



# R U S S I A N T E C H N O L O G I C A L J O U R N A L

**РОССИЙСКИЙ  
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ  
ЖУРНАЛ**

*Информационные системы.  
Информатика.  
Проблемы информационной безопасности*

*Роботизированные комплексы и системы.  
Технологии дистанционного зондирования и неразрушающего контроля*

*Современные радиотехнические и телекоммуникационные системы*

*Микро- и наноэлектроника.  
Физика конденсированного состояния*

*Аналитическое приборостроение и технологии*

*Математическое моделирование*

*Экономика наукоемких и высокотехнологичных  
предприятий и производств. Управление в организационных системах*

*Управление качеством продукции. Стандартизация*

*Мировоззренческие основы технологии и общества*



# RUSSIAN TECHNOLOGICAL JOURNAL

## РОССИЙСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

- Информационные системы. Информатика. Проблемы информационной безопасности
- Роботизированные комплексы и системы. Технологии дистанционного зондирования и неразрушающего контроля
- Современные радиотехнические и телекоммуникационные системы
- Микро- и нанoeлектроника. Физика конденсированного состояния
- Аналитическое приборостроение и технологии
- Математическое моделирование
- Экономика наукоемких и высокотехнологичных предприятий и производств. Управление в организационных системах
- Управление качеством продукции. Стандартизация
- Мировоззренческие основы технологии и общества
- Information systems. Computer sciences. Issues of information security
- Multiple robots (robotic centers) and systems. Remote sensing and non-destructive testing
- Modern radio engineering and telecommunication systems
- Micro- and nanoelectronics. Condensed matter physics
- Analytical instrument engineering and technology
- Mathematical modeling
- Economics of knowledge-intensive and high-tech enterprises and industries. Management in organizational systems
- Product quality management. Standardization
- Philosophical foundations of technology and society

## Russian Technological Journal 2024, том 12, № 2

Дата опубликования 31 марта 2024 г.

Научно-технический рецензируемый журнал освещает вопросы комплексного развития радиотехнических, телекоммуникационных и информационных систем, электроники и информатики, а также результаты фундаментальных и прикладных междисциплинарных исследований, технологических и организационно-экономических разработок, направленных на развитие и совершенствование современной технологической базы.

Периодичность: один раз в два месяца.

Журнал основан в декабре 2013 года. До 2016 г. издавался под названием «Вестник МГТУ МИРЭА» (ISSN 2313-5026), а с января 2016 г. по июль 2021 г. под названием «Российский технологический журнал» (ISSN 2500-316X).

### Учредитель и издатель:

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «МИРЭА – Российский технологический университет» 119454, РФ, г. Москва, пр-т Вернадского, д. 78.

Журнал входит в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов ВАК РФ, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук и доктора наук, индексируется в РГБ, РИНЦ, eLibrary, Соционет, Directory of Open Access Journals (DOAJ), Directory of Open Access Scholarly Resources (ROAD), Google Scholar, Ulrich's International Periodicals Directory.

### Главный редактор:

Сигов Александр Сергеевич, академик РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор, президент ФГБОУ ВО МИРЭА – Российский технологический университет (РТУ МИРЭА), Москва, Россия.  
Scopus Author ID 35557510600, ResearcherID L-4103-2017, sigov@mirea.ru.

### Редакция:

Зав. редакцией	к.т.н. Г.Д. Середина
Научный редактор	д.т.н., проф. Г.В. Куликов
Выпускающий редактор	А.С. Алексеенко
Технический редактор	Д.В. Трофимова

119571, г. Москва, пр-т Вернадского, 86, оф. Л-119.  
Тел.: +7 (499) 600-80-80 (#31288).  
E-mail: seredina@mirea.ru.

Регистрационный номер и дата принятия решения о регистрации СМИ ПИ № ФС 77 - 81733 от 19.08.2021 г. СМИ зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).

Индекс по объединенному каталогу «Пресса России» 79641.

<https://www.rtlj-mirea.ru>

## Russian Technological Journal 2024, Vol. 12, No. 2

Publication date March 31, 2024.

The peer-reviewed scientific and technical journal highlights the issues of complex development of radio engineering, telecommunication and information systems, electronics and informatics, as well as the results of fundamental and applied interdisciplinary researches, technological and economical developments aimed at the development and improvement of the modern technological base.

Periodicity: bimonthly.

The journal was founded in December 2013. The titles were «Herald of MSTU MIREA» until 2016 (ISSN 2313-5026) and «Rossiiskii tekhnologicheskii zhurnal» from January 2016 until July 2021 (ISSN 2500-316X).

### Founder and Publisher:

Federal State Budget  
Educational Institution of Higher Education  
«MIREA – Russian Technological University»  
78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia.

The journal is included into the List of peer-reviewed science press of the State Commission for Academic Degrees and Titles of Russian Federation. The Journal is included in Russian State Library (RSL), Russian Science Citation Index, eLibrary, Socionet, Directory of Open Access Journals (DOAJ), Directory of Open Access Scholarly Resources (ROAD), Google Scholar, Ulrich's International Periodicals Directory.

### Editor-in-Chief:

Alexander S. Sigov, Academician at the Russian Academy of Sciences, Dr. Sci. (Phys.–Math.), Professor, President of MIREA – Russian Technological University (RTU MIREA), Moscow, Russia.  
Scopus Author ID 35557510600, ResearcherID L-4103-2017, sigov@mirea.ru.

### Editorial staff:

Managing Editor	Cand. Sci. (Eng.) Galina D. Seredina
Scientific Editor	Dr. Sci. (Eng.), Prof. Gennady V. Kulikov
Executive Editor	Anna S. Alekseenko
Technical Editor	Darya V. Trofimova

86, Vernadskogo pr., Moscow, 119571 Russia.  
Phone: +7 (499) 600-80-80 (#31288).  
E-mail: seredina@mirea.ru.

The registration number ПИ № ФС 77 - 81733 was issued in August 19, 2021 by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology, and Mass Media of Russia.

The subscription index of *Pressa Rossii*: 79641.

## Редакционная коллегия

<b>Кудж Станислав Алексеевич</b>	д.т.н., профессор, ректор РТУ МИРЭА, Москва, Россия. Scopus Author ID 56521711400, ResearcherID AAG-1319-2019, <a href="https://orcid.org/0000-0003-1407-2788">https://orcid.org/0000-0003-1407-2788</a> , rector@mirea.ru
<b>Банис Юрас Йонович</b>	хабилитированный доктор наук, профессор, проректор Вильнюсского университета, Вильнюс, Литва. Scopus Author ID 7003687871, juras.banys@ff.vu.lt
<b>Бетелин Владимир Борисович</b>	академик Российской академии наук (РАН), д.ф.-м.н., профессор, научный руководитель Федерального научного центра «Научно-исследовательский институт системных исследований» РАН, Москва, Россия. Scopus Author ID 6504159562, ResearcherID J-7375-2017, betelin@niisi.msk.ru
<b>Боков Алексей Алексеевич</b>	д.ф.-м.н., старший научный сотрудник, химический факультет и 4D LABS, Университет Саймона Фрейзера, Ванкувер, Британская Колумбия, Канада. Scopus Author ID 35564490800, ResearcherID C-6924-2008, <a href="http://orcid.org/0000-0003-1126-3378">http://orcid.org/0000-0003-1126-3378</a> , abokov@sfu.ca
<b>Вахрушев Сергей Борисович</b>	д.ф.-м.н., профессор, заведующий лабораторией нейтронных исследований Физико-технического института им. А.Ф. Иоффе РАН, профессор кафедры Физической электроники СПбГПУ, Санкт-Петербург, Россия. Scopus Author ID 7004228594, ResearcherID A-9855-2011, <a href="http://orcid.org/0000-0003-4867-1404">http://orcid.org/0000-0003-4867-1404</a> , s.vakhrushev@mail.ioffe.ru
<b>Гуляев Юрий Васильевич</b>	академик РАН, д.ф.-м.н., профессор, научный руководитель Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, Москва, Россия. Scopus Author ID 35562581800, gulyaev@cplire.ru
<b>Жуков Дмитрий Олегович</b>	д.т.н., профессор, заведующий кафедрой интеллектуальных технологий и систем РТУ МИРЭА, Москва, Россия. Scopus Author ID 57189660218, zhukov_do@mirea.ru
<b>Кимель Алексей Вольдемарович</b>	к.ф.-м.н., профессор, Университет Радбауд, г. Наймеген, Нидерланды. Scopus Author ID 6602091848, ResearcherID D-5112-2012, a.kimel@science.ru.nl
<b>Крамаров Сергей Олегович</b>	д.ф.-м.н., профессор, Сургутский государственный университет, Сургут, Россия. Scopus Author ID 56638328000, ResearcherID E-9333-2016, <a href="https://orcid.org/0000-0003-3743-6513">https://orcid.org/0000-0003-3743-6513</a> , mavoo@yandex.ru
<b>Новиков Дмитрий Александрович</b>	академик РАН, д.т.н., директор Института проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия. Scopus Author ID 7102213403, ResearcherID Q-9677-2019, <a href="https://orcid.org/0000-0002-9314-3304">https://orcid.org/0000-0002-9314-3304</a> , novikov@ipu.ru
<b>Перно Филипп</b>	Dr. Sci. (Electronics), профессор, Центральная Школа г. Лилль, Франция. Scopus Author ID 7003429648, philippe.pernod@ec-lille.fr
<b>Романов Михаил Петрович</b>	д.т.н., профессор, директор Института искусственного интеллекта РТУ МИРЭА, Москва, Россия. Scopus Author ID 14046079000, <a href="https://orcid.org/0000-0003-3353-9945">https://orcid.org/0000-0003-3353-9945</a> , m_romanov@mirea.ru
<b>Савиных Виктор Петрович</b>	академик РАН, Дважды Герой Советского Союза, д.т.н., профессор, президент Московского государственного университета геодезии и картографии, Москва, Россия. Scopus Author ID 56412838700, vp@miigaik.ru
<b>Соболевский Андрей Николаевич</b>	д.ф.-м.н., директор Института проблем передачи информации им. А.А. Харкевича, Москва, Россия. Scopus Author ID 7004013625, ResearcherID D-9361-2012, <a href="http://orcid.org/0000-0002-3082-5113">http://orcid.org/0000-0002-3082-5113</a> , sobolevski@iitp.ru
<b>Сюй Ли Да</b>	академик Европейской академии наук, Российской инженерной академии и Инженерной академии Армении, Dr. Sci. (Systems Science), профессор, Университет Олд Доминион, Норфолк, Соединенные Штаты Америки. Scopus Author ID 13408889400, <a href="https://orcid.org/0000-0002-5954-5115">https://orcid.org/0000-0002-5954-5115</a> , lxu@odu.edu
<b>Харин Юрий Семенович</b>	академик Национальной академии наук Беларуси, д.ф.-м.н., профессор, директор НИИ прикладных проблем математики и информатики Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь. Scopus Author ID 6603832008, <a href="http://orcid.org/0000-0003-4226-2546">http://orcid.org/0000-0003-4226-2546</a> , kharin@bsu.by
<b>Чаплыгин Юрий Александрович</b>	академик РАН, д.т.н., профессор, член Отделения нанотехнологий и информационных технологий РАН, президент Института микроприборов и систем управления им. Л.Н. Преснухина НИУ «МИЭТ», Москва, Россия. Scopus Author ID 6603797878, ResearcherID B-3188-2016, president@miet.ru
<b>Шпак Василий Викторович</b>	к.э.н., зам. министра промышленности и торговли Российской Федерации, Министерство промышленности и торговли РФ, Москва, Россия; доцент, Институт микроприборов и систем управления им. Л.Н. Преснухина НИУ «МИЭТ», Москва, Россия, mishinevaiv@minprom.gov.ru

## Editorial Board

- Stanislav A. Kudzh** Dr. Sci. (Eng.), Professor, Rector of RTU MIREA, Moscow, Russia. Scopus Author ID 56521711400, ResearcherID AAG-1319-2019, <https://orcid.org/0000-0003-1407-2788>, rector@mirea.ru
- Juras Banys** Habilitated Doctor of Sciences, Professor, Vice-Rector of Vilnius University, Vilnius, Lithuania. Scopus Author ID 7003687871, [juras.banys@ff.vu.lt](mailto:juras.banys@ff.vu.lt)
- Vladimir B. Betelin** Academician at the Russian Academy of Sciences (RAS), Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Supervisor of Scientific Research Institute for System Analysis, RAS, Moscow, Russia. Scopus Author ID 6504159562, ResearcherID J-7375-2017, [betelin@niisi.msk.ru](mailto:betelin@niisi.msk.ru)
- Alexei A. Bokov** Dr. Sci. (Phys.-Math.), Senior Research Fellow, Department of Chemistry and 4D LABS, Simon Fraser University, Vancouver, British Columbia, Canada. Scopus Author ID 35564490800, ResearcherID C-6924-2008, <http://orcid.org/0000-0003-1126-3378>, [abokov@sfu.ca](mailto:abokov@sfu.ca)
- Sergey B. Vakhrushev** Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Head of the Laboratory of Neutron Research, A.F. Ioffe Physico-Technical Institute of the RAS, Department of Physical Electronics of St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, Russia. Scopus Author ID 7004228594, ResearcherID A-9855-2011, <http://orcid.org/0000-0003-4867-1404>, [s.vakhrushev@mail.ioffe.ru](mailto:s.vakhrushev@mail.ioffe.ru)
- Yury V. Gulyaev** Academician at the RAS, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Supervisor of V.A. Kotelnikov Institute of Radio Engineering and Electronics of the RAS, Moscow, Russia. Scopus Author ID 35562581800, [gulyaev@cplire.ru](mailto:gulyaev@cplire.ru)
- Dmitry O. Zhukov** Dr. Sci. (Eng.), Professor, Head of the Department of Intelligent Technologies and Systems, RTU MIREA, Moscow, Russia. Scopus Author ID 57189660218, [zhukov\\_do@mirea.ru](mailto:zhukov_do@mirea.ru)
- Alexey V. Kimel** PhD (Phys.-Math.), Professor, Radboud University, Nijmegen, Netherlands, Scopus Author ID 6602091848, ResearcherID D-5112-2012, [a.kimel@science.ru.nl](mailto:a.kimel@science.ru.nl)
- Sergey O. Kramarov** Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Surgut State University, Surgut, Russia. Scopus Author ID 56638328000, ResearcherID E-9333-2016, <https://orcid.org/0000-0003-3743-6513>, [mavoo@yandex.ru](mailto:mavoo@yandex.ru)
- Dmitry A. Novikov** Academician at the RAS, Dr. Sci. (Eng.), Director of V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences, Moscow, Russia. Scopus Author ID 7102213403, ResearcherID Q-9677-2019, <https://orcid.org/0000-0002-9314-3304>, [novikov@ipu.ru](mailto:novikov@ipu.ru)
- Philippe Pernod** Dr. Sci. (Electronics), Professor, Dean of Research of Centrale Lille, Villeneuve-d'Ascq, France. Scopus Author ID 7003429648, [philippe.pernod@ec-lille.fr](mailto:philippe.pernod@ec-lille.fr)
- Mikhail P. Romanov** Dr. Sci. (Eng.), Professor, Director of the Institute of Artificial Intelligence, RTU MIREA, Moscow, Russia. Scopus Author ID 14046079000, <https://orcid.org/0000-0003-3353-9945>, [m\\_romanov@mirea.ru](mailto:m_romanov@mirea.ru)
- Viktor P. Savinykh** Academician at the RAS, Dr. Sci. (Eng.), Professor, President of Moscow State University of Geodesy and Cartography, Moscow, Russia. Scopus Author ID 56412838700, [vp@miigaik.ru](mailto:vp@miigaik.ru)
- Andrei N. Sobolevski** Professor, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Director of Institute for Information Transmission Problems (Kharkevich Institute), Moscow, Russia. Scopus Author ID 7004013625, ResearcherID D-9361-2012, <http://orcid.org/0000-0002-3082-5113>, [sobolevski@iitp.ru](mailto:sobolevski@iitp.ru)
- Li Da Xu** Academician at the European Academy of Sciences, Russian Academy of Engineering (formerly, USSR Academy of Engineering), and Armenian Academy of Engineering, Dr. Sci. (Systems Science), Professor and Eminent Scholar in Information Technology and Decision Sciences, Old Dominion University, Norfolk, VA, the United States of America. Scopus Author ID 13408889400, <https://orcid.org/0000-0002-5954-5115>, [lxu@odu.edu](mailto:lxu@odu.edu)
- Yury S. Kharin** Academician at the National Academy of Sciences of Belarus, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Director of the Institute of Applied Problems of Mathematics and Informatics of the Belarusian State University, Minsk, Belarus. Scopus Author ID 6603832008, <http://orcid.org/0000-0003-4226-2546>, [kharin@bsu.by](mailto:kharin@bsu.by)
- Yuri A. Chaplygin** Academician at the RAS, Dr. Sci. (Eng.), Professor, Member of the Departments of Nanotechnology and Information Technology of the RAS, President of the National Research University of Electronic Technology (MIET), Moscow, Russia. Scopus Author ID 6603797878, ResearcherID B-3188-2016, [president@miet.ru](mailto:president@miet.ru)
- Vasilii V. Shpak** Cand. Sci. (Econ.), Deputy Minister of Industry and Trade of the Russian Federation, Ministry of Industry and Trade of the Russian Federation, Moscow, Russia; Associate Professor, National Research University of Electronic Technology (MIET), Moscow, Russia, [mishinevaiv@minprom.gov.ru](mailto:mishinevaiv@minprom.gov.ru)

