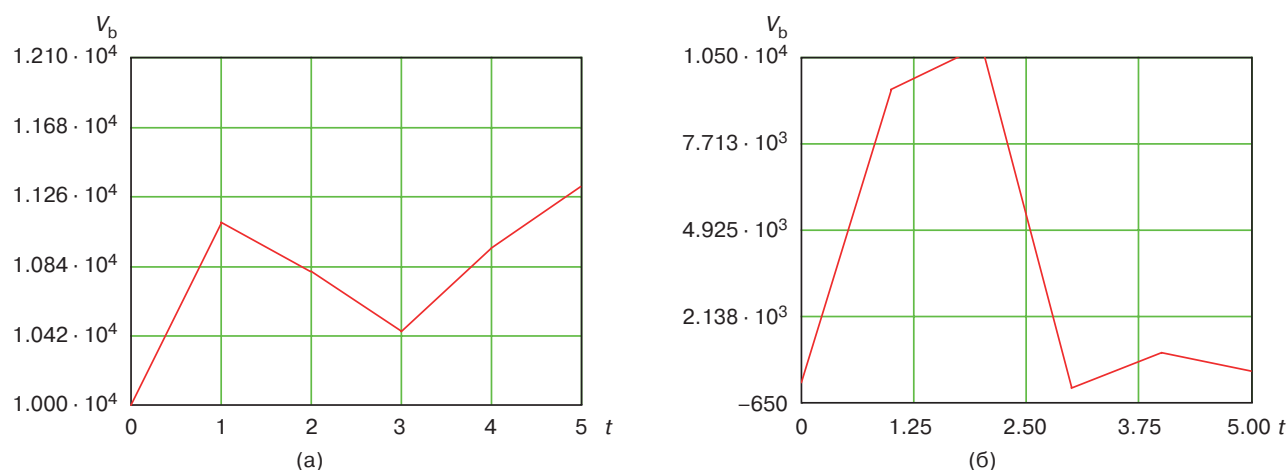


Рис. 19. Графики необходимых изменений объемов вложений в БА: (а) модель 1, (б) модель 2.

V_b – объем вложений в БА, усл. ден. ед.; t – время, усл. ед.

Видно, что переформирование портфеля по динамической модели позволяет обеспечивать заданный уровень платежной функции.

Представляет интерес сравнение погрешности динамической модели, основанной на древовидной структуре изменения цен РА, с общей моделью

изменения цен РА [13]. В табл. 6, 7 приведены погрешности оценки объемов вложений. Здесь σV – погрешность стоимости портфеля; σV_s – погрешность объема вложений в РА; σV_b – погрешность объема вложений в БА; σx – погрешность количества РА; σy – погрешность количества БА.

Таблица 6. Оценка погрешности модели 1

Глубина дерева / инвестиционный горизонт n	Древовидная структура цен РА			Естественное изменение цен РА			Выигрыш в точности модели		
	σV	σV_s	σV_b	$\sigma V1$	σV_s1	σV_b1	$\frac{\sigma V1}{\sigma V}$	$\frac{\sigma V_s1}{\sigma V_s}$	$\frac{\sigma V_b1}{\sigma V_b}$
1	6.44	61.5	61.7	15.4	84.9	83.3	2.4	1.4	1.3
2	12.3	26.3	21.9	21.25	37.0	34.0	1.7	1.4	1.6
3	18.64	417	410	39.0	581	575	2.1	1.4	1.4
4	25.1	340	354	61.49	625	654	2.4	1.8	1.8
5	26.9	234	238	73.7	552	556	2.7	2.4	2.3

Таблица 7. Оценка погрешности модели 2

Глубина дерева / инвестиционный горизонт n	Древовидная структура цен РА			Естественное изменение цен РА			Выигрыш в точности модели		
	σV	σV_s	σV_b	$\sigma V2$	σV_s2	σV_b2	$\frac{\sigma V2}{\sigma V}$	$\frac{\sigma V_s2}{\sigma V_s}$	$\frac{\sigma V_b2}{\sigma V_b}$
1	194.4	5003	302	339.7	875	531	1.7	1.7	1.7
2	210.3	52.8	157	366.2	98.2	269	1.7	1.9	1.7
3	370.3	981	637	743.6	1726	1083	2.0	1.8	1.7
4	367.8	560	493	781.0	1900	1959	2.1	3.4	4.0
5	370.0	559	280	843.2	1685	1288	2.3	3.0	4.6

Как следует из табл. 6, погрешность динамической модели на основе древовидной структуры изменения цен РА меньше, чем для обычной модели, причем с увеличением инвестиционного горизонта выигрыш в точности модели растет. Так для стоимости портфеля выигрыш в точности модели меняется от 2.4 ($n = 1$) до 2.7 ($n = 5$); для объема вложений в РА выигрыш в точности меняется от 1.4 ($n = 1$) до 2.4 ($n = 5$); для объема вложений в БА выигрыш в точности меняется от 1.3 ($n = 1$) до 2.3 ($n = 5$).

Выигрыш в точности наблюдается и для модели 2. Например, выигрыш в точности оценки стоимости портфеля составляет от 1.7 ($n = 1$) до 2.3 ($n = 5$).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведен анализ портфеля ценных бумаг, который включал в себя активы с различными уровнями риска, активы без риска и депозиты. Для моделирования структуры цен РА использована биномиальная модель. Основная цель исследования заключалась в разработке модели управления, которая позволит отслеживать эталонный портфель. Для этого применен критерий качества в форме квадратичной функции, которая служила основой для построения модели управления. Разработанная модель относится к классу моделей динамического программирования, которые позволяют определить оптимальную стратегию управления, используя обратную связь.

В рамках исследования рассмотрены два подхода к формированию портфеля. Первый подход предполагает начальное вложение капитала в БА, а затем управление происходит через РА. Второй подход, наоборот, включает начальное вложение капитала в РА, а управление осуществляется через БА. Для оптимизации управления и достижения поставленной цели в исследовании применен линейный закон управления. Этот закон позволяет определить оптимальные значения управляющих параметров на основе текущего состояния системы и целевого значения эталонного портфеля.

В результате исследования сделан вывод, что применение динамической модели управления, основанной на древовидной структуре цен РА, позволяет значительно повысить точность оценки объема вложений в портфель. А именно, для первого подхода (модель 1) наблюдается увеличение точности оценки на уровне от 2.4 до 2.7 раз, а для второго подхода (модель 2) – от 1.7 до 2.7 раз.

Это означает, что разработанная модель может стать полезным инструментом для финансовых аналитиков и инвесторов, помогая им принимать более обоснованные решения при формировании и управлении портфелем ценных бумаг. Модель способствует более точному определению оптимального объема вложений, что может привести к повышению эффективности инвестиций и улучшению результатов для инвесторов.

Вклад авторов

А.А. Мицель – концепция, структура, научное руководство исследованием.

Е.В. Викторенко – анализ и интерпретация данных, подготовка и редактирование рукописи.

Authors' contributions

A.A. Mitsel – concept, structure, and scientific leadership of the study.

E.V. Viktorenko – analysis and interpretation of data, writing and editing the text of the manuscript.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Домбровский В.В., Ляшенко Е.А. Линейно-квадратичное управление дискретными системами со случайными параметрами и мультипликативными шумами с применением к оптимизации инвестиционного портфеля. *Автоматика и телемеханика*. 2003;10:50–65.
2. Домбровский В.В., Ляшенко Е.А. Модель управления инвестиционным портфелем на финансовом рынке со стохастической волатильностью с учетом транзакционных издержек и ограничений. *Вестник Томского государственного университета*. 2006;S16:217–225.
3. Домбровский В.В., Домбровский Д.В., Ляшенко Е.А. Управление с прогнозированием системами со случайными параметрами и мультипликативными шумами и применение к оптимизации инвестиционного портфеля. *Автоматика и телемеханика*. 2005;4:84–97.
4. Герасимов Е.С., Домбровский В.В. Динамическая сетевая модель управления инвестициями при квадратичной функции риска. *Автоматика и телемеханика*. 2002;2:119–128.
5. Домбровский В.И., Гальперин В.А. Динамическая модель управления инвестиционным портфелем при квадратической функции риска. *Вестник Томского ГУ*. 2000;269:73–75.
6. Гальперин В.А., Домбровский В.И. Динамическое управление самофинансируемым инвестиционным портфелем при квадратической функции риска в дискретном времени. *Вестник Томского ГУ*. 2002;(S1-1):141–146.
7. Домбровский В.И., Гальперин В.А. Управление инвестиционным портфелем в непрерывном времени при квадратической функции риска. В сб.: *Труды Десятого юбилейного симпозиума по непараметрическим и робастным статистическим методам в кибернетике*. Томск: ТГУ; 2004. С. 185–192. <https://elibrary.ru/xwjka>
8. Гальперин В.А., Домбровский В.И. Динамическое управление инвестиционным портфелем с учетом скачкообразного изменения цен финансовых активов. *Вестник Томского ГУ*. 2003;280:112–117.
9. Домбровский В.В., Домбровский Д.В., Ляшенко Е.А. Динамическая оптимизация инвестиционного портфеля при ограничениях на объемы вложений в финансовые активы. *Вестник ТГУ*. 2008;1:13–17.
10. Домбровский В.В., Пашинская Т.Ю. Стратегии прогнозирующего управления инвестиционным портфелем на финансовом рынке со скрытым переключением режимов. *Вестник ТГУ. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2020;50:4–13.
11. Гринёва Н.В. Динамическая оптимизация траектории управления инвестиционным портфелем. *Проблемы экономики и юридической практики*. 2021;17(3):73–77.
12. Ivanyuk V. Proposed Model of a Dynamic Investment Portfolio with an Adaptive Strategy. *Mathematics*. 2022;10(23):4394. <https://doi.org/10.3390/math10234394>
13. Мицель А.А., Красненко Н.П. Динамическая модель управления инвестиционным портфелем с линейным критерием качества. *Доклады Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники (Доклады ТУСУР)*. 2014;4(34):176–182.
14. Колясникова Е.Р. Хеджирующая стратегия в модели (B, S, F)-рынка. *Обозрение прикладной и промышленной математики*. 2009;16(3):467–468.
15. Бронштейн Е.М., Колясникова Е.Р. Модель (B, S, F)-рынка и хеджирующие стратегии. *Управление риском*. 2010;2:55–64.
16. Бронштейн Е.М., Колясникова Е.Р. Приближенные хеджирующие стратегии в модели (B, S, F)-рынка. *Математическое моделирование*. 2010;22(11):29–38.
17. Давнис В.В., Богданова С.Ю., Суюнова Г.Б. Модели (B, S)-рынка и риск-нейтральная цена опционов. *Вестник ОрёлГИЭТ*. 2010;1:134–140.
18. Давнис В.В., Федосеев А.М. Адаптивное моделирование (B, S)-рынка. *Современная экономика: проблемы и решения*. 2011;6(18):202–213.
19. Федосеев А.М., Коротких В.В. Особенности оценки стоимости опционов на полном и неполных рынках. *Современная экономика: проблемы и решения*. 2011;4(16):137–144.
20. Almeida C., Freire G. Pricing of index options in incomplete markets. *J. Fin. Economic*. 2022;144(1):174–205. <https://doi.org/10.1016/j.jfineco.2021.05.041>
21. Давнис В.В., Коротких В.В. Эконометрические варианты модели (B, S, I)-рынка. *Современная экономика: проблемы и решения*. 2013;10(46):154–165. URL: <https://journals.vsu.ru/meps/article/view/7987>
22. Кротов В.Ф., Лагоша Б.А., Лобанов С.М., Данилов Н.И., Сергеев С.И. *Основы теории оптимального управления*. М.: Высшая школа; 1990. 430 с.
23. Athans M. The Matrix Minimum Principle. *Information and Control*. 1967;11(5–6):592–606. [https://doi.org/10.1016/S0019-9958\(67\)90803-0](https://doi.org/10.1016/S0019-9958(67)90803-0)

REFERENCES

1. Dombrovskii V.V., Lyashenko E.A. A Linear Quadratic Control for Discrete Systems with Random Parameters and Multiplicative Noise and Its Application to Investment Portfolio Optimization. *Autom. Remote Control*. 2003;64(10): 1558–1570. <https://doi.org/10.1023/A:1026057305653>
[Original Russian Text: Dombrovskii V.V., Lyashenko E.A. A Linear Quadratic Control for Discrete Systems with Random Parameters and Multiplicative Noise and Its Application to Investment Portfolio Optimization. *Avtomatika i telemekhanika*. 2003;10:50–65 (in Russ.).]
2. Dombrovskii V.V., Lyashenko E.A. Dynamic model of investment portfolio management in the financial market with stochastic volatility with regard transaction costs and restrictions. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta = Tomsk State University J.* 2006;S16:217–225. (in Russ.).
3. Dombrovskii V.V., Dombrovskii D.V., Lyashenko E.A. Predictive control of random-parameter systems with multiplicative noise. Application to investment portfolio optimization. *Autom. Remote Control*. 2005;66(4):583–595. <https://doi.org/10.1007/s10513-005-0102-5>
[Original Russian Text: Dombrovskii V.V., Dombrovskii D.V., Lyashenko E.A. Predictive control of random-parameter systems with multiplicative noise. Application to investment portfolio optimization. *Avtomatika i telemekhanika*. 2005;4: 84–97 (in Russ.).]
4. Gerasimov E.S., Dombrovskii V.V. Dynamic network model of investment management control for quadratic risk function. *Autom. Remote Control*. 2002;63(2):280–288. <https://doi.org/10.1023/A:1014251725737>
[Original Russian Text: Gerasimov E.S., Dombrovskii V.V. Dynamic network model of investment management control for quadratic risk function. *Avtomatika i telemekhanika*. 2002;2:119–128 (in Russ.).]
5. Dombrovskii V.I., Galperin V.A. Dynamic model of investments portfolio selection by quadratic risk function. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta = Tomsk State University J.* 2000;269:73–75 (in Russ.).
6. Galperin V.A., Dombrovskii V.I. Dynamic management of a self-financing investment portfolio with a quadratic risk function in discrete time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta = Tomsk State University J.* 2002;(S1-1):141–146 (in Russ.).
7. Dombrovskii V.I., Galperin V.A. Investment portfolio management in continuous time with a quadratic risk function. In: *Proceedings of the 10th Anniversary Symposium on Nonparametric and Robust Statistical Methods in Cybernetics*. Tomsk: TSU; 2004. P. 185–192 (in Russ.). <https://elibrary.ru/xwjxax>
8. Galperin V.A., Dombrovskii V.I. Dynamic management of an investment portfolio taking into account abrupt changes in prices of financial assets. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta = Tomsk State University J.* 2003;280:112–117 (in Russ.).
9. Dombrovskii V.V., Dombrovskii D.V., Lyashenko E.A. Dynamic optimization of the investment portfolio under restrictions on the volume of investments in financial assets. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta = Tomsk State University J.* 2008;1:13–17 (in Russ.).
10. Dombrovskii V.V., Pashinskaya T.Yu. Predictive control strategies for investment portfolio in the financial market with hidden regime switching. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'naya tekhnika i informatika = Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2020;50:4–13 (in Russ.).
11. Grineva N.V. Dynamic optimization of the investment portfolio management trajectory. *Problemy ekonomiki i yuridicheskoi praktiki = Economic Problems and Legal Practice*. 2021;17(3):73–77. <https://doi.org/10.33693/2541-8025-2021-17-3-73-77>
12. Ivanyuk V. Proposed Model of a Dynamic Investment Portfolio with an Adaptive Strategy. *Mathematics*. 2022;10(23):4394. <https://doi.org/10.3390/math10234394>
13. Mitsel A.A., Krasnenko N.P. Dynamic model of investment portfolio management with linear criterion of quality. *Doklady Tomskogo gosudarstvennogo universiteta sistem upravleniya i radioelektroniki (Doklady TUSUR) = Proceedings of TUSUR University*. 2014;34:176–182 (in Russ.).
14. Kolyasnikova E.R. Hedging strategy in the (B, S, F)-market model. *Obozrenie prikladnoi i promyshlennoi matematiki = OP&PM Surveys of Applied and Industrial Mathematics*. 2009;16(3):467–468 (in Russ.).
15. Bronshtein E.M., Kolyasnikova E.R. The (B, S, F)-market Model and hedging strategies. *Upravlenie riskom = Management of Risk*. 2010;2:55–64 (in Russ.).
16. Bronshtein E.M., Kolyasnikova E.R. Approximate hedging strategy in the (B, S, F)-market model. *Matematicheskoe modelirovanie = Math. Model.* 2010;22(11):29–38 (in Russ.).
17. Davnis V.V., Bogdanova S.Yu., Suyunova G.B. Models of (B, S)-market and risk-neutral price of options. *Vestnik OrelGIET = OrelSIET Bulletin*. 2010;1:134–140 (in Russ.).
18. Davnis V.V., Fedoseev A.M. Adaptive model-building of (B, S)-market. *Sovremennaya ekonomika: problemy i resheniya = Modern Economics: Problems and Solutions*. 2011;6(18):202–213 (in Russ.).
19. Fedoseev A.M., Korotkikh V.V. Features valuation of options on complete and incomplete markets. *Sovremennaya ekonomika: problemy i resheniya = Modern Economics: Problems and Solutions*. 2011;4(16):137–144 (in Russ.).
20. Almeida C., Freire G. Pricing of index options in incomplete markets. *J. Fin. Economic*. 2022;144(1):174–205. <https://doi.org/10.1016/j.jfineco.2021.05.041>
21. Davnis V.V., Davnis V.V. Econometric options for the (B, S, I)-market models. *Sovremennaya ekonomika: problemy i resheniya = Modern Economics: Problems and Solutions*. 2013;10(46):154–165 (in Russ.). Available from URL: <https://journals.vsu.ru/meps/article/view/7987>

22. Krotov V.F., Lagosha B.A., Lobanov S.M., Danilov N.I., Sergeev S.I. *Osnovy teorii optimal'nogo upravleniya (Fundamentals of Optimal Control Theory)*. Moscow: Vysshaya shkola; 1990. 430 p. (in Russ.).
23. Athans M. The Matrix Minimum Principle. *Information and Control*. 1967;11(5–6):592–606. [https://doi.org/10.1016/S0019-9958\(67\)90803-0](https://doi.org/10.1016/S0019-9958(67)90803-0)

Об авторах

Мицель Артур Александрович, д.т.н., профессор, кафедра автоматизированных систем управления, ФГАОУ ВО «Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники» (634050, Россия, Томск, пр-т Ленина, д. 40). E-mail: artur.a.mitsel@tusur.ru. Scopus Author ID 6603150769, ResearcherID G-8307-2014, SPIN-код РИНЦ 9698-2160, <https://orcid.org/0000-0002-2624-4383>

Викторенко Елена Владимировна, старший преподаватель, аспирант кафедры экономики, ФГАОУ ВО «Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники» (634050, Россия, Томск, пр-т Ленина, д. 40). E-mail: viktorenko.e@gmail.com. ResearcherID AEJ-4949-2022, SPIN-код РИНЦ 8664-3235, <https://orcid.org/0000-0003-3871-8993>

About the authors

Artur A. Mitsel, Dr. Sci. (Eng.), Professor, Department of Automated Control Systems, Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics (40, Lenina pr., Tomsk, 634050 Russia). E-mail: artur.a.mitsel@tusur.ru. Scopus Author ID 6603150769, ResearcherID G-8307-2014, RSCI SPIN-code 9698-2160, <https://orcid.org/0000-0002-2624-4383>

Elena V. Viktorenko, Senior Lecturer, Postgraduate Student, Department of Economics, Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics (40, Lenina pr., Tomsk, 634050 Russia). E-mail: viktorenko.e@gmail.com. ResearcherID AEJ-4949-2022, RSCI SPIN-code 8664-3235, <https://orcid.org/0000-0003-3871-8993>

Математическое моделирование
Mathematical modeling

УДК 577.337; 538.931

<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-2-111-120>

EDN ATOWXW



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Латеральный протонный транспорт, индуцированный распространением акустических солитонов в липидных мембранах

В.Н. Каданцев[®],
А.Н. Гольцов

МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, 119454 Россия

[®] Автор для переписки, e-mail: appl.synergy@yandex.ru

Резюме

Цели. Исследование протонного транспорта в мембранных структурах является важной технологической задачей в области водородной энергетики, а также представляет собой фундаментальную проблему биоэнергетики. Целью этих исследований является выяснение физических механизмов быстрого протонного транспорта в мезо-пористых структурах полимерных электролитных мембран, являющихся электрохимическими компонентами водородных топливных элементов. В области биоэнергетики эти исследования направлены на выяснения молекулярных механизмов эффективного протонного транспорта в трансмембранных белках-каналах и в поверхностных протонпроводящих структурах биологических мембран в системах биоэнергетики клетки. С целью исследования молекулярных механизмов направленного транспорта протонов в работе рассматривается модель движения протонов в квазиодномерных латеральных доменных структурах в многокомпонентных липидных мембранах.

Методы. В основе развиваемого подхода лежит модель коллективных возбуждений типа акустических солитонов, которые представляют собой перемещающиеся вдоль мембраны области локального сжатия полярных групп и структурных дефектов в подсистеме углеводородных цепей липидных молекул.

Результаты. Показано, что учет в модели взаимодействия избыточного протона на поверхности мембраны с солитоном сжатия мембраны приводит к захвату протона акустическим солитоном с его последующим транспортом. Разработанная модель применяется к описанию механизма эффективного протонного транспорта вдоль внутренней митохондриальной мембраны и его роли в сопряжении функционирования молекулярных комплексов в системе биоэнергетики клетки.

Выводы. Развита солитонная модель протонного транспорта показала, что коллективные возбуждения в липидных мембранах могут определять факторы, влияющие на эффективность протонного транспорта вдоль межфазных границ. Дальнейшее развитие теоретических подходов, учитывающих динамические свойства полимерных и биологических протонпроводящих мембран, может внести вклад в исследование роли поверхностного транспорта протонов в биоэнергетику клетки, а также в исследование транспортных характеристик разрабатываемых протонно-обменных полимерных мембран водородной энергетики.

Ключевые слова: протонный транспорт, протонпроводящие структуры, липидные мембраны, доменные структуры, коллективная динамика, солитоны

• Поступила: 15.07.2023 • Доработана: 24.09.2024 • Принята к опубликованию: 23.01.2025

Для цитирования: Каданцев В.Н., Гольцов А.Н. Латеральный протонный транспорт, индуцированный распространением акустических солитонов в липидных мембранах. *Russian Technological Journal*. 2025;13(2):111–120. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-2-111-120>, <https://elibrary.ru/ATOWXW>

Прозрачность финансовой деятельности: Авторы не имеют финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

RESEARCH ARTICLE

Lateral proton transport induced by acoustic solitons propagating in lipid membranes

Vasiliy N. Kadantsev[@],
Alexey N. Goltsov

MIREA – Russian Technological University, Moscow, 119454 Russia

[@] Corresponding author, e-mail: appl.synergy@yandex.ru

Abstract

Objectives. The study of proton transport in membrane structures represents a significant technological task in the development of hydrogen energy as well as a fundamental problem in bioenergetics. Investigation in this field aims at finding out the physical mechanisms of fast proton transport in the meso-porous structures in polymer electrolyte membranes, which serve as electrochemical components of hydrogen fuel cells. The objectives of the research in the field of bioenergetics are to elucidate the molecular mechanisms of effective proton transport in transmembrane channel proteins, as well as along the surface proton-conducting structures in biological membranes. To investigate the molecular mechanisms of the direct proton transport along the water-membrane interface, we developed a model of proton movement along quasi-one-dimensional lateral domain structures in multicomponent lipid membranes.

Methods. The developed approach is based on a model of collective excitations spreading along the membranes in the form of acoustic solitons, which represent the regions of local compression of polar groups and structural defects in hydrocarbon chains of lipid molecules.

Results. The results of modeling showed that the interaction between an excess proton on the membrane surface and a soliton of membrane compression leads to the proton being trapped by an acoustic soliton, followed by its transport by moving soliton. The developed model was applied to describe effective proton transport along the inner mitochondrial membrane and its role in the local coupling function of molecular complexes in cell bioenergetics.

Conclusions. The developed soliton model of proton transport demonstrated that collective excitations within lipid membranes can determine one of the factors affecting the efficiency of proton transport along interphase boundaries. Further development of the theoretical approaches, taking into account dynamic properties of polymer and biological proton-conducting membranes, can contribute to the study of a role of surface proton transport in cell bioenergetics, as well as to the investigation of transport characteristics of the proton-exchange polymer membranes developed for the hydrogen energy industry.

Keywords: proton transport, proton-conducting structures, lipid membranes, domain structures, collective dynamics, solitons

• Submitted: 15.07.2023 • Revised: 24.09.2024 • Accepted: 23.01.2025

For citation: Kadantsev V.N., Goltsov A.N. Lateral proton transport induced by acoustic solitons propagating in lipid membranes. *Russian Technological Journal*. 2025;13(2):111–120. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-2-111-120>, <https://elibrary.ru/ATOWXW>

Financial disclosure: The authors have no financial or proprietary interest in any material or method mentioned.

The authors declare no conflicts of interest.