## Содержание

### Информационные системы. Информатика. Проблемы информационной безопасности

- 7** *А.А. Легкодумов, Б.Н. Козеев, В.В. Беликов, А.В. Корольков*  
Методы анализа влияния изменений программного обеспечения на целевые функции и функции безопасности  
*А.А. Тимаков*
- 16** Технология анализа безопасности информационных потоков в программном обеспечении, реализующем бизнес-логику с использованием хранимых программных блоков баз данных

### Роботизированные комплексы и системы. Технологии дистанционного зондирования неразрушающего контроля

- 28** *С.У. Увайсов, А.В. Долматов, Т.Х. Во, Н.Т. Лыу, К.Д. Нгуен*  
Диагностика нарушений целостности конструкций бортовых радиоэлектронных средств при испытаниях на ударные воздействия

### Современные радиотехнические и телекоммуникационные системы

- 39** *К.А. Батенков, А.Б. Фокин*  
Анализ структурной надежности сетей связи с механизмами защитного переключения для одного защищаемого и одного резервного участков
- 48** *Н.М. Легкий, И.В. Унченко*  
Математическое моделирование сверхвысокочастотных каналов полуактивной радиолокационной головки самонаведения

### Микро- и наноэлектроника. Физика конденсированного состояния

- 57** *А.Н. Юрасов, Д.А. Сайфулина, Т.Н. Бахвалова*  
Магниторефрактивный эффект в металлических наноструктурах Co/Pt

### Математическое моделирование

- 67** *А.С. Леонтьев, Д.В. Жматов*  
Исследование вероятностно-временных характеристик беспроводных сетей с методом доступа CSMA/CA
- 77** *А.В. Шатина, А.С. Борец*  
Математическая модель гравитационного потенциала планеты с учетом приливных деформаций

## Contents

### Information systems. Computer sciences. Issues of information security

- Alexander A. Legkodumov, Boris N. Kozeyev, Vladimir V. Belikov, Andrey V. Korolkov*
- 7** Methods for analyzing the impact of software changes on objective functions and safety functions
- Aleksey A. Timakov*
- 16** Analysis of information flow security using software implementing business logic based on stored database program blocks

### Multiple robots (robotic centers) and systems. Remote sensing and non-destructive testing

- 28** *Saygid U. Uvaysov, Aleksey V. Dolmatov, The H. Vo, Ngoc T. Luu, Cong D. Nguyen*  
Diagnostics of structural integrity violations of avionics during impact tests

### Modern radio engineering and telecommunication systems

- Kirill A. Batenkov, Aleksandr B. Fokin*
- 39** Analysis of the structural reliability of communication networks supporting protective switching mechanisms for one protected section and one backup section
- Nikolay M. Legkiy, Ivan V. Unchenko*
- 48** Mathematical modeling of microwave channels of a semi-active radar homing head

### Micro- and nanoelectronics. Condensed matter physics

- 57** *Alexey N. Yurasov, Diana A. Sayfullina, Tatiana N. Bakhvalova*  
Magnetorefractive effect in metallic Co/Pt nanostructures

### Mathematical modeling

- Alexander S. Leontyev, Dmitry V. Zhmatov*
- 67** Study of the probabilistic and temporal characteristics of wireless networks using the CSMA/CA access method
- Albina V. Shatina, Alexandra S. Borets*
- 77** A mathematical model of the gravitational potential of the planet taking into account tidal deformations

УДК 004.042

<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-2-7-15>



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

## Методы анализа влияния изменений программного обеспечения на целевые функции и функции безопасности

А.А. Легкодумов<sup>1, @</sup>,  
Б.Н. Козеев<sup>2, @</sup>,  
В.В. Беликов<sup>3</sup>,  
А.В. Корольков<sup>3</sup>

<sup>1</sup> СФБ Лаборатория, Москва, 127083 Россия

<sup>2</sup> АЛЬФА-БАНК, Москва, 107078 Россия

<sup>3</sup> МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, 119454 Россия

@ Автор для переписки, e-mail: studkso0416@mail.ru, kozeev.boris2018@yandex.ru

### Резюме

**Цели.** В статье рассматриваются различные подходы к выполнению процедуры анализа влияния изменений программного обеспечения (ПО) на его безопасность, а также предложен новый метод проведения процедуры анализа, использующий потоки управления функций. Анализ влияния изменений ПО – достаточно трудоемкая процедура, требующая значительных временных затрат и наличия необходимой компетенции у проводящего ее эксперта. Методика проведения анализа влияния изменений ПО не имеет детального описания и не закреплена на законодательном уровне. Цель предлагаемого метода – снижение уровня требований к эксперту, проводящему исследование ПО; локализация областей кода для исследования на наличие дефектов в функциях, обеспечивающих защиту информации; сокращение времени, затрачиваемого на проведение анализа влияния изменений.

**Методы.** Проанализированы наиболее распространенные методы анализа изменений: построчное сравнение, система управления версиями, выполнение автоматизированных текстов. Приведено описание положительных и отрицательных сторон методов анализа. Рассмотрена возможность анализа изменений потока управления функциями ПО как альтернатива стандартному построчному сравнению полного объема исходных текстов. После построения потоки управления различных версий одного ПО, представленные в виде древовидных графов, проходят процедуру объединения. Конечный результат анализируется экспертом.

**Результаты.** Приведены результаты исследования методов анализа изменений ПО с описанием недостатков. Представлено описание метода проведения анализа изменений, использующего поток управления функций, который дополняет существующие методы, устраняя их представленные недостатки. Проанализирована возможность применения данного метода за рамками задач, определенных во введении.

**Выводы.** Использование методов, локализуемых наиболее уязвимые участки кода, выделено как одно из наиболее перспективных направлений для проведения анализа влияния изменений. Помимо поиска уязвимых участков кода, важной является оценка эффективности метода сравнения потоков управления в анализе исходного кода при его переходе на другую кодовую базу.

**Ключевые слова:** статический анализ, средство криптографической защиты, анализ влияния изменений, объединение графов, анализ программного кода

• Поступила: 02.08.2023 • Доработана: 25.09.2023 • Принята к опубликованию: 05.02.2024

**Для цитирования:** Легкодумов А.А., Козеев Б.Н., Беликов В.В., Корольков А.В. Методы анализа влияния изменений программного обеспечения на целевые функции и функции безопасности. *Russ. Technol. J.* 2024;12(2):7–15. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-2-7-15>

**Прозрачность финансовой деятельности:** Авторы не имеют финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## RESEARCH ARTICLE

# Methods for analyzing the impact of software changes on objective functions and safety functions

Alexander A. Legkodumov <sup>1, @</sup>,  
Boris N. Kozeyev <sup>2, @</sup>,  
Vladimir V. Belikov <sup>3</sup>,  
Andrey V. Korolkov <sup>3</sup>

<sup>1</sup> SFB Laboratory, Moscow, 127083 Russia

<sup>2</sup> ALFA-BANK, Moscow, 107078 Russia

<sup>3</sup> MIREA – Russian Technological University, Moscow, 119454 Russia

@ Corresponding author, e-mail: [studkso0416@mail.ru](mailto:studkso0416@mail.ru), [kozeev.boris2018@yandex.ru](mailto:kozeev.boris2018@yandex.ru)

### Abstract

**Objectives.** This paper examines the various approaches to analyzing the impact of software changes, and suggests a new method using function control flows. Impact analysis of software change can require the investment of a lot of time and competence on the part of the expert conducting it. There is no detailed description of methodology for analyzing the impact of changes and it is not established at a legislative level. The proposed method has three aims: reducing the level of requirements for an expert when conducting software research; localizing code areas to establish defects in information protection functions; and reducing the time spent on analyzing the impact of changes.

**Methods.** The study analyzes the common methods for analyzing software changes with a description of their positive and negative sides. The possibility of analyzing changes in the control flow of software functions is considered as an alternative to line-by-line comparison of the full volume of source codes. Represented as tree-shaped graphs, the control flows of different versions of the same software are subject to a merging procedure. The final result is analyzed by an expert from the research organization.

**Results.** The research results of the software change analysis methods are presented with a description of their disadvantages. A description is given of the method for change analysis using function control. This complements existing methods, while eliminating their disadvantages. The study also analyzes the possibility of using this method beyond the tasks defined in the introduction.

**Conclusions.** The use of methods to localize the most vulnerable code sections is considered one of the most promising areas for analyzing change impact. In addition to searching for vulnerable code sections, it is important to evaluate the effectiveness of the control flow comparison method in the analysis of source code when transferred to another code base.

**Keywords:** static analysis, cryptographic protection tool, change impact analysis, graph merging, program code analysis

• Submitted: 02.08.2023 • Revised: 25.09.2023 • Accepted: 05.02.2024

**For citation:** Legkodumov A.A., Kozeyev B.N., Belikov V.V., Korolkov A.V. Methods for analyzing the impact of software changes on objective functions and safety functions. *Russ. Technol. J.* 2024;12(2):7–15. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-2-7-15>

**Financial disclosure:** The authors have no a financial or property interest in any material or method mentioned.

The authors declare no conflicts of interest.

## ВВЕДЕНИЕ

Программное обеспечение (ПО) глубоко интегрировано в жизнь современного человека. Оно используется в медицинском оборудовании, автомобилях, банках, самолетах, телефонах и т.д. Большая часть современного ПО взаимодействует с персональными данными (ПД) своих пользователей или даже может быть установлена на критически важном объекте (КВО), обеспечивая взаимодействие с особо ценными данными. Компрометация КВО или кража ПД могут привести к разрушению инфраструктуры, потере управления объектом, хищению ресурсов пользователей и другим негативным последствиям. Для обеспечения безопасности данных пользователей и инфраструктуры требуется внедрение сертифицированных средств защиты информации (СЗИ). СЗИ может представлять собой специализированное ПО, предназначенное для защиты информации конфиденциального характера [1]. Для того чтобы иметь возможность защищаться от новых угроз, в исходные коды СЗИ постоянно добавляются новые функции безопасности информации или меняются уже имеющиеся. После каждого подобного изменения сертифицированное СЗИ должно проходить специальные исследования. Необходимость проведения исследований обосновывается приказами Федеральной службы по техническому и экспортному контролю (ФСТЭК)<sup>1</sup> и ФСБ России<sup>2</sup>.

Разработка и сопровождение любого ПО представляет собой непрерывный процесс, в котором постоянно изменяется существующая функциональность: добавляются новые функции, обновляются стили кодирования, производится оптимизация, исправляются ошибки. Любое изменение, внесенное в программный либо программно-аппаратный продукт (далее – *изделие*), может оказать непредсказуемое влияние на определенную часть или даже на все функции, выполняемые изделием, и чем больше изменений вносится в изделие, тем сложнее становится отследить их влияние. Для того чтобы обнаружить внесенные изменения, определить их характер и качество, проводится специальное исследование, называемое анализом влияния изменений (анализом изменений, АИ) [2] – это подход к тестированию ПО, который используется для определения степени рисков, связанных с любыми изменениями, внесенными в ПО.

**Примечание:** далее по тексту, *экспертом* называется сотрудник испытательной лаборатории, который занимается АИ сертифицированных СЗИ.

Значительный объем работ выполняется вручную экспертом и разработчиком СЗИ, поэтому АИ является трудоемкой процедурой. По результатам АИ эксперт стремится получить ответы на следующие вопросы:

1. Какие программные модули и функциональные возможности будут затронуты конкретным изменением и как именно?

<sup>1</sup> Пункт 71 приказа ФСТЭК от 03.04.2018 г. № 55 «Положение о системе сертификации средств защиты информации». В пункте приказа определено, что разработчик СЗИ проводит испытания СЗИ с привлечением испытательной лаборатории. <https://fstec.ru/dokumenty/vse-dokumenty/prikazy/prikaz-fstek-rossii-ot-3-aprelya-2018-g-n-55>. Дата обращения 02.05.2023. [Paragraph 71 of the FSTEC Order No. 55 from April 03, 2018 “Regulation on the Information Protection Equipment Certification System.” The paragraph of the Order specifies that the developer of an information protection system should conduct tests of the information protection system involving a testing laboratory (in Russ.). <https://fstec.ru/dokumenty/vse-dokumenty/prikazy/prikaz-fstek-rossii-ot-3-aprelya-2018-g-n-55>. Accessed May 02, 2023.]

<sup>2</sup> Пункт 41 приказа ФСБ России от 09.02.2005 г. № 66 «Положение о разработке, производстве, реализации и эксплуатации шифровальных (криптографических) средств защиты информации (Положение ПКЗ-2005)». В пункте приказа определено, что все изменения в конструкции средства криптографической защиты информации и технологии их изготовления средства криптографической защиты информации должен согласовывать со специализированной организацией и ФСБ России. <http://pravo.gov.ru/proxy/ips/?docbody=&prevDoc=102900265&backlink=1&nd=102097894&rdk=0>. Дата обращения 02.05.2023. [Paragraph 41 of the Order of the Federal Security Service of Russia No. 66 dated February 09, 2005 “Regulations on the Development, Production, Implementation, and Operation of Encryption (Cryptographic) Means of Information Protection (Regulations PKZ-2005).” The paragraph specifies that all changes in the design of cryptographic information protection means and their manufacturing technology should be coordinated by the manufacturer of cryptographic information protection means with a specialized organization and the Federal Security Service of Russia (in Russ.). <http://pravo.gov.ru/proxy/ips/?docbody=&prevDoc=102900265&backlink=1&nd=102097894&rdk=0>. Accessed May 02, 2023.]

2. Повлияет ли эта реализация на функциональные возможности приложения или отдельных модулей приложения?

Так как, в соответствии с приказами № 55 ФСБ России и № 66 ФСТЭК, АИ сертифицированного СЗИ требуется проводить после каждого изменения, то между двумя версиями одного продукта может накопиться достаточное количество изменений, что приведет к увеличению времени работы эксперта. На сложность и количество ресурсов, затрачиваемых на проведение АИ, в таком случае дополнительно влияет и то, что специальное исследование проводится экспертом сторонней организацией, который заранее не знаком с ПО и организацией внутренней работы функций СЗИ. Все это, в совокупности, формирует основную проблему АИ [3].

Эксперт, проводящий АИ, должен обладать высокой квалификацией. От него требуется:

- понимание работы ПО;
- знание языка программирования, на котором разрабатывался продукт;
- понимание работы библиотек, использованных в реализации изделия;
- поиск измененных участков кода, проведение анализа этих участков для оценки влияния изменений на функциональность изделия.

В статье рассмотрены различные подходы к проведению АИ, представлен метод, оптимизирующий проведение анализа, направленный на снижение уровня требований к эксперту и сокращение времени до получения значимых результатов. В контексте данной работы, под значимыми результатами понимается нахождение изменений кода, а также определение их влияния на качественные характеристики СЗИ.

## 1. АНАЛИЗ СУЩЕСТВУЮЩИХ МЕТОДОВ ПРОВЕДЕНИЯ АИ

### 1.1. Построчное сравнение

Построчное сравнение – метод, используя который эксперт проводит построчное сравнение различных версий исходных кодов одного изделия для поиска и оценки различий. Процедура может быть выполнена с применением таких средств сравнения исходных текстов ПО как приложения *Beyond Compare*<sup>3</sup>, *Araxis Merge*<sup>4</sup> или встроенная в Linux утилита *diff*. Изменением исходных кодов для данного метода считается удаление, добавление или изменение строки. На практике, в большинстве случаев,

<sup>3</sup> <https://www.scootersoftware.com/>. Дата обращения 02.05.2023. / Accessed May 02, 2023.

<sup>4</sup> <https://www.araxis.com/merge/index.en>. Дата обращения 02.05.2023. / Accessed May 02, 2023.

находимые при построчном сравнении изменения являются ошибочным вхождением, т.к. они не оказывают никакого влияния на реализуемые изделием функции. Такие изменения, которые можно отнести к ошибочным, делятся на:

- изменения названий функций или переменных;
- удаление или добавление переносов строк;
- удаление или добавление комментариев;
- удаление или добавление строк кода, который не относится к реализуемому изделием функционалу – только если это не регламентируется требованиями.

Последнее представляет собой незадействованные участки кода [4]. Это может быть код, который участвует только в тестах разработчика или работает в определенной среде функционирования. Помимо ошибочных вхождений, данный метод плохо показывает себя в ситуациях, когда кодовая база продукта совершает переход на другой язык программирования. В таком случае любая строка будет помечаться инструментами автоматического анализа как несопадающая.

Плюс данного метода заключается в том, что при его использовании покрывается весь объем исходных текстов ПО, что, в свою очередь, увеличивает возможность обнаружения уязвимого места, в сравнении с проведением автоматизированного анализа [5]. Однако построчный анализ является очень затратной процедурой, занимающей большое количество человеко-часов эксперта, а также требующей от него глубокого знания языка программирования.

### 1.2. Системы управления версиями

Чтобы уменьшить объем работ, проводимых «вручную» экспертом исследовательской организации, компания-разработчик может передать вместе с материалами исследования дополнительные материалы, например, историю изменений, сформированную системой управления версиями. В современной практике для оптимизации организации работы нескольких разработчиков над одним изделием используется система контроля версий.

Такая система представляет собой ПО, используемое для облегчения работы с изменяющейся информацией, которое помимо управления версиями, организации одновременной работы нескольких разработчиков, поддержки нескольких направлений разработки, а также обеспечения их взаимодействия, позволяет отслеживать изменения программного кода. Использование информации о модификациях исходного кода упрощает его понимание за счет концентрации внимания эксперта.

Преимущество данного метода заключается в том, что отчет об изменениях может быть построен

в автоматическом режиме, каждое изменение не нужно искать отдельно, проводя построчное сравнение двух версий исходных текстов [6]. Но в этом достоинстве кроется его главный недостаток. Благодаря повсеместному использованию систем контроля версий, при разработке большинства программ доступна история изменений. Однако экспертиза может оказаться затруднительной, т.к. качество описания внесенных изменений напрямую зависит от сотрудника, который занимался описанием проведенных изменений в ходе разработки. Поэтому сформированный отчет или история изменений могут предоставлять неполную или даже неверную информацию, которая может помешать провести корректный АИ.

### 1.3. Автоматизированные тесты

Еще одним методом проведения АИ можно считать сравнение результатов тестирования двух версий одного ПО. Такой метод позволяет проверить и подтвердить факт того, что логика работы функций не изменилась. С помощью данного метода можно отслеживать изменения, приводящие к появлению дефектов в работе функций изделия и функций безопасности [7].

К плюсам данного метода можно отнести возможность автоматизации проверки большого объема данных. Однако вывод по результатам тестирования нельзя считать достоверным, т.к. разработчиком могут быть добавлены незадокументированные возможности в ПО, тесты строятся на основе известных функций изделия и не могут сигнализировать о наличии аномалии ПО. Несмотря на то, что автоматизированная система тестов вполне способна находить ошибки при неправильной реализации изменений, подход с использованием автоматизированных тестов может показать неполный или некорректный результат в контексте проводимых испытаний [8]. Набор тестов или, по-другому, регрессионное тестирование, в зависимости от объема тестируемого кода и качества внесенных изменений, проигрывает АИ в количестве затрачиваемых ресурсов и точности [9]. Преимущество АИ заключается в возможности проверки отдельных участков кода с игнорированием остальной части СЗИ. Таким образом, проведения тестирования измененного ПО, в соответствии с общеизвестными практиками, может быть недостаточно для обеспечения соответствия требованиям безопасности. Некоторые части кода могут потребовать двойной проверки, более глубокого анализа или другого подхода к тестированию [10]. К минусам метода также можно отнести проведение дополнительных работ по созданию или модернизации тестов для ПО, в случае, если был добавлен или удален уже существующий функционал.

В редких случаях экспертам исследовательских организаций приходится работать с неполным объемом исходных текстов, что исключает возможность проведения АИ с использованием тестов.

## 2. МЕТОД ПРОВЕДЕНИЯ АИ

Основная проблема проведения АИ заключается в количестве требуемых для его проведения ресурсов, будь то время эксперта или знания о ПО. Чтобы сократить время анализа результатов тестирования или построчного сравнения, можно проанализировать разницу в логике работы изделия, а также связях между функциями первой и второй версий изделия [11]. Задача анализа с использованием предлагаемого метода делится на следующие шаги:

- проведение статического анализа ПО для получения данных;
- построение последовательности вызова функций на основе полученных в результате статического анализа данных [12];
- представление последовательности вызова функций в виде древовидного графа [13];
- объединение древовидных графов двух версий.

По результатам проведения статического анализа исходных текстов должны быть получены данные:

- об используемых типах данных;
- о структурах классов;
- о последовательности вызовов функций [14].

Построенный корневой граф, представляющий поток управления ПО, содержит в качестве корня первую функцию в потоке управления. Узлами графа являются остальные функции, участвующие в цепочке вызовов [15]. Построенные древовидные графы проходят процедуру объединения, в процессе которого выделяются удаленные или добавленные узлы. На основе данных, полученных из нового графа, эксперт выработывает гипотезы.

Выделяются для проверки следующие гипотезы:

- узел удален – функционал исключен из ПО либо перенесен в другой узел;
- узел добавлен – в ПО добавлен новый функционал либо это перенесенный функционал из удаленного узла;
- изменен порядок вызова узлов – произошли изменения в логике обработки данных.

Рассмотрим следующий пример. На рис. 1 и 2 представлены последовательности вызовов функций в виде корневых графов  $G_1$  и  $G_2$ . Узел main является начальным вызовом всех остальных функций ПО. Узел func\_N, где N – число от 1 до максимально возможного числа вызовов функций, представляет собой любую реализованную в ПО функцию.

На рис. 3 представлен результат объединения графов  $G_1$  и  $G_2$ .

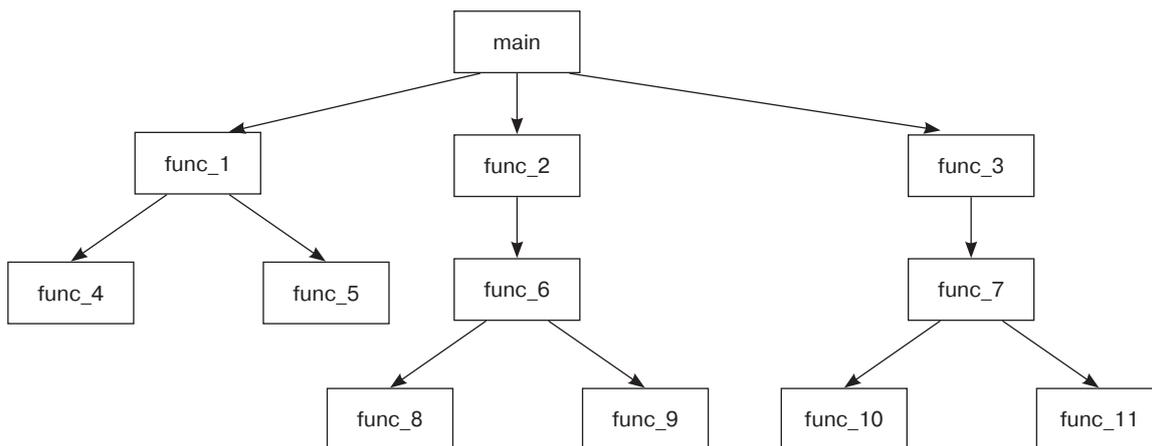


Рис. 1. Представленный в виде древовидного графа поток вызовов функций для старой версии ПО

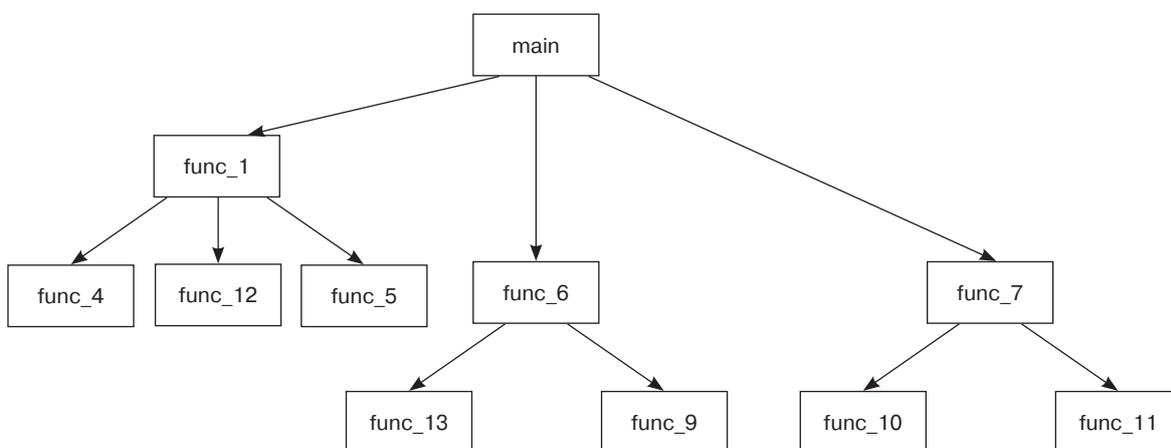


Рис. 2. Представленный в виде древовидного графа поток вызовов функций для новой версии ПО

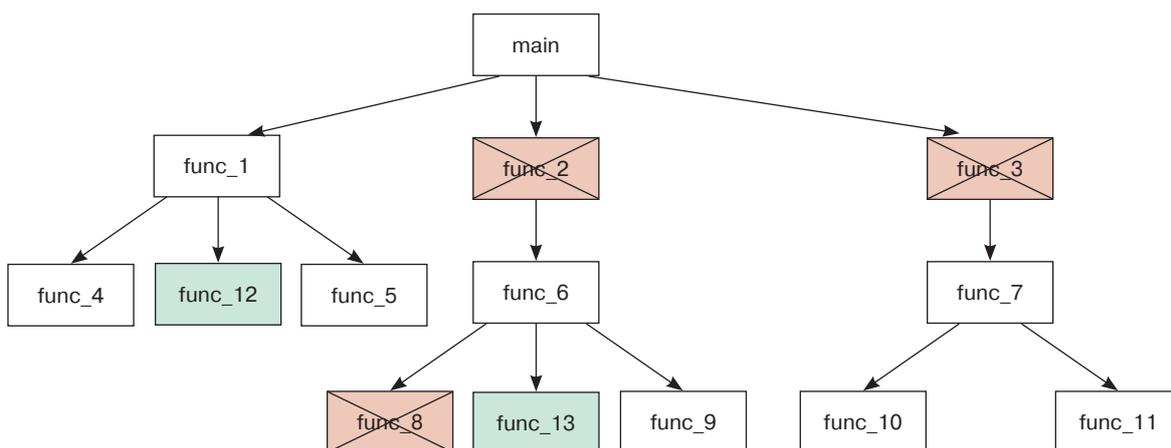


Рис. 3. Результат совмещения двух графов

На основе полученных данных выдвигаются следующие гипотезы для проверки:

- в левой ветке был добавлен узел `func_12`. Гипотеза: узел реализует новый функционал;
- средняя ветка подверглась наибольшим изменениям. Узлы `func_2` и `func_8` были убраны.

Гипотеза: новый узел `func_13` имеет либо новый функционал, либо реализует возможности `func_2` и `func_8`;

- в правой ветке был удален верхний узел `func_3`. Гипотеза: функционал удален полностью либо перенесен в нижестоящие узлы.

Таким образом, без прямого взаимодействия с исходным текстом ПО задача была локализована и сокращена до задачи анализа версий конкретных функций:

- в левой ветке влияние определяется анализом работы `func_12`;
- в средней – анализом результата сравнения узлов `func_2` и `func_8` с узлом `func_13`;
- в правой – определением значимости функционала, реализуемого `func_3` и проверкой (с помощью программы поиска) текста наличия реализации `func_3` в нижестоящих узлах.

Последующий анализ проводится стандартными методами АИ.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрены наиболее распространенные методы и инструменты проведения АИ, а также представлена концепция нового метода, целью которого является исправление недостатков существующих методов проведения исследования влияния изменений ПО на его безопасность. Преимущество метода заключается в его возможности вычислять участки кода, которые подверглись наибольшему изменению, еще до прямого взаимодействия эксперта с исходными текстами

Помимо применения экспертами в исследовательских организациях метод может быть внедрен в компании, занимающиеся разработкой ПО, для отслеживания появления аномалий в логике работы ПО на этапе разработки.

Дальнейшие исследования будут посвящены использованию метода для АИ, связанных с переходом на новую кодовую базу, а также повышению точности определения уязвимых узлов при использовании в анализе помеченных данных.

### Вклад авторов

**А.А. Легкодумов** – обоснование концепции исследования, разработка методологии исследования, написание прототипа программы, реализующей метод, написание статьи.