ВВЕДЕНИЕ

Экспериментальные и теоретические исследования протонной проводимости материалов и систем в настоящее время ведутся в двух различных научно-технологических областях: в водородной энергетике и в области биоэнергетики живых систем. Разработка протонпроводящих материалов сегодня востребована в производстве компонентов электрохимических устройств, в первую очередь, мембран топливных элементов для создания водородных электроустановок территориальной водородной инфраструктуры, батарей, энергоагрегатов электромобилей и т.д. [1]. Исследования в этой области направлены на создание эффективных полимерных (например, перфторированных сульфополимеров) и твердотельных протонных электролитов. Сегодня протонные батареи становятся конкурентоспособными в качестве альтернативы литий-ионной технологии. Замена ионов лития на протоны в качестве носителей заряда в водородных топливных элементах существенно повышает проводимость электролита за счет высокой подвижности протонов в электролитной мембране.

В большинстве протонообменных полимерных мембран водородных топливных элементов быстрый протонный транспорт осуществляется за счет гидратных слоев воды в структуре мембран, а точнее, он происходит вдоль наноразмерных структур, образованных молекулами воды в мезо-пористых структурах полимерных материалов. При этом удельная протонная проводимость протонообменных мембран может достигать значений $10^{-3} - 10^{-1}$ См/см [2], в то время как протонная проводимость объемной воды находится в области 10^{-6} См/см, т.е. на 5 порядков ниже проводимостей полимерных мембран. В настоящее время отсутствует детальное понимание молекулярных механизмов высокой протонной проводимости приповерхностной воды в пористых полимерных материалах, свойства которой аномально отличаются от свойств объемной воды.

Исследование физико-химических механизмов быстрого протонного транспорта в мембранных структурах представляет собой не только важную технологическую задачу водородной энергетики, но является также фундаментальной проблемой

в области биоэнергетики. Целью этих исследований является выяснение молекулярных механизмов протонного транспорта в системе окислительного фосфорилирования в митохондриях клеток, в трансмембранных каналах и поверхностных протонпроводящих структурах биомембран.

Некоторые типы искусственных полимерных протонообменных мембран и биологических липидных мембран имеют много общего по своей структуре и молекулярному составу: полимерные мембраны и биомембраны состоят из амфифильных молекул с гидрофобными цепями и кислотными группами. В обеих системах протонпроводящий гидратный слой молекул воды образует структуру водородных связей на границе раздела фаз, по которой, как предполагается, происходит быстрая двумерная диффузия протонов. В настоящее время физические механизмы эффективного протонного транспорта в гидрофобных каналах белковых молекул и приповерхностном слое митохондриальных мембран являются предметом интенсивных исследований в биоэнергетике клетки. Хотя хемиосмотическая теория Митчелла дает общее представление о функционировании биоэнергетической системы митохондрий, она нуждается в дальнейшем развитии на основе новых экспериментальных данных по функционированию как отдельных компонентов системы окислительного фосфорилирования, так и по пространственной организации всей системы синтеза молекул аденозинтрифосфата (АТФ) в митохондриальной мембране [3–5]. В частности, новые экспериментальные данные по структуре внутренних митохондриальных мембран показали, что они играют не только структурно-организационную функцию, но выполняют также важную сопрягающую и интегрирующую роль в функционировании всей системы электрон-транспортных процессов и синтеза АТФ [6, 7]. В частности, новые экспериментальные данные по исследованию быстрого протонного транспорта вдоль митохондриальных и искусственных мембран [8, 9] подтверждают гипотезу о локальном сопряжении дыхания и фосфорилирования за счет примембранного транспорта частично дегидратированных протонов [10–12].

В настоящее время рассматриваются несколько возможных молекулярных механизмов быстрого

латерального транспорта протонов на границе раздела фаз по связанной воде на большие расстояния. Во-первых, это механизм Гротгуса переноса протонов по цепочке водородных связей (структурная диффузия) [13], во-вторых, альтернативный механизм за счет диффузии протонов в составе иона гидроксония H_3O^+ (везикулярная диффузия) [14] и, в-третьих, процесс совместной диффузии липидной молекулы с сильно связанным протоном. Предполагается также, что эффективный протонный транспорт вдоль раздела фаз «мембрана-связанная вода» реализуется за счет сочетания структурной и везикулярной диффузии [15]. Отметим, что в настоящее время нет экспериментов, напрямую указывающих в пользу того или другого механизма протонного транспорта. Все предложенные механизмы основываются на экспериментальных данных, подтверждающих удержание протона на границе раздела «мембрана-вода», что обеспечивает эффективную двумерную диффузию протонов с ограничением их выхода в объемную фазу [7, 16, 17]. Удержание протонов на поверхности мембраны было исследовано в экспериментах на двухслойных мембранах [18, 19] и липосомах [20], а также было обнаружено, что часть энергии, запасенной в форме частично дегидратированного протона, включена в синтез АТФ [21]. Причины сродства протонов к границам раздела и поверхностный протонный транспорт изучались также теоретически [22–24]. Результаты этих исследований показали, что механизм удержания протона на поверхности мембран определяется электростатическим взаимодействием и энтропийным барьером. Было также установлено, что полярные группы (ПГ) липидных молекул существенно влияют на скорость протонного поверхностного транспорта [25]. Предполагается, что состав ПГ оказывает влияние на формирование одномерных протонпроводящих структур водородных связей молекул воды, связанных с мембраной [9].

В работе [5] были рассмотрены протонпроводящие латеральные структуры, которые представляют собой квазиодномерные доменные структуры (ДС) в кристах внутренних митохондриальных мембран, обогащенных молекулами кардиолипина. Основываясь на механизме Гротгуса, авторы разработали модель транспорта протонов вдоль цепочек водородных связей молекул воды, взаимодействующих с ПГ кардиолипина в протонпроводящих структурах мембран. Было показано, что взаимодействие протонной подсистемы и подсистемы ПГ липидов приводит к формированию двухкомпонентного солитона, движение которого соответствует согласованному движению протона и солитона сжатия липидной мембраны [5].

Близкий теоретический подход к моделированию солитонного транспорта протонов был также

разработан для полимерных мембран [26]. В предложенной модели транспорт протона в составе иона гидроксония H_3O^+ осуществляется за счет коллективных возбуждений солитонного типа в упорядоченных цепочках водородных связей, формирующихся молекулами воды на мембране с сульфидными поверхностными группами. В модели установлена связь между подвижностью солитона и параметрами пространственной структуры поверхностных сульфидных групп.

В данной работе рассматривается модель альтернативного протонного транспорта, который реализуется за счет захвата протона акустическим солитоном, движущимся вдоль протонпроводящих структур в липидных мембранах. Этот механизм ближе к везикулярному механизму, где в качестве носителя (везикулы) протона выступает не ион гидроксония, а акустический солитон. В работе использована модель формирования и распространения акустического солитона в квазилинейных ДС, которая была предложена нами в предыдущей работе [27]. Нелинейные возбуждения солитонного типа представляют собой перемещающиеся вдоль молекулярных структур мембраны области локального сжатия ПГ липидов и структурных дефектов в подсистеме углеводородных цепей (УЦ).

Экспериментальное наблюдение возбуждений солитонного типа в липидных моно- и бислоях проведено в ряде экспериментов с использованием различных методов возбуждения и регистрации. В экспериментах с оптической генерацией уединенных волн в липидных монослоях наблюдалось возбуждение акустических солитоноподобных импульсов и их бездиссипативное движение [28]. Возбуждение упругого импульса солитонного типа также обнаружено в липосомах в температурной области фазового перехода липидов. Показано, что акустические волны, сопровождающие распространение нервного импульса в аксоне, обладают одним из характерных свойств солитонов: два сталкивающихся нервных импульса проходят друг через друга без изменения формы [29].

В данной работе рассматривается модель захвата протона акустическим солитоном с последующим его транспортом. Возможность такого захвата и обусловленный им механизм транспорта заряда с помощью акустических солитонов по одномерным нелинейным молекулярным структурам обсуждались в работах [30, 31]. Предполагается, что аналогичным образом в результате захвата протона солитоном может осуществляться латеральный транспорт протонов в липидных мембранах, а квазиодномерные ДС в многокомпонентных мембранах могут представлять собой протонпроводящие каналы на поверхности мембран.

1. МОДЕЛЬ ЛАТЕРАЛЬНОГО ТРАНСПОРТА ПРОТОНА, ЗАХВАЧЕННОГО СОЛИТОНОМ В КВАЗИОДНОМЕРНЫХ ДС ЛИПИДНЫХ МЕМБРАН

Рассмотрим модель одномерной цепочки липидных молекул, образующих квазиодномерную ДС в смешанных липидных бислоях. Выделим в модели две подсистемы: поверхность мембраны, образованную ПГ липидных молекул и внутреннюю гидрофобную область мембраны, сформированную УЦ липидов [32]. В работе [27] авторами разработана модель коллективных возбуждений солитонного типа, которые представляют собой перемещающиеся со скоростью V области локальных смещений ПГ липидов $\rho(x, t)$ из равновесных положений и структурных дефектов типа кинков в подсистеме УЦ липидов, описываемых отклонением УЦ от нормали к поверхности мембраны $u(x, t)$:

$$\rho(x, t) = -\rho_0 \operatorname{sech}^2 \frac{x - Vt}{\Delta}, \quad (1)$$

$$u(x, t) = u_0 \tanh \frac{x - Vt}{\Delta}, \quad (2)$$

где положение равновесия ПГ липидов ρ_0 определяется соотношением:

$$\rho_0 = \frac{\chi u_0^2}{M \Omega_0^2}.$$

Здесь M – масса ПГ липидной молекулы, χ – константа взаимодействия ПГ и УЦ липидов, которое учитывает изменение конформации УЦ при смещении ПГ из положения равновесия; Ω_0 – характеристическая частота цепочки ПГ липидов; Δ – ширина кинка; $u_0 = \pm(|G/B|)^{1/2}$ – состояние равновесия УЦ в двухямном потенциале Гинзбурга – Ландау

$$U_T(u) = -\frac{1}{2} |G(T)| u^2 + \frac{1}{4} B u^4,$$

где $G(T) = E_0(T/T_c - 1)$ и B – параметры потенциала; E_0 – высота потенциального барьера; T_c – температура главного фазового перехода мембраны, при которой происходит плавление липидов [27, 32].

Решение в виде солитона для смещения ПГ $\rho(x, t) < 0$ (1) описывает деформацию сжатия в подсистеме ПГ липидов, связанную с дефектом в системе УЦ липидов. Для протонов в примембранном слое, попавших в такую структуру молекул липидов и взаимодействующих с ними, наличие солитона проявляется в виде дополнительной энергии взаимодействия. Решение $u(x, t)$ (2) в виде кинка

в области координаты $x = Vt$ описывает отклонения УЦ липидных молекул в противоположных направлениях, что характерно для структурных дефектов типа дислокаций в жидких кристаллах.

В предложенной модели движение протона, захваченного солитоном сжатия в цепочке ПГ липидов, описывается волновой функцией $\psi(x, t)$, которая удовлетворяет нестационарному уравнению Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} - U(x, t) \psi(x, t) = 0, \quad (3)$$

где $U(x, t) = \sigma \rho(x, t)$ – потенциальная яма, создаваемая отрицательно заряженными ПГ молекулами липидов в области солитона; σ – параметр электростатического взаимодействия протона с ПГ липидных молекул в области солитона; m – масса протона и $\hbar$ – постоянная Планка.

Решение нестационарного уравнения (3) ищется в виде:

$$\psi(x, t) = \varphi(\xi) e^{-\frac{i}{\hbar} E t}, \quad (4)$$

где введена пространственная координата $\xi = x - Vt$, связанная с движением солитона со скоростью V . Подставляя соотношение (4) в (3), получим для действительной части амплитуды $\varphi(\xi)$ стационарное уравнение Шредингера для протона в потенциальной яме $U(\xi)$:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + [E - U(\xi)] \varphi = 0, \quad (5)$$

где $U(\xi) = -\sigma \rho_0 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\xi}{\Delta} \right)$.

Уравнение (5) переходит в уравнение для обобщенных функций Лагранжа:

$$\frac{d}{dz} \left[1 - z^2 \frac{d\varphi}{dz} \right] + \left[s(s+1) - \frac{\varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2} \right] \varphi = 0, \quad (6)$$

где выполнена замена переменной $z = \tanh(\Delta^{-1} \xi)$ и введены обозначения:

$$\varepsilon = \frac{\Delta \sqrt{-2mE}}{\hbar}; \quad s = \frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + 8m\sigma\rho_0\Delta^2\hbar^{-2}} \right). \quad (7)$$

При этом уравнение (6) имеет решение в виде:

$$\begin{aligned} \varphi_n(\xi) = & A_n \operatorname{sech}^\varepsilon \left(\frac{\xi}{\Delta} \right) \times \\ & \times F \left(\varepsilon - s, \varepsilon + s + 1, \varepsilon + 1, \frac{1}{2} (1 - \tanh(\Delta^{-1} \xi)) \right), \end{aligned} \quad (8)$$

где A_n – коэффициент нормализации волновой функции, F – гипергеометрическая функция, представляющая собой полином степени n при условии $\varepsilon - s = -n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) [33].

Из этого условия получаем выражение для уровней энергии протона в потенциальной яме $U(\xi)$:

$$E_n = -\frac{\hbar}{8m\Delta^2} \left(-(1+2n) + \sqrt{1+8m\sigma\rho_0\Delta^2\hbar^{-2}} \right)^2.$$

Таким образом, в потенциальной яме $U(\xi)$ имеется конечное число стационарных уровней энергии для протона, захваченного солитоном в цепочке ПГ молекул липидов. Для основного уровня с $n = 0$ волновая функция (8) имеет вид:

$$\varphi_0(\xi) = A_0 \operatorname{sech}^\varepsilon \left(\frac{\xi}{\Delta} \right). \quad (9)$$

На рисунке показана волновая функция $\varphi_0(\xi)$ протона (9), рассчитанная для $\varepsilon = 1$ с коэффициентом нормировки $A_0 = 0.42$. Расчеты выполнены для параметров солитона на основе следующих экспериментальных данных. Характерная частота $\Omega_0 = 10^{11}$ Гц оценена согласно экспериментальным данным для частоты осцилляций ПГ липидной мембраны [32]. Скорость захваченного протона определяется скоростью V распространения солитона деформации (уравнения (1) и (2)), которая по оценкам авторов лежит в области 50–100 м/с [5]. Значение ширины кинка $\Delta \approx 8$ нм оценено на основе экспериментальных данных по размерам области дефектов в подсистеме УЦ, образующихся в мембранных структурах вблизи температуры главного фазового перехода [34]. При этом область солитона охватывает приблизительно 10 липидных молекул, расположенных вдоль одномерной ДС. Решение в виде кинка для смещения УЦ $u(x, t)$ описывает дефект типа дислокации. Отрицательные и положительные значения $u(x, t)$ соответствуют отклонениям УЦ липидных молекул в противоположных направлениях. Решение в виде солитона для смещения ПГ $\rho(x, t)$ описывает деформацию сжатия в подсистеме ПГ, вызванную дефектом в подсистеме УЦ.

2. ОБСУЖДЕНИЕ

В работе развита модель движения протонов в квазиодномерных латеральных ДС, которые, как предполагается, могут играть роль протонпроводящих структур в многокомпонентных клеточных мембранах [27, 35]. В основе предложенного подхода лежит модель коллективных возбуждений в липидных мембранах типа акустических солитонов, которые представляют собой перемещающиеся вдоль

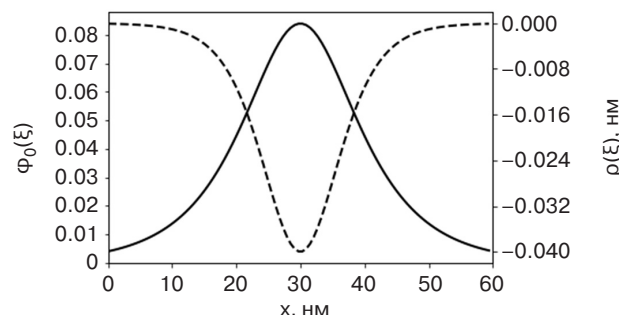


Рисунок. Волновая функция основного состояний протона $\varphi_0(\xi)$ (сплошная линия) в потенциальной яме $U(\xi)$, создаваемой солитоном сжатия $\rho(\xi)$ (штриховая линия) ПГ липидных молекул в квазиодномерной липидной ДС

мембраны области локального сжатия ПГ и структурных дефектов УЦ липидных молекул.

Предполагается, что учет в модели электростатического взаимодействия мембраносвязанного протона с солитоном сжатия приводит к захвату протона движущимся акустическим солитоном с последующим его транспортом. В отличие от модели протонного солитонного транспорта, развитой нами на основе механизма структурной диффузии протонов (механизма Гроттуса) [5], в настоящей работе рассмотрена альтернативная модель транспорта протона. Мы полагаем, что в предложенной модели преодолены две проблемы, с которыми сталкивается модель структурной диффузии протона. Во-первых, в отличие от механизма Гроттуса, протон, захваченный солитоном, не испытывает многочисленных перескоки по цепочке водородных связей на короткие расстояния 2.5 Å, что существенно увеличивает скорость его движения. Во-вторых, в нашем подходе реализуется транспорт протона, который сильно связан с областью локального сжатия ПГ, перемещающейся по поверхности мембраны в виде солитона. Экспериментально установленный эффект удержания протона на поверхности мембраны предполагает сильное локальное взаимодействие протона с ПГ липидов, что противоречит данным о его делокализации и его движении по поверхности мембраны.

Разработанная модель может быть применена к описанию транспорта протонов в системе сопряжения окислительного фосфорилирования по поверхности внутренней мембраны митохондрий, которая, как было установлено экспериментально, обладает уникальной пространственной организацией. Методом криоэлектронной томографии обнаружена упорядоченная кластерная олигомерная структура, образованная параллельными рядами дыхательных комплексов и димеров АТФ-синтазы, расположенных на складках крист внутренних митохондриальных мембран [7]. Формирование митохондриальных

крист, их морфология и динамика определяются структурными перестройками липидных мембран, обладающих высокой чувствительностью к физиологическому состоянию митохондрий [36]. Небольшое расстояние (~ 50 Å) между рядами протонных насосов и молекулами АТФ-синтазы обеспечивает условия для прямого и быстрого переноса протонов к АТФ-синтазам вдоль мембраны крист. В настоящее время проявляется большой интерес к исследованию молекулярных механизмов транспорта протонов в митохондриальных мембранах и определению факторов, влияющих на эффективность направленного протонного транспорта [16, 17, 37]. На основе развитого авторами подхода предлагается включить в проводимые исследования не только влияние структуры поверхности мембраны на протонный транспорт, но также учесть динамические свойства биомембран, в частности, формирование коллективных возбуждений в липидных бислоях. В результате учета упругих возбуждений мембраны в предложенной модели транспорт протона сопровождается переносом энергии деформации мембраны, запасенной акустическим солитоном. В этом подходе связь латерального движения протонов с неравновесной динамикой митохондриальных крист проявляется в сопряжении транспортных и динамических процессов на поверхности биомембран [38]. Как предполагается, переносимая вместе с зарядом энергия локальных упругих колебаний мембраны может вносить дополнительный вклад в работу и синхронизацию мембранных белков, рецепторов и ионных каналов [39, 40], в частности, в синхронизацию функционирования олигомерных белковых комплексов системы окислительного фосфорилирования митохондрий. Экспериментальное обнаружение транспорта протонов, сопровождающегося распространением упругих возбуждений на поверхности мембран, может быть экспериментальным подтверждением вклада коллективных возбуждений в реализацию эффективного протонного транспорта во внутренних митохондриальных мембранах и в механизм сопряжения в системе окислительного фосфорилирования.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты теоретических и экспериментальных исследований в области биоэнергетики митохондриальных мембран и технологии протонно-обменных полимерных мембран водородных топливных

элементов позволили выяснить многие общие особенности поверхностного протонного транспорта в биологических и искусственных мембранах. В исследовании обеих систем рассматриваются два основных механизма эффективного транспорта протонов – это структурная диффузия (механизм Гротгуса) и везикулярный транспорт. В обеих системах подтверждена роль примембранного слоя структурированной воды, в котором локализован транспорт протонов. В полимерных мембранах это показано при обнаружении быстрого протонного транспорта при незначительной влажности мембран. В митохондриальных мембранах этот эффект подтвержден в экспериментах, показывающих, что протоны в системе окислительного фосфорилирования локализованы в поверхностном слое внутренней митохондриальной мембраны. Как в искусственных, так и биологических мембранах установлено существенное влияние состава и структуры мембран (поверхностных кислотных групп) на протонную проводимость. Развита в данной работе солитонная модель протонного транспорта показала, что коллективные возбуждения липидных мембран наряду с их структурными характеристиками могут определять факторы, влияющие на эффективность протонного транспорта. Дальнейшее развитие теоретических подходов, которые учитывают как структурные характеристики, так и динамические свойства полимерных и биологических протонпроводящих мембран, может внести вклад в исследование роли поверхностного транспорта протонов в биоэнергетику клетки, а также в исследование транспортных характеристик разрабатываемых протонно-обменных полимерных мембран водородной энергетики.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (грант № ФГФЗ-2023-0004).

ACKNOWLEDGMENTS

This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (grant No. FGFZ-2023-0004).

Вклад авторов. Все авторы в равной степени внесли свой вклад в исследовательскую работу.

Authors' contribution. All authors equally contributed to the research work.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

1. Добровольский Ю.А., Чикин А.И., Сангинов Е.А., Чуб А.В. Протонно-обменные мембраны на основе гетерополи- соединений для низкотемпературных топливных элементов. *Альтернативная энергетика и экология*. 2015;4(165): 22–45. <https://doi.org/10.15518/isjaee.2015.04.02>
[Dobrovolsky Y.A., Chikin A.I., Sanginov E.A., Chub A.V. Proton-exchange membranes based on heteropoly compounds for low temperature fuel cells. *Alt'ernativnaya energetika i ekologiya = Alternative Energy and Ecology*. 2015;4(165):22–45 (in Russ.). <https://doi.org/10.15518/isjaee.2015.04.02>]
2. Лебедева О.В. Протонпроводящие мембраны для водородно-воздушных топливных элементов. *Известия вузов. При- кладная химия и биотехнология*. 2016;1(16):7–19.
[Lebedeva O.V. Proton conducting membranes for hydrogen-air fuel elements. *Izvestiya vuzov. Prikladnaya khimiya i biotekhnologiya = Proceedings of Universities. Applied Chemistry and Biotechnology*. 2016;1(16):7–19 (in Russ.).]
3. Еремеев С.А., Ягузинский Л.С. О локальном сопряжении систем электронного транспорта и синтеза АТФ в мито- хондриях. Теория и эксперимент. *Биохимия*. 2015;80(5):682–688.
[Eremeev S.A., Yaguzhinsky L.S. On local coupling of the electron transport and ATP-synthesis system in mitochondria. Theory and experiment. *Biochemistry (Moscow)*. 2015;80(5):576–581. <https://doi.org/10.1134/S0006297915050089>]
[Original Russian Text: Eremeev S.A., Yaguzhinsky L.S. On local coupling of the electron transport and ATP synthesis system in mitochondria. Theory and experiment. *Biokhimiya*. 2015;80(5):682–688 (in Russ.).]
4. Kell D.B. A protet-based model that can account for energy coupling in oxidative and photosynthetic phosphorylation. *Biochim. Biophys. Acta Bioenerg.* 2024;1865(4):149504. <https://doi.org/10.1016/j.bbabi.2024.149504>
5. Nesterov S.V., Yaguzhinsky L.S., Vasilov R.G., Kadantsev V.N., Goltsov A.N. Contribution of the Collective Excitations to the Coupled Proton and Energy Transport along Mitochondrial Cristae Membrane in Oxidative Phosphorylation System. *Entropy (Basel)*. 2022;24(12):1813. <https://doi.org/10.3390/e24121813>
6. Davies K.M., Strauss M., Daum B., Kief J.H., Osiewacz H.D., Rycovska A., et al. Macromolecular organization of ATP synthase and complex I in whole mitochondria. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*. 2011;108(34):14121–14126. <https://doi.org/10.1073/pnas.1103621108>
7. Nesterov S., Chesnokov Y., Kamyshinsky R., Panteleeva A., Lyamzaev K., Vasilov R., et al. Ordered Clusters of the Complete Oxidative Phosphorylation System in Cardiac Mitochondria. *Int. J. Mol. Sci.* 2021;22(3):1462. <https://doi.org/10.3390/ijms22031462>
8. Mulikidjanian A.Y., Heberle J., Cherepanov D.A. Protons @ interfaces: Implications for biological energy conversion. *Biochimica et Biophysica Acta (BBA) – Bioenergetics*. 2006;1757(8):913–930. <https://doi.org/10.1016/j.bbabi.2006.02.015>
9. Weichselbaum E., Österbauer M., Knyazev D.G., Batishchev O.V., Akimov S.A., Nguyen T.H., et al. Origin of proton affinity to membrane/water interfaces. *Sci. Rep.* 2017;7(1):4553. <https://doi.org/10.1038/s41598-017-04675-9>
10. Yaguzhinsky L.S., Boguslavsky L.I., Volkov A.G., Rakhmaninova A.B. Synthesis of ATP coupled with action of membrane protonic pumps at the octane-water interface. *Nature*. 1976;259(5543):494–496. <https://doi.org/10.1038/259494a0>
11. Kell D.B. On the functional proton current pathway of electron transport phosphorylation. An electrodic view. *Biochim. Biophys. Acta*. 1979;549(1):55–99. [https://doi.org/10.1016/0304-4173\(79\)90018-1](https://doi.org/10.1016/0304-4173(79)90018-1)
12. Morelli A.M., Ravera S., Calzia D., Panfoli I. An update of the chemiosmotic theory as suggested by possible proton currents inside the coupling membrane. *Open Biol.* 2019;9(4):180221. <https://doi.org/10.1098/rsob.180221>
13. Wraight C.A. Chance and design—Proton transfer in water, channels and bioenergetic proteins. *Biochimica et Biophysica Acta (BBA) – Bioenergetics*. 2006;1757(8):886–912. <https://doi.org/10.1016/j.bbabi.2006.06.017>
14. Kreuer K.D. Proton Conductivity: Materials and Applications. *Chem. Mater.* 1996;8(3):610–641. <https://doi.org/10.1021/cm950192a>
15. Ludueña G.A., Kühne T.D., Sebastiani D. Mixed Grotthuss and Vehicle Transport Mechanism in Proton Conducting Polymers from *Ab initio* Molecular Dynamics Simulations. *Chem. Mater.* 2011;23(6):1424–1429. <https://doi.org/10.1021/cm102674u>
16. Weichselbaum E., Galimzyanov T., Batishchev O.V., Akimov S.A., Pohl P. Proton Migration on Top of Charged Membranes. *Biomolecules*. 2023;13(2):352. <https://doi.org/10.3390/biom13020352>
17. Knyazev D.G., Silverstein T.P., Brescia S., Maznichenko A., Pohl P. A New Theory about Interfacial Proton Diffusion Revisited: The Commonly Accepted Laws of Electrostatics and Diffusion Prevail. *Biomolecules*. 2023;13(11):1641. <https://doi.org/10.3390/biom13111641>
18. Antonenko Y.N., Kovbasnjuk O.N., Yaguzhinsky L.S. Evidence in favor of the existence of a kinetic barrier for proton transfer from a surface of bilayer phospholipid membrane to bulk water. *Biochimica et Biophysica Acta (BBA) – Biomembranes*. 1993;1150(1):45–50. [https://doi.org/10.1016/0005-2736\(93\)90119-k](https://doi.org/10.1016/0005-2736(93)90119-k)
19. Tashkin V.Yu., Vishnyakova V.E., Shcherbakov A.A., Finogenova O.A., Ermakov Yu.A., Sokolov V.S. Changes of the Capacitance and Boundary Potential of a Bilayer Lipid Membrane Associated with a Fast Release of Protons on Its Surface. *Biochem. Moscow Suppl. Ser. A*. 2019;13(2):155–160. <https://doi.org/10.1134/S1990747819020077>
20. Sjöholm J., Bergstrand J., Nilsson T., Šachl R., Ballmoos C., Widengren J., et al. The lateral distance between a proton pump and ATP synthase determines the ATP-synthesis rate. *Sci. Rep.* 2017;7(1):1–12. <http://doi.org/10.1038/s41598-017-02836-4>
21. Yaguzhinsky L.S., Boguslavsky L.I., Volkov A.G., Rakhmaninova A.B. Synthesis of ATP coupled with action of membrane protonic pumps at the octane–water interface. *Nature*. 1976;259(5543):494–496. <https://doi.org/10.1038/259494a0>