**Б.Н. Козеев** – сбор данных литературы, анализ и обобщение данных литературы, проведение исследований на открытом коде, редактирование статьи.

**В.В. Беликов** – сбор и систематизация данных, формулировка выводов, анализ результатов исследования, редактирование статьи.

**А.В. Корольков** – создание модели исследования, планирование исследований, анализ результатов исследования, редактирование статьи.

### Authors' contributions

**A.A. Legkodumov** – justification of the research concept, development of the research methodology, writing a prototype of the program implementing the method, and writing the text of the article.

**B.N. Kozeyev** – literature review, analysis and generalization of literature data, conducting research on open source code, and editing the article.

**V.V. Belikov** – collection and systematization of data, formulation of conclusions, analysis of research results, and editing the article.

**A.V. Korolkov** – creation of the research model, planning the research, analysis of the research results, and editing the article.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карпов Ю.Г. *Model checking. Верификация параллельных и распределенных программных систем*. СПб.: БХВ-Петербург; 2010. 560 с. ISBN 978-5-9775-0404-1
2. Беликов Д.В. Использование статического анализа исходного кода в разработке и тестировании программного обеспечения. *Студенческий форум*. 2021;41:90–93.
3. Беликов Д.В. Методы проведения статического анализа программного кода. *Студенческий форум*. 2022;13(192):15–18.
4. Казарин О.В., Скиба В.Ю. Об одном методе верификации расчетных программ. *Безопасность информационных технологий*. 1997;3:40–33.
5. Щедрин Д.А. Применение методов машинного обучения и анализа статического кода интеллектуальных систем. *Научно-исследовательский центр «Technical Innovations»*. 2023;16:28–32.
6. Иванников В.П., Белеванцев А.А., Бородин А.Е., Игнатьев В.Н., Журихин Д.М., Аветисян А.И., Леонов М.И. Статический анализатор Svace для поиска дефектов в исходном коде программ. *Труды Института системного программирования РАН*. 2014;26(1):231–250. [https://doi.org/10.15514/ISPRAS-2014-26\(1\)-7](https://doi.org/10.15514/ISPRAS-2014-26(1)-7)
7. Викторов Д.С., Самоволина Е.В., Мокеева О.А. Эффективность статического анализа для поиска дефектов программного обеспечения. *Вестник Военной академии воздушно-космической обороны*. 2021;6:25–39.
8. Бурякова Н.А., Чернов А.В. Классификация частично формализованных и формальных моделей и методов верификации программного обеспечения. *Инженерный Вестник Дона*. 2010;4:129–134.
9. Ефимов А.И. Проблема технологической безопасности программного обеспечения систем вооружения. *Безопасность информационных технологий*. 1994;3–4:22–33.
10. Ефимов А.И., Пальчун Б.П., Ухлинов Л.М. Методика построения тестов проверки технологической безопасности инструментальных средств автоматизации программирования на основе их функциональных диаграмм. *Вопросы защиты информации*. 1995;3(30):52–54.

11. Глухих М.И., Ицыксон В.М., Цесько В.А. Использование зависимостей для повышения точности статического анализа программ. *Моделирование и анализ информационных систем*. 2011;18(4):68–79.
12. Маликов О.Р. Автоматическое обнаружение уязвимостей в исходном коде программ. *Известия Таганрогского радиотехнического университета (Известия ТРТУ)*. 2005;4:48–53.
13. Несов В.С., Маликов О.Р. Использование информации о линейных зависимостях для обнаружения уязвимостей в исходном коде программ. *Труды Института системного программирования РАН*. 2006;9:51–57.
14. Воротникова Т.Ю. Надежный код: статический анализ программного кода как средство повышения надежности программного обеспечения информационных систем. *Информационные технологии в УИС*. 2020;2:22–27.
15. Fritz C., Arzt S., Rashofer S., et al. Highly Precise Taint Analysis for Android Applications. *Technical Report TUD-CS-2013-0113*. EC SPRIDE. May 2013. 14 p. URL: <http://www.bodden.de/pubs/TUD-CS-2013-0113.pdf>

## REFERENCES

1. Karpov Yu.G. *Model checking. Verifikatsiya parallel'nykh i raspredeennykh programmnykh system (Model checking. Verification of Parallel and Distributed Software Systems)*. St. Petersburg: BHV-Petersburg; 2010. 560 p. (in Russ.). ISBN 978-5-9775-0404-1
2. Belikov D.V. The use of static source code analysis in software development and testing. *Studencheskii forum = Student Forum*. 2021;41:90–93 (in Russ.).
3. Belikov D.V. Methods for conducting static analysis of program code. *Studencheskii forum = Student Forum*. 2022;13(192):15–18 (in Russ.).
4. Kazarin O.V., Skiba V.Yu. About one method of verification of settlement programs. *Bezopasnost' informatsionnykh tekhnologii = IT Security (Russia)*. 1997;3:40–33 (in Russ.).
5. Shchedrin D.A. Application of machine learning methods and analysis of static code of intelligent systems. *Nauchno-issledovatel'skii tsentr "Technical Innovations" = Scientific Journal "Research Center Technical Innovations."* 2023;16:28–32 (in Russ.).
6. Ivannikov V.P., Belevantsev A.A., Borodin A.E., Ignatiev V.N., Zhurikhin D.M., Avetisyan A.I., Leonov M.I. Static analyzer Sspace for finding of defects in program source code. *Trudy Instituta sistemnogo programmirovaniya RAN = Proceedings of the Institute for System Programming of the RAS*. 2014;26(1):231–250 (in Russ.). [https://doi.org/10.15514/ISPRAS-2014-26\(1\)-7](https://doi.org/10.15514/ISPRAS-2014-26(1)-7)
7. Viktorov D.S., Samovolina E.V., Mokeeva O.A. The effectiveness of static analysis for finding software defects. *Vestnik Voennoi akademii vozdušno-kosmicheskoi oborony = Bulletin of the Military Academy of Aerospace Defense*. 2021;6:25–39 (in Russ.).
8. Buryakova N.A., Chernov A.V. Classification of partially formalized and formal models and methods of software verification. *Inzhenernyi Vestnik Dona = Eng. J. Don*. 2010;4:129–134 (in Russ.).
9. Efimov A.I. The problem of technological security of software for weapons systems. *Bezopasnost' informatsionnykh tekhnologii = IT Security (Russia)*. 1994;3–4:22–33 (in Russ.).
10. Efimov A.I., Palchun B.P., Ukhlinov L.M. Methodology for constructing tests for checking technological safety of programming automation tools based on their functional diagrams. *Voprosy zashchity informatsii = Information Security Questions*. 1995;3:30:52–54 (in Russ.).
11. Glukhikh M.I., Itsykson V.M., Tsesko V.A. Using dependencies to improve precision of code analysis. *Aut. Control Comp. Sci*. 2012;46(7):338–344. <https://doi.org/10.3103/S0146411612070097>  
[Original Russian Text: Glukhikh M.I., Itsykson V.M., Tsesko V.A. Using dependencies to improve precision of code analysis. *Modelirovanie i Analiz Informatsionnykh Sistem*, 2011;18(4):68–79 (in Russ.).]
12. Malikov O.R. Automatic detection of vulnerabilities in the source code of programs. *Izvestiya TRTU*. 2005;4:48–53 (in Russ.).
13. Nesov V.S., Malikov O.R. Using information about linear dependencies to detect vulnerabilities in the source code of programs. *Trudy Instituta sistemnogo programmirovaniya RAN = Proceedings of the Institute for System Programming of the RAS*. 2006;9:51–57 (in Russ.).
14. Vorotnikova T.Yu. Reliable code: static analysis of program code as a means of improving the reliability of software for information systems. *Informatsionnye tekhnologii v UIS = Information Technologies in the UIS*. 2020;2:22–27 (in Russ.).
15. Fritz C., Arzt S., Rashofer S., et al. Highly Precise Taint Analysis for Android Applications. *Technical Report TUD-CS-2013-0113*. EC SPRIDE. May 2013. 14 p. Available from URL: <http://www.bodden.de/pubs/TUD-CS-2013-0113.pdf>

### Об авторах

**Легкодумов Александр Алексеевич**, специалист инженерно-криптографического анализа, ООО «СФБ Лаборатория» (127083, Россия, Москва, ул. Мишина, д. 56, стр. 2). E-mail: studkkso0416@mail.ru. <https://orcid.org/0000-0002-2562-4333>

**Козеев Борис Николаевич**, главный специалист, АО «АЛЬФА-БАНК» (107078, Москва, ул. Каланчевская, д. 27). E-mail: kozeev.boris2018@yandex.ru. <https://orcid.org/0009-0009-0993-8082>

**Беликов Владимир Вячеславович**, к.воен.н., доцент, доцент кафедры информационной безопасности, Институт искусственного интеллекта ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: belikov\_v@mirea.ru. Scopus Author ID 57983605100, <https://orcid.org/0000-0003-1423-1072>

**Корольков Андрей Вячеславович**, к.т.н., старший научный сотрудник, заведующий кафедрой информационной безопасности, Институт искусственного интеллекта ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: korolkov@mirea.ru. SPIN-код РИНЦ 3849-6868.

### About the authors

**Alexander A. Legkodumov**, Cryptographic Analysis Specialist, SFB Laboratory (56/2, Mishina ul., Moscow, 127083 Russia). E-mail: studkkso0416@mail.ru. <https://orcid.org/0000-0002-2562-4333>

**Boris N. Kozeyev**, Chief Specialist, ALFA-BANK (27, Kalanchevskaya ul., Moscow, 107078 Russia). E-mail: kozeev.boris2018@yandex.ru. <https://orcid.org/0009-0009-0993-8082>

**Vladimir V. Belikov**, Cand. Sci. (Military), Docent, Assistant Professor, Department of Information Security, Institute of Artificial Intelligence, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: belikov\_v@mirea.ru. Scopus Author ID 57983605100, <https://orcid.org/0000-0003-1423-1072>

**Andrey V. Korolkov**, Cand. Sci. (Eng.), Senior Researcher, Head of the Department of Information Security, Institute of Artificial Intelligence, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: korolkov@mirea.ru. RSCI SPIN-code 3849-6868.

УДК 004.056  
<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-2-16-27>



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

## Технология анализа безопасности информационных потоков в программном обеспечении, реализующем бизнес-логику с использованием хранимых программных блоков баз данных

А.А. Тимаков<sup>®</sup>

МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, 119454 Россия

<sup>®</sup> Автор для переписки, e-mail: [timakov@mirea.ru](mailto:timakov@mirea.ru)

### Резюме

**Цели.** Проверка свойств безопасности программного обеспечения (ПО) при построении информационных систем с высоким уровнем доверия, как правило, осуществляется с использованием инструментов динамического и статического анализа. Соответствующие виды анализа обычно не учитывают бизнес-логику ПО и не опираются на политику управления доступом к данным. Современным направлением решения проблемы является контроль информационных потоков. Несмотря на большое количество проведенных исследований, механизмы контроля информационных потоков в ПО пока не находят широкого применения на практике, поскольку обладают значительной сложностью и диктуют повышенные требования к разработчикам. Целью работы является перенос контроля информационных потоков с языкового уровня на уровень формальной верификации и выделение функции контроля целостности и конфиденциальности данных в ПО в самостоятельную задачу, решаемую аналитиками информационной безопасности.

**Методы.** Исследование опирается на общие формальные методы безопасности компьютерных систем и методы формальной верификации. Разработанный автором алгоритм проверки спецификаций использует аппарат темпоральной логики действий.

**Результаты.** Представлена технология, предполагающая поэтапное решение частных задач: проектирование базы данных (БД) для хранения и обработки подлежащей защите информации, анализ зависимостей и выделение релевантного множества программных блоков БД, генерация спецификаций TLA+ выделенных программных блоков БД, разметка спецификаций в соответствии с правилами глобальной политики безопасности и дополнительными ограничениями, применение алгоритма проверки спецификаций и устранение нарушений инварианта безопасности с внесением рекомендаций для разработчиков ПО, применение процедуры анализа помеченных данных для контроля распространения выходных значений верифицированных программных блоков БД во внешних программных модулях.

**Выводы.** Представленная технология не требует от разработчиков внесения избыточных аннотаций, описывающих правила политики безопасности. Функция анализа информационных потоков с привязкой к заданным в системе ограничениям доступа выносится на отдельный этап жизненного цикла разработки ПО.

**Ключевые слова:** информационные потоки, контроль информационных потоков, формальная верификация, языковая платформа, политика безопасности, абстрактная семантика, информационное невливание

• Поступила: 11.05.2023 • Доработана: 03.10.2023 • Принята к опубликованию: 07.02.2024

**Для цитирования:** Тимаков А.А. Технология анализа безопасности информационных потоков в программном обеспечении, реализующем бизнес-логику с использованием хранимых программных блоков баз данных. *Russ. Technol. J.* 2024;12(2):16–27. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-2-16-27>

**Прозрачность финансовой деятельности:** Автор не имеет финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

## RESEARCH ARTICLE

# Analysis of information flow security using software implementing business logic based on stored database program blocks

Aleksey A. Timakov <sup>@</sup>

MIREA – Russian Technological University, Moscow, 119454 Russia

<sup>@</sup> Corresponding author, e-mail: [timakov@mirea.ru](mailto:timakov@mirea.ru)

### Abstract

**Objectives.** Verification of software security is typically performed using dynamic and static analysis tools. The corresponding types of analysis do not usually consider the business logic of the software and do not rely on data access control policies. A modern approach to resolving this problem is to implement language-based information flow control. Despite a large amount of research, mechanisms for information flow control in software are not widely used in practice. This is because they are complex and impose increased demands on developers. The aim of the work is to transfer information flow control from the language level to the level of formal verification. This will enable the functions of controlling data integrity and confidentiality in software to be isolated into a separate task, which can be resolved by information security analysts.

**Methods.** The research is based on general formal security methods for computer systems and formal verification methods. The algorithm developed by the author for checking security specifications and resolving security violations uses temporal logic of actions.

**Results.** The technology is presented as a step-by-step approach to resolving specific tasks, including the following: designing a database (DB) for storing and processing sensitive information; analyzing dependencies and identifying relevant sets of program blocks in the DB; generating TLA+ specifications for the identified program blocks; labeling specifications according to global security policy rules and additional constraints; applying the specification verification algorithm, and resolving security violations while providing recommendations for software developers. The procedure also involves analyzing labeled data, in order to control the spread of verified program block output values in external software modules.

**Conclusions.** The technology presented herein does not require developers to include redundant annotations describing security policy rules. The function of analyzing information flows with reference to predefined access restrictions is moved to a separate stage of the software development life cycle.

**Keywords:** information flows, information flow control, formal verification, language platform, security policy, abstract semantics, non-interference

• Submitted: 11.05.2023 • Revised: 03.10.2023 • Accepted: 07.02.2024

**For citation:** Timakov A.A. Analysis of information flow security using software implementing business logic based on stored database program blocks. *Russ. Technol. J.* 2024; 12(2): 16–27. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-2-16-27>

**Financial disclosure:** The author has no a financial or property interest in any material or method mentioned.

The author declares no conflicts of interest.

## ВВЕДЕНИЕ

Условия причисления автоматизированных систем к определенным классам защиты определяются оценочными стандартами. В настоящее время требования к безопасности формулируются в терминах «Общих критериев оценки защищенности информационных технологий»<sup>1</sup> и включают функциональные требования и требования доверия [1]. Из анализа нормативных документов<sup>2, 3, 4</sup> следует, что существуют три важных категории условий, учитываемых при

<sup>1</sup> ГОСТ Р ИСО/МЭК 15408-1-2002. Государственный стандарт Российской Федерации. *Информационная технология. Критерии оценки безопасности информационных технологий*. Часть 1. М.: ИПК Издательство стандартов; 2002. [GOST R ISO/IEC 15408-1-2002. State Standard of the Russian Federation. *Information technology. Security techniques. Evaluation criteria for IT security*. Part 1. Moscow: IPK Izdatelstvo standartov; 2002 (in Russ.).]

<sup>2</sup> Приказ ФСТЭК России от 14.03.2014 г. № 31. Об утверждении требований к обеспечению защиты информации в автоматизированных системах управления производственными и технологическими процессами на критически важных объектах, потенциально опасных объектах, а также на объектах, представляющих повышенную опасность для жизни и здоровья людей и для окружающей природной среды». <https://fstec.ru/dokumenty/vse-dokumenty/prikazy/prikaz-fstek-rossii-ot-14-marta-2014-g-n-31>. Дата обращения 12.03.2023. [Order of the Federal Service for Technical and Export Control of Russia No. 31 dated March 14, 2014. “On Approval of Requirements for Information Protection in Automated Control Systems for Production and Technological Processes at Critically Important Facilities, Potentially Hazardous Facilities, as well as Facilities Presenting an Increased Risk to Human Life and Health and to the Natural Environment” (in Russ.). <https://fstec.ru/dokumenty/vse-dokumenty/prikazy/prikaz-fstek-rossii-ot-14-marta-2014-g-n-31>. Accessed March 12, 2023.]

<sup>3</sup> ГОСТ Р 56939-2016. Национальный стандарт Российской Федерации. *Защита информации. Разработка безопасного программного обеспечения. Общие требования*. М.: Стандартинформ; 2018. [GOST R 56939-2016. National Standard of the Russian Federation. *Information protection. Secure software development. General requirements*. Moscow: Standartinform; 2018 (in Russ.).]

<sup>4</sup> ГОСТ Р 51583-2014. Национальный стандарт Российской Федерации. *Защита информации. Порядок создания автоматизированных систем в защищенном исполнении. Общие положения*. М.: Стандартинформ; 2018. [GOST R 51583-2014. National Standard of the Russian Federation. *Information protection. Sequence of protected operational system formation. General provisions*. Moscow: Standartinform; 2018 (in Russ.).]

определении класса защиты: контроль «легальных» траекторий и сред распространения информации<sup>5</sup>, контроль скрытых каналов, формальное доказательство эффективности реализованных механизмов защиты или безопасности вычислений.

На прикладном уровне проверка безопасности вычислений представляется наиболее сложной. На практике полноценное решение этой проблемы не достигнуто даже в контексте контроля «легальных» траекторий распространения информации. Траектории распространения информации в программном обеспечении (ПО), которые соответствуют правилам, предусмотренным его логикой, можно получить из графа потока управления при условии целостности потока управления. Для обеспечения конфиденциальности и целостности данных в ПО используется сочетание формальных, полужформальных и неформальных методов, которые применяются на разных стадиях разработки системы. Некоторые из этих методов включают динамический и статический анализ кода, символьное (косимвольное) выполнение, формальную верификацию и фаззинг-тестирование<sup>6</sup>. Кроме того, на уровне платформы и компилятора применяются дополнительные защитные меры, такие как рандомизация смещений динамической памяти, защита от исполнения на стеке, контроль целостности потока управления и др. Хотя проверки, реализуемые с использованием перечисленных методов, играют существенную роль в обеспечении защиты информации, они в основном не учитывают специфику обрабатываемых данных и бизнес-логику приложения. К формальным методам, которые учитывают специфику данных, относятся методы на основе контроля информационных потоков (КИП).

<sup>5</sup> Под «легальными» траекториями и средами распространения информации понимаются траектории и среды, предусмотренные разработчиком системы для получения доступа пользователей к данным, а также обмена данными между пользователями и отдельными компонентами системы. [Legal trajectories and environments for information dissemination mean the trajectories and environments envisioned by the system developer for user access to data, as well as data exchange between users and individual system components.]

<sup>6</sup> Техника тестирования программного обеспечения, заключающаяся в передаче приложению на вход неправильных, неожиданных или случайных данных. [Fuzzing testing is a software testing technique of giving incorrect, unexpected, or random data as input to an application.]

Принято различать четыре составляющих любой технологии анализа безопасности вычислений на основе КИП в ПО: алфавит ограничительных меток, формальные условия безопасности, механизм проверки условий безопасности, реализация. Полноценное внедрение КИП в информационную систему предполагает охват всех четырех составляющих.

Сложность описания политики безопасности на прикладном уровне и уровне специального ПО обусловлена двумя факторами: необходимостью учитывать правила управления доступом, реализованные на системном уровне, и необходимостью учитывать дополнительные ограничения, которые обычно проверяются непосредственно в коде программы. С исследованиями, посвященными описанию политики безопасности на уровне программного кода, можно познакомиться в [2].

В большей части исследований, касающихся условий безопасности вычислений [3–6], за основу принимается понятие информационного невливания. Применительно к ПО суть сводится к проверке отсутствия влияния чувствительных (недоверенных – в контексте контроля целостности) входных значений на чувствительные (доверенные – в контексте контроля целостности) выходные значения. Необходимые формальные определения будут представлены далее. В литературе также известны иные подходы к определению безопасности вычислений: статичность знаний нарушителя [7], невыводимость [8] и др.

Механизмы проверки чаще всего реализуются на языковом уровне в виде отдельных видов статического (динамического) анализа. Особую популярность приобрели методы статического анализа информационных потоков на основе безопасных систем типов [9, 10]. Они позволяют применить принцип безопасной композиции, что существенно в виду большого объема проверяемого кода промышленных приложений.

К известным реализациям КИП можно отнести JF [11], Joana [12], Paragon [13].

Комплексный обзор уже достигнутых результатов в рассматриваемой предметной области представлен в [2–4].

Следует отметить, что, несмотря на долгую историю, КИП в ПО остается лишь предметом академических исследований. Причиной является сложность процедур разметки исходного кода метками безопасности и интерпретации полученных результатов (предупреждений).

## 1. МЕТОДОЛОГИЧЕСКАЯ ОСНОВА

В работе выдвигается гипотеза о том, что для переноса исследований методов КИП в практическую плоскость требуется вынесение функции анализа информационных потоков с привязкой к заданным

в системе ограничениям доступа на отдельный этап жизненного цикла разработки ПО. Добиться этого можно, обратившись к теории формальной верификации свойств ПО.

Перед тем как перейти к описанию предложенной технологии, отметим, что идея использования теории формальной верификации программ в области КИП не является новой. Значимые результаты получены Кларксоном и др. [14]. В частности, авторами расширены аппараты линейной темпоральной логики (linear temporal logic, LTL) и логики ветвящегося времени (computational tree logic, CTL) кванторами над траекториями вычислений. В результате удалось сформулировать свойства безопасности информационных потоков (на основе понятия информационного невливания), которые, по сути, являются гиперсвойствами. В работах также намечен подход к проверке указанных свойств с применением инструментов проигрывания моделей. Суть подхода сводится к описанию структуры Крипке для проверяемой программы, описанию свойств безопасности с использованием формул HyperLTL – расширения LTL и последующей генерации и проверке автоматной модели<sup>7</sup>. Описание промышленного приложения в виде структуры Крипке на практике представляется трудновыполнимой задачей. Сами авторы исследования и соответствующего прототипа отмечают невозможность масштабирования области применения разработанного инструментария до систем средней сложности (число состояний не превышает 1000). В [15] предлагается интересный способ представления свойств безопасности информационных потоков как стандартных свойств надежности (safety properties). Данный способ основан на идее трансформации проверяемой программы с использованием «собственной композиции» и некоторых стандартных правил вывода системы безопасных типов. К ограничениям здесь следует отнести некоторую сложность интерпретации результатов проверки, поскольку процедура требует модификации оригинальной программы, и сохраняющуюся трудоемкость анализа программ с большим числом состояний.

Чтобы преодолеть ограничения формальной верификации, в настоящем исследовании также заимствован ранее отмеченный подход на основе безопасных систем типов, однако, в отличие от [14] и [15], при моделировании вычислений предлагается переход от операционной семантики к упрощенной абстрактной семантике информационных потоков. Кроме того, вводится ограничение, связанное с соблюдением разработчиками принципа минимизации поверхности атаки, который,

<sup>7</sup> В указанных исследованиях за основу принимаются автоматы Бюхи. [In these studies, Büchi automata are taken as a basis.]

в т.ч. предполагает компактное хранение чувствительной информации (в ограниченном наборе таблиц) и стремление четко разделить критичные и некритичные сервисы системы. Физическое разделение сервисов на основе уровней конфиденциальности и целостности обрабатываемых данных в настоящее время становится возможным благодаря отказу от монолитной архитектуры бизнес-приложений и широкому развитию платформ, поддерживающих модульную разработку. Правила вывода типов в нашем исследовании, как можно предположить, заменяются правилами абстрактной семантики информационных потоков. Отказ от операционной семантики в пользу абстрактной семантики при моделировании вычислений позволяет добиться существенного сокращения числа состояний автоматной модели и сформулировать свойства безопасности информационных потоков в виде стандартных свойств надежности. Все это сделало возможным реализацию механизма проверки свойств безопасности ПО (в смысле информационных потоков) на базе широко применяемых на практике средств создания программных спецификаций и проигрывания моделей TLA+<sup>8</sup> и TLC (TLA checker).

Под нарушителем в настоящем исследовании понимается любой пользователь системы, не являющийся администратором. Нарушителю известен исходный код, он может взаимодействовать с программой, ему доступны выходные значения, генерируемые на всех этапах выполнения и обладающие меткой безопасности, соответствующей его собственной метке. Полагаем также, что злоумышленник не способен эксплуатировать скрытые вероятностные информационные каналы и каналы по времени.

## 2. ТЕХНОЛОГИЯ АНАЛИЗА БЕЗОПАСНОСТИ ИНФОРМАЦИОННЫХ ПОТОКОВ

Как уже отмечалось, целью разработанной технологии служит выявление и устранение запрещенных информационных потоков в ПО автоматизированных информационных систем уровня предприятия. Упомянутые ранее реализации КИП в основном опираются на систему безопасных типов и статический анализ (статический анализ при этом является отдельным этапом компиляции). Безопасные типы в таких платформах задают правила политики безопасности наряду с правилами преобразования данных и ограничениями на объем выделяемой памяти, диктуемыми стандартными типами. Например, расширенный тип переменной может выглядеть так:

$\text{int } x \{ \text{Alice} \rightarrow \text{Bob} \}$ . Это означает, что владельцем данных, хранимых в переменной  $x$ , является Alice, чтение разрешено Alice, Bob, и любым иным пользователям, действующим от их имени. Таким образом, упомянутые известные реализации КИП предполагают, что на разработчика ПО возлагаются дополнительные функции по разметке исходного кода и интерпретации предупреждений безопасности, генерируемых статическим анализатором. В основу предложенной технологии положена идея автоматической генерации спецификаций на основе исходного кода программных блоков баз данных (сервисов) с последующей их верификацией специалистами в области безопасности – аналитиками [16].

Этапы анализа представлены на рис. 1.

Хранимые программные блоки БД (блоки *PL/SQL*) в контексте технологии представляют собой удобный механизм реализации бизнес-логики. Данные модули, как правило, характеризуются малым объемом кода, отсутствием избыточных вычислений, направленностью на работу с данными.

В описании технологии используется подмножество языка *PL/SQL*, далее представлена его BNF-грамматика<sup>9</sup>:

```
(values)      v ::= n | b
(declarations) d ::= x number | x1 x2 | d1; dn | type
xr is object (xf1 x1, ..., xfn xn) |
type xi is table of x | exception
x | procedure xp(x1, ..., xn)
as d begin c1 [exception]
c2 end; | function xfn(x1, ..., xn)
return xrt as d begin c1
[exception c2] end; | ...
(expressions) e ::= v | x | x1.x2 | e1 ⊙ e2 | x(e1, ..., e2)
| ...
(conditions) cnd ::= e1 * e2 | cnd1 ⊗ cnd2
(statements) c ::= x := e | c1; c2 | xf(x1 → e1, ..., xn →
en) | if e then c1 else c2 |
while e do c | end if | end
while | c1 ∨ c2 | select e1, ..., en
into x1, ..., xn from xt1, ..., xtm where
cnd | insert into
xt(x1, ..., xn) values (e1, ..., en) |
update xt set x1 = e1, ..., xn = en
where cnd | delete from xt
where cnd | throw xexc |
when xexc then c | null |
return(xout → e) | ...
(program)    p ::= declare d begin c1 [exception c2]
end;
```

<sup>8</sup> TLA – temporal logic of actions, темпоральная логика действий.

<sup>9</sup> Backus–Naur form, форма Бэкуса – Наура – формальная система описания синтаксиса. [Backus–Naur form is a formal system for describing syntax.]



## 2.1. Проектирование БД

Первым этапом анализа является проектирование БД. Его необходимо осуществлять таким образом, чтобы конфиденциальные данные размещались компактно – в ограниченном наборе таблиц. Данное требование не противоречит общепринятым принципам безопасной разработки и при этом позволяет более эффективно изолировать критичные вычисления от общего кода *PL/SQL*.

## 2.2. Выделение релевантного множества программных блоков БД и источников данных

На следующем этапе осуществляется выделение процедур и функций *PL/SQL*, которые реализуют критичные вычисления, т.е. вычисления над конфиденциальными данными и данными, требующими высокого уровня доверия. Стоит отметить, что неотъемлемой функцией современных БД является управление прямыми и транзитивными зависимостями<sup>13, 14, 15</sup>. Они используются ядром системы для проверки состояний объектов перед их вызовами и позволяют избежать критичных ошибок на этапе выполнения<sup>16</sup>. Работают подобные механизмы примерно одинаково. В системе управления базами данных *Oracle* для получения прямых и косвенных зависимостей, ассоциированных с некоторой таблицей *T*, можно выполнить следующие команды: `execute deptree_fill('TABLE', 'T');` `select * from deptree;`

Следующие три этапа: генерация, разметка, применение алгоритма проверки спецификаций, являются ключевыми и наиболее трудозатратными.

## 2.3. Генерация TLA+ спецификаций

Пусть *PC* – метка безопасности счетчика команд (program counter), который определяет неявные информационные потоки, возникающие в условных операторах **if** и циклах **while**; *c* – текущая инструкция

<sup>13</sup> [https://docs.oracle.com/cd/A84870\\_01/doc/server.816/a76965/c19depnd.htm](https://docs.oracle.com/cd/A84870_01/doc/server.816/a76965/c19depnd.htm). Дата обращения 12.03.2023. / Accessed March 12, 2023.

<sup>14</sup> <https://www.postgresql.org/docs/current/catalog-pg-depend.html>. Дата обращения 12.03.2023. / Accessed March 12, 2023.

<sup>15</sup> <https://learn.microsoft.com/en-us/sql/ssms/object/object-dependencies?view=sql-server-ver16>. Дата обращения 12.03.2023. / Accessed March 12, 2023.

<sup>16</sup> Программная среда БД не является монолитной, и в процессе работы экземпляра БД отдельные объекты: таблицы, программные блоки, представления и др., могут подвергаться изменениям, критичным для работы иных – зависимых объектов. [Database program environment is not monolithic, and in the process of database instance operation separate objects: tables, program blocks, views, etc., may undergo changes that are critical for the operation of other dependent objects.]