22. Lee J.W. Mitochondrial energetics with transmembrane electrostatically localized protons: do we have a thermotrophic feature? *Sci Rep.* 2021;11(1):14575. <https://doi.org/10.1038/s41598-021-93853-x>
23. Medvedev E., Stuchebrukhov A. Mechanism of long-range proton translocation along biological membranes. *FEBS Lett.* 2012;587(4):345–349. <https://doi.org/10.1016/j.febslet.2012.12.010>
24. Cherepanov D.A., Junge W., Mulikidjanian A.Y. Proton transfer dynamics at the membrane/water interface: dependence on the fixed and mobile pH buffers, on the size and form of membrane particles, and on the interfacial potential barrier. *Biophys J.* 2004;86(2):665–80. [https://doi.org/10.1016/s0006-3495\(04\)74146-6](https://doi.org/10.1016/s0006-3495(04)74146-6)
25. Amdursky N., Lin Y., Aho N., Groenhof G. Exploring fast proton transfer events associated with lateral proton diffusion on the surface of membranes. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA.* 2019;116(7):2443–2451. <https://doi.org/10.1073/pnas.1812351116>
26. Golovnev A., Eikerling M. Theory of collective proton motion at interfaces with densely packed protogenic surface groups. *J. Phys.: Condens. Matter.* 2012;25(4):045010. <https://doi.org/10.1088/0953-8984/25/4/045010>
27. Каданцев В.Н., Гольцов А.Н. Коллективная динамика доменных структур в жидкокристаллических липидных бислоях. *Russian Technological Journal.* 2022;10(4):44–54. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2022-10-4-44-54>
[Kadantsev V.N., Goltsov A.N. Collective dynamics of domain structures in liquid crystalline lipid bilayers. *Russian Technological Journal.* 2022;10(4):44–54 <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2022-10-4-44-54>]
28. Shrivastava S., Schneider M.F. Evidence for two-dimensional solitary sound waves in a lipid controlled interface and its implications for biological signalling. *J. Royal Soc. Interface.* 2014;11(97):20140098. <https://doi.org/10.1098/rsif.2014.0098>
29. Gonzalez-Perez A., Budvyte R., Mosgaard L.D., Nissen S., Heimburg T. Penetration of Action Potentials During Collision in the Median and Lateral Giant Axons of Invertebrates. *Phys. Rev. X.* 2014;4(3):031047. <http://doi.org/10.1103/PhysRevX.4.031047>
30. Lupichev L.N., Savin A.V., Kadantsev V.N. *Synergetics of Molecular Systems.* Series: Springer Series in Synergetics. Cham: Springer; 2015. 332 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-08195-3>
31. Каданцев В.Н., Гольцов А.Н., Кондаков М.А. Динамика электросолитона в термализованной молекулярной цепи. *Российский технологический журнал.* 2020;8(1):43–57. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2020-8-1-43-57>
[Kadantsev V.N., Goltsov A.N., Kondakov M.A. Electrosoliton dynamics in a thermalized molecular chain. *Rossiiskii tekhnologicheskii zhurnal.* 2020;8(1):43–57 (in Russ.). <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2020-8-1-43-57>]
32. Bolterauer H., Tuszyński J.A., Satrić M.V. Fröhlich and Davydov regimes in the dynamics of dipolar oscillations of biological membranes. *Phys. Rev. A.* 1991;44(2):1366–1381. <https://doi.org/10.1103/physreva.44.1366>
33. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теоретическая физика: в 10 т. Т. 3. Квантовая механика (нерелятивистская теория).* М.: Физматлит; 2024. 800 с. ISBN 5-9221-0057-2, 978-5-9221-0530-9
[Landau L.D., Lifshits E.M. *Teoreticheskaya fizika (Theoretical Physics): in 10 v. V. 3. Kvantovaya mekhanika (nerelyativistskaya teoriya) (Quantum Mechanics (Non-Relativistic Theory)).* Moscow: Fizmatlit; 2024. 800 p. (in Russ.). ISBN 5-9221-0057-2, 978-5-9221-0530-9]
34. Wack D.C., Webb W.W. Synchrotron X-ray study of the modulated lamellar phase in the lecithin-water system. *Phys. Rev. A.* 1989;40(5):2712–2730. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.40.2712>
35. Goltsov A.N. Formation of quasilinear structure in lipid membranes. *Biofizika.* 1997;42(1):174–181.
36. Joubert F., Puff N. Mitochondrial Cristae Architecture and Functions: Lessons from Minimal Model Systems. *Membranes (Basel).* 2021;11(7):465. <https://doi.org/10.3390/membranes11070465>
37. Toth A., Meyrat A., Stoldt S., Santiago R., Wenzel D., Jakobs S., et al. Kinetic coupling of the respiratory chain with ATP synthase, but not proton gradients, drives ATP production in cristae membranes. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA.* 2020;117(5):2412–2421. <https://doi.org/10.1073/pnas.1917968117>
38. Patil N., Bonneau S., Joubert F., Bitbol A.F., Berthoumieux H. Mitochondrial cristae modeled as an out-of-equilibrium membrane driven by a proton field. *Phys. Rev. E.* 2020;102(2):022401. <https://doi.org/10.1103/physreve.102.022401>
39. Johnson A.S., Winlow W. The Soliton and the Action Potential – Primary Elements Underlying Sentience. *Front. Physiol.* 2018;9:779. <https://doi.org/10.3389/fphys.2018.00779>
40. Li S., Yan Z., Huang F., Zhang X., Yue T. How a lipid bilayer membrane responds to an oscillating nanoparticle: Promoted membrane undulation and directional wave propagation. *Colloids Surf. B. Biointerfaces.* 2020;187:110651. <https://doi.org/10.1016/j.colsurfb.2019.110651>

Об авторах

Каданцев Василий Николаевич, д.ф.-м.н., профессор, кафедра биокибернетических систем и технологий, Институт искусственного интеллекта, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: appl.synergy@yandex.ru. Scopus Author ID 6602993607, <https://orcid.org/0000-0001-9205-6527>

Гольцов Алексей Николаевич, д.ф.-м.н., профессор, кафедра биокибернетических систем и технологий, Институт искусственного интеллекта, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: golcov@mirea.ru. Scopus Author ID 56234051200, SPIN-код РИНЦ 8852-2616, <https://orcid.org/0000-0001-6725-189X>

About the authors

Vasiliy N. Kadantsev, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Department of Biocybernetic Systems and Technologies, Institute of Artificial Intelligence, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: appl.synergy@yandex.ru. Scopus Author ID 6602993607, <https://orcid.org/0000-0001-9205-6527>

Alexey N. Goltsov, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Department of Biocybernetic Systems and Technologies, Institute of Artificial Intelligence, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: golcov@mirea.ru. Scopus Author ID 56234051200, RSCI SPIN-code 1288-9918, <https://orcid.org/0000-0001-6725-189X>

Математическое моделирование
Mathematical modeling

УДК 004.023, 519.677

<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-2-121-131>

EDN EWCRYQ



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Метод оценки выпуклости рельефа целевых функций в процессе поиска экстремума

А.В. Смирнов[@]

МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, 119454 Россия

[@] Автор для переписки, e-mail: av_smirnov@mirea.ru

Резюме

Цели. Целью работы является разработка метода оценки выпуклости рельефа целевой функции (ЦФ) в окрестностях экстремума, не требующего выполнения дополнительных расчетов ЦФ и сложной математической обработки, а использующего только данные, собираемые в процессе поиска экстремума.

Методы. Выпуклость рельефа характеризуется показателем степени степенной аппроксимации ЦФ в окрестностях экстремума. Оценка этого показателя осуществляется по парам пробных точек с учетом их расстояний до найденного экстремума и значений ЦФ в них. На основе анализа погрешностей такой оценки в методе предусмотрены отбор пробных точек по их расстояниям от найденного экстремума и отбор пар пробных точек по углу между направлениями на них из найденного экстремума. Для экспериментальной проверки метода использовались тестовые функции с различной выпуклостью, как выпуклые, так и вогнутые. В качестве метода поиска экстремума применялся алгоритм роя частиц (particle swarm optimization, PSO). Результаты экспериментов представлялись в виде статистических характеристик и гистограмм распределений значений оценки показателя степени степенной аппроксимации ЦФ.

Результаты. Эксперименты показали, что при соответствующем выборе параметров отбора пробных точек и их пар метод дает достоверные значения границ диапазона, в который попадают оценки показателя степени степенной аппроксимации.

Выводы. Предложенный метод может стать частью методики анализа свойств рельефа ЦФ. Для этого необходимо дополнить его алгоритмами автоматической настройки параметров отбора пробных точек и их пар. Повышение информативности метода может быть достигнуто путем анализа распределения оценок показателя степени по расстояниям пробных точек от экстремума и направлениям на них.

Ключевые слова: рельеф целевой функции, выпуклая функция, вогнутая функция, степенная аппроксимация, показатель степени, гистограмма

• Поступила: 28.05.2024 • Доработана: 26.07.2024 • Принята к опубликованию: 12.02.2025

Для цитирования: Смирнов А.В. Метод оценки выпуклости рельефа целевых функций в процессе поиска экстремума. *Russian Technological Journal*. 2025;13(2):121–131. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-2-121-131>, <https://elibrary.ru/EWCRYQ>

Прозрачность финансовой деятельности: Автор не имеет финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

RESEARCH ARTICLE

Method for estimating objective function landscape convexity during extremum search

Alexander V. Smirnov [@]

MIREA – Russian Technological University, Moscow, 119454 Russia

[@] Corresponding author, e-mail: av_smirnov@mirea.ru

Abstract

Objectives. The work set out to develop a method for estimating the objective function (OF) landscape convexity in the extremum neighborhood. The proposed method, which requires no additional OF calculations or complicated mathematical processing, relies on the data accumulated during extremum search.

Methods. Landscape convexity is characterized by the index of power approximation of the OF in the vicinity of the extremum. The estimation of this index is carried out for pairs of test points taking into account their distances to the found extremum and OF values in them. Based on the analysis of estimation errors, the method includes the selection of test points by their distances from the found extremum and the selection of pairs of test points by the angle between the directions to them from the found extremum. Test functions having different convexities, including concave, were used to experimentally validate the method. The particle swarm optimization algorithm was used as an extremum search method. The experimental results were presented in the form of statistical characteristics and histograms of distributions of the estimation values of the degree of the OF approximation index.

Results. The conductive experiments confirm that the proposed method provides a reliable estimation of power index range bounds upon condition of appropriate definition of trial points and trial point pair selection parameters.

Conclusions. The proposed method may be a part of OF landscape analysis. It is necessary to complement it with the algorithms for automatic adjustment of trial points and pairs of trial points selection parameters. Additional information may be provided by analyzing the dependencies of power index estimations and trial point distances from extrema.

Keywords: objective function landscape, convex function, concave function, power approximation, power index, histogram

• Submitted: 28.05.2024 • Revised: 26.07.2024 • Accepted: 12.02.2025

For citation: Smirnov A.V. Method for estimating objective function landscape convexity during extremum search. *Russian Technological Journal*. 2025;13(2):121–131. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-2-121-131>, <https://elibrary.ru/EWCYQ>

Financial disclosure: The author has no financial or proprietary interest in any material or method mentioned.

The author declares no conflicts of interest.

ВВЕДЕНИЕ

Одним из направлений развития и совершенствования методов поиска оптимальных решений является исследование свойств рельефа оптимизируемых целевых функций (ЦФ) и учет этих свойств при выборе алгоритма поиска или/и настройке его параметров [1]. Это направление обычно называют Exploratory Landscape Analysis (ELA). Методы ELA основаны на определении и классификации свойств рельефов ЦФ и разработке алгоритмов их количественной оценки путем обработки результатов расчетов ЦФ в пробных точках [2–5].

Из свойств рельефа в данной работе нас будут интересовать характеристики его выпуклости, по которым участки рельефа ЦФ могут быть разделены на выпуклые и вогнутые.

Приведем определения [6, 7]. Функция $f(\mathbf{x})$ называется выпуклой на множестве X , если для $\forall(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in X$ и $\forall \lambda \in [0, 1]$ выполняется условие:

$$f(\mathbf{x}_\lambda) \leq \lambda f(\mathbf{x}_1) + (1 - \lambda)f(\mathbf{x}_2), \quad (1)$$

где $\mathbf{x}_\lambda = \lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda)\mathbf{x}_2$.

Функция $f(\mathbf{x})$ называется строго выпуклой, если в условии (1) выполняется строгое неравенство.

Функция $f(\mathbf{x})$ называется вогнутой, если функция $-f(\mathbf{x})$ является выпуклой. Аналогично определяется строго вогнутая функция. Характеристики выпуклости имеют большое значение для понимания свойств ЦФ. В частности, если в окрестностях точки минимума функция вогнутая, то такой минимум будет неустойчивым в том смысле, что незначительное смещение из этой точки может приводить к значительному увеличению значения ЦФ [6, 8].

В набор свойств ELA входят характеристики выпуклости. Методика их оценки следующая [2, 3]. В области поиска формируется множество пробных точек $\{\mathbf{x}_i\}$, в которых определяются значения ЦФ $f(\mathbf{x}_i)$. Из этого множества случайным образом выбираются пары точек $\{\mathbf{x}_{j1}, \mathbf{x}_{j2}\}$, для которых определяется значение $f(\mathbf{x}_{j\lambda})$ при $\lambda = 0.5$, после чего рассчитывается разность Δ левой и правой частей (1). Далее определяется вероятность выпуклости ЦФ как доля пар точек, для которых $\Delta < \Delta_{\text{conv}}$, где $\Delta_{\text{conv}} < 0$ – задаваемый порог. Такое свойство характеризует ЦФ в среднем по всей области поиска, а не отдельные участки рельефа, в частности, окрестности локальных экстремумов, которые представляют наибольший интерес. Кроме того, для получения каждого значения $f(\mathbf{x}_{j\lambda})$ требуется выполнить дополнительный расчет ЦФ, что в случаях, когда такой расчет осуществляется путем моделирования объекта, как во многих задачах оптимизации характеристик радиотехнических устройств [9], может требовать значительных затрат времени.

В случае, если выполняется расчет градиента ЦФ, выпуклость ЦФ может проверяться на каждой итерации по выполнению неравенства [7]:

$$(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^T \cdot (\nabla f(\mathbf{x}_2) - \nabla f(\mathbf{x}_1)) > \varepsilon, \quad (2)$$

где $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ – векторы координат начальной и конечной точек итерации, T – операция транспонирования, $\nabla f(\mathbf{x})$ – градиент ЦФ в точке $\mathbf{x}$, ε – малое положительное число. Расчет градиента требует наличия аналитических выражений для частных производных ЦФ по координатам или применения метода конечных разностей. В последнем случае количество выполняемых расчетов ЦФ существенно увеличивается.

Также выпуклость рельефа ЦФ характеризуется собственными значениями гессиана $\nabla^2 f(\mathbf{x})$ – матрицы вторых частных производных. Функция является выпуклой, если все собственные значения гессиана неотрицательные. Абсолютные величины собственных значений характеризуют выпуклость рельефа по соответствующим направлениям. В [3] введен набор свойств, определяемых по статистике значений отношения максимального и минимального собственных значений гессиана.

В [10] предлагается мера степени выпуклости в виде количества неотрицательных собственных чисел. Однако для вычисления гессиана требуется значительное количество дополнительных расчетов значений ЦФ.

В последние годы при решении задач оптимизации большое внимание привлекает применение так называемых *суррогатных* моделей ЦФ. Такая модель должна сохранять наиболее важные для работы алгоритма поиска экстремума свойства ЦФ, но расчет значений моделирующей функции должен требовать существенно меньших затрат времени, чем определение значения самой ЦФ [11, 12]. Достаточно точная модель ЦФ будет правильно воспроизводить и выпуклость рельефа. Такой подход имеет большие перспективы, но построение моделей связано с большим объемом вычислений.

Задачей данной работы является разработка метода оценки выпуклости рельефа ЦФ в процессе поиска экстремумов, не требующего расчета производных ЦФ и выполнения дополнительных расчетов значений ЦФ помимо тех, которые выполняются самим алгоритмом поиска, а также не требующего построения суррогатных моделей ЦФ.

АНАЛИЗ МЕТОДА ОЦЕНКИ ВЫПУКЛОСТИ РЕЛЬЕФА ЦФ

Рассмотрим задачу оценки характеристик выпуклости рельефа ЦФ $f(\mathbf{x})$ в окрестности $\Omega_{\mathbf{x}}$ локального минимума $\mathbf{x}^*$, в которой выполняется условие:

$$f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{x}^*), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_{\mathbf{x}}. \quad (3)$$

Будем искать степенную аппроксимацию изменений ЦФ в окрестности $\mathbf{x}^*$ в виде:

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^*) \approx \hat{f}(\mathbf{x}) = k \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^\alpha, \quad (4)$$

где $\|\mathbf{x}\|$ – евклидова норма вектора $\mathbf{x}$. Показатель степени α является объективной характеристикой выпуклости рельефа ЦФ. При $\alpha > 1$ ЦФ выпуклая, а при $\alpha < 1$ – вогнутая. Показатель α не зависит от значения ЦФ $f(\mathbf{x}^*)$ в точке экстремума, т.к. при изменении этого значения на такую же величину сместятся и значения ЦФ в других точках. Поэтому в дальнейшем с целью упрощения записи будем без потери общности полагать $f(\mathbf{x}^*) = 0$ и рассматривать (4) как аппроксимацию самой ЦФ.

Предположим, что точка $\mathbf{x}^*$ известна, ЦФ действительно является степенной функцией вида (4), а значения α и k одинаковы во всех точках $\Omega_{\mathbf{x}}$. Пусть имеются две пробные точки $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ и значения ЦФ

в них равны $f(\mathbf{x}_1), f(\mathbf{x}_2)$ соответственно. Тогда из системы уравнений

$$\begin{cases} f(\mathbf{x}_1) = k \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}^*\|^\alpha, \\ f(\mathbf{x}_2) = k \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}^*\|^\alpha \end{cases} \quad (5)$$

находим:

$$\alpha = \frac{\ln(f(\mathbf{x}_1)) - \ln(f(\mathbf{x}_2))}{\ln(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}^*\|) - \ln(\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}^*\|)}. \quad (6)$$

При невыполнении приведенных выше предположений эта оценка окажется приближенной. Оценим возникающие при этом погрешности.

Допустим, что найденное в процессе поиска положение локального минимума $\mathbf{x}'$ отличается от истинного положения $\mathbf{x}^*$ (рис. 1):

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}^* + \Delta\mathbf{x}. \quad (7)$$

В этом случае имеем оценку:

$$\hat{\alpha} = \frac{\ln(f(\mathbf{x}_1)) - \ln(f(\mathbf{x}_2))}{\ln(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}'\|) - \ln(\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}'\|)}. \quad (8)$$

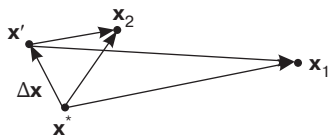


Рис. 1. К анализу погрешностей при неточном определении положения минимума ЦФ

Поделив (8) на (6) и выразив с помощью теоремы косинусов расстояния от пробных точек $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ до истинного минимума $\mathbf{x}^*$ через известные расстояния до $\mathbf{x}'$, получаем:

$$\begin{aligned} K_\alpha = \frac{\hat{\alpha}}{\alpha} &= \frac{\ln(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}^*\|) - \ln(\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}^*\|)}{\ln(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}'\|) - \ln(\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}'\|)} = \\ &= \frac{0.5 \ln(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}'\|^2 + \|\Delta\mathbf{x}\|^2 - 2\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}'\| \cdot \|\Delta\mathbf{x}\| \cdot \cos \psi_1)}{\ln(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}'\|)} - \\ &- \frac{0.5 \ln(\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}'\|^2 + \|\Delta\mathbf{x}\|^2 - 2\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}'\| \cdot \|\Delta\mathbf{x}\| \cdot \cos \psi_2)}{\ln(\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}'\|)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь ψ_1 и ψ_2 – углы между векторами $(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}')$, $(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}')$ и вектором $\Delta\mathbf{x}$ соответственно.

Значение K_α не зависит от значений ЦФ в пробных точках и инвариантно к изменению масштаба измерения расстояний, что делает его удобной характеристикой погрешности оценки $\hat{\alpha}$. Будем полагать, что $\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}'\| > \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}'\|$ и нормировать все расстояния к $\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}'\|$. На рис. 2 приведены результаты расчета по (9) зависимостей значения K_α от расстояния $\|\Delta\mathbf{x}\|$ от истинного до найденного положения минимума для нескольких комбинаций параметров, приведенных в табл. 1. Углы ψ_1 и ψ_2 полагаются или равными друг другу, или отличающимися незначительно. Это предположение основано на том, что, как будет видно из приведенного далее анализа, для получения достоверных оценок $\hat{\alpha}$ углы между направлениями на пробные точки должны быть достаточно малыми.

Таблица 1. Параметры примеров расчета зависимости K_α от расстояния $\|\Delta\mathbf{x}\|$

Примеры	$\ \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}'\ $	$\ \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}'\ $	ψ_1	ψ_2
Пример 1	10	1	90	90
Пример 2	10	1	100	80
Пример 3	10	1	80	100
Пример 4	10	1	30	30
Пример 5	10	1	150	150
Пример 6	3	1	90	90
Пример 7	30	1	90	90

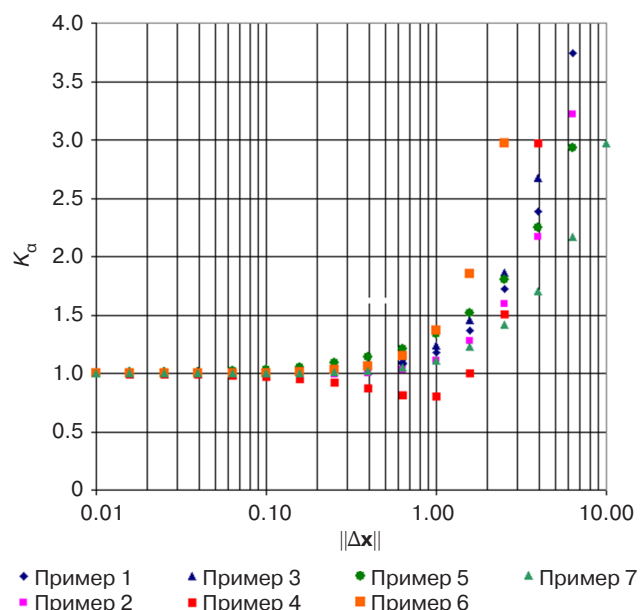


Рис. 2. Зависимости отношения K_α оценки $\hat{\alpha}$ к истинному значению α от расстояния $\|\Delta\mathbf{x}\|$ от истинного до найденного положения минимума

Приведенные результаты позволяют сделать вывод, что погрешность оценки показателя мала в случаях, когда расстояния до обеих пробных точек существенно больше, чем расстояние от истинного до найденного положения минимума. Конкретнее, при выполнении неравенства $\|\Delta \mathbf{x}\| \leq 0.1 \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}^*\|$ отклонение K_α от единицы не превышает 0.1, что можно считать приемлемым для приблизительной оценки выпуклости рельефа ЦФ.