в процессе, ассоциированном с пользовательским сеансом; *M* – абстрактное состояние среды вычислений, которое задает отображение переменных (локальных и глобальных), входных и выходных потоков на соответствующие им ограничительные метки; *n* – общее количество сеансов пользователей. Тогда выполнение программных блоков в среде системы управления базами данных можно описать системой переходов состояний вида:

$$\langle\langle\langle PC1, c1 \rangle \dots \langle PCn, cn \rangle \rangle, M \rangle.$$

Генерация спецификаций, описывающих поведение такой системы, осуществляется с помощью программного средства «Генерация TLA+ спецификаций на основе программных блоков баз данных» в соответствии с разработанной абстрактной семантикой информационных потоков [2].

В качестве примера рассмотрим правило вычисления абстрактного выражения и правило присваивания. Результат абстрактного выражения  $\odot$  вычисляется как минимальная верхняя грань меток включенных в него операндов:

$$(E-OPER) \frac{\langle e1, M \rangle \Downarrow p1 \quad \langle e2, M \rangle \Downarrow p2}{\langle e1 \odot e2, M \rangle \Downarrow p1 \sqcup p2}.$$

Аналогично рассчитываются результирующие метки для выражений сравнения  $*$  и логических выражений  $\odot$ . В результате выполнения операции присваивания абстрактное состояние среды вычислений изменяется в соответствии с меткой присваиваемого значения и меткой счетчика команд в текущем сеансе:

$$(C-ASSIGN) \frac{\langle e, M \rangle \Downarrow p}{\langle\langle \dots \langle PC, x:=e \rangle \dots \rangle, M \rangle \rightarrow \langle\langle \dots \langle PC, null \rangle \dots \rangle, M[x \mapsto p \sqcup p1 \dots pcn] \rangle}.$$

Правила типа «EXT» применяются для проверки информационных потоков, ассоциированных с элементами-стоками, обладающими стационарными метками безопасности. К ним относятся выходные потоки, атрибуты отношений, доступ к которым может быть предоставлен вне контекста вызовов проверяемых программных блоков. Условия *inv* соответствуют инварианту безопасности:

$$(C-ASSIGN-EXT) \frac{\langle e, M \rangle \Downarrow p \quad \langle x, M \rangle \Downarrow px \quad \text{inv: } p \sqcup p1 \dots pcn \sqsubseteq px}{\langle\langle \dots \langle PC, x:=e \rangle \dots \rangle, M \rangle \rightarrow \langle\langle \dots \langle PC, null \rangle \dots \rangle, M \rangle}.$$

Переходы между параллельными сеансами представляются равновероятными, что является справедливым допущением для выбранной модели нарушителя и соответствующей схемы информационного невливания. Они описываются глобальными правилами вида:

$$(GLOB-1) \frac{O(d) = ci \quad \langle PCi, ci, M \rangle \rightarrow \langle PCk, ck, M' \rangle}{\langle \langle \langle PC1, c1 \rangle \dots \langle PCn, cn \rangle \rangle, M \rangle \rightarrow_{1/n}^i \langle \langle \langle PC1, c1 \rangle \dots \langle PCi-1, ci-1 \rangle \langle PCk, ck \rangle \dots \langle PCn, cn \rangle \rangle, M' \rangle},$$

$$(GLOB-2) \frac{O(d) = ci \quad \langle PCi, ci, M \rangle \rightarrow \langle PCi, M \rangle}{\langle \langle \langle PC1, c1 \rangle \dots \langle PCn, cn \rangle \rangle, M \rangle \rightarrow_{1/n}^i \langle \langle \langle PC1, c1 \rangle \dots \langle PCi-1, ci-1 \rangle \langle PCi+1, ci+1 \rangle \dots \langle PCn, cn \rangle \rangle, M \rangle}.$$

## 2.4. Разметка элементов спецификаций

Разметка спецификаций осуществляется на основе описанных требований политики безопасности и действующих ограничений доступа. Для выполнения этого шага применяется модифицированный язык описания политик безопасности *Paralocks* [13]. К основным его преимуществам следует отнести возможность встраивания в выражения политик (или меток) условий деклассификации данных, гибкость и возможность интеграции с различными системами управления доступом (ролевыми, мандатными и др.). Аргументированные доводы в отношении необходимости сопряжения механизмов КИП, реализуемых на уровне специального (прикладного) ПО, и механизмов управления доступом системного уровня, а также сравнительный анализ известных языков описания политик безопасности, обосновывающий выбор *Paralocks*, приведен в [2].

Формально метка безопасности  $P_k$  определяется формулой логики предикатов первого порядка вида:  $P_k \triangleq C_1 \wedge C_2 \wedge \dots$ , здесь  $C_n$  – отдельное выражение допустимости информационного потока:  $\forall x_1, \dots, x_m. l_1(\cdot) \wedge l_2(\cdot) \wedge l_3(\cdot) \dots \Rightarrow Flow(u)$ ,  $Flow(u)$  – предикат, обозначающий поток данных к  $u$  ( $u$  – связанная переменная или константа, обозначающая пользователя),  $l_1 \dots l_n$  – условия (или блокировки), выполнение которых требуется для истинности  $Flow(u)$ . Предикаты  $l_1 \dots l_n$  могут быть параметрическими или непараметрическими. Множество возможных блокировок зависит от заданных на системном уровне ограничений доступа и дополнительных ограничений, реализуемых прикладным ПО.

В качестве примера рассмотрим требование политики: «Поток к произвольному пользователю  $x$  возможен, если: а) для  $x$  задана роль *guest* и открыта блокировка  $w\_hours$  – попытка совершается в рабочее время, или б) для  $x$  задана роль *account*». Логически оно может быть представлено как:

$$\forall x. (w\_hours \wedge guest(x) \Rightarrow Flow(x)) \wedge (account(x) \Rightarrow Flow(x)).$$

Для удобства анализа трасс, приводящих к возникновению запрещенных информационных потоков, было разработано отдельное программное

средство с графическим пользовательским интерфейсом – «Анализ трасс проигрывания TLC моделей, построенных на основе TLA+ спецификаций программных блоков БД и приводящих к нарушению инварианта безопасности информационных потоков». Отображение меток в нем происходит в соответствии с упрощенной нотацией, в которой рассматриваемый пример выглядит так:

x: account(x)  
x: guest(x), t\_expire

Отношение частичного порядка  $\sqsubseteq$  на множестве меток безопасности задается следующим образом:

$$P_1 \sqsubseteq P_2, \text{ если } \forall c_2 \in P_2 : \exists c_1 \in P_1 : c_1 \sqsubseteq c_2. \quad (1)$$

С точки зрения логики  $P_1 \sqsubseteq P_2$  можно интерпретировать, как

$$P_1 \models P_2. \quad (2)$$

В [17] показано, что условие (1) является необходимым и достаточным для истинности выражения (2). Сравнение предложений меток безопасности в [17] описывается алгоритмически, через набор правил.

На рис. 2 с использованием упрощенной нотации показано несколько примеров работы оператора сравнения на множестве меток и вычисления минимальной верхней грани.

Уровень конфиденциальности используемых программой данных может не только понижаться, но и повышаться в процессе их обработки. Для учета данного обстоятельства синтаксис языка *Paralocks* расширен однопараметрической блокировкой *Unknown* – «Неизвестно». Она позволяет задавать для отдельных элементов правила классификации по содержанию (*what*)<sup>17</sup>. Блокировка *Unknown* может использоваться в левой части (посылке) предложения политики некоторого элемента, если в ходе вычислений при раскрытии некоторых дополнительных сведений политика элемента должна становится

<sup>17</sup> Предполагается, что для классификации данных характерны те же аспекты: *when, who, what, where*, что и для деклассификации. [It is assumed that data classification is characterized by the same aspects: *when, who, what, where*, as for declassification.]

$P_1$	$P_2$	$P_1 \sqsubseteq P_2$	$P_1$	$P_2$	$P_1 \sqsubseteq P_2$
x: manager(x)	x: reviewer(x)	FALSE	x: manager(x)	x: reviewer(x)	x: manager(x)
x: reviewer(x)	x: manager(x)	FALSE		x: reviewer(x)	alice: reviewer(alice)
x: manager(x)	x: manager(x), t_expire	TRUE	x: manager(x) x: reviewer(x)	x: t_expire	x: manager(x), t_expire x: reviewer(x), t_expire
x: manager(x)	bob: manager(bob)	TRUE		alice: t_expire	T

Рис. 2. Работа оператора сравнения меток и вычисления минимальной верхней грани

строже<sup>18</sup>. Например, политика вида «Зарплата (сотрудника) может быть прочитана только специалистом финансового отдела» при условии, что идентифицирующими сотрудника атрибутами выступают:  $emp\_id$ ,  $email$ ,  $lname$ , может быть выражена как:

$$\begin{aligned} & \forall x. (Unknown(emp\_id) \wedge \\ & \wedge Unknown(email) \wedge Unknown(lname)) \Rightarrow \\ & \Rightarrow Flow(x) \wedge account\_emp(x) \Rightarrow Flow(x). \end{aligned}$$

С использованием формул TLA+ определены конечные множества возможных предложений политик (меток) безопасности и самих политик<sup>19</sup>. С использованием логической системы вывода TLA PS (proof system) приводится доказательство того, что множество политик с заданным на нем отношением частичного порядка образует полную алгебраическую решетку.

## 2.5. Проигрывание модели и устранение нарушений инвариантов безопасности

В качестве формального условия безопасности вычислений принято свойство прогресс-зависимого информационного невливания (ПЗИН) [3]. В отличие

от строгого информационного невливания, проверке подвергаются промежуточные состояния, при этом ограничения на значения внутренних переменных (недоступных для наблюдения) не накладывается.

**Определение 1.** Программа  $P$  удовлетворяет свойству прогресс-зависимого информационного невливания для начального и конечного отображений множества переменных на множество меток безопасности  $M_1$  и  $M_2$  – ПЗИН( $P$ ) $_{M_1, M_2}$ , если для любых двух состояний  $S_1$  и  $S_2$  среды вычислений, состоящих в отношении низкой эквивалентности относительно некоторого уровня конфиденциальности  $L$  при отображении  $M_1$ : (а) каждый шаг вычислений сопровождается генерацией одинаковых наблюдаемых значений относительно уровня  $L$  или приводит к «расхождению» для обеих состояний; (б) соответствующие финальные состояния  $S'_1$  и  $S'_2$  находятся в отношении низкой эквивалентности относительно уровня  $L$  при отображении  $M_2$ :

$$\begin{aligned} \text{ПЗИН}(P)_{M_1, M_2} & \triangleq \forall L, S_1, S_2, o_1, o_2 : S_1 \sim_{M_1, L} S_2 \wedge \\ & \wedge P(S_1) \downarrow \langle S'_1, o_1 \rangle \wedge P(S_2) \downarrow \langle S'_2, o_2 \rangle \Rightarrow \\ & \Rightarrow o_1 \approx_{L(d)} o_2 \wedge S'_1 \sim_{M_2, L} S'_2. \end{aligned}$$

Выражение  $o_1 \approx_{L(d)} o_2$  означает эквивалентность наблюдаемых поведений относительно уровня  $L$  (с учетом деклассификации [18]). Предполагается, что два состояния среды вычислений находятся в отношении низкой эквивалентности относительно заданного уровня конфиденциальности  $L$ , если все пары одноименных элементов с меткой, не превышающей  $L$ , обладают одинаковыми значениями. Условие (б) легко проверяется для отдельных выражений и команд PL/SQL с использованием заданных для них правил абстрактной семантики и является важным для формального

<sup>18</sup> Допускается также подход, при котором условия классификации не учитываются, т.е. для элемента изначально выбирается наиболее строгая политика ( $account\_emp(x) \Rightarrow Flow(x)$ ). При этом в случае ложного срабатывания (когда основания для классификации отсутствуют) применяется обратная процедура деклассификации. [It is also allowed the approach when the classification conditions are not taken into account, i.e., the strictest policy ( $account\_emp(x) \Rightarrow Flow(x)$ ) is initially selected for the element. At the same time, in case of false positives (when there are no grounds for classification), the reverse declassification procedure is applied.]

<sup>19</sup> <https://github.com/timimin/plif>. Дата обращения 12.03.2023. / Accessed March 12, 2023.

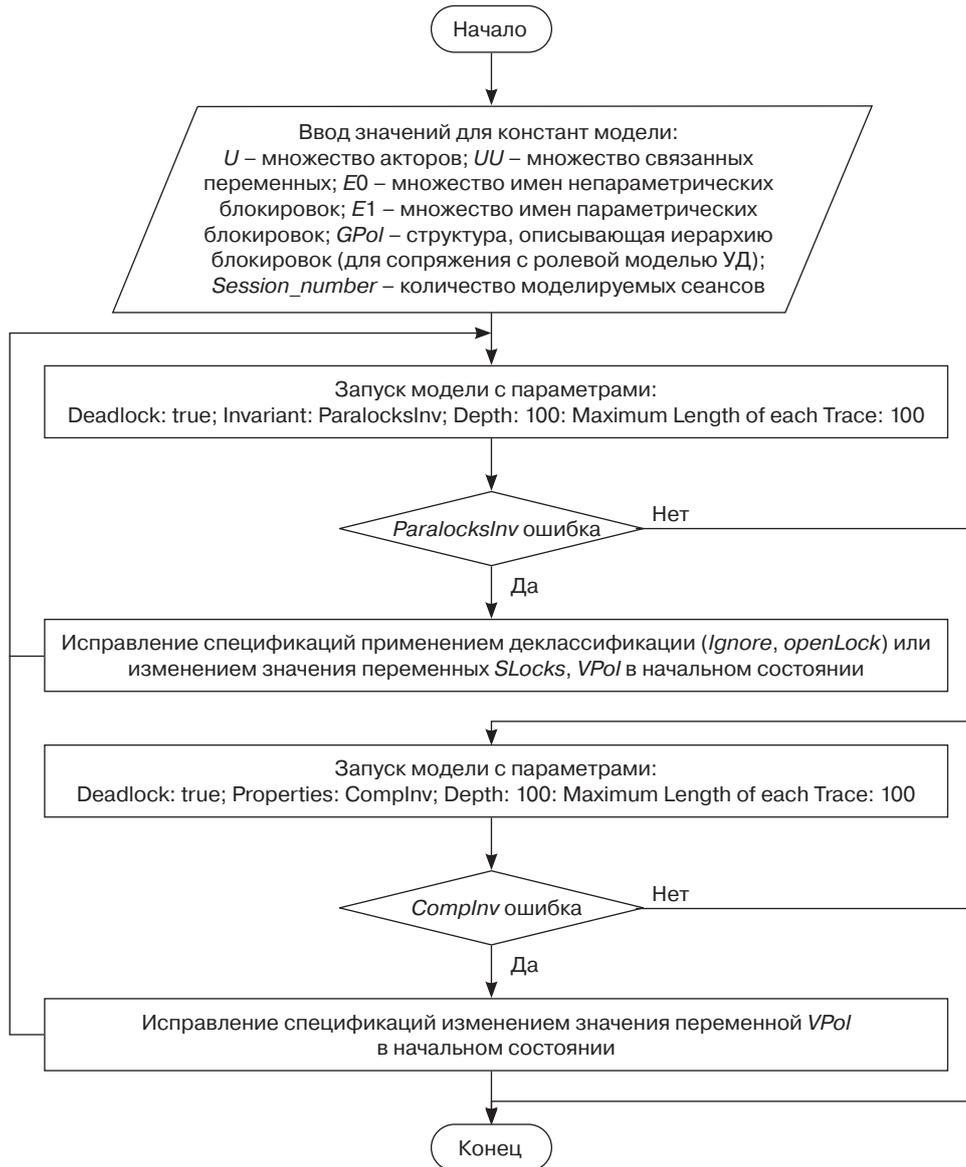


Рис. 3. Алгоритм проверки спецификаций. УД – управление доступом

доказательства безопасности вычислений в целом в условиях потокочувствительности и отсутствия ограничений на количество исполняемых блоков в одном сеансе.