Далее рассмотрим погрешность оценки $\hat{\alpha}$, обусловленную различиями значений α_1 и α_2 , а также k_1 и k_2 по направлениям от точки минимума $\mathbf{x}^*$ на точки $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$. Из (6) получаем:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= \frac{\ln(f(\mathbf{x}_1)) - \ln(f(\mathbf{x}_2))}{\ln(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}^*\|) - \ln(\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}^*\|)} = \\ &= \frac{\ln(k_1 \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}^*\|^{\alpha_1}) - \ln(k_2 \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}^*\|^{\alpha_2})}{\ln(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}^*\|) - \ln(\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}^*\|)} = \\ &= \bar{\alpha} + \frac{\ln(k_1/k_2)}{\ln(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}^*\|/\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}^*\|)} - \\ &\quad - \frac{\Delta\alpha \ln(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}^*\| \cdot \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}^*\|)}{\ln(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}^*\|/\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}^*\|)}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\bar{\alpha} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$, $\Delta\alpha = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}$.

Примем среднее арифметическое показателей для двух пробных точек $\bar{\alpha}$ за правильную оценку показателя α . Из (10) получаем соотношение для расчета абсолютной погрешности этой оценки.

$$\begin{aligned} E_\alpha &= \hat{\alpha} - \bar{\alpha} = \frac{\ln(k_1/k_2)}{\ln(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}^*\|/\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}^*\|)} - \\ &\quad - \frac{\Delta\alpha \ln(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}^*\| \cdot \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}^*\|)}{\ln(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}^*\|/\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}^*\|)}. \end{aligned} \quad (11)$$

Первое слагаемое показывает вклад в погрешность оценки $\hat{\alpha}$ различия коэффициентов k в двух пробных точках, а второе слагаемое – вклад различия показателей α .

На рис. 3 приведены примеры зависимостей величины погрешности E_α от расстояния второй пробной точки от минимума $\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}^*\|$. Параметрами являются расстояние первой пробной точки от минимума $\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}^*\|$, а также отношение k_1/k_2 и введенная выше величина $\Delta\alpha$, характеризующие различия параметров степенной аппроксимации в двух точках. Значения этих параметров для каждого примера приведены в табл. 2.

Таблица 2. Параметры примеров расчета зависимости E_α от значений $\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}^*\|$

Примеры	$\ \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}^*\ $	k_1/k_2	$\Delta\alpha$
Пример 1	1	2	0
Пример 2	1	1	0.2
Пример 3	10	1	0.2
Пример 4	100	1	0.2
Пример 5	10	2	0.2
Пример 6	10	0.5	0.2

Пример 1 отображает случай, когда показатель α постоянен по всем направлениям, а коэффициент k изменяется. Погрешность растет с увеличением расстояния $\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}^*\|$, т.к. уменьшается знаменатель первого слагаемого. В следующих трех примерах меняется только показатель α . Вид зависимостей различный для разных значений $\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}^*\|$, т.к. второе слагаемое в (11) не инвариантно к изменению масштаба расстояний. Абсолютное значение E_α с ростом $\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}^*\|$ может как увеличиваться, так и уменьшаться, и даже обращаться в 0, если выполняется равенство $\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}^*\| \cdot \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}^*\| = 1$. В примерах, представленных в рядах 5 и 6, присутствуют обе составляющие погрешности. Направление изменения и знак суммарной погрешности в зависимости от соотношения параметров могут быть различными.

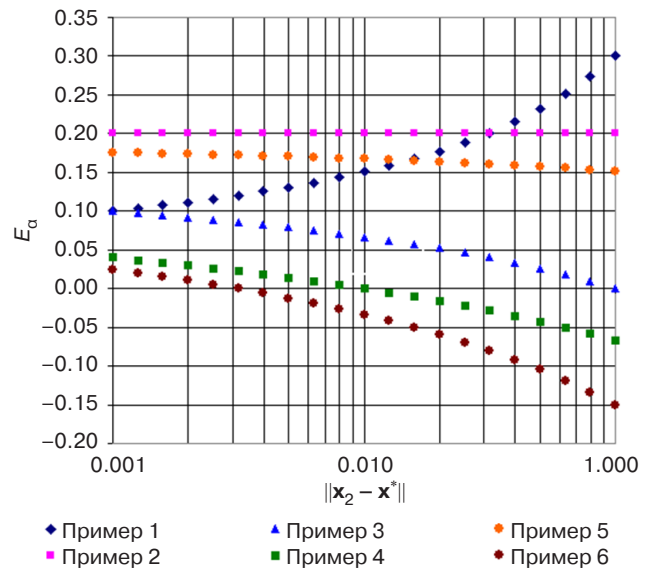


Рис. 3. Зависимости разности E_α оценки показателя степени $\hat{\alpha}$ и принятого за истинное значение $\bar{\alpha}$ от расстояния ближней пробной точки до точки минимума

Таким образом, на величину погрешности E_α влияют величины различий параметров k и α в двух пробных точках, а эти различия в большинстве

случаев будут тем меньше, чем меньше угол между направлениями на пробные точки из точки минимума.

Реальная ЦФ аппроксимируется степенной функцией вида (4) лишь приближенно. В общем случае аппроксимация будет иметь вид степенного ряда. Рассмотрим вопрос, какую информацию о выпуклости рельефа может дать при этом оценка $\hat{\alpha}$ по двум пробным точкам. Пусть ЦФ является суммой двух степенных функций:

$$f(\mathbf{x}) = k_1 \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^{\alpha_1} + k_2 \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^{\alpha_2}. \quad (12)$$

Соотношение (8) принимает вид:

$$\hat{\alpha} = \frac{\ln \left(k_1 \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}^*\|^{\alpha_1} + k_2 \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}^*\|^{\alpha_2} \right)}{\ln \left(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}^*\| \right)} - \frac{\ln \left(k_1 \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}^*\|^{\alpha_1} + k_2 \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}^*\|^{\alpha_2} \right)}{\ln \left(\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}^*\| \right)}. \quad (13)$$

На рис. 4 представлены примеры зависимостей $\hat{\alpha}$ от расстояния между первой пробной точкой и экстремумом $\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}^*\|$ при сочетаниях параметров, приведенных в табл. 3.

Таблица 3. Параметры примеров расчета зависимости $\hat{\alpha}$ от значений $\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}^*\|$

Примеры	α_1	α_2	k_1	k_2	$\ \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}^*\ /\ \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}^*\ $
Пример 1	1	2	0.5	0.5	10
Пример 2	1	2	0.2	0.8	10
Пример 3	1	2	0.8	0.2	10
Пример 4	1	2	0.5	0.5	3

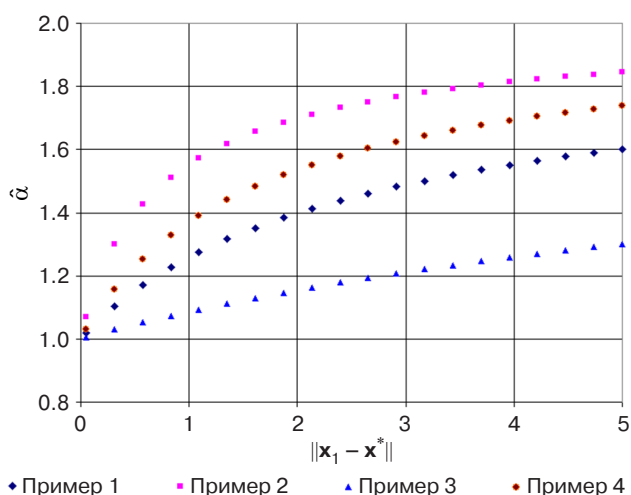


Рис. 4. Зависимости оценки показателя степени $\hat{\alpha}$ от расстояния $\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}^*\|$ при разных сочетаниях параметров в соотношении (13)

Во всех примерах оценка показателя степени $\hat{\alpha}$ при увеличении расстояний опорных точек до точки минимума изменяется по направлению от меньшего значения α_1 к большему значению α_2 . Скорость этого изменения зависит от соотношений весовых коэффициентов k_1, k_2 в (12) (примеры 2 и 3) и от отношения расстояний двух опорных точек до точки минимума (пример 4). Сходные закономерности будут иметь место и при большем числе слагаемых степенного ряда. Эти результаты надо учитывать при анализе выпуклости реальных ЦФ.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДА

Целью экспериментов была проверка возможностей получения достоверных оценок $\hat{\alpha}$ с применением описанного метода. Методика экспериментов включала получение наборов пробных точек в процессе поиска минимума ЦФ и последующую обработку собранных данных для получения оценок $\hat{\alpha}$ при различных параметрах отбора пар пробных точек. Эксперименты выполнялись с помощью программ в среде *MATLAB*¹.

В качестве метода поиска минимума применялся хорошо известный и широко применяемый алгоритм роя частиц (particle swarm optimization, PSO) [13], который, как показывает опыт его использования, позволяет находить экстремумы как выпуклых, так и невыпуклых ЦФ [14]. С помощью этого алгоритма осуществлялся поиск минимума тестовых функций из часто используемого в подобных исследованиях набора [15], а также специально разработанных тестовых функций. Сведения о тестовых функциях будут приведены ниже вместе с результатами экспериментов. Функция *MATLAB*, реализующая алгоритм PSO, была доработана, чтобы возвращать в вызывающую ее программу массив данных, содержащий координаты всех частиц роя во всех итерациях, и соответствующие значения ЦФ. Последующая обработка этих данных включала следующие действия:

1. Определение координат найденного минимума $\mathbf{x}'$ и значения ЦФ в этой точке $f(\mathbf{x}')$.
2. Расчет расстояний всех пробных точек $\mathbf{x}$ от найденного минимума $\mathbf{x}'$ и отбор по выполнению неравенств $d_{\min} \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| \leq d_{\max}$, где $d_{\min}, d_{\max}$ – задаваемые пороги. Значение $d_{\min}$ влияет на погрешность оценки $\hat{\alpha}$, определяемую соотношением (9). Значение $d_{\max}$ определяет размеры окрестности $\mathbf{x}'$, в пределах которой вычисляется оценка α .

¹ <https://www.mathworks.com/products/matlab.html>. Дата обращения 14.02.2025. / Accessed February 14, 2025.

3. Расчет энтропии распределения пробных точек по ортантам системы координат с центром в точке найденного минимума $\mathbf{x}'$. Значение энтропии определяется по формуле:

$$H = - \sum_{i=1}^{N_{\text{орт}}} P_i \log_2 P_i, \quad (14)$$

где P_i – вероятность попадания точки в i -й ортант; $N_{\text{орт}}$ – число ортантов, равное 2^{ND} ; ND – размерность пространства поиска. Это значение дает оценку равномерности распределения пробных точек по разным направлениям от найденного минимума.

4. Расчет углов ϕ_{ij} между направлениями на пробные точки $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j$, входящие во все возможные пары из ранее отобранных пробных точек.
5. Отбор пар точек $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j$ для оценки параметров степенной аппроксимации. Условия отбора сформулированы на основе приведенного выше анализа погрешностей метода.

$$\phi_{ij} \leq \phi_{\max}, \quad \ln \frac{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}'\|}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}'\|} \geq C_1, \quad (15)$$

где $\phi_{\max}$ и C_1 – задаваемые параметры, причем предполагается, что точка $\mathbf{x}_i$ дальше от найденного минимума, чем точка $\mathbf{x}_j$. Значение C_1 определяет минимум знаменателя в (11). Значение $\phi_{\max}$ определяет максимальный угол между направлениями на точки пары.

6. Расчет аналогично п. 3 энтропии распределения отобранных пар по ортантам, что дает оценку полноты информации о показателе α по разным направлениям.
7. Расчет по соотношению (8) оценок показателя степенной аппроксимации $\hat{\alpha}$ для отобранных пар точек. Формирование гистограммы значений этих оценок. Расчет статистических характеристик их распределения.

Далее приведены примеры результатов применения описанного метода. В случаях изотропных ЦФ, у которых по всем направлениям от минимума параметры степенной функции (4) одинаковы, предложенный метод находит значения этих параметров с высокой точностью. Такие примеры здесь не рассматриваются, а внимание уделено анизотропным ЦФ, для которых ожидается наличие погрешностей, обусловленных различиями параметров степенной функции по разным направлениям. Для всех использованных ЦФ выполняется равенство $f(\mathbf{x}^*) = 0$, что, как пояснялось ранее, не приводит к потере общности результатов.

Данные разделены на две таблицы. В табл. 4 приведены исходные параметры 12 опытов. Размерность пространства поиска во всех опытах равна 4. В столбце « $N_{\text{точ}}$ » указано полное число пробных точек, собранных в процессе поиска минимума. В следующем столбце дано расстояние между найденным минимумом $\mathbf{x}'$ и истинным положением минимума $\mathbf{x}^*$. Это значение приводится для справки и не используется алгоритмом, т.к. истинное положение минимума предполагается неизвестным. В последующих столбцах приведены значения параметров, по которым выполняется отбор пробных точек и их пар.

Таблица 4. Исходные параметры опытов

Опыт	Функция	$N_{\text{точ}}$	$\ \mathbf{x}' - \mathbf{x}^*\ $	$d_{\min}$	$d_{\max}$	$\phi_{\max}$	C_1
1	ellips	1980	$7.11 \cdot 10^{-5}$	$1.00 \cdot 10^{-8}$	10	10	2
2	ellips	1980	$7.11 \cdot 10^{-5}$	0.001	10	10	2
3	ellips	1980	$7.11 \cdot 10^{-5}$	0.001	10	2	2
4	ellips	1980	$7.11 \cdot 10^{-5}$	0.001	10	10	6
5	ellips	1980	$7.11 \cdot 10^{-5}$	0.001	10	2	6
6	diffpowers	1120	$1.03 \cdot 10^{-2}$	$1.00 \cdot 10^{-8}$	10	10	2
7	diffpowers	1120	$1.03 \cdot 10^{-2}$	0.001	10	10	2
8	diffpowers	1120	$1.03 \cdot 10^{-2}$	0.1	10	10	2
9	diffpowers	1120	$1.03 \cdot 10^{-2}$	0.1	10	30	2
10	TestLE4	1420	$1.20 \cdot 10^{-3}$	$1.00 \cdot 10^{-8}$	10	10	2
11	TestLE4	1420	$1.20 \cdot 10^{-3}$	0.01	10	10	2
12	TestLE4	1420	$1.20 \cdot 10^{-3}$	0.1	10	10	2

В табл. 5 приведены результаты этих опытов. Здесь $N_{\text{выб. точ}}$, $H_{\text{выб. точ}}$ – количество отобранных по п. 2 точек и энтропия их распределения по ортантам, $N_{\text{пар}}$, $H_{\text{пар}}$ – такие же показатели для отобранных по п. 5 пар точек. В следующих столбцах даны параметры распределения оценок $\hat{\alpha}$ по отобранным парам: минимум (min), среднее (mean), медиана (med), максимум (max), стандартное отклонение (std), асимметрия (skew) и эксцесс (kurt). Гистограммы значений оценок $\hat{\alpha}$ для опытов 5, 9 и 12 показаны на рис. 5.

Перейдем к анализу результатов экспериментов.

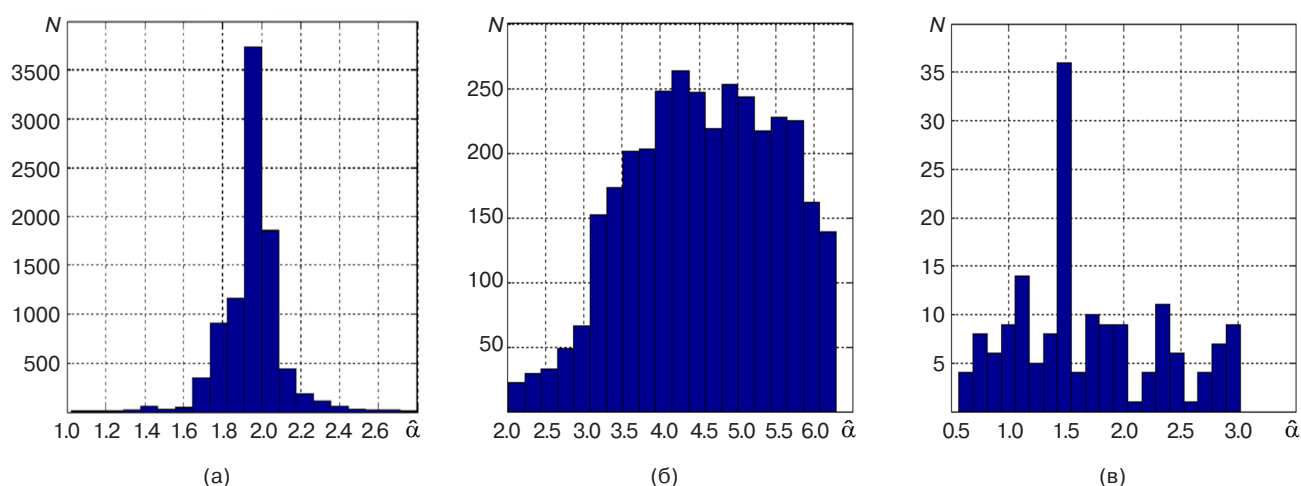
В опытах 1–5 исследовалась функция $\text{ellips}(\mathbf{x})$ [15], формируемая в соответствии с равенством:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{ND} (x_n - x_n^*)^2 \cdot 10^{(6(n-1)/(ND-1))}, \quad (16)$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{ND})$ – координаты точки, $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \dots, x_{ND}^*)$ – координаты минимума. Для данной ЦФ показатель степени $\alpha = 2$ по всем направлениям, а коэффициент k меняется по разным направлениям в диапазоне от 1 до 10^6 .

Таблица 5. Результаты опытов

Опыт	$N_{\text{выб. точ}}$	$H_{\text{выб. точ}}$	$N_{\text{пар}}$	$H_{\text{пар}}$	min	mean	med	max	std	skew	kurt
1	1978	3.845	202413	3.659	0.0003	1.916	1.926	6.545	0.414	0.590	9.351
2	1698	3.775	148938	3.515	0.0003	1.943	1.951	6.545	0.432	0.702	9.199
3	1698	3.775	41786	3.499	0.052	1.951	1.972	4.517	0.301	-0.045	9.988
4	1698	3.775	33095	3.263	0.929	1.940	1.947	3.523	0.231	0.658	7.901
5	1698	3.775	8982	3.222	1.025	1.953	1.969	2.799	0.142	-0.038	7.830
6	1118	3.766	506	3.367	2.447	4.803	4.769	6.564	0.937	-0.381	2.319
7	1118	3.766	506	3.367	2.447	4.803	4.769	6.564	0.937	-0.381	2.319
8	744	3.668	123	3.305	2.755	4.924	4.941	6.249	0.877	-0.382	2.277
9	744	3.668	3373	3.329	2.015	4.562	4.578	6.287	0.954	-0.222	2.271
10	1419	3.706	2448	3.012	0.568	2.615	2.763	3.561	0.435	-2.237	7.655
11	1196	3.710	1078	3.155	0.568	2.534	2.823	3.033	0.578	-1.482	3.981
12	805	3.654	165	2.707	0.568	1.685	1.494	3.016	0.635	0.467	2.355

Рис. 5. Гистограммы значений оценок $\hat{\alpha}$: (а) опыт 5, (б) опыт 9, (в) опыт 12

Во всех опытах с этой функцией среднее и медианное значения оценки $\hat{\alpha}$ близки к правильному значению 2. Диапазон оценок от минимума до максимума сужается по мере усиления ограничений при отборе пар, а стандартное отклонение уменьшается и достигает в опыте 5 величины порядка 7% от среднего значения, что можно признать вполне удовлетворительным. При этом форма функции распределения оценок оказывается симметричной и с острым пиком (рис. 5а). Энтропия распределения отобранных точек по органтам близка к максимальному значению 4. Энтропия распределения отобранных пар меньше, но из гистограммы этого распределения (здесь не приводится) видно, что в опытах 1–5 представлены все органты, т.е. в первом приближении учтены все направления. Это выполняется и для других рассматриваемых ниже функций.

В опытах 6–9 исследовалась функция $\text{diffpowers}(\mathbf{x})$ [15], определяемая соотношением:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{ND} (x_n - x_n^*)^{(2+4(n-1)/(ND-1))}, \quad (17)$$

где обозначения такие же, как в (16). Эта функция является суммой степенных функций от разных составляющих вектора координат точки. Показатели степени меняются в диапазоне от 2 до 6.

В опытах 6–8 последовательно увеличивается параметр $d_{\min}$, и количество отобранных пар точек уменьшается. В опыте 7 это приводит к сужению границ диапазона оценок $\hat{\alpha}$, но в опыте 8 отобранных пар точек становится слишком мало, и нижняя граница этого диапазона смещается вниз. В опыте 9 увеличен допуск $\varphi_{\max}$ на угол между точками

пары. В результате число отобранных пар существенно увеличилось, а границы диапазона оценок $\hat{\alpha}$ (от 2 до 6) определены с приемлемыми погрешностями. При этом гистограмма значений $\hat{\alpha}$ для этого опыта значимо отлична от нуля во всем диапазоне от 2 до 6 (рис. 5б), что является признаком различия показателя в степенной аппроксимации по разным направлениям.

В стандартном наборе испытательных функций [15] нет функции, рельеф которой в области минимума можно было бы делать как выпуклым, так и вогнутым. Для получения таких свойств были разработаны несколько дополнительных испытательных функций. Далее приведены результаты экспериментов с одной из них – TestLE4(x), вычисляемой по следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= k \|\mathbf{z}\|^\alpha, \\ \mathbf{z} &= \mathbf{x} - \mathbf{x}^*, \\ k &= \frac{1}{\|\mathbf{z}\|^2} \sum_{n=1}^{ND} (K_{1n} z_n^2 h(z_n) + K_{2n} z_n^2 h(-z_n)), \\ \alpha &= \frac{1}{\|\mathbf{z}\|^2} \sum_{n=1}^{ND} (W_{1n} z_n^2 h(z_n) + W_{2n} z_n^2 h(-z_n)), \\ h(y) &= \begin{cases} 1, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (18)$$

Переменные K_{ij} и W_{ij} являются элементами матриц $\mathbf{K}$ и $\mathbf{W}$, имеющих размеры $2 \times ND$, и представляют значения, соответственно, коэффициентов и показателей степени по положительным и отрицательным направлениям всех координат пространства поиска. Результирующие значения показателя степени k и коэффициента α по направлению на пробную точку получают интерполяцией между значениями этих величин по координатным осям. Таким образом, обеспечивается возможность произвольного задания параметров степенной функции по разным координатам и плавных изменений этих параметров по промежуточным направлениям.

В опытах 10–12 задавались следующие матрицы параметров:

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 3 & 1.5 & 0.5 & 1 \\ 1.5 & 2 & 1 & 0.7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}.$$

По части направлений функция выпуклая, а по другим – вогнутая, и скорость изменения функции также разная по разным направлениям. Диапазон значений показателя степени – от 0.5 до 3.

В опытах 10–12 последовательно увеличивался порог отбора точек $d_{\min}$. В результате количества отобранных точек и пар уменьшались. При этом максимальное значение оценки $\hat{\alpha}$ уменьшилось незначительно, минимальное значение осталось без изменений, а значение эксцесса распределения уменьшилось существенно, т.е. распределение стало более равномерным. Точность оценки границ диапазона $\hat{\alpha}$ можно считать приемлемой. Гистограмма значений оценок отлична от нуля во всем диапазоне от нижней до верхней границ.

Приведенные примеры представляют часть экспериментальных данных, полученных при использовании различных тестовых функций. Кроме того, помимо алгоритма PSO применялись алгоритмы «Дифференциальная эволюция» (differential evolution, DE) [13] и «Эволюционная стратегия с адаптацией ковариационной матрицы» (covariance matrix adaptation evolution strategy, CMA-ES) [16].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты экспериментов показывают, что при соответствующем задании параметров отбора пробных точек и их пар описанный метод позволяет получить объективную информацию о выпуклости ЦФ в окрестностях найденного минимума.

Ответ на вопрос о том, как осуществить задание параметров отбора, требует дальнейшей работы. Одним из возможных вариантов является автоматизация процесса последовательного изменения этих параметров, как это проделывалось вручную при получении описанных выше результатов. Критериями выбора параметров могут быть статистические характеристики и форма гистограммы распределения оценок $\hat{\alpha}$. Для получения большей информации о выпуклости рельефа, помимо указанной гистограммы, следует анализировать распределение значений $\hat{\alpha}$ по расстояниям от точки найденного минимума, а также многомерное распределение по расстояниям и направлениям.

Описанный метод оценки выпуклости может стать составной частью методики анализа свойств рельефа ЦФ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Malan K.M. A Survey of Advances in Landscape Analysis for Optimisation. *Algorithms*. 2021;14(2):40. <https://doi.org/10.3390/a14020040>
2. Mersmann O., Bischl B., Trautmann H., Preuss M., Weihs C., Rudolf G. Exploratory Landscape Analysis. In: *GECCO'11: Proceedings of the 13th Annual Genetic and Evolutionary Computation*. 2011. P. 829–836. <https://doi.org/10.1145/2001576.2001690>
3. Kerschke P., Trautmann H. Comprehensive Feature-Based Landscape Analysis of Continuous and Constrained Optimization Problems Using the R-package flacco. In: Bauer N., Ickstadt K., Lübke K., Szepannek G., Trautmann H., Vichi M. (Eds.). *Applications in Statistical Computing. Book Series: Studies in Classification, Data Analysis, and Knowledge Organization*. Berlin/Heidelberg, Germany: Springer; 2019. P. 93–123. https://doi.org/10.1007/978-3-030-25147-5_7
4. Trajanov R., Dimeski S., Popovski M., Korosec P., Eftimov T. *Explainable Landscape-Aware Optimization Performance Prediction*. Preprint. 2021. <http://arxiv.org/pdf/2110.11633v1>, <https://doi.org/10.48550/arXiv.2110.11633>
5. Van Stein B., Long F.X., Frenzel M., Krause P., Gitterle M., Back T. *DoE2Vec: Deep-learning Based Features for Exploratory Landscape Analysis*. Preprint. 2023. <https://arxiv.org/pdf/2304.01219v1>
6. Поляк Б.Т. *Введение в оптимизацию*. М.: Наука; 1983. 384 с.
7. Nocedal J., Wright S. *Numerical Optimization*: 2nd ed. Springer; 2006. 684 p.
8. Bertsimas D., ten Eikelder S.C.M., den Hertog D., Trichakis N. Pareto Adaptive Robust Optimality via a Fourier-Motzkin Elimination Lens. *Math. Program.* 2024;205(9):485–538. <https://doi.org/10.1007/s10107-023-01983-z>
9. Смирнов А.В. Сравнение алгоритмов многокритериальной оптимизации характеристик радиотехнических устройств. *Russian Technological Journal*. 2022;10(6):42–51. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2022-10-6-42-51>
10. Doikov N., Stich S.U., Jaggi M. *Spectral Preconditioning for Gradient Methods on Graded Non-convex Functions*. Preprint. 2024. <https://arxiv.org/pdf/2402.04843v1>
11. Yaochu J. A Comprehensive Survey of Fitness Approximation in Evolutionary Computation. *Soft Computing*. 2005;9(1): 3–12. <https://doi.org/10.1007/s00500-003-0328-5>
12. Hong L.J., Zhang X. *Surrogate-Based Simulation Optimization*. Preprint. 2021. <https://arxiv.org/pdf/2105.03893v1>
13. Карпенко А.П. *Современные алгоритмы поисковой оптимизации. Алгоритмы, вдохновленные природой*: 3-е изд. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана; 2021. 448 с.
14. Смирнов А.В. Свойства целевых функций и алгоритмов поиска в задачах многокритериальной оптимизации. *Russian Technological Journal*. 2022;10(4):75–85. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2022-10-4-75-85>
15. Hansen N., Finck S., Ros R., Auger A. *Real-Parameter Black-Box Optimization Benchmarking 2009: Noiseless Functions Definitions*. [Research Report] RR-6829. INRIA; 2009. URL: <https://hal.inria.fr/inria-00362633v2>
16. Hansen N. *The CMA Evolution Strategy: A Tutorial*. Preprint. 2016. <https://arxiv.org/abs/1604.00772v2>

REFERENCES

1. Malan K.M. A Survey of Advances in Landscape Analysis for Optimisation. *Algorithms*. 2021;14(2):40. <https://doi.org/10.3390/a14020040>
2. Mersmann O., Bischl B., Trautmann H., Preuss M., Weihs C., Rudolf G. Exploratory Landscape Analysis. In: *GECCO'11: Proceedings of the 13th Annual Genetic and Evolutionary Computation*. 2011. P. 829–836. <https://doi.org/10.1145/2001576.2001690>
3. Kerschke P., Trautmann H. Comprehensive Feature-Based Landscape Analysis of Continuous and Constrained Optimization Problems Using the R-package flacco. In: Bauer N., Ickstadt K., Lübke K., Szepannek G., Trautmann H., Vichi M. (Eds.). *Applications in Statistical Computing. Book Series: Studies in Classification, Data Analysis, and Knowledge Organization*. Berlin/Heidelberg, Germany: Springer; 2019. P. 93–123. https://doi.org/10.1007/978-3-030-25147-5_7
4. Trajanov R., Dimeski S., Popovski M., Korosec P., Eftimov T. *Explainable Landscape-Aware Optimization Performance Prediction*. Preprint. 2021. <http://arxiv.org/pdf/2110.11633v1>, <https://doi.org/10.48550/arXiv.2110.11633>
5. van Stein B., Long F.X., Frenzel M., Krause P., Gitterle M., Back T. *DoE2Vec: Deep-learning Based Features for Exploratory Landscape Analysis*. Preprint. 2023. <https://arxiv.org/pdf/2304.01219v1>
6. Polyak B.T. *Vvedenie v optimizatsiyu (Introduction into Optimization)*. Moscow: Nauka; 1983. 384 p. (in Russ.).
7. Nocedal J., Wright S. *Numerical Optimization*: 2nd ed. Springer; 2006. 684 p.
8. Bertsimas D., ten Eikelder S.C.M., den Hertog D., Trichakis N. Pareto Adaptive Robust Optimality via a Fourier-Motzkin Elimination Lens. *Math. Program.* 2024;205(9):485–538. <https://doi.org/10.1007/s10107-023-01983-z>
9. Smirnov A.V. Comparison of algorithms for multi-objective optimization of radio technical device characteristics. *Russian Technological Journal*. 2022;10(6):42–51. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2022-10-6-42-51>
10. Doikov N., Stich S.U., Jaggi M. *Spectral Preconditioning for Gradient Methods on Graded Non-convex Functions*. Preprint. 2024. <https://arxiv.org/pdf/2402.04843v1>
11. Yaochu J. A Comprehensive Survey of Fitness Approximation in Evolutionary Computation. *Soft Computing*. 2005;9(1): 3–12. <https://doi.org/10.1007/s00500-003-0328-5>
12. Hong L.J., Zhang X. *Surrogate-Based Simulation Optimization*. Preprint. 2021. <https://arxiv.org/pdf/2105.03893v1>

13. Karpenko A.P. *Sovremennye algoritmy poiskovoi optimizatsii. Algoritmy, vdokhnovlennye prirodoi (Modern Search Optimization Algorithms. Nature-Inspired Optimization Algorithms)*: 3rd ed. Moscow: Baumann Press; 2021. 448 p. (in Russ.).
14. Smirnov A.V. Properties of objective functions and search algorithms in multi-objective optimization problems. *Russian Technological Journal*. 2022;10(4):75–85. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2022-10-4-75-85>
15. Hansen N., Finck S., Ros R., Auger A. *Real-Parameter Black-Box Optimization Benchmarking 2009: Noiseless Functions Definitions*. [Research Report] RR-6829. INRIA; 2009. Available from URL: <https://hal.inria.fr/inria-00362633v2>
16. Hansen N. *The CMA Evolution Strategy: A Tutorial*. Preprint. 2016. <https://arxiv.org/abs/1604.00772v2>

Об авторе

Смирнов Александр Витальевич, к.т.н., доцент, профессор кафедры телекоммуникаций, Институт радиоэлектроники и информатики, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: av_smirnov@mirea.ru. Scopus Author ID 56380930700, <https://orcid.org/0000-0002-2696-8592>

About the author

Alexander V. Smirnov, Cand. Sci. (Eng.), Professor, Department of Telecommunications, Institute of Radio Electronics and Informatics, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: av_smirnov@mirea.ru. Scopus Author ID 56380930700, <https://orcid.org/0000-0002-2696-8592>

Математическое моделирование
Mathematical modeling

УДК 51-74:621.791.92

<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-2-132-142>

EDN EATLRM



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Математическое моделирование технологических параметров порошковой лазерной наплавки на основе аппроксимации профиля дорожки напыления

М.Е. Соловьев ^{1, @},
Д.В. Малышев ¹,
С.Л. Балдаев ²,
Л.Х. Балдаев ²

¹ Ярославский государственный технический университет, Ярославль, 150023 Россия

² ООО «Технологические системы защитных покрытий», Москва, Щербинка, 108851 Россия

@ Автор для переписки, e-mail: me_s@mail.ru

Резюме

Цели. Лазерная порошковая наплавка – перспективная технология в машиностроении, позволяющая эффективно восстанавливать изношенные поверхности деталей и создавать специальные покрытия с ценными свойствами. Методы математического моделирования имеют решающее значение в исследовании и развитии технологии лазерной наплавки. Процесс нанесения порошкового покрытия предполагает перемещение распылительной головки относительно поверхности детали, образуя валик – дорожку напыления. Покрытия формируются путем последовательного нанесения этих дорожек. Целью исследования является изучение различных методов аппроксимации профиля и оптимизация технологических параметров в процессах порошковой лазерной наплавки.

Методы. Использованы методы математического моделирования для описания зависимостей параметров профиля дорожек напыления при лазерной наплавке от технологических параметров процесса. Получение контуров профилей сечения наплавки осуществлялось методами анализа изображений микрофотографий шлифов поперечных сечений деталей с наплавкой. Для аппроксимации кривых контуров сечений использовались методы линейного и нелинейного регрессионного анализа. Зависимость параметров контуров профилей сечения наплавки от технологических параметров напыления аппроксимировалась двухфакторным уравнением параболической регрессии. Поиск оптимальных значений технологических параметров напыления осуществляли методом условной оптимизации с линейной аппроксимацией доверительной области.

Результаты. Рассмотрены три варианта аппроксимирующих функций профиля сечения дорожки наплавки, из которых была выбрана нелинейная двухпараметрическая функция. Получены отображения множества технологических параметров наплавки во множество параметров аппроксимирующей линии контура. С использованием регрессионных моделей данных отображений найдены оптимальные значения технологических параметров наплавки, обеспечивающие максимальную величину площади контура наплавки при ограничениях на долю области подплавления к общей площади сечения. Аппроксимирующая функция профиля сечения дорожки наплавки использована для расчета оптимального шага нанесения дорожек, обеспечивающего наиболее ровную поверхность наплавки.

Выводы. Результаты проведенного исследования могут рассматриваться в качестве методики оптимизации технологических параметров лазерной наплавки порошковых металлов, позволяющей обеспечивать заданные характеристики профиля дорожки напыления и выбирать шаг нанесения дорожек, при котором достигается наиболее ровная поверхность наплавки.

Ключевые слова: математическое моделирование, лазерная наплавка, контур сечения, аппроксимация, регрессионный анализ, оптимизация

• Поступила: 16.05.2024 • Доработана: 18.08.2024 • Принята к опубликованию: 29.01.2025

Для цитирования: Соловьев М.Е., Малышев Д.В., Балдаев С.Л., Балдаев Л.Х. Математическое моделирование технологических параметров порошковой лазерной наплавки на основе аппроксимации профиля дорожки напыления. *Russian Technological Journal*. 2025;13(2):132–142. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-2-132-142>, <https://elibrary.ru/EATLRM>

Прозрачность финансовой деятельности: Авторы не имеют финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

RESEARCH ARTICLE

Mathematical modeling of technological parameters of laser powder surfacing based on approximation of the deposition track profile

Mikhail E. Soloviev ^{1, @},
Denis V. Malyshev ¹,
Sergey L. Baldaev ²,
Lev Kh. Baldaev ²

¹ Yaroslavl State Technical University, Yaroslavl, 150023 Russia

² Technological Systems of Protective Coatings, Moscow, Shcherbinka, 108851 Russia

@ Corresponding author, e-mail: me_s@mail.ru

Abstract

Objectives. Laser powder surfacing is a promising mechanical engineering technology used to effectively restore worn surfaces of parts and create special coatings with valuable properties. In the research and development of laser cladding technology, mathematical modeling methods are of crucial importance. The process of applying powder coating involves moving the spray head relative to the surface of the part to form a roller or spray path, whose sequential application results in the formation of coatings. The study sets out to evaluate methods of profile approximation and optimization of technological parameters in laser powder cladding processes.

Methods. In order to describe the dependencies of the profile parameters of the deposition paths during laser surfacing on the technological parameters of the process, mathematical modeling methods were used. The contours of the profiles of the surfacing section were obtained by analyzing images of microphotographs of thin sections of the cross sections of parts with applied surfacing. To approximate the curves of the section contours, methods of linear and nonlinear regression analysis were used. The dependence of the parameters of the profile contours of the surfacing section on the technological parameters of the spraying was represented by a two-factor parabolic regression equation. The search for optimal values of spraying technological parameters was carried out using the method of conditional optimization with linear approximation of the confidence region.

Results. A nonlinear two-parameter function was selected from three options for approximating functions of the section profile of a surfacing track. Technological surfacing parameters were mapped onto a set of parameters of the approximating contour line. Optimal values of the technological parameters of surfacing were obtained using regression models of these mappings to provide the maximum value of the area of the surfacing contour under restrictions on the proportion of the sub-melting area to the total cross-sectional area. The approximating function of the cross-sectional profile of the surfacing track was used to calculate the optimal pitch of the tracks that provides the most even surface.

Conclusions. The results of the study represent a technique for optimizing the technological parameters of laser surfacing with powder metals to ensure specified characteristics of the deposition track profile and select the track deposition step at which the most even deposition surface is achieved.

Keywords: mathematical modeling, laser cladding, section contour, approximation, regression analysis, optimization

• Submitted: 16.05.2024 • Revised: 18.08.2024 • Accepted: 29.01.2025

For citation: Soloviev M.E., Malyshev D.V., Baldaev S.L., Baldaev L.Kh. Mathematical modeling of technological parameters of laser powder surfacing based on approximation of the deposition track profile. *Russian Technological Journal*. 2025;13(2):132–142. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-2-132-142>, <https://elibrary.ru/EATLRM>

Financial disclosure: The authors have no financial or proprietary interest in any material or method mentioned.

The authors declare no conflicts of interest.

ВВЕДЕНИЕ

Лазерная порошковая наплавка [1–3] является перспективной технологией в машиностроении, позволяющей эффективно восстанавливать поверхности изношенных деталей, а также создавать специальные покрытия деталей, обладающие ценным комплексом свойств, таких как повышенная теплостойкость, износостойкость, химическая стойкость и других. Данная технология относится к методам газотермического напыления порошковых покрытий [4–6], суть которых состоит в разогреве порошкообразных материалов до температур, превышающих их температуры плавления, и нанесения на поверхность детали высокоскоростным газовым потоком. В отличие от других методов, в случае лазерной наплавки источником нагрева частиц является инфракрасный лазер, луч которого фокусируется непосредственно на поверхности детали или вблизи нее. Это позволяет более точно регулировать температуру наплавляемого материала и более точно позиционировать дорожку наплавки. За счет этих преимуществ лазерная наплавка является основой аддитивных технологий металлов [7].

Методы математического моделирования являются важнейшим инструментом исследования при разработке технологии лазерной наплавки [1, 8, 9]. Традиционно при этом решаются задачи о распределении теплового потока по сечению наплавляемого материала и прилегающей к нему области детали. При этом используются как аналитические, так и численные методы, среди которых в последние годы весьма распространенными являются методы конечных элементов [10–12], в т.ч. с использованием универсальных пакетов инженерного анализа. Вместе с тем, в практическом отношении весьма важной характеристикой

процесса наплавки является форма профиля сечения дорожки наплавки [13]. Процесс лазерной наплавки, как и процессы, используемые при других методах порошкового напыления покрытий, состоит в движении головки распылителя относительно поверхности обрабатываемой детали. В результате на поверхности детали формируется валик – дорожка напыления (наплавки). Путем последовательного нанесения дорожек формируется покрытие. Форма профиля сечения дорожки напыления определяет толщину покрытия и качество его поверхности [14]. Ввиду сложности физико-химических процессов, протекающих при формировании дорожки напыления, моделирование профиля сечения дорожки на основе физических принципов представляется затруднительным, поэтому на практике профили сечения дорожек аппроксимируют путем обработки микрофотографий экспериментально полученных шлифов поперечных сечений дорожек напыления [15]. В качестве аппроксимирующих функций профилей сечения в работах [16–18] использованы достаточно простые математические функции, такие как парабола, дуга окружности или эллипса, хотя на практике форма профиля может быть более сложной [15, 19]. В связи с этим целью настоящей работы было исследование методами математического моделирования различных способов аппроксимации профилей сечения дорожек напыления с последующей оптимизацией технологических параметров порошковой лазерной наплавки.

МЕТОДЫ АППРОКСИМАЦИИ И ОПТИМИЗАЦИИ

Контурные профили сечения дорожек напыления получали путем обработки микрофотографий поперечных шлифов дорожек напыления методами

анализа изображений с использованием библиотеки Python OpenCV. С этой целью с изображения вручную удаляли вспомогательные надписи (при их наличии) и преобразовывали цветовое пространство в оттенки серого. Далее на изображении выделяли массив контуров с использованием алгоритма [20], в котором контур с максимальным числом элементов отвечал контуру дорожки. Для выполнения процедур преобразования файлов изображений и выделения контуров дорожек был создан программный модуль Python, позволяющий в пакетном режиме производить обработку массива сканированных изображений, возвращающий набор файлов в формате csv, содержащих массив координат выделенного контура.

Аппроксимацию контура профиля сечения и построение математических моделей зависимостей параметров аппроксимирующих функций от технологических параметров напыления дорожки осуществляли методами линейного и нелинейного регрессионного анализа [21, 22]. Математическая формулировка данных задач выглядела следующим образом.

Пусть для фиксированных $x_j \in X \subset \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$, имеются значения случайной функции $y_j(x_j, \omega_j) \in Y$, где ω_j – случайное событие из Ω при заданной сигмалгебре A и вероятностной мере P . Целью аппроксимации является восстановление в X функции $E y(x, \omega) = \eta(x)$, называемой функцией регрессии. В настоящей работе рассмотрены три варианта функций регрессии типа $\eta_i(x, \theta_i)$, $i = 1, 2, 3$. Здесь η_i – известные функции – регрессионные модели, конкретный вид которых будет описан в основной части статьи, θ_i – параметры из заданных параметрических множеств Θ_i , определяемые по значениям y_j .

Среди трех исследованных в настоящей работе регрессионных моделей две относятся к классу линейных по параметрам и одна – к нелинейным по параметрам. Отклики линейной по параметрам модели y_j можно представить в виде:

$$y_j = \eta_{lin}(x_j, \theta) + \varepsilon_j = \theta^T f(x_j) + \varepsilon_j, \quad (1)$$

где ε_j – случайные величины, распределение которых предполагали нормальным с нулевым математическим ожиданием $E \varepsilon_j = 0$ и диагональной ковариационной матрицей $E \varepsilon_j \varepsilon_k = \sigma^2 \delta_{jk}$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)^T$ – вектор неизвестных параметров из $\mathbb{R}^m$, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))^T$ – вектор заданных, линейно независимых на множестве X функций.

В матричных обозначениях $Y = (y_1, \dots, y_n)^T$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)^T$, $F = (f_1(x_j), \dots, f_m(x_j))_{j=1}^n$ система (1) записывается в виде:

$$Y = F\theta + \varepsilon, \quad (2)$$

где $EY = F\theta$ и ковариационная матрица DY равна $\sigma^2 I_n$, I_n – единичная матрица.

В настоящей работе оценки $\hat{\theta}$ неизвестных параметров θ вычисляли методом наименьших квадратов (МНК):

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta \in \Theta} \sum_{j=1}^n \sigma_j^{-2} (y_j - \eta(x_j, \theta))^2 \quad (3)$$

или в матричных обозначениях:

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta \in \Theta} (Y - F\theta)^T (Y - F\theta). \quad (4)$$

Решение задачи (4) сводится к известной формуле регрессионного анализа

$$\hat{\theta} = (F^T F)^{-1} F^T Y. \quad (5)$$

Дисперсия адекватности модели s^2 , являющаяся несмещенной оценкой дисперсии σ^2 , при этом вычисляется по формуле $s^2 = SS_{reg}/(n - m)$, где

$$SS_{reg} = (Y - F\hat{\theta})^T (Y - F\hat{\theta}). \quad (6)$$

Поскольку в настоящей работе отсутствовала возможность оценить дисперсию ошибки по параллельным опытам, проверка адекватности модели сравнением дисперсий адекватности и дисперсии ошибки не представлялась возможной. Поэтому адекватность моделей оценивали качественно по близости к единице значения коэффициента детерминации

$$R^2 = 1 - SS_{reg}/SS_{tot}, \quad (7)$$

где $SS_{tot} = (Y - \bar{Y})^T (Y - \bar{Y})$, $\bar{Y}$ – среднее значение откликов.

Для вычислений по формулам (5)–(7) был создан программный модуль Python с использованием пакета линейной алгебры numpy.linalg, позволяющий в пакетном режиме обрабатывать csv файлы с координатами контуров дорожек, полученные в результате обработки изображений с микрофотографий шлифов поперечных сечений, и строить графики точек исходных контуров и линий регрессии, полученных в результате расчета оценок параметров уравнений регрессии.

Для модели регрессии, нелинейной по параметрам, вместо представления откликов в виде (2) использовали представление:

$$Y = H(X, \theta) + \varepsilon, \quad (8)$$

где $H(X, \theta) = (\eta(x_1, \theta), \dots, \eta(x_n, \theta))^T$ – вектор значений нелинейной функции $\eta(x, \theta)$ в точках x_j с параметрами θ .

Формулировка (4) МНК в данном случае принимает вид:

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta \in \Theta} (Y - H(X, \theta))^T (Y - H(X, \theta)). \quad (9)$$

Система нормальных уравнений МНК при этом становится нелинейной, и использовать простую формулу (5) для вычисления оценок параметров не удастся, поэтому для решения данной задачи применяли численный метод оптимизации [23]. Формула (6) для нелинейной модели имеет вид:

$$SS_{\text{reg}} = (\mathbf{Y} - \mathbf{H}(\mathbf{X}, \hat{\boldsymbol{\theta}}))^T (\mathbf{Y} - \mathbf{H}(\mathbf{X}, \hat{\boldsymbol{\theta}})), \quad (10)$$

при этом общий вид формулы (7) для вычисления коэффициента детерминации сохраняется.

По результатам анализа адекватности из полученных трех регрессионных моделей была выбрана одна, которая в дальнейшем использовалась для построения зависимостей формы профиля сечения дорожки наплавки от технологических параметров процесса напыления. Для этого вычисленные оценки параметров выбранной модели использовали при построении отображений множества технологических параметров напыления $u_k \in U \subset \mathbb{R}^p, k = 1, \dots, p$, во множество параметров линии профиля $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_m)^T$. Поскольку оценки параметров $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ являются случайными величинами, а технологические параметры u_k – заданными, то для построения таких отображений использовался метод линейного регрессионного анализа. Конкретный вид функций регрессии описан в основной части статьи. Эти функции в дальнейшем использовались для оптимизации технологического режима напыления с использованием алгоритмов, описанных в [24].

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Профиль сечения наплавленной дорожки можно разделить на две области [13]: часть, расположенная выше поверхности детали – область наплавки, и часть, расположенная ниже поверхности детали – область подплавления, образующаяся в результате углубления ванны расплавленного металла в объем обрабатываемой детали. В [15] проведено сравнение способов аппроксимации профилей сечения области наплавки простыми аппроксимирующими функциями: дугой окружности, дугой эллипса, синусоидой и параболой. По результатам сравнения остаточных дисперсий сравниваемых аппроксимирующих функций был сделан вывод, о том, что аппроксимация параболой оказывается наилучшим вариантом из числа изученных. Следует отметить, однако, что профили сечений валиков, изученные в данной работе, были достаточно регулярными в отличие от профилей, представленных в других работах, в т.ч. в статье [13]. Кроме того, вышеперечисленные аппроксимирующие функции не описывают область подплавления, профиль которой оказывается более

сложным. В связи с этим в настоящей работе в первую очередь были изучены в качестве аппроксимирующих функций полиномы более высокого порядка по сравнению с параболой.

На рис. 1 показаны точки контура профиля, полученные обработкой изображения в работе [13], и их аппроксимации двумя типами полиномов. Первый тип регрессионной модели представлял полином седьмой степени следующего вида:

$$y = (1 - x^2) \sum_{i=0}^5 \theta_i^1 x^i, \quad (11)$$

где θ_i^1 – параметры регрессии, $x \in [-1; 1] \subset \mathbb{R}$ – нормированные значения аргумента. Здесь и далее верхний индекс у параметра θ обозначает номер аппроксимирующей функции, верхний индекс у аргумента x – степень.

Второй тип полиномиальной аппроксимирующей функции для профиля сечения валика, предложенный в работе [25] и названный биквадратичным аппроксиматором, имеет вид:

$$y = (1 - x^2)(\theta_0^2 + \theta_1^2 x^2 + \theta_2^2 x^4). \quad (12)$$

В отличие от модели (11) здесь сохраняются только четные степени аргумента, чем достигается симметрия профиля относительно оси OY , что теоретически должно выполняться при коаксиальной наплавке и фактически учитывалось также в работе [15] при выборе простых симметричных аппроксимирующих функций. В обеих моделях вынесен общий член $(1 - x^2)$, что обеспечивает нули функций в точках $x = \pm 1$. Это объясняется тем, что на практике удобно представлять аргумент функций регрессии в безразмерной нормированной форме:

$$x^{\text{усл}} = \frac{x^{\text{нат}} - x_0}{\Delta x}, \quad (13)$$

где $x^{\text{нат}}$ – значение аргумента в натуральных единицах, $x^{\text{усл}}$ – значение в безразмерном масштабе, $x_0 = (\max(x^{\text{нат}}) + \min(x^{\text{нат}}))/2$ – средний уровень, $\Delta x = (\max(x^{\text{нат}}) - \min(x^{\text{нат}}))/2$ – шаг варьирования.