**Алгоритм.** На предварительном шаге алгоритма (рис. 3) осуществляется определение констант, которые задают количество моделируемых сеансов, множество пользовательских имен, множество пользовательских (связанных) переменных, множество однопараметрических блокировок, множество непараметрических блокировок и т.д. При проигрывании модели проверяется главный инвариант безопасности *ParalocksInv* – гарантирует выполнение условия (а) Определения 1 для отдельных команд и выражений – и свойство перехода *ComplInv* – гарантирует эквивалентность начального и конечного отображений множества глобальных

переменных на множество меток. При нарушении *ParalocksInv* может применяться процедура деклассификации данных. Она, как правило, предполагает исправление кода или изменение привилегий на доступ к объектам БД. В случае возникновения ошибки, вызванной нарушением свойства *ComplInv*, в начальном состоянии повышается метка соответствующей глобальной переменной – столбца таблицы<sup>20</sup>. Приведение меток глобальных переменных

<sup>20</sup> Выполнения свойства *ComplInv* можно добиться за конечное количество итераций, поскольку алфавит политик представляет собой конечную решетку, а переходные функции вычисления политик глобальных переменных являются монотонно возрастающими. [Fulfillment of the *ComplInv* property can be achieved in a finite number of iterations because the policy alphabet is a finite lattice and the transition functions of the global variable policy computation are monotonically increasing.]

к стационарным значениям позволяет проверить выполнение условия (а) Определения 1 для отдельных команд и выражений *PL/SQL* для всех возможных начальных и конечных абстрактных состояний  $M_1$  и  $M_2$ , что, в свою очередь, требуется для доказательства корректности алгоритма проверки модели вычислений.

Доказательство сходимости алгоритма и выполнения условий безопасности бесконечных вычислений в неограниченном количестве пользовательских сеансов в соответствии с определением ПЗИН при успешном завершении алгоритма приведено в [5].

## 2.6. Контроль распространения выходных значений верифицированных программных блоков БД во внешних программных модулях

Контроль распространения выходных значений верифицированных процедур и функций в прикладном ПО осуществляется с использованием стандартного анализа помеченных данных (taint tracking) инструментальными средствами наподобие *CodeQL* [19].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Ключевые этапы представленной технологии апробированы на учебных примерах. В условиях некоторой потери точности анализа, за счет неизбежного для формальной верификации абстрагирования, возможность графической интерпретации проблемных трасс вычислений с помощью разработанной с участием автора утилиты «Анализ трасс проигрывания *TLC* моделей, построенных на основе *TLA+* спецификаций программных блоков БД и приводящих к нарушению инварианта безопасности информационных потоков» значительно упрощает задачу выявления «ложных» срабатываний.

К перспективным направлениям дальнейших исследований можно отнести разработку исчерпывающих методических рекомендаций по применению процедур реклассификации (деклассификации и классификации) данных. К настоящему времени сформулированы общие принципы реклассификации, предложены отдельные схемы, которые, однако, требуют адаптации к описанной технологии. Кроме того, целесообразно провести отдельные исследования в отношении последнего этапа предложенной процедуры.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

1. Девянин П.Н., Тележников В.Ю., Хорошилов А.В. Формирование методологии разработки безопасного системного программного обеспечения на примере операционных систем. *Труды Института системного программирования РАН*. 2021;33(5):25–40. [https://doi.org/10.15514/ISPRAS-2021-33\(5\)-2](https://doi.org/10.15514/ISPRAS-2021-33(5)-2) [Devyanin P.N., Telezhnikov V.I., Khoroshilov A.V. Building a methodology for secure system software development on the example of operating systems. *Trudy Instituta sistemnogo programmirovaniya RAN = Proceedings of the Institute for System Programming of the RAS (Proceedings of ISP RAS)*. 2021;33(5):25–40 (in Russ.). [https://doi.org/10.15514/ISPRAS-2021-33\(5\)-2](https://doi.org/10.15514/ISPRAS-2021-33(5)-2)]
2. Timakov A.A. Information flow control in software DB units based on formal verification. *Program. Comput. Soft.* 2022;48(4):265–285. <https://doi.org/10.1134/S0361768822040053>
3. Hedin D., Sabelfeld A. A Perspective on Information-Flow Control. In: *Software Safety and Security*. 2012;33:319–347. <https://doi.org/10.3233/978-1-61499-028-4-319>
4. Kozyri E., Chong S., Myers A.C. Expressing Information Flow Properties. *Foundations and Trends® in Privacy and Security*. 2022;3(1):1–102. <http://doi.org/10.1561/3300000008>
5. Volpano D., Smith G. Probabilistic noninterference in a concurrent language. *Journal of Computer Security (JCS)*. 1999;7(2):231–253. <http://doi.org/10.3233/JCS-1999-72-305>
6. Sabelfeld A., Sands D. Probabilistic noninterference for multi-threaded programs. In: *Proceedings 13th IEEE Computer Security Foundations Workshop (CSFW-13)*. 2000. P. 200–214. <https://doi.org/10.1109/CSFW.2000.856937>
7. Askarov A., Chong S. Learning is Change in Knowledge: Knowledge-Based Security for Dynamic Policies. In: *Proceedings 25th IEEE Computer Security Foundations Symposium (CSF 2012)*. 2012. P. 308–322. <https://doi.org/10.1109/CSF.2012.31>
8. Sutherland D. A model of information. In: *Proceedings of the 9th National Security Conference*. 1986. P. 175–183.
9. Volpano D., Irvine C., Smith G. Sound type system for secure flow analysis. *Journal of Computer Security (JCS)*. 1996;4(2–3):167–187.
10. Mantel H., Sudbrock H. Types vs. PDGs in information flow analysis. In: Albert E. (Ed.). *Logic-Based Program Synthesis and Transformation. The 22nd International Symposium, LOPSTR 2012. Proceedings*. Springer. 2012. P. 106–121. [https://doi.org/10.1007/978-3-642-38197-3\\_8](https://doi.org/10.1007/978-3-642-38197-3_8)
11. Myers A.C., Liskov B. A decentralized model for information flow control. *ACM SIGOPS Operating Systems Review*. 1997;5:129–142. <https://doi.org/10.1145/268998.266669>
12. Graf J., Hecker M., Mohr M., Snelling G. Checking applications using security APIs with JOANA. In: *8th International Workshop on Analysis of Security APIs. Proceedings*. 2015. P. 118–129.

13. Broberg N., van Delft B., Sands D. Paragon for practical programming with information-flow control. In: Shan C. (Ed.). *Programming Languages and Systems: The 11th Asian Symposium, APLAS 2013. Proceedings*. Springer. 2013. P. 217–232. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-03542-0\\_16](https://doi.org/10.1007/978-3-319-03542-0_16)
14. Clarkson M.R., Finkbeiner B., Koleini M., Micinski K.K., Rabe M.N., Sánchez C. Temporal logics for hyperproperties. In: Abadi M., Kremer S. (Eds.). *Principles of Security and Trust: The Third International Conference, POST 2014. Proceedings*. Berlin, Heidelberg: Springer; 2014. P. 265–284. [https://doi.org/10.1007/978-3-642-54792-8\\_15](https://doi.org/10.1007/978-3-642-54792-8_15)
15. Terauchi T., Aiken A. Secure information flow as a safety problem. In: Hankin C., Siveroni I. (Eds.). In: *Static Analysis: The 12th International Static Symposium, SAS 2005. Proceedings*. Berlin, Heidelberg: Springer. 2005. P. 352–367. [https://doi.org/10.1007/11547662\\_24](https://doi.org/10.1007/11547662_24)
16. Тимаков А.А. Вариант реализации процедуры анализа информационных потоков в программных блоках PL/SQL с использованием платформы PLIF. *Программирование*. 2023;4:39–57.  
[Timakov A.A. Scenario of Information Flow Analysis Implementation in PL/SQL Program Units with PLIF Platform. *Program. Comput. Soft.* 2023;49(4):215–231. <https://doi.org/10.1134/S0361768823040114>  
[Original Russian Text: Timakov A.A. Scenario of Information Flow Analysis Implementation in PL/SQL Program Units with PLIF Platform. *Программирование*. 2023;4:215–231 (in Russ.).]
17. Broberg N., Sands D. Paralocks: Role based information flow control and beyond. In: *Proceedings of the Conference Record of the Annual ACM Symposium on Principles of Programming Languages*. 2010. P. 431–444. <https://doi.org/10.1145/1706299.1706349>
18. Sabelfeld A., Sands D. Declassification: Dimensions and principles. *Journal of Computer Security (JCS)*. 2009;17(5):517–548. <http://doi.org/10.3233/JCS-2009-0352>
19. Youn D., Lee S., Ryu S. Declarative static analysis for multilingual programs using CodeQL. *Software: Practice and Experience*. 2023;53(7):1472–1495. <https://doi.org/10.1002/spe.3199>

#### Об авторе

**Тимаков Алексей Анатольевич**, к.т.н., доцент, доцент кафедры информационной безопасности, Институт искусственного интеллекта ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: timakov@mirea.ru. Scopus Author ID 57809572100, SPIN-код РИНЦ 3163-2170, <https://orcid.org/0000-0003-4306-789X>

#### About the author

**Aleksey A. Timakov**, Cand. Sci. (Eng.), Associate Professor, Department of Information Security, Institute of Artificial Intelligence, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: timakov@mirea.ru. Scopus Author ID 57809572100, RSCI SPIN-code 3163-2170, <https://orcid.org/0000-0003-4306-789X>

Роботизированные комплексы и системы. Технологии дистанционного зондирования  
неразрушающего контроля

Multiple robots (robotic centers) and systems. Remote sensing and non-destructive testing

УДК 621.396.69  
<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-2-28-38>



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

## Диагностика нарушений целостности конструкций бортовых радиоэлектронных средств при испытаниях на ударные воздействия

С.У. Увайсов,  
А.В. Долматов<sup>®</sup>,  
Т.Х. Во,  
Н.Т. Лыу,  
К.Д. Нгуен

МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, 119454 Россия  
<sup>®</sup> Автор для переписки, e-mail: [dolmatov@mirea.ru](mailto:dolmatov@mirea.ru)

### Резюме

**Цели.** С непрерывным развитием современных технических средств в области авиации и космического приборостроения постоянно повышаются требования к точности, устойчивости и надежности электронной аппаратуры, эксплуатируемой на космических аппаратах. Блоки бортовых радиоэлектронных средств космических аппаратов (БРЭСА) эксплуатируются в особых условиях. В случае возникновения неисправности ее устранение, как правило, оказывается невозможным. Блоки БРЭСА представляют собой герметично закрытые конструкции, поэтому их демонтаж для оценки технического состояния затруднен. Целью исследования является повышение эффективности и достоверности выявления латентных дефектов в блоках БРЭСА путем использования метода диагностирования при воздействии механических ударов.

**Методы.** На основании известных методов в работе предложен новый метод диагностирования с использованием моделирования механических процессов при ударных воздействиях на этапе проектирования блоков БРЭСА для оценки наличия различных латентных дефектов. В исправном состоянии блоки БРЭСА имеют амплитудно-частотные характеристики (АЧХ), отличные от АЧХ блоков БРЭСА, имеющих различные дефекты, отражающиеся на механических характеристиках. С учетом этого разработана диагностическая модель, оценивающая техническое состояние блоков БРЭСА без демонтажа устройств в процессе диагностирования.

**Результаты.** В работе проведено моделирование механических процессов в блоках БРЭСА в исправном состоянии и при наличии различных дефектов, а также экспериментальные исследования механических характеристик в исправном и неисправном состояниях. После проведения измерений механических характеристик при воздействии ударных нагрузок полученные данные сравниваются с результатами моделирования при наличии различных дефектов. Результатом сравнения является отчет о техническом состоянии блока БРЭСА.

**Выводы.** Разработанный метод диагностирования блоков БРЭСА при ударных механических воздействиях позволяет повысить эффективность диагностирования латентных дефектов в процессе производства и эксплуатации БРЭСА.

**Ключевые слова:** диагностирование, ударные механические воздействия, блок бортовых радиоэлектронных средств космических аппаратов

• Поступила: 05.05.2023 • Доработана: 31.10.2023 • Принята к опубликованию: 06.02.2024

**Для цитирования:** Увайсов С.У., Долматов А.В., Во Т.Х., Лью Н.Т., Нгуен К.Д. Диагностика нарушений целостности конструкций бортовых радиоэлектронных средств при испытаниях на ударные воздействия. *Russ. Technol. J.* 2024; 12(2):28–38. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-2-28-38>

**Прозрачность финансовой деятельности:** Авторы не имеют финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## RESEARCH ARTICLE

# Diagnostics of structural integrity violations of avionics during impact tests

Saygid U. Uvaysov,  
Aleksey V. Dolmatov<sup>@</sup>,  
The H. Vo,  
Ngoc T. Luu,  
Cong D. Nguyen

MIREA – Russian Technological University, Moscow, 119454 Russia

<sup>@</sup> Corresponding author, e-mail: [dolmatov@mirea.ru](mailto:dolmatov@mirea.ru)

### Abstract

**Objectives.** With the continuous development of modern radio equipment in the field of aviation and space instrumentation, the requirements for accuracy, stability, and reliability of electronic equipment operated on spacecraft are also on the increase. Spacecraft avionic units (SAU) operate under special conditions and malfunctions, as a rule, are impossible to repair. SAU are hermetically sealed structures, making it difficult to assess their technical condition. The aim of this study is to increase the efficiency and reliability of detecting latent defects in SAU using the diagnostic method involving exposure to mechanical shocks.

**Methods.** Based on known methods, a new diagnostic method is proposed which simulates mechanical processes under shock effects at the design stage. The aim is to evaluate the presence of various latent defects in SAU. In a serviceable state, the amplitude-frequency characteristics (frequency response) of SAU differ from the frequency response of SAU with defects which affect mechanical characteristics. It was for this reason that the diagnostic model of evaluating the technical condition of SAU without removal of devices was developed.

**Results.** This work simulates the mechanical processes in SAU in a serviceable state in the presence of a variety of defect. It also involves experimental studies of mechanical characteristics in both serviceable and faulty states. After measuring the mechanical characteristics under the impact of shock loads, the data obtained is compared with simulation results in the presence of various defects. The comparison result is a report on the technical condition of SAU.

**Conclusions.** The method of diagnosing SAU under mechanical shock impact enhances the efficiency of diagnosing latent defects during the production and operation of SAU.

**Keywords:** diagnostics, mechanical shock impact, spacecraft avionic units

• Submitted: 05.05.2023 • Revised: 31.10.2023 • Accepted: 06.02.2024

**For citation:** Uvaysov S.U., Dolmatov A.V., Vo Th.H., Luu N.T., Nguyen C.D. Diagnostics of structural integrity violations of avionics during impact tests. *Russ. Technol. J.* 2024;12(2):28–38. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-2-28-38>

**Financial disclosure:** The authors have no a financial or property interest in any material or method mentioned.

The authors declare no conflicts of interest.