Обе модели (11) и (12) являются линейными по параметрам, и их оценки легко вычисляются по формуле (5). Как видно из рис. 1, и та и другая функция хорошо аппроксимируют как область наплавки, так и область подплавления. При этом коэффициент детерминации функции 1 составил значения $R^2 = [0.995; 0.996]$ для аппроксимирующих функций областей наплавки и подплавления, соответственно, а для функции 2 – несколько ниже: $R^2 = [0.985; 0.976]$. На этом основании можно было бы принять, например, функцию (11) в качестве

основного инструмента при аппроксимации профилей сечения дорожек, однако при обработке микрофотографий менее регулярных профилей выяснилось, что полиномиальная аппроксимация обладает недостатком, состоящим в том, что при обработке сложных или нерегулярных профилей на аппроксимирующей кривой появляются дополнительные экстремумы, которых не должно быть в физическом смысле. В связи с этим в настоящей работе предложена нелинейная аппроксимирующая функция следующего вида:

$$y = A \cos^B \left(\frac{\pi}{2} x \right), \quad (14)$$

где параметры аппроксимации обозначены как A , B . Их вычисление осуществлялось методом нелинейного оценивания.

Удобство функции (14) состоит в том, что она, имея всего два параметра, при этом, аналогично функциям (11), (12), обладает симметрией, имеет нули в точках $x = \pm 1$ и вместе с тем всегда имеет только один экстремум в интервале $x \in [-1; 1]$.

На рис. 2 приведены точки профиля сечения дорожки наплавки по обработке микрофотографии [13] для параметров наплавки: мощность лазера равна 310 Вт, подача порошка равна 29 г/м и аппроксимирующие кривые по трем рассмотренным выше функциям регрессии. Как видно, для этого профиля полиномиальные функции хорошо аппроксимируют верхнюю часть профиля, но не работоспособны для нижней части (области подплавления), тогда как функция (14) адекватно описывает весь профиль, включая как область наплавки, так и область подплавления.

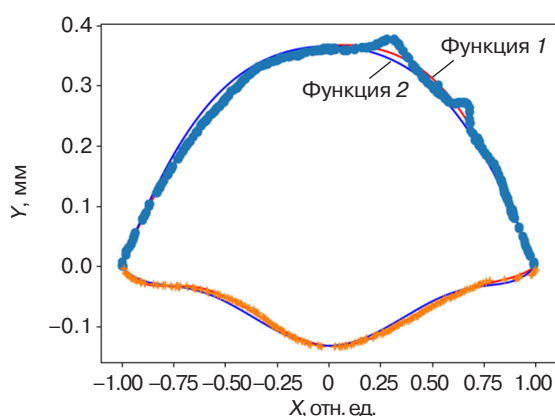


Рис. 1. Точки профиля сечения дорожки наплавки по обработке микрофотографии [13] (положительные значения Y – область наплавки, отрицательные значения Y – область подплавления) и аппроксимирующие кривые: по модели (11) – функция 1, по модели (12) – функция 2

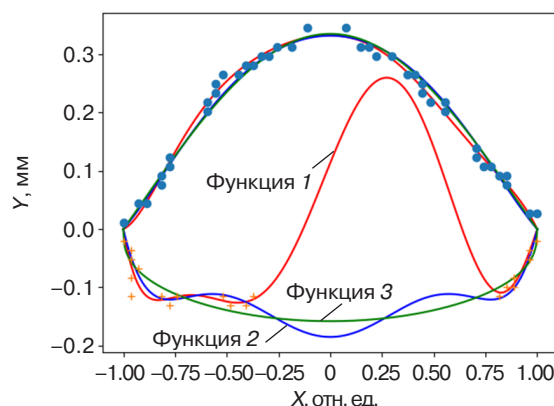


Рис. 2. Точки профиля сечения дорожки наплавки по обработке микрофотографии [13] и аппроксимирующие кривые: по модели (11) – функция 1, по модели (12) – функция 2, по модели (14) – функция 3

В табл. 1, 2 приведены параметры A , B аппроксимирующих функций модели (14) и значения Δx для различных технологических параметров напыления сплава никель-хром NiCr16 на стальную заготовку, полученные по результатам обработки изображений профилей, приведенных в работе [13]. Эти данные могут быть использованы для валидации математических моделей наплавки, основанных на численном решении уравнений гидродинамики и теплопереноса с использованием методов конечных элементов [11, 12, 18]. Также, учитывая достаточно широкий диапазон варьирования параметров наплавки, можно использовать результаты аппроксимации для построения отображений множества технологических параметров наплавки во множество параметров линии профиля и решения задачи оптимизации технологических параметров. Для построения таких отображений в настоящей работе использован метод регрессионного анализа с аппроксимацией зависимостей параметров профиля от технологических параметров двухфакторными уравнениями параболической регрессии вида:

$$\theta_i = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_1^2 + b_4 x_2^2 + b_5 x_1 x_2, \quad (15)$$

где θ_i – параметры профиля, x_1 , x_2 – мощность лазера и подача порошка в нормированных единицах (13), b_j , $j = 0, \dots, 5$ – коэффициенты регрессии, вычисляемые с помощью МНК.

В качестве параметров профиля использовали значения параметров Δx , A_0 , A_1 , B_0 , B_1 , приведенные в табл. 1, 2, а также вычисленные на их основе площади под кривой профиля S_0 , S_1 . Индексы 0 и 1 у параметров отвечают верхней и нижней частям профиля, соответственно. Вычисление площадей осуществляли численным интегрированием функций профиля (14) для соответствующих технологических параметров.

Таблица 1. Параметры аппроксимации профилей дорожек наплавки при различных технологических параметрах напыления (верхняя часть контура)

Мощность лазера, Вт	Подача порошка, г/м	Δx , мм	A_0 , мм	B_0
310	12	0.333	0.145	0.661
310	29	0.429	0.335	1.022
310	45	0.500	0.606	0.689
570	12	0.476	0.228	1.035
570	29	0.524	0.495	0.558
570	45	0.587	0.521	0.664
570	85	0.802	1.084	0.541
720	12	0.508	0.233	0.973
720	29	0.516	0.481	0.597
720	45	0.603	0.598	0.678
720	63	0.746	0.815	0.769
1150	12	0.619	0.248	0.893
1150	29	0.643	0.572	0.904
1150	45	0.778	0.721	0.654
1150	63	0.873	0.959	0.463
1150	85	1.095	0.988	0.506
1150	100	1.159	0.919	0.513

В табл. 3 приведены рассчитанные значения оценок коэффициентов регрессии (15) для исследованных параметров и коэффициенты детерминации моделей. На практике наибольший интерес представляют параметры Δx , A_0 , A_1 , из которых первые два характеризуют полуширину и высоту валика наплавки, соответственно, а третий – глубину области подплавления в объем детали. Регрессионные модели для этих показателей, как видно из табл. 3, характеризуются близкими к единице значениями R^2 , что свидетельствует об их адекватности.

Также важными являются площади под кривой профиля. С их использованием вычисляется

Таблица 2. Параметры аппроксимации профилей области подплавления при различных технологических параметрах напыления (нижняя часть контура)

Мощность лазера, Вт	Подача порошка, г/м	Δx , мм	A_1 , мм	B_1
310	12	0.333	-0.054	0.550
310	29	0.429	-0.158	0.367
310	45	0.500	-0.106	0.264
570	12	0.476	-0.245	2.518
570	29	0.524	-0.139	1.191
570	45	0.587	-0.323	0.365
570	85	0.802	-0.357	0.320
720	12	0.508	-0.213	1.088
720	29	0.516	-0.208	0.769
720	45	0.603	-0.317	0.431
720	63	0.746	-0.388	0.473
1150	12	0.619	-0.603	2.246
1150	29	0.643	-0.445	2.384
1150	45	0.778	-0.523	1.553
1150	63	0.873	-0.675	1.715
1150	85	1.095	-0.676	0.792
1150	100	1.159	-0.577	0.414

относительная доля области подплавления (коэффициент подплавления):

$$D = \frac{S_1}{S_0 + S_1}. \quad (16)$$

Для качественной наплавки величина параметра D должна быть оптимальной: при малых значениях D не обеспечивается прочная связь наплавки с подложкой, а при слишком больших происходит ухудшение свойств материала основы детали.

На основании вычисленных значений коэффициентов уравнений регрессии были рассчитаны

Таблица 3. Коэффициенты уравнений регрессии зависимостей параметров профиля от технологических параметров наплавки

Параметр	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	R^2
Δx	0.6932	0.1514	0.2539	-0.0083	0.0543	0.0356	0.9877
a_0	0.7772	0.0339	0.4114	-0.0055	-0.1445	-0.0717	0.9543
a_1	-0.3444	-0.1908	-0.1000	-0.0445	-0.0048	0.0406	0.9052
B_0	0.6222	-0.0459	-0.1436	0.0225	0.1185	-0.0918	0.5243
B_1	0.6396	0.6522	-0.7602	0.0881	0.2115	-0.2000	0.7039
S_0	0.9716	0.2314	0.8311	0.0162	0.0200	0.0824	0.9704
S_1	0.4409	0.3013	0.3442	0.0466	0.0876	0.1216	0.9594

параметры математических моделей: координаты критических точек и собственные значения матриц Гессе. Также были построены графики поверхностей регрессии. Анализ полученных регрессионных моделей показывает, что в изученной области изменения технологических параметров зависимости параметров профиля Δx , A_0 , A_1 , S_0 , S_1 от технологических параметров x_1 , x_2 монотонны, тогда как зависимость $D(x_1, x_2)$ имеет характер гиперболического параболоида. В качестве примера на рис. 3–5 приведены графики поверхностей $A_0(x_1, x_2)$, $S_0(x_1, x_2)$, $D(x_1, x_2)$.

Выбор значений параметров профиля наплавки зависит от конкретных требований к изделию. Если задача оптимизации не стоит и нужно лишь обеспечить некоторые заданные характеристики профиля, то можно воспользоваться построением контурных кривых функций регрессии. В качестве примера на рис. 6 приведены контурные кривые для функций $S_0(x_1, x_2)$ и $D(x_1, x_2)$. Выбрав требуемые значения каждой из функций, необходимые для их достижения значения технологических параметров x_1 и x_2 , можно найти как координаты точек пересечения соответствующих изолиний. Так, в частности, требованию $S_0 = 0.6$, $D = 0.25$ отвечают значения координат $x_1 = -0.753$, $x_2 = -0.283$. Координаты вычисляются из решения нелинейной системы уравнений:

$$\begin{cases} S_0(x_1, x_2) - 0.6 = 0, \\ D(x_1, x_2) - 0.25 = 0. \end{cases}$$

Другой вариант состоит в формулировке задачи по нахождению условного экстремума одного из показателей при ограничениях на значения других. Например, координаты условного максимума функции $S_0(x_1, x_2)$ при ограничении $D(x_1, x_2) = 0.35$, вычисленные методом условной оптимизации с линейной аппроксимацией доверительной области [23], составили значения $x_{\text{opt}} = (0.350, 0.748)$.

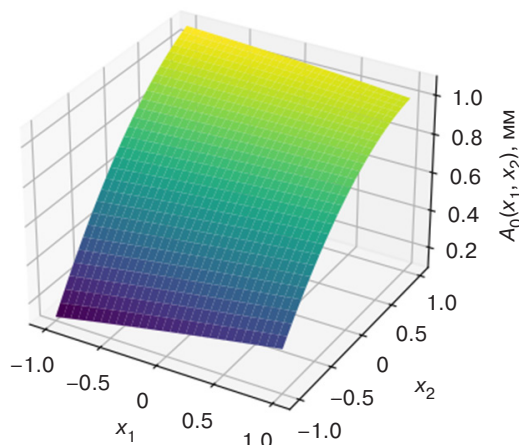


Рис. 3. Зависимость высоты валика наплавки от нормированных значений мощности лазера и подачи порошка

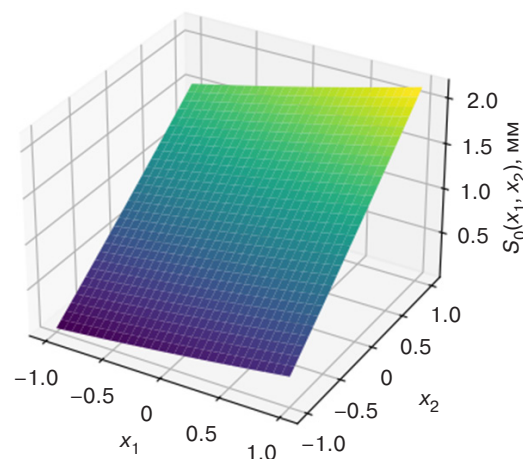


Рис. 4. Зависимость площади сечения валика наплавки от нормированных значений мощности лазера и подачи порошка

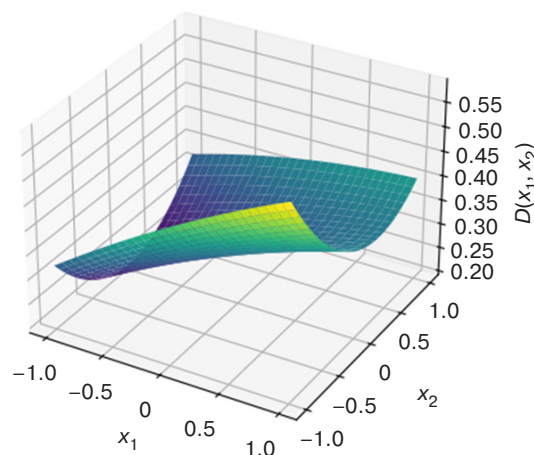


Рис. 5. Зависимость относительной доли площади области подплавления от нормированных значений мощности лазера и подачи порошка

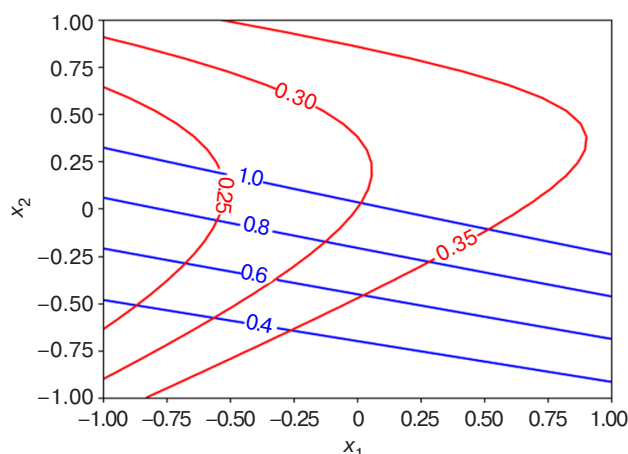


Рис. 6. Контурные кривые функций регрессии $S_0(x_1, x_2)$ для уровней {0.4, 0.6, 0.8, 1.0} и $D(x_1, x_2)$ – для уровней {0.25, 0.30, 0.35}

После того как выбраны оптимальные значения технологических параметров наплавки, можно рассчитать оптимальный шаг нанесения дорожек. Технологический процесс нанесения покрытия состоит в последовательном наложении порошкообразного материала на поверхность в виде дорожек с определенным шагом, который в дальнейшем будем обозначать w . Если шаг нанесения меньше, чем ширина профиля дорожки, то происходит наложение профилей, и материал второй дорожки заполняет пространство между этими профилями [15]. При этом возникает задача выбора оптимального значения w , при котором избыток материала, образующийся при наложении профилей, полностью заполняет свободное пространство между ними. В работе [26] рассчитаны оптимальные значения w для дорожек некоторых простых профилей. Вычислим оптимальное значение w при аппроксимации профиля функцией (14), параметры которой A_0 , B_0 рассчитаны по уравнению регрессии (15).

На рис. 7 показана схема к вычислению оптимальной величины w : кривая 1 отвечает профилю первой дорожки, кривая 2 – профилю второй дорожки, наложение которой осуществляется с нахлестом относительно первой. Образующийся вследствие наложения профилей избыток материала теоретически формирует кривую 3, которая получена суммированием профилей дорожек 1 и 2 в области их наложения. Оптимальным шагом наложения дорожек будет такой, при котором площадь области ABC пересечения профилей дорожек будет равна площади области BDE, расположенной выше зоны нахлеста. В этом случае расплавленный металл из области под кривой 3 равномерно заполнит свободное пространство между дорожками, и поверхность покрытия будет наиболее ровной.

С учетом симметрии фигур относительно вертикальной линии FG, проходящей через точку пересечения профилей B с безразмерной координатой ζ , оптимальное наложение дорожек предполагает равенство площадей областей ABG и BDF, которое можно выразить следующим образом:

$$A_0 \zeta - \int_0^{\zeta} A_0 \cos^{B_0} \left(\frac{\pi}{2} x \right) dx = \int_{\zeta}^1 A_0 \cos^{B_0} \left(\frac{\pi}{2} x \right) dx. \quad (17)$$

Отсюда следует, что

$$\zeta = \int_0^1 \cos^{B_0} \left(\frac{\pi}{2} x \right) dx. \quad (18)$$

Легко видеть, что оптимальное значение шага нанесения дорожек в безразмерных единицах может быть выражено через ζ посредством формулы:

$$w_{\text{opt}} = 2 - 2(1 - \zeta) = 2\zeta. \quad (19)$$

В частности, для $B_0(0.35, 0.75) = 0.544$ оптимальное значение шага равно $w_{\text{opt}} = 1.498$, а для $B_0(-0.753, -0.283) = 0.700$ равно $w_{\text{opt}} = 1.409$.

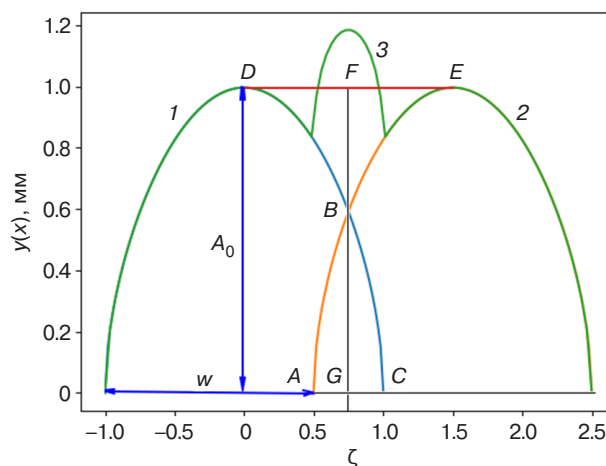


Рис. 7. Схема к вычислению оптимального значения шага наложения дорожек

ВЫВОДЫ

В работе предложена методика аппроксимации профиля сечения дорожки напыления при лазерной наплавке порошковых металлов и оптимизации на ее основе технологических параметров наплавки.

Исследованы три варианта аппроксимирующих функций профиля, из которых выбран вариант нелинейной зависимости, включающий два параметра аппроксимации. Рассчитаны коэффициенты уравнений регрессии зависимости параметров аппроксимирующей функции, а также площади сечения контура и коэффициента подплавления от технологических параметров наплавки: мощности лазера и подачи порошка.

В результате математического моделирования зависимости параметров функции профиля сечения дорожки напыления показано, что площадь сечения контура монотонно возрастает с увеличением мощности лазера и подачи порошка, тогда как зависимость коэффициента подплавления от указанных параметров имеет вид поверхности с седловой точкой. Для данных характеристик контура решена задача условной оптимизации площади сечения контура при ограничении на величину коэффициента подплавления.

Предложенная в настоящей работе аппроксимирующая функция профиля сечения дорожки наплавки может быть использована для решения возникающей на практике задачи расчета оптимального шага нанесения дорожек, обеспечивающего достижение ровной поверхности наплавки.

Вклад авторов. Все авторы в равной степени внесли свой вклад в исследовательскую работу.

Authors' contribution. All authors equally contributed to the research work.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

1. Toyserkani E., Khajepour A., Corbin S. *Laser Cladding*. Boca Raton: CRC Press; 2005. 263 p.
2. Ghasempour-Mouziraji M., Lagarinhos J., Afonso D., de Sousa R.A. A review study on metal powder materials and processing parameters in Laser Metal Deposition. *Opt. Laser Technol.* 2024;170:110226. <https://doi.org/10.1016/j.optlastec.2023.110226>
3. Cheng J., Xing Y., Dong E., Zhao L., Liu H., Chang T., Chen M., Wang J., Lu J., Wan J. An Overview of Laser Metal Deposition for Cladding: Defect Formation Mechanisms, Defect Suppression Methods and Performance Improvements of Laser-Cladded Layers. *Materials*. 2022;15(16):5522. <https://doi.org/10.3390/ma15165522>
4. Davis J.R. *Handbook of Thermal Spray Technology*. ASM International; 2004. 338 p.
5. Газотермическое напыление; под общей ред. Балдаева Л.Х. М.: Маркет ДС; 2007. 344 с.
[Baldaev L.H. (Ed.). *Gazotermicheskoe napylenie (Gas Thermal Spraying)*; Moscow: Market DS; 2007. 344 p. (in Russ.).]
6. Ильющенко А.Ф., Шевцов А.И., Оковитый В.А., Громыко В.Ф. Процессы формирования газотермических покрытий и их моделирование. Минск: Беларус. наука; 2011. 357 с.
[Il'yushchenko A.F., Shevtsov A.I., Okovityi V.A., Gromyko V.F. *Protsessy formirovaniya gazotermicheskikh pokrytiy i ikh modelirovanie (Processes of Formation of Gas-Thermal Coatings and Their Modeling)*. Minsk: Belarus. nauka; 2011. 357 p. (in Russ.).]
7. Bian L., Shamsaei N., Usher J. (Eds.). *Laser-Based Additive Manufacturing of Metal Parts: Modeling, Optimization, and Control of Mechanical Properties*. Boca Raton: CRC Press; 2018. 328 p.
8. Steen W.M., Mazumder J. *Laser Material Processing*. London: Springer; 2010. 558 p.
9. Dowden J.M. *The Mathematics of Thermal Modeling an Introduction to the Theory of Laser Material Processing*. Boca Raton: CRC Press; 2001. 292 p.
10. Pinkerton A.J. Advances in the modeling of laser direct metal deposition. *J. Laser Appl.* 2015;27:S15001. <https://doi.org/10.2351/1.4815992>
11. Kovalev O.B., Bedenko D.V., Zaitsev A.V. Development and application of laser cladding modeling technique: From coaxial powder feeding up to the surface deposition and bead formation. *Appl. Math. Modell.* 2018;57:339–359. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2017.09.043>
12. Khamidullin B.A., Tsvil'skiy I.V., Gorunov A.I., Gilmudinov A.Kh. Modeling of the effect of powder parameters on laser cladding using coaxial nozzle. *Surf. Coat. Technol.* 2019;364:430–443. <https://doi.org/10.1016/j.surfcoat.2018.12.002>
13. De Oliveira U., Ocelik V., De Hosson J.Th.M. Analysis of coaxial laser cladding processing conditions. *Surf. Coat. Technol.* 2005;197(2–3):127–136. <https://doi.org/10.1016/j.surfcoat.2004.06.029>
14. Ocelik V., De Oliveira U., De Hosson J.Th.M. Thick tool steel coatings with laser cladding. *WIT Trans. Eng. Sci.* 2007;55. <https://doi.org/10.2495/SECM070021>
15. Ocelik V., Nenadl O., Palavra A., De Hosson J.Th.M. On the geometry of coating layers formed by overlap. *Surf. Coat. Technol.* 2014;242:54–61. <https://doi.org/10.1016/j.surfcoat.2014.01.018>
16. Jhavar S., Jain N.K., Paul C.P. Development of micro-plasma transferred arc (μ -PTA) wire deposition process for additive layer manufacturing applications. *J. Mater. Process. Technol.* 2014;214(5):1102–1110. <https://doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2013.12.016>
17. Jhavar S., Jain N.K., Paul C.P. Enhancement of Deposition Quality in Micro-plasma Transferred Arc Deposition Process. *Mater. Manuf. Process.* 2014;29(8):1017–1023. <https://doi.org/10.1080/10426914.2014.892984>
18. Jain N.K., Sawant M.S., Nikam S.H., Jhavar S. Metal Deposition: Plasma-Based Processes. In: *Encyclopedia of Plasma Technology*. 1st ed. V. II. New York: Taylor and Francis; 2016. 19 p. <http://doi.org/10.1081/E-EPLT-120053919>
19. Yu T., Yang L., Zhao Yu., Sun J., Li B. Experimental research and multi-response multi-parameter optimization of laser cladding Fe313. *Opt. Laser Technol.* 2018;108:321–332. <https://doi.org/10.1016/j.optlastec.2018.06.030>
20. Suzuki S., Keiichi A. Topological structural analysis of digitized binary images by border following. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*. 1985;30(1):32–46. [https://doi.org/10.1016/0734-189X\(85\)90016-7](https://doi.org/10.1016/0734-189X(85)90016-7)
21. Draper N.R., Smith H. *Applied Regression Analysis*: 3rd ed. New York: Wiley-Interscience; 1998. 736 p.
22. Bates D.M., Watts D.G. *Nonlinear Regression Analysis and its Applications*. New York: Wiley & Sons; 1988. 365 p.
23. Vugrin K.W., Swiler L.P., Roberts R.M., Stucky-Mack N.J., Sullivan S.P. Confidence region estimation techniques for nonlinear regression in groundwater flow: Three case studies. *Water Resour. Res.* 2007;43(3):W03423. <https://doi.org/10.1029/2005WR004804>
24. Powell M.J.D. Direct search algorithms for optimization calculations. *Acta Numerica*. 1998;7:287–336. <https://doi.org/10.1017/S0962492900002841>
25. Соловьев М.Е., Кокарев С.С., Балдаев С.Л., Балдаев Л.Х., Мищенко В.И., Федорова М.О. Аппроксимация профиля сечения пятна напыления при газотермическом нанесении порошкового покрытия. *Информационно-технологический вестник*. 2022;3(33):138–163.
[Soloviev M.E., Kokarev S.S., Baldaev S.L., Baldaev L.Kh., Mishchenko V.I., Fedorova M.O. Approximation of the profile of the section of the spray spot during gas thermal deposition of powder coating. *Informatsionno-tekhnologicheskii vestnik = Information Technology Bulletin*. 2022;3(33):138–163 (in Russ.).]
26. Niz'ev V.G., Khomenko M.D., Mirzade F.Kh. Process planning and optimisation of laser cladding considering hydrodynamics and heat dissipation geometry of parts. *Quantum Electron.* 2018;48(8):743–748. <https://doi.org/10.1070/QEL16708>
27. Cao Y., Zhu S., Liang X., Wang W. Overlapping model of beads and curve fitting of bead section for rapid manufacturing by robotic MAG welding process. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing (RCIM)*. 2011;27(3):641–645. <https://doi.org/10.1016/j.rcim.2010.11.002>

28. Балдаев С.Л., Соловьев М.Е., Раухваргер А.Б., Балдаев Л.Х., Мищенко В.И. Влияние параметров плазменного напыления порошка оксида алюминия на адгезионную прочность керамических покрытий термонапряженных узлов газотурбинных двигателей. *Вестник МЭИ*. 2024;1:93–102. <https://doi.org/10.24160/1993-6982-2024-1-93-102>
[Baldaev S.L., Soloviev M.E., Raukhvarger A.B., Baldaev L.Kh., Mishchenko V.I. The Influence of Aluminum Oxide Powder Plasma Spraying Parameters on the Adhesive Strength of Ceramic Coatings Applied to the Gas Turbine Engine Thermally Stressed Components. *Vestnik MEI = Bulletin of MPEI*. 2024;1:93–102 (in Russ.). <https://doi.org/10.24160/1993-6982-2024-1-93-102>]

Об авторах

Соловьев Михаил Евгеньевич, д.ф.-м.н. профессор, кафедра информационных систем и технологий, Институт цифровых систем, ФГБОУ «Ярославский государственный технический университет» (150023, Россия, Ярославль, Московский пр-т, д. 88). E-mail: me_s@mail.ru. Scopus Author ID 57190224257, ResearcherID A-4328-2014, SPIN-код РИНЦ 7444-3564, <https://orcid.org/0000-0002-8840-248X>

Малышев Денис Владимирович, ассистент, кафедра информационных систем и технологий, Институт цифровых систем, ФГБОУ «Ярославский государственный технический университет» (150023, Россия, Ярославль, Московский пр-т, д. 88). E-mail: deniscs49@gmail.com. <https://orcid.org/0009-0009-9861-1531>

Балдаев Сергей Львович, к.т.н., заместитель генерального директора по технологиям, ООО «Технологические системы защитных покрытий» (108851, Россия, Москва, г. Щербинка, ул. Южная, д. 9А). E-mail: s.baldaev@tspc.ru. ResearcherID B-8056-2018, SPIN-код РИНЦ 6954-6407, <https://orcid.org/0000-0002-1917-7979>

Балдаев Лев Христофорович, д.т.н., генеральный директор ООО «Технологические системы защитных покрытий» (108851, Москва, г. Щербинка, ул. Южная, д. 9А). E-mail: l.baldaev@tspc.ru. SPIN-код РИНЦ 8991-5015, <https://orcid.org/0000-0002-9084-8771>

About the authors

Mikhail E. Soloviev, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Department of Information Systems and Technologies, Institute of Digital Systems, Yaroslavl State Technical University (88, Moskovskii pr., Yaroslavl, 150023 Russia). E-mail: me_s@mail.ru. Scopus Author ID 57190224257, ResearcherID A-4328-2014, RSCI SPIN-code 7444-3564, <https://orcid.org/0000-0002-8840-248X>

Denis V. Malyshev, Assistant, Department of Information Systems and Technologies, Institute of Digital Systems, Yaroslavl State Technical University (88, Moskovskii pr., Yaroslavl, 150023 Russia). E-mail: deniscs49@gmail.com. <https://orcid.org/0009-0009-9861-1531>

Sergey L. Baldaev, Cand. Sci. (Eng.), Deputy General Director, Technologies of Technological Systems of Protective Coatings (9A, Yuzhnaya ul., Shcherbinka, Moscow, 108851 Russia). E-mail: s.baldaev@tspc.ru. ResearcherID B-8056-2018, RSCI SPIN-code 6954-6407, <https://orcid.org/0000-0002-1917-7979>

Lev Kh. Baldaev, Dr. Sci. (Eng.), General Director, Technologies of Technological Systems of Protective Coatings (9A, Yuzhnaya ul., Shcherbinka, Moscow, 108851 Russia). E-mail: l.baldaev@tspc.ru. RSCI SPIN-code 8991-5015, <https://orcid.org/0000-0002-9084-8771>

Математическое моделирование
Mathematical modeling

УДК 621.391:53.08

<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-2-143-154>

EDN GXAGAW



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Восстановление изображений с использованием дискретной функции рассеяния точки, получаемой с учетом конечности размера пикселя

В.Б. Федоров[@],
С.Г. Харламов,
А.В. Федоров

МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, 119454 Россия

[@] Автор для переписки, e-mail: feodorov@mirea.ru

Резюме

Цели. Рассматривается задача восстановления расфокусированного и/или линейно смазанного изображения с использованием регуляризованного по Тихонову инверсного фильтра. Распространенным подходом к решению этой задачи является решение интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода типа свертки путем его дискретизации на основе квадратурных формул. Цель работы – получить выражение функции рассеяния точки (ФРТ) с учетом конечности размера пикселя и продемонстрировать его полезность.

Методы. Исследование основывается на теории сигналов и методе восстановления цифровых изображений с использованием тихоновской регуляризации.

Результаты. Получены формулы дискретной ФРТ как для случая расфокусированного, так и для случая линейно смазанного под произвольным углом изображения, с учетом конечности размера пикселя. Рассмотрены отличия полученных формул от традиционно используемых, показано при каких условиях эти отличия практически исчезают, а при каких – могут оказаться существенными.

Выводы. При восстановлении изображений на пределе разрешающей способности, т.е. когда размеры пикселя не могут считаться пренебрежимо малыми в сравнении с деталями изображения, предлагаемый подход может несколько улучшать разрешение. Кроме того, полученная формула дискретной ФРТ, соответствующей линейному смазу изображения в произвольно заданном направлении, позволяет не только решать задачу без необходимости предварительного поворота изображения, но и учитывать величину смаза с точностью до долей пикселя. Это дает преимущество в плане повышения разрешения предельно мелких деталей изображения и позволяет использовать данную формулу при решении задачи адаптивной деконволюции, когда требуется точная подстройка параметров ФРТ.

Ключевые слова: смазанное изображение, расфокусированное изображение, разрешающая способность, конечный размер пикселя, дискретная ФРТ, восстановление изображения, регуляризация по Тихонову, коэффициент регуляризации

• Поступила: 14.05.2024 • Доработана: 01.07.2024 • Принята к опубликованию: 30.01.2025

Для цитирования: Федоров В.Б., Харламов С.Г., Федоров А.В. Восстановление изображений с использованием дискретной функции рассеяния точки, получаемой с учетом конечности размера пикселя. *Russian Technological Journal*. 2025;13(2):143–154. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-2-143-154>, <https://elibrary.ru/GXAGAW>

Прозрачность финансовой деятельности: Авторы не имеют финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

RESEARCH ARTICLE

Image restoration using a discrete point spread function with consideration of finite pixel size

Victor B. Fedorov[@],
Sergey G. Kharlamov,
Alexey V. Fedorov

MIREA – Russian Technological University, Moscow, 119454 Russia

[@] Corresponding author, e-mail: feodorov@mirea.ru

Abstract

Objectives. The problem of restoring defocused and/or linearly blurred images using a Tikhonov-regularized inverse filter is considered. A common approach to this problem involves solving the Fredholm integral equation of the first convolution type by means of discretization based on quadrature formulas. The work sets out to obtain an expression of the point scattering function (PSF) taking into account pixel size finiteness and demonstrate its utility in application.

Methods. The research is based on signal theory and the method of digital image restoration using Tikhonov regularization.

Results. Taking into account the finiteness of the pixel size, discrete PSF formulas are obtained both for the case of a defocused image and for the case of a linearly blurred image at an arbitrary angle. It is shown that, while differences between the obtained formulas and those traditionally used are not significant under some conditions, under other conditions they can become significant.

Conclusions. In the case of restoring images at the resolution limit, i.e., when the pixel size cannot be considered negligibly small compared to the details of the image, the proposed approach can slightly improve the resolution. In addition, the derived formula for the discrete PSF corresponding to linear blur in an arbitrarily specified direction can be used to solve the problem without the need for prior image rotation and account for the blur value with sub-pixel accuracy. This offers an advantage in terms of improving the resolution of extremely fine details in the image, allowing the obtained formula to be used in solving the adaptive deconvolution problem, where precise adjustment of PSF parameters is required.

Keywords: blurred image, defocused image, resolution limit, finite pixel size, discrete PSF, image restoration, Tikhonov regularization, regularization parameter

• Submitted: 14.05.2024 • Revised: 01.07.2024 • Accepted: 30.01.2025

For citation: Fedorov V.B., Kharlamov S.G., Fedorov A.V. Image restoration using a discrete point spread function with consideration of finite pixel size. *Russian Technological Journal*. 2025;13(2):143–154. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-2-143-154>, <https://elibrary.ru/GXAGAW>

Financial disclosure: The authors have no financial or proprietary interest in any material or method mentioned.

The authors declare no conflicts of interest.

ВВЕДЕНИЕ

В современном мире качество изображения объектов имеет решающее значение во многих областях, включая медицинскую визуализацию, астрономию, дистанционное зондирование Земли со спутников, контроль безопасности и видеонаблюдение. Рост потребности в высококачественных изображениях ставит перед исследователями задачу улучшения методов их восстановления и обработки. Одной из основных проблем в этом контексте является восстановление изображений, искаженных из-за равномерного прямолинейного движения объекта или камеры, что приводит к линейному смазу, а также из-за расфокусировки.

Данная работа является продолжением исследований авторов [1], в ней исследуется вопрос восстановления линейно-смазанного или расфокусированного изображения применительно к случаю, когда параметры смаза известны. К настоящему времени этой проблеме посвящено уже довольно много работ. Так теории решения обратных некорректных задач, к числу которых относится задача восстановления изображений, посвящены фундаментальные работы [2–5]. Непосредственно решению задачи восстановления изображений посвящены основополагающие работы [6–10], изданные еще до начала 90-х гг. прошлого века. В работах [11–15] отражено современное состояние дел в этой области. Во всех перечисленных работах используются выражения функции рассеяния точки (ФРТ), предполагающие бесконечную малость размера пикселя. В отличие от этого, авторами данной работы получены выражения ФРТ, которые учитывают конечность размеров пикселя, что дает следующие преимущества. Прежде всего, при восстановлении изображений, полученных на пределе разрешающей способности фотоаппарата, когда размеры пикселя не могут считаться пренебрежимо малыми по сравнению с деталями изображения, учет конечности размера пикселя позволяет несколько улучшить качество восстановления. Это справедливо как в случае восстановления линейного смазанного, так и в случае расфокусированного изображения. Кроме того, полученные выражения ФРТ непрерывно зависят от параметров смаза, что позволяет легко подстраивать эти параметры

под необходимые величины с точностью до долей пикселя. В частности, легко осуществлять точный выбор величины и направления линейного смаза.

Целью работы является демонстрация преимуществ предлагаемой модели дискретной ФРТ, учитывающей конечность размеров пикселя. Статья содержит строгий математический вывод указанных формул ФРТ, их сравнение с традиционными подходами. Полученные теоретические результаты подкреплены численным моделированием исследуемых искажений и их устранением через деконволюцию с использованием регуляризации по А.Н. Тихонову.

1. ДВУМЕРНАЯ ДИСКРЕТНАЯ ФРТ ПРИ ЛИНЕЙНОМ СМАЗЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ В ПРОИЗВОЛЬНОМ НАПРАВЛЕНИИ

Рассмотрим прямоугольную панель светочувствительных элементов, представляющую собой матрицу размером $M \times N$ пикселей. Будем считать, что пиксели имеют квадратную форму и сплошь, без зазоров заполняют всю панель; пусть w – размер пикселя. Каждому пикселю припишем пару индексов (m, n) , $m \in \overline{0, M-1}$; $n \in \overline{0, N-1}$, при этом пиксель в левом верхнем углу панели будет иметь индексы $(0, 0)$. Свяжем с этой панелью декартову систему координат Oxy с началом в левом верхнем углу панели, так что центр пикселя с индексами (m, n) находится в точке с координатами $(mw + w/2, nw + w/2)$, ось Ox направим вертикально вниз, а ось Oy – вертикально вправо.

Пусть функция $p(x, y)$ определяет поле яркостей точек панели, создаваемое световым потоком, формирующим изображение, в некоторый момент времени t . Функцию $p(x, y)$ естественно считать независимой от t . Тогда световая энергия, накапливаемая пикселем с индексами (m, n) за время экспозиции τ , от движущегося относительно панели изображения (сфокусированного светового потока) равна

$$q[m, n] = \int_{mw}^{(m+1)w} dx \int_{nw}^{(n+1)w} dy \int_0^{\tau} p(x - v_x(x, y)t, y - v_y(x, y)t) dt,$$

где $(v_x(x, y), v_y(x, y))$ – декартовы компоненты вектора скорости движения точки изображения

с координатами (x, y) . Здесь пока рассматривается общий случай, когда разные точки изображения могут двигаться с разными скоростями.

Поле яркостей можно представить двумерным интерполяционным рядом Котельникова:

$$p(x, y) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} p[m, n] \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{w} - m\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{y}{w} - n\right), \quad (1)$$

где $p[m, n] = p(mw, nw)$.

Подставив это выражение в интеграл, получим:

$$q[k, l] = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_{k, l}[k - m, l - n] p[m, n],$$

где

$$\begin{aligned} h_{k, l}[m, n] &= \\ &= w^2 \int_0^{\tau} \operatorname{sinc}\left(m - \frac{v_x(kw, lw)t}{w}\right) \operatorname{sinc}\left(n - \frac{v_y(kw, lw)t}{w}\right) dt = \\ &= w^2 \tau \int_0^1 \operatorname{sinc}\left(m - \frac{v_x(kw, lw)\tau}{w} t\right) \operatorname{sinc}\left(n - \frac{v_y(kw, lw)\tau}{w} t\right) dt. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что в пределах одного пикселя поле скоростей движения изображения можно считать практически постоянным и равным его значению в левом верхнем углу пикселя; при этом множитель $w^2\tau$ далее будем считать равным единице.

Если поле скоростей постоянно в пределах всей матрицы пикселей, то получаем двумерную свертку

$$q[k, l] = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h[m, n] p[k - m, l - n], \quad (2)$$

где ядро этой свертки определено формулой

$$h[m, n] = \int_0^1 \operatorname{sinc}(m - u_x t) \operatorname{sinc}(n - u_y t) dt, \quad (3)$$

$u_x = v_x \tau / w$, $u_y = v_y \tau / w$ – компоненты смещения, заданные в пикселях, за время экспозиции.

При $u_x = u_y = 0$ имеем $h[m, n] = \operatorname{sinc}(m) \operatorname{sinc}(n) = \delta[m] \delta[n]$, как и должно быть.

На рис. 1 показаны примеры графиков дискретного ядра, рассчитываемого по формуле (3).

С учетом конечности размеров матрицы пикселей в общем случае имеем двумерную конечную свертку:

$$q[m, n] = \sum_{k=0}^{\min(m, K-1)} \sum_{l=0}^{\min(n, L-1)} h[k, l] p[m - k, n - l], \quad (4)$$

где $m \in \overline{0, M-1}$; $n \in \overline{0, N-1}$ и считается, что массив $p[:, :]$ имеет размеры $M \times N$; массив $h[:, :]$ – размеры $K \times L$ и массив $q[:, :]$ – размеры $(M + K) \times (N + L)$.

В частности, при $u_x = 0$ (смещения по вертикали нет)

$$h[m, n] = \delta[m] \int_0^1 \operatorname{sinc}(n - u_y t) dt,$$

где $\delta[m]$ – дискретная дельта-функция, т.е. при отсутствии вертикальной составляющей скорости двумерная свертка фактически сводится к одномерной с ядром

$$h[n] = \int_0^1 \operatorname{sinc}(n - u_y t) dt.$$

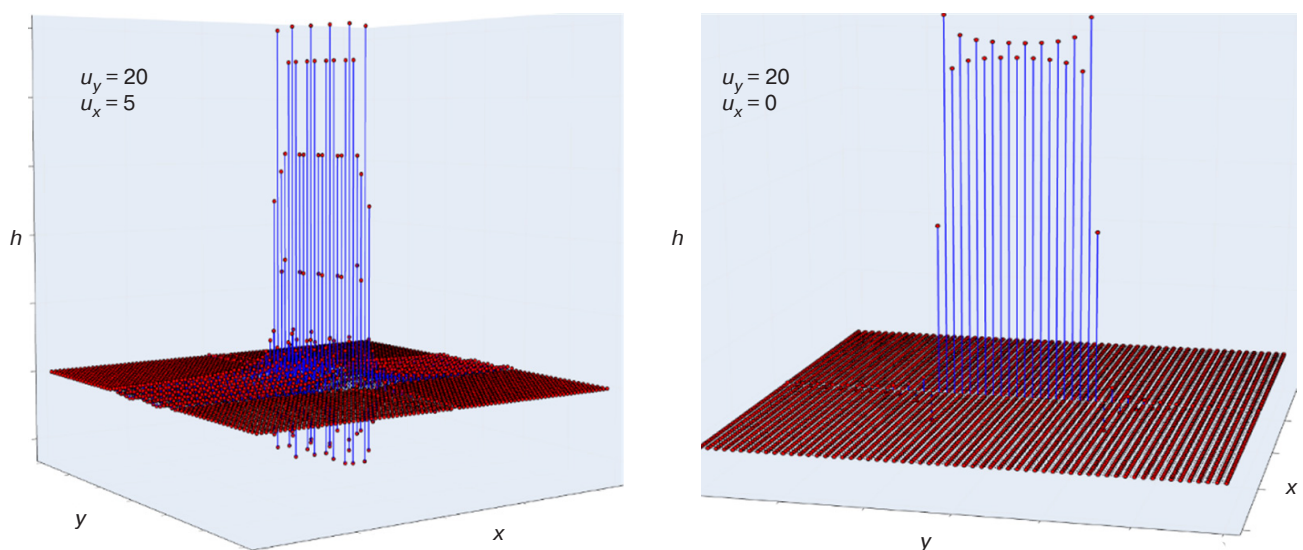


Рис. 1. Примеры графиков двумерного дискретного ядра линейного смаза, рассчитываемого по формуле (3)

При этом, с учетом конечности размеров матрицы пикселей, имеем

$$q[k] = \sum_{m=0}^{\min(k, M-1)} h[m]p[k-m],$$

где $k \in \overline{0, M-1}$.

Если в правую часть формулы (3) добавить множитель $1/w^2$ и затем перейти к пределу при $w \rightarrow 0$, считая при этом, что ядро зависит не от целочисленных индексов m, n , а от соответствующих им непрерывных переменных $x = mw, y = nw$, то получим формулу вида:

$$h(x, y) = \int_0^1 \delta(x - v_x \tau) \delta(y - v_y \tau) dt.$$

Такая формула встречается в литературе по оптике (см., например, [16]), но непосредственно в таком виде она непригодна для дискретизации. Дискретизировать ее можно только, если заменить входящую в нее дельта-функцию подходящей регулярной функцией; такая замена на масштабированную функцию sinc возвращает к формуле (3). Возможен, однако, и несколько иной путь преобразований с целью получения выражения, пригодного для дискретизации:

$$h(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} I_{(0;1)}(t) \delta(x - v_x \tau) \delta(y - v_y \tau) dt = I_{(0;1)}\left(\frac{y}{v_y \tau}\right) \delta\left(x - \frac{v_x}{v_y} y\right),$$

где $I_{(0;1)}(y)$ – индикаторная функция интервала (0; 1). Отсюда ввиду того, что в пространстве функций с финитным частотным спектром масштабированная соответствующим образом функция sinc играет роль дельта-функции Дирака, получаем, что

$$h(x, y) = I_{(0;v_y \tau)}(y) \operatorname{sinc}\left(\frac{1}{w}\left(x - \frac{v_x}{v_y} y\right)\right).$$

Появляющийся при такой замене масштабный коэффициент $1/w$ для удобства был отброшен. Теперь, снова полагая $x = mw, y = nw$, получим дискретный аналог последней формулы

$$h[m, n] = hu_y[n] \operatorname{sinc}\left(m - \frac{u_x}{u_y} n\right), \quad (5)$$

где $u_y = \frac{v_y \tau}{w} \in \mathbb{N}$, $hu_y[n]$ – функция целочисленного аргумента при крайних значениях аргумента $n = 0, u_y$, равная 1/2; равная 1 при $n = 1, 2, \dots, u_y - 1$; равная 0 при всех остальных n , что соответствует квадратурной формуле трапеций.

Здесь важно подчеркнуть, что в формуле (5) величина горизонтального смаза u_y предполагается целой положительной величиной, в то время как на величину вертикальной составляющей смаза u_x такого ограничения данная формула уже не накладывает, величина u_x в ней может принимать любые вещественные значения.

В частности, если в (5) положить $u_x = 0$, то с учетом тождества $\operatorname{sinc}(m) = \delta[m]$ имеем $h[m, n] = h_{u_y}[n] \delta[m]$. Поскольку $\delta[m]$ отлична от нуля лишь при $m = 0$, то двумерное ядро $h[m, n]$ заменяется одномерным ядром $h_{u_y}[n]$, которое чаще всего и используется в литературе для описания горизонтального линейного смаза (см. например, [8, 14, 15]).

Формула (5) может рассматриваться как альтернатива формуле (3), она также, как и формула (3), позволяет восстанавливать линейно смазанное изображение при произвольном направлении смаза. Однако в отличие от формулы (5), формула (3) снимает ограничения на значения величины горизонтального смаза u_y , которое в формуле (3) уже может быть любым вещественным числом, также как и величина вертикальной составляющей смаза u_x . Это дает следующие преимущества при использовании формулы (3). Во-первых, как было показано в [1], при восстановлении изображения на пределе разрешающей способности учет реальной величины смаза с точностью до долей пикселя может повышать разрешение деталей восстанавливаемого изображения. Во-вторых, если иметь в виду применение рассматриваемого метода восстановления изображения в качестве основы для решения задачи адаптивной деконволюции, когда направление и величина смаза известны не точно, то дискретность параметра, определяющего величину горизонтального смаза, может быть препятствием.

2. ДВУМЕРНАЯ ДИСКРЕТНАЯ ФРТ ПРИ РАСФОКУСИРОВКЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ

Для простоты рассмотрим модель, в которой изображение расфокусируется по гауссовскому закону. Хотя для оптических систем высокого качества, таких как телескопы и микроскопы, гауссовская модель обычно не используется, она позволяет продемонстрировать сам метод построения дискретной ФРТ с учетом конечности размеров пикселя. Также гауссовская расфокусировка часто используется именно

в демонстрационных целях (см., например, [14]). При необходимости гауссовская функция может быть заменена любой другой, например, функцией Эйри, которая соответствует случаю, когда дифракция является единственной причиной расфокусировки. Принципиальных ограничений здесь нет.

Пусть функция $p(x, y)$ – интенсивность светового потока, попадающего в апертуру объектива. Тогда, вследствие предполагаемой расфокусировки этого потока, на светочувствительной панели поле яркостей точек определяется интегралом свертки

$$q(x, y) = \frac{1}{2\pi(\sigma w)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x-u, y-v) e^{-\frac{u^2+v^2}{2\pi(\sigma w)^2}} du dv,$$

формирующим изображение в течение времени экспозиции τ , где σ – параметр, определяющий степень расфокусировки, w – размер пикселя.

Подставляя в этот интеграл выражение (1), получим:

$$\begin{aligned} q(x, y) = & \frac{1}{2\pi\sigma^2 w^2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} p[m, n] \times \\ & \times \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}\left(\frac{x-u}{w} - m\right) e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2 w^2}} \times \\ & \times du \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}\left(\frac{y-v}{w} - n\right) e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2 w^2}} dv \end{aligned}$$

Откуда, полагая $x = wl$, $y = wk$, $k, l \in \mathbb{Z}$, имеем:

$$\begin{aligned} q(k, l) = & \frac{1}{2\pi\sigma^2 w^2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} p[m, n] \times \\ & \times \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}\left(k - m - \frac{u}{w}\right) e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2 w^2}} du \times \\ & \times \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}\left(l - n - \frac{v}{w}\right) e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2 w^2}} dv. \end{aligned}$$

Если в полученной формуле перейти к пределу при $w \rightarrow 0$, то с учетом того, что $\text{sinc}(x/w)/w \rightarrow \delta(x)$, приходим к дискретной свертке изображения $p[m, n]$ с традиционным ядром, представляющим собой точечную гауссовскую функцию. А именно, в пределе получается традиционно используемое в этой задаче ядро дискретной свертки

$$h_{(w \rightarrow 0)}[m, n] = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{m^2+n^2}{2\sigma^2}}.$$

Если же не переходить к пределу, то заменяя в последних двух интегралах переменные u/w и v/w , на u и v соответственно, получим:

$$\begin{aligned} q(k, l) = & \frac{1}{2\pi\sigma^2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} p[m, n] \times \\ & \times \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(k - m - u) e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} du \times \\ & \times \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(l - n - v) e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}} dv. \end{aligned}$$

Таким образом, как и в случае линейного смаза, имеем двумерную дискретную свертку вида (2), при этом в случае расфокусировки соответствующее ядро оказывается разделимым

$$h[m, n] = h_1[m]h_1[n], \quad (6)$$

где

$$h_1[k] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(k - u) e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} du = (\text{sinc} * g)(k),$$

$g(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}$, звездочка здесь обозначает операцию одномерной аналоговой свертки.

Рассмотрим свертку $f(z) = (\text{sinc} * g)(z)$. По теореме о свертке преобразование Фурье функции $f(z)$

$$F(v) = I_{(-0.5; 0.5)}(v) e^{-2\pi^2(v\sigma)^2},$$

где учтено, что Фурье-образ функции $\text{sinc}(z)$ – это индикаторная функция интервала $(-0.5; 0.5)$, а Фурье-образ гауссовской функции $g(z)$ – это есть функция $\frac{1}{\pi} e^{-2(v\sigma)^2}$. Убедиться в последнем можно,

вспомнив, что Фурье-образ функции $e^{-\pi(z/\lambda)^2} / \lambda$ есть функция $e^{-\pi(v/\lambda)^2}$ (в нашем случае $\lambda = \sqrt{2\pi\sigma}$).

Так как $h_1[k]$ есть Фурье-оригинал функции $F(v)$ в точке $z = k$, то имеем:

$$\begin{aligned} h_1[k] = & \int_{-0.5}^{0.5} e^{-2(\pi v\sigma)^2} e^{i2\pi vk} dv = \\ = & \int_{-0.5}^{0.5} e^{-2(\pi v\sigma)^2} \cos(2\pi vk) dv. \end{aligned} \quad (7)$$

Последнее равенство имеет место в силу того, что мнимая часть этого интеграла заведомо должна

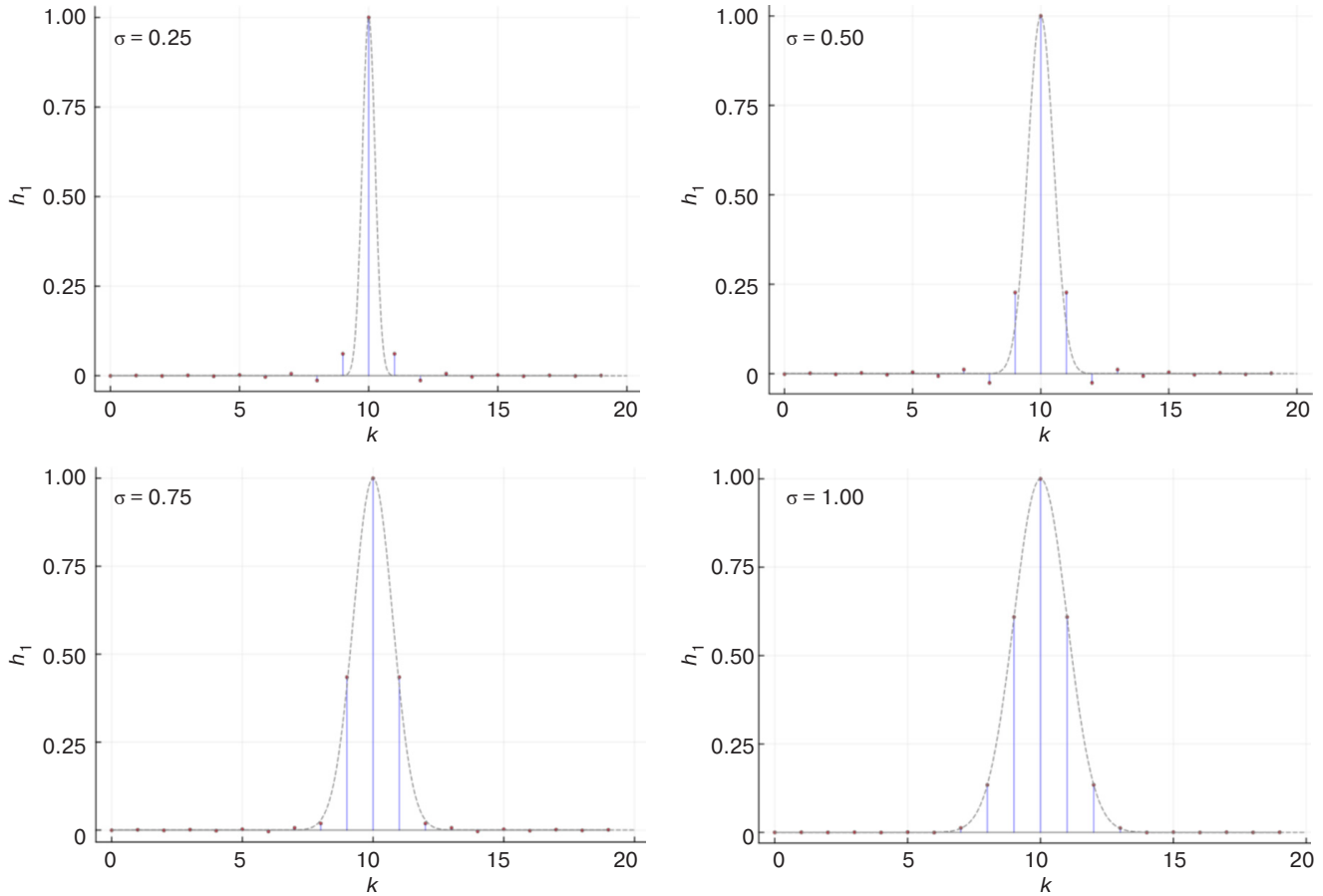


Рис. 2. Примеры графиков одномерного ядра (нормированного на максимум), соответствующего гауссовской расфокусировке; пунктиром показаны графики гауссовских кривых, которые дают предельные значения ядра при $w \rightarrow 0$

быть равна нулю; можно убедиться в этом и непосредственно – в мнимой части под интегралом будет нечетная функция. В пределе при $\sigma \rightarrow 0$ имеем $h_1[k] = \delta[k]$. На рис. 2 приведены графики одномерного ядра (7) при различных значениях параметра σ , из которых видно, что уже при $\sigma = 1.0$ значения ядра (7) практически не отличаются от предельных значений при $w \rightarrow 0$.

3. ОБРАЩЕНИЕ СВЕРТКИ

Рассмотрим уравнение (4), представляющее собой конечную двумерную линейную (по каждому измерению) дискретную свертку. Для решения этого уравнения будет использоваться дискретное преобразование Фурье (ДПФ; имеется ввиду двумерное ДПФ). Для этого рассматриваемую линейную свертку сначала необходимо представить в виде циклической свертки следующим образом.

$$q[m, n] = \sum_{k=0}^{M+K-1} \sum_{l=0}^{N+L-1} h[k, l] p[(m-k)_{M+K}, (n-l)_{N+L}], \quad (8)$$

где $(m-k)_{M+K}, (n-l)_{N+L}$ – вычеты по модулю $M+K$ и по модулю $N+L$ соответственно, $m \in \overline{0, (M+K-1)}, n \in \overline{0, (N+L-1)}$, и считается, что все массивы имеют равные размеры $(M+K) \times (N+L)$. Для этого в массив $h[:, :]$ потребовалось добавить M нулевых строк и N нулевых столбцов, а в массив $p[:, :]$ – K нулевых строк и L нулевых столбцов (нулевые строки и столбцы можно добавлять, например, в число последних строк и столбцов).

Тогда, в соответствии с теоремой о дискретной циклической свертке, имеем:

$$Q[m, n] = H[m, n] P[m, n], \quad (9)$$

где $m \in \overline{0, (M+K-1)}, n \in \overline{0, (N+L-1)}$; $H[:, :] = \text{fft}(h[:, :])$, $Q[:, :] = \text{fft}(q[:, :])$, $P[:, :] = \text{fft}(p[:, :])$ – двумерные ДПФ соответствующих массивов.

Задача обращения свертки состоит в том, чтобы при заданном массиве $q[:, :]$ решить уравнение (8) относительно массива $p[:, :]$. Эта задача, как известно, является плохо обусловленной, т.е. очень чувствительной к погрешностям в исходных данных и к шумам. Поэтому непосредственно использовать

соотношение (9) для ее решения не получится, тут потребуется применение специальных методов регуляризации [2–8]. Будем использовать метод регуляризации по А.Н. Тихонову, состоящий в том, что вместо непосредственного обращения формулы (9) рассматривается обращенная формула с регуляризующим членом

$$P[m, n] = \frac{\overline{H[m, n]}}{|H[m, n]|^2 + \alpha(R[m, n])^s} Q[m, n], \quad (10)$$

где $\alpha \geq 0$ – параметр регуляризации, который должен подбираться для достижения максимального качества восстанавливаемого изображения ($\alpha = 0$ означает отсутствие регуляризации), $R[:, :]$ – массив, соответствующий некоторой выбранной регуляризующей функции, $s \geq 0$ – порядок регуляризации. Регуляризующая функция и порядок регуляризации подбираются в каждом случае индивидуально.

Например, регуляризующий массив $R[:, :]$ может вычисляться так:

$$R[m, n] = R_1[m] + R_2[n], \quad (11)$$

где

$$R_1[m] = \begin{cases} \pi \left(\frac{m}{M+K} \right)^2, & \overline{m \in 0, (M+K)/2 - 1}, \\ R_{M+K} \left[m - \frac{M+K}{2} \right], & \overline{m \in (M+K)/2 - 1, (M+K) - 1}, \end{cases}$$

$$R_2[n] = \begin{cases} \pi \left(\frac{n}{N+L} \right)^2, & \overline{n \in 0, (N+L)/2 - 1}, \\ R_{N+L} \left[n - \frac{N+L}{2} \right], & \overline{n \in (N+L)/2 - 1, (N+L) - 1} \end{cases}$$

(если здесь какое-либо из чисел $M+K$ или $N+L$, нечетное, то под делением этого числа на 2 понимается целая часть от такого деления), или так:

$$R[:, :] = \text{fft}(\Delta[:, :]), \quad (12)$$

где $\Delta[:, :]$ – какая-либо разностная аппроксимация двумерного дифференциального оператора Лапласа (дополненная до матрицы требуемого размера нулевыми строками и столбцами). Порядок регуляризации s обычно выбирается невысокий: $s = 0, 1, 2$.

Важно отметить, что поскольку речь всегда идет о восстановлении изображения конечного размера,

то неизбежно возникает так называемый краевой эффект, связанный с тем, что в реальном, подлежащем восстановлению изображении, нет краев с плавно убывающей яркостью, которые всегда получаются при моделировании смазанного или расфокусированного изображения (при размытии изображения конечных размеров). Поэтому, во-первых, при моделировании такого изображения, чтобы оно соответствовало реальности, плавно убывающие края надо обрезать. Во-вторых, перед восстановлением изображения его края должны быть каким-то способом восстановлены или сглажены. В противном случае восстановленное изображение может содержать сильно выраженные артефакты в виде так называемого эффекта Гиббса.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

На рис. 3 показаны оригинальное изображение, используемое для моделирования расфокусированного изображения, полученное расфокусированное изображение и результат его восстановления с помощью ядра, учитывающего конечность размеров пикселей. На рис. 4 показано изображение с большим размером пикселя и результат его расфокусировки, а на рис. 5 представлены результаты деконволюции с помощью двух разных ФРТ – первая из них не учитывает конечность размера пикселя (рис. 5а), а вторая – учитывает (рис. 5б). Параметр гауссовской расфокусировки при этом выбран таким, при котором имеются заметные различия графиков этих двух ФРТ. Из сравнения представленных рис. 5 результатов видно, что ФРТ, учитывающая конечность размера пикселя, дает заметно более четкое изображение.

На рис. 6 представлен аналогичный результат, демонстрирующий восстановление линейно смазанного в заданном направлении изображения (6 пикселей по горизонтали и 2 пикселя по вертикали) с помощью ядра, учитывающего конечность размера пикселя. На рис. 7 представлена серия восстанавливаемых изображений при различных погрешностях параметров восстанавливающего ядра, определяющих предполагаемый вектор смаза. Величины погрешностей составляют 25%, 12.5%, 6%, 0% от истинных составляющих смаза. Из этого видно, что, во-первых, возможны ситуации, когда величины погрешностей, выражаемые даже долями пикселей, могут значительно ухудшать результат восстановления изображения. Во-вторых, последовательное монотонное уменьшение величин погрешностей дает монотонное улучшение качества изображения. Это показывает возможность оптимизации параметров используемого ядра при решении задачи адаптивной деконволюции.



(a)



(б)



(в)

Рис. 3. Эталонное изображение, его гауссовская расфокусировка при $\sigma = 2$ и результат конволюции, параметр регуляризации $\alpha = 10^{-5}$, порядок регуляризации $s = 1$

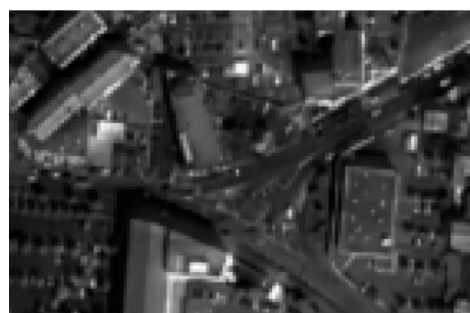


(a)



(б)

Рис. 4. Эталонное изображение (с вдвое большей зернистостью по сравнению с рис. 3) и его гауссовская расфокусировка при $\sigma = 0.4$



(a)



(б)

Рис. 5. Результаты конволюции расфокусированного изображения, показанного на рис. 4, параметр регуляризации $\alpha = 10^{-5}$, порядок регуляризации $s = 1$



(a)

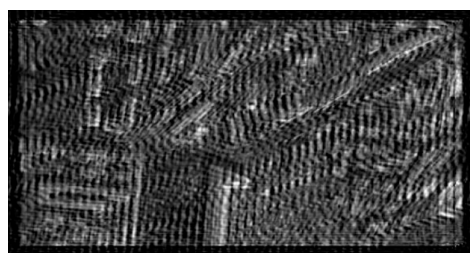


(б)



(в)

Рис. 6. Эталонное изображение, его линейный смаз и результат его восстановления, параметр регуляризации $\alpha = 10^{-3}$, порядок регуляризации $s = 1$



(a)



(б)



(в)



(г)

Рис. 7. Серия результатов восстановления линейно смазанного изображения, показанного на рис. 6, при последовательно уменьшающейся погрешности параметров смаза, параметр регуляризации $\alpha = 10^{-3}$, порядок регуляризации $s = 1$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Численное моделирование показало хорошую работоспособность предложенного метода, преимущества которого следующие. Во-первых, учет конечности размеров пикселя, точнее говоря, учет параметров смаза с точностью до долей пикселя, может улучшать разрешение деталей изображения в случае достижения предела, обусловленного размерами пикселя. Причем, что важно, такой учет осуществляется без интерполяции изображения. Во-вторых, полученная формула ядра свертки для случая линейного смаза, позволяет восстанавливать изображение, смазанное под произвольным углом, а не только смазанное по горизонтали, без необходимости предварительного поворота изображения с целью сведения задачи к восстановлению горизонтально смазанного изображения. При этом величины смаза могут быть достаточно большими, например, составлять несколько десятков пикселей. В-третьих, поскольку формула позволяет использовать параметры смаза необязательно выраженные целым числом пикселей, то это дает удобную возможность использовать ее для решения задачи адаптивной деконволюции, когда может потребоваться ее непрерывная зависимость по обоим параметрам смаза.

Вклад авторов

В.Б. Федоров – идея и теоретическая часть исследования.

С.Г. Харламов – разработка алгоритмов и проведение компьютерных расчетов.

А.В. Федоров – обработка результатов и помощь в проведении компьютерных расчетов.

Authors' contributions

V.B. Fedorov – idea and theoretical part of the study.

S.G. Kharlamov – development of algorithms and conducting computer calculations.

A.V. Fedorov – processing results and assistance in computer calculations.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Федоров В.Б., Харламов С.Г., Стариковский А.И. Восстановление смазанного фотографического изображения движущегося объекта, получаемого на пределе разрешающей способности. *Russian Technological Journal*. 2023;11(4): 94–104. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2023-11-4-94-104>
2. Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. *Некорректные задачи. Численные методы и приложения*. М.: Изд-во МГУ; 1989. 199 с.
3. Гончарский А.В., Леонов А.С., Ягола А.Г. Методы решения интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода типа свертки. В: *Некоторые вопросы автоматизированной обработки и интерпретации физических экспериментов*. Вып. 1. М.: Изд-во МГУ; 1973. С. 170–191.
4. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. *Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация*. М.: Наука; 1983. 198 с.
5. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. *Методы решения некорректных задач*. М.: URSS; 2022. 288 с. ISBN 978-5- 9710-9341-1
6. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В. Обратные задачи обработки фотоизображений. В кн.: *Некорректные задачи естествознания*; под ред. А.Н. Тихонова, А.В. Гончарского. М.: Изд-во МГУ; 1987. С. 185–195.

7. Василенко Г.И. *Теория восстановления сигналов: о редукции к идеальному прибору в физике и технике*. М.: Сов. радио; 1979. 272 с.
8. Василенко Г.И., Тараторин А.М. *Восстановление изображений*. М.: Радио и связь; 1986. 302 с.
9. Бейтс Р., Мак-Доннелл М. *Восстановление и реконструкция изображений*: пер. с англ. М.: Мир; 1989. 336 с.
10. Медофф Б.П. Реконструкция изображений по ограниченным данным: Теория и применение в компьютерной томографии. В кн.: *Реконструкция изображений*; под ред. Г. Старка. М.: Мир; 1992. С. 384–436.
11. Гонсалес Р., Вудс Р. *Цифровая обработка изображений*: пер. с англ. М.: Техносфера; 2012. 1104 с.
12. Russ J.C. *The Image Processing Handbook*. Boca Raton: CRC Press; 2007. 852 p.
13. Грузман И.С., Киричук В.С., Косых В.П., Перетягин Г.И., Спектор А.А. *Цифровая обработка изображений в информационных системах*. Новосибирск: Изд-во НГТУ; 2002. 352 с.
14. Сизиков В.С., Довгань А.Н., Лавров А.В. *Устойчивые методы математико-компьютерной обработки изображений и спектров*. СПб.: Ун-т ИТМО; 2022. 70 с.
15. Сизиков В.С., Рущенко Н.Г. Новые устойчивые методы восстановления искаженных изображений. *Известия высших учебных заведений. Приборостроение*. 2023;66(7):559–567. <https://doi.org/10.17586/0021-3454-2023-66-7-559-567>
16. Домненко В.М., Бурсов М.В., Иванова Т.В. *Моделирование формирования оптического изображения*. СПб.: НИУ ИТМО; 2011. 141 с.

REFERENCES

1. Fedorov V.B., Kharlamov S.G., Starikovskiy A.I. Restoration of a blurred photographic image of a moving object obtained at the resolution limit. *Russian Technological Journal*. 2023;11(4):94–104. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2023-11-4-94-104>
2. Bakushinskii A.B., Goncharkii A.V. *Nekorrektnye zadachi. Chislennye metody i prilozheniya (Incorrect Tasks. Numerical Methods and Applications)*. Moscow: MSU; 1989. 199 p. (in Russ.).
3. Goncharkii A.V., Leonov A.S., Yagola A.G. Methods for solving Fredholm integral equations of the 1st kind of convolution type. In: *Some Problems of Automated Processing and Interpretation of Physical Experiments*. V. 1. Moscow: MSU; 1973. P. 170–191 (in Russ.).
4. Tikhonov A.N., Goncharkii A.V., Stepanov V.V., Yagola A.G. *Regulyariziruyushchie algoritmy i apriornaya informatsiya (Regularizing Algorithms and A Priori Information)*. Moscow: Nauka; 1983. 198 p. (in Russ.).
5. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach (Methods for Solving Ill-Posed Problems)*. Moscow: URSS; 2022. 288 p. (in Russ.). ISBN 978-5-9710-9341-1
6. Tikhonov A.N., Goncharkii A.V., Stepanov V.V. Inverse problems of photo image processing. In: Tikhonov A.N., Goncharkii A.V. (Eds.). *Incorrect Problems of Natural Sciences*. Moscow: MSU; 1987. P. 185–195 (in Russ.).
7. Vasilenko G.I. *Teoriya vosstanovleniya signalov: o reduktsii k ideal'nomu priboru v fizike i tekhnike (Theory of Signal Recovery: On the Reduction to an Ideal Device in Physics and Technology)*. Moscow: Sovetskoe Radio; 1979. 272 p. (in Russ.).
8. Vasilenko G.I., Taratorin A.M. *Vosstanovlenie izobrazhenii (Image Restoration)*. Moscow: Radio i svyaz'; 1986. 302 p. (in Russ.).
9. Bates R., McDonnell M. *Vosstanovlenie i rekonstruktsiya izobrazhenii (Image Restoration and Reconstruction)*: transl. from Engl. Moscow: Mir; 1989. 336 p. (in Russ.).
[Bates R., McDonnell M. *Image Restoration and Reconstruction*. New York: Oxford University Press; 1986. 312 p.]
10. Medoff B.P. Image Reconstruction from Limited Data: Theory and Application in Computed Tomography. In: Stark G. (Ed.). *Image Reconstruction*. Moscow: Mir; 1992. P. 384–436 (in Russ.).
11. Gonzales R., Woods R. *Tsifrovaya obrabotka izobrazhenii (Digital Image Processing)*: transl. from Engl. Moscow: Tekhnosfera; 2012. 1104 p. (in Russ.).
[Gonzales R., Woods R. *Digital Image Processing*. Pearson/Prentice Hall; 2008. 954 p.]
12. Russ J.C. *The Image Processing Handbook*. Boca Raton: CRC Press; 2007. 852 p.
13. Gruzman I.S., Kirichuk V.S., Kosykh V.P., Peretyagin G.I., Spector A.A. *Tsifrovaya obrabotka izobrazhenii v informatsionnykh sistemakh (Digital Image Processing in Information Systems)*. Novosibirsk: NSTU Publ.; 2002. 352 p. (in Russ.).
14. Sizikov V.S., Dovgan' A.N., Lavrov A.V. *Ustoichivye metody matematiko-komp'yuterno obrabotki izobrazhenii i spektrov (Stable Methods of Mathematical and Computer Processing of Images and Spectra)*. St. Petersburg: ITMO University; 2022. 70 p. (in Russ.).
15. Sizikov V.S., Ruschenko N.G. New sustainable methods for distorted image recovering. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Priborostroenie = J. Instrument Eng.* 2023;66(7):559–567 (in Russ.). <https://doi.org/10.17586/0021-3454-2023-66-7-559-567>
16. Domnenko V.M., Bursov M.V., Ivanova T.V. *Modelirovanie formirovaniya opticheskogo izobrazheniya (Modeling of Optical Image Formation)*. St. Petersburg: ITMO Research Institute; 2011. 141 p. (in Russ.).

Об авторах

Федоров Виктор Борисович, к.т.н., доцент, кафедра высшей математики, Институт искусственного интеллекта, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: feodorov@mirea.ru. Scopus Author ID 57208924592, SPIN-код РИНЦ 2622-7666, <https://orcid.org/0000-0003-1011-5453>

Харламов Сергей Григорьевич, аспирант, кафедра высшей математики, Институт искусственного интеллекта, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: serhar2000@mail.ru. <https://orcid.org/0000-0003-4470-6323>

Федоров Алексей Викторович, магистрант, кафедра высшей математики, Институт искусственного интеллекта, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: alexis.sasis7@gmail.com. <https://orcid.org/0009-0003-2314-7400>

About the authors

Victor B. Fedorov, Cand. Sci. (Eng.), Associate Professor, Higher Mathematics Department, Institute of Artificial Intelligence, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: feodorov@mirea.ru. Scopus Author ID 57208924592, RSCI SPIN-code 2622-7666, <https://orcid.org/0000-0003-1011-5453>

Sergey G. Kharlamov, Postgraduate Student, Higher Mathematics Department, Institute of Artificial Intelligence, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: serhar2000@mail.ru. <https://orcid.org/0000-0003-4470-6323>

Alexey V. Fedorov, Master Student, Higher Mathematics Department, Institute of Artificial Intelligence, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: alexis.sasis7@gmail.com. <https://orcid.org/0009-0003-2314-7400>

Отпечатано в «МИРЭА – Российский технологический университет».

119454, РФ, г. Москва, пр-т Вернадского, д. 78.

Подписано в печать 28.03.2025 г.

Формат 60 × 90/8. Печать цифровая.

Уч.-изд. листов 19.25.

Тираж 100 экз. Заказ № 2483.

Подписку на печатную версию

Russian Technological Journal можно оформить
через ООО «Агентство «Книга-Сервис», www.akc.ru.

Подписной индекс: **79641**.

Printed in MIREA – Russian Technological University.
78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russian
Federation.

Signed to print March 28, 2025.

Format 60 × 90/8. Digital print.

C.p.l. 19.25.

100 copies. Order No. 2483.

Subscription to the *Russian Technological
Journal* printed version can be made through
the *Kniga-Servis* Agency, www.akc.ru.

Subscription index: **79641**.