## ВВЕДЕНИЕ

Под воздействием внешних дестабилизирующих факторов или в процессе старения происходит изменение технического состояния любого радиоэлектронного изделия [1, 2]. Неисправности блоков бортовых радиоэлектронных средств космических аппаратов (БРЭСА) могут возникать из-за ошибок, допущенных на этапах производства или эксплуатации. Эти ошибки могут вызвать нарушение физической структуры, состава материала, нестабильность параметров изделия, и каждая из ошибок в процессе эксплуатации может привести к внезапным или постепенным отказам [3]. Статистика показывает, что на протяжении большей части своего жизненного цикла (от производства до утилизации) часть электронных устройств может иметь дефекты, в т.ч. латентные [4–6]. Поэтому обнаружение и устранение латентных дефектов играет очень важную роль в поддержании стабильности и работоспособности оборудования<sup>1</sup>.

Целью данной работы является разработка нового метода диагностического моделирования, основанного на изучении амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) блоков БРЭСА при ударном воздействии. Полученные результаты моделирования с информацией о техническом состоянии исследуемого оборудования будут являться исходными данными для сравнения с аналогичными изделиями при отсутствии или наличии дефектов блоков БРЭСА.

Известно, что определение технического состояния печатных узлов или блоков радиоэлектронных средств может быть выполнено ручными методами с помощью простых устройств, таких как мультиметры, осциллографы, частотомеры. Но при необходимости проведения массовых проверок такой процесс диагностирования занимает очень длительное время и малоэффективен.

В настоящее время неразрушающие методы диагностирования широко используются на предприятиях во время испытаний в процессе выходного контроля [7, 8]. При этом метод диагностирования блоков БРЭСА при воздействии механических ударных

нагрузок может повысить эффективность и достоверность выявления дефектов без нарушения целостности объектов [9]. Но стоит отметить и некоторые особенности, которые необходимо учесть для получения достоверного результата диагностирования:

- моделирование объектов исследования на компьютере должно проводиться с высокой точностью с точки зрения описания физической структуры, параметров конструкционных материалов, материалов электрорадиоэлементов (ЭРЭ) [10];
- поддержка заданной точности имитации ударных воздействий на вибростенде, правильное размещение акселерометра [11].

Известно, что любое электронное изделие, печатный узел или блок БРЭСА, имеет собственные резонансные частоты<sup>2, 3</sup>. В исправном техническом состоянии изделие имеет определенный собственный частотный спектр. Появление дефектов в блоке БРЭСА будет сопровождаться изменением собственных резонансных частот. На основе этого принципа предлагается метод диагностирования при ударном воздействии на блок БРЭСА<sup>4</sup>.

Стенд для проведения испытаний на ударное воздействие (рис. 1) состоит из компьютерной системы, содержащей программное обеспечение, анализирующее технические параметры исследуемого устройства. Эта система подключена к вибростенду для определения характеристик колебаний с помощью акселерометра. Ударный колебательный

<sup>2</sup> Зеленский В.А., Сухачёв К.И. *Основы конструирования, технологии и надежности радиоэлектронных средств*: учебное пособие. Самара: Самарский университет; 2020. 146 с. [Zelenskiy V.A., Sukhachev K.I. *Fundamentals of design, technology and reliability of radio electronic means*: Textbook. Samara: Samara University; 2020. 146 p. (in Russ.).]

<sup>3</sup> Муромцев Д.Ю., Тюрин И.В., Белоусов О.А., Курносов Р.Ю. *Проектирование функциональных узлов и модулей радиоэлектронных средств*: учебное пособие для вузов. 2-е изд., стер. СПб.: Лань; 2021. 252 с. [Muromtsev D.Yu., Tyurin I.V., Belousov O.A., Kurmosov R.Yu. *Design of functional assemblies and modules of radio-electronic means*: Textbook for Universities. 2nd ed., St. Petersburg: Lan; 2021. 252 p. (in Russ.).]

<sup>4</sup> Муромцев Д.Ю., Белоусов О.А., Тюрин И.В., Курносов Р.Ю. *Конструирование блоков радиоэлектронных средств*. 4-е изд., стер. СПб.: Лань; 2023. 288 с. [Muromtsev D.Yu., Belousov O.A., Tyurin I.V., Kurmosov R.Yu. *Design of REM units*. 4th ed. St. Petersburg: Lan; 2023. 288 p. (in Russ.).]

<sup>1</sup> Малкин В.С. *Техническая диагностика*. 2-е изд., испр. и доп. СПб.: Лань; 2022. 272 с. [Malkin V.S. *Technical diagnostics*. 2nd ed., revised and supplemented. St. Petersburg: Lan; 2013. 272 p. (in Russ.).]



1. Разработка диагностической модели на основе характеристик и параметров БРЭСКА и создание базы данных (блоки 1–7). База данных представляет собой совокупность АЧХ БРЭСКА, рассчитанных при исправном и неисправных состояниях.
2. Экспериментальные испытания реальных образцов БРЭСКА, проводимые с использованием вибростенда (блоки 8–11). Полученные данные обрабатываются и сопоставляются (блок 12) с набором данных АЧХ, после чего создается отчет о техническом состоянии БРЭСКА (блок 13).

На начальном этапе необходимо разработать математическую модель и диагностическую модель в соответствии со структурой БРЭСКА (блоки 1–3 на рис. 2). При создании математической модели необходимо обращать внимание на точность задания геометрических и физико-механических параметров конструкции и ЭРЭ, размещение ЭРЭ на печатных узлах должно соответствовать заданной принципиальной схеме. При моделировании необходимо обращать внимание на расположение акселерометра на блоке, т.к. вес датчика может оказывать влияние на механические характеристики блока БРЭСКА.

Механические процессы в блоках БРЭСКА могут быть смоделированы с использованием различных программных продуктов, обеспечивая при этом их механические свойства и физическую структуру, например, *SolidWorks*<sup>5</sup>, *Ansys*<sup>6</sup>, *Nastran*<sup>7</sup>, *АСОНИКА-ТМ*<sup>8</sup> и др. [15]. Эти программы моделирования позволяют пользователям получать механические характеристики в конструкциях БРЭСКА с высокой точностью (блок 4 на рис. 2).

При подготовке исходных данных для моделирования механических процессов в БРЭСКА необходимо учитывать следующее:

- определение местоположения датчика для получения результата ударного воздействия на объект (амплитуда перемещения в месте установки датчика будет максимальна при собственной резонансной частоте) – блок 14;
- определение формы импульса, задаваемой в программе моделирования, которая может быть трапециевидной, треугольной, пилообразной или синусоидальной [16]. Исследования показали, что трапециевидный импульс является оптимальным выбором (блок 15);
- определение параметров импульса, включая амплитуду и длительность импульса, при которых

не разрушается физическая структура и не нарушаются характеристики БРЭСКА (блок 16). Диапазон значений амплитуды импульса должен соответствовать структуре объекта исследования. Минимальное значение амплитуды ударного импульса  $A_{\min \text{ эффект}}$  не должно быть меньше значения  $A_{\min \text{ практ}}$ , которое может получить датчик, и в то же время максимальное значение  $A_{\max \text{ эффект}}$  не должно быть больше значения экспериментальной амплитуды  $A_{\min \text{ теор}}$ , вызывающего разрушение естественной структуры:

$$[A_{\min \text{ эффект}}; A_{\max \text{ эффект}}] \in [A_{\min \text{ практ}}; A_{\max \text{ теор}}],$$

где  $A_{\min \text{ практ}}$  – нижняя граница значений амплитуды (определяется характеристикой средства измерения);  $A_{\max \text{ теор}}$  – верхняя граница значений амплитуды.

К наиболее популярным механическим дефектам БРЭСКА, рассматриваемым в работе, относятся:

- ослабление винтов печатного узла БРЭСКА;
- трещины в конструктивных элементах (трещины печатных плат и др.);
- деформация конструктивных элементов (деформация печатной платы, кривизна крепления заклепок и т.д.);
- отрыв части или всего ЭРЭ от печатной платы;
- пассивный контакт ЭРЭ на печатной плате с другими конструктивными элементами (может иметь место в условиях высокой плотности блока БРЭСКА).

Полученным результатом расчета диагностической модели механических процессов является множество АЧХ блоков БРЭСКА для заданных типовых дефектов, которые хранятся и представляются на компьютере (блок 7 на рис. 2). Каждая АЧХ соответствует определенному неисправному состоянию или его множеству дефектов.

С целью повышения эффективности диагностики и снижения вероятности возникновения ошибок (неправильное распознавание дефектов, несуществующие дефекты) [17], моделирование механических процессов проводится с учетом допусков  $[x_{i\min}; x_{i\max}]$ , в пределах которых изменяются значения  $x_i$ ,  $i = 1, n$  физико-механических и геометрических параметров элементов конструкции (блок 6 на рис. 2). При этом используется метод имитационного моделирования Монте-Карло [18]. Так, значение параметра (физико-механического или геометрического) конструкции БРЭСКА определяется по формуле:

$$x_i = x_i^{\text{НОМ}} (1 + \xi_k \delta_{xi}),$$

где  $x_i$  – текущее значение  $i$ -го параметра на  $k$ -й реализации;  $x_i^{\text{НОМ}}$  – номинальное значение  $i$ -го параметра;  $\xi_k$  – случайная величина ( $-1 < \xi_k < 1$ ), выдаваемая генератором случайных чисел;  $\delta_{xi}$  – относительный допуск на  $i$ -й

<sup>5</sup> <https://www.solidworks.com/>. Дата обращения 19.12.2023. / Accessed December 19, 2023.

<sup>6</sup> <https://www.ansys.com/>. Дата обращения 19.12.2023. / Accessed December 19, 2023.

<sup>7</sup> <https://www.autodesk.com/products/nastran/overview>. Дата обращения 19.12.2023. / Accessed December 19, 2023.

<sup>8</sup> <https://asonika-online.ru/products/asonika-tm/> (in Russ.). Дата обращения 19.12.2023. / Accessed December 19, 2023.

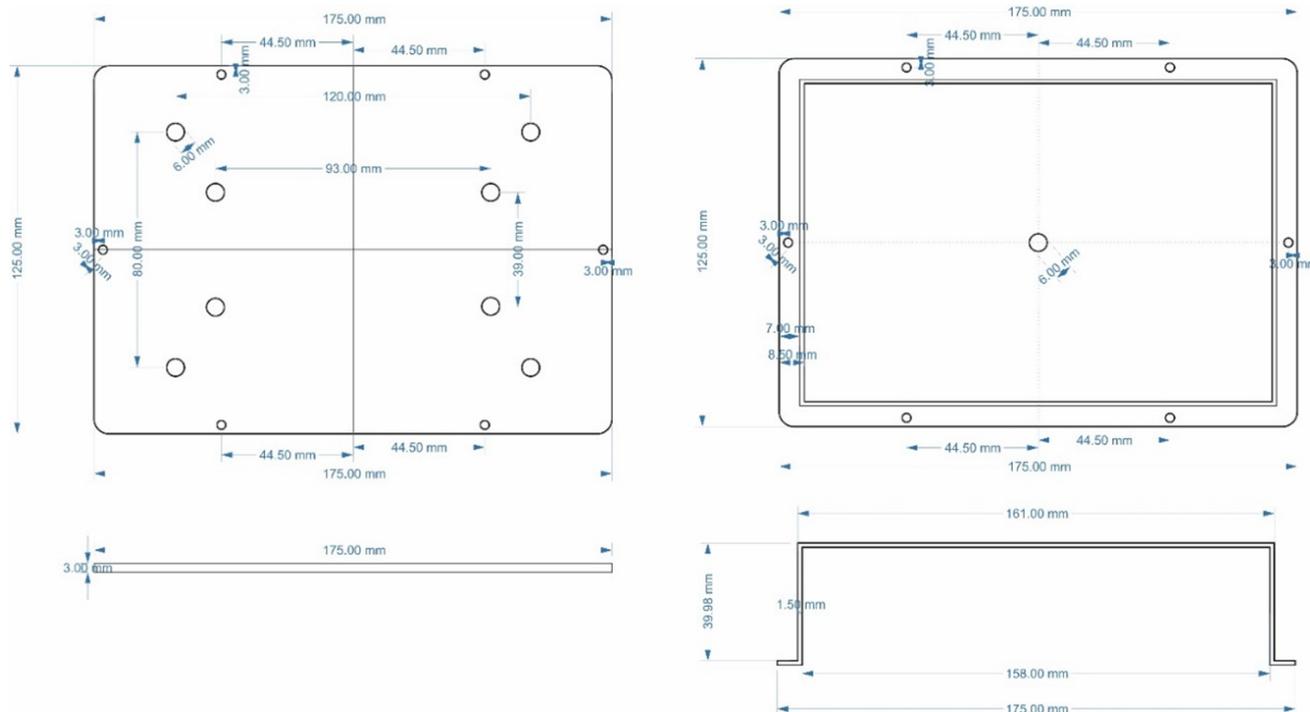


Рис. 3. Чертеж корпуса блока БРЭСКА (дно и крышка)

параметр. На заключительном этапе проводится снятие экспериментальных характеристик БРЭСКА. Эксперимент проводится на вибрационном стенде (блок 9 на рис. 2), интегрированном с компьютером для получения АЧХ изделия через датчик, установленный в центре крышки блока БРЭСКА (блок 10 на рис. 2).

Результатирующая характеристика представляет собой набор данных дискретных значений АЧХ, используемый для расчета перехода из временной области в частотную область через преобразование Фурье – блок 11. Формула прямого преобразования Фурье:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt,$$

где  $t$  – время,  $f(t)$  – функция плотности нормального распределения,  $\omega$  – циклическая частота сигнала,  $j$  – мнимая единица.

Этот результат используется для сравнения с ранее созданным (блок 7) множеством АЧХ с использованием искусственной нейронной сети, применяемой к задаче поиска (ensemble learning introduced neural network), реализованной в языковой среде Python.

В результате создается отчет о техническом состоянии блоков БРЭСКА. При обнаружении дефектов с помощью описанной методики их можно устранить на предприятии. В случае, если АЧХ блоков БРЭСКА не совпадает с какой-либо АЧХ, хранящейся в базе данных, и подтверждение дефекта не установлено, то для его определения требуются дополнительные исследования или окончательные решения экспертов.

Результат диагностирования с применением данного метода может быть достигнут с высокой эффективностью при проведении имитационного моделирования достаточно большой базы данных дефектов, с высокой точностью задания геометрических и физико-механических параметров конструкции БРЭСКА. Кроме того, он повышает экономическую эффективность диагностирования при применении в серийном производстве.

### ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРЕДЛОЖЕННОГО МЕТОДА

Для апробации предложенного метода был создан экспериментальный макет блока БРЭСКА<sup>9</sup>. Он представляет собой закрытый корпус с размерами, указанными на рис. 3. Корпус блока изготовлен из прессованного алюминия. Элементы корпуса скреплены между собой с использованием винтовых соединений.

Внутри корпуса расположена печатная плата (производитель – WAVGAT authorization Store, Китай)

<sup>9</sup> ГОСТ Р 52762-2007. Национальный стандарт Российской Федерации. Методы испытаний на стойкость к механическим внешним воздействующим факторам машин, приборов и других технических изделий. Испытания на воздействие ударов по оболочке изделий. М.: Стандартинформ; 2007. 19 с. [GOST R 52762-2007. National Standard of the Russian Federation. Mechanical environment stability test methods for machines, instruments and other industrial products. Test methods for bumps to enclosure of products. Moscow: Standardinform; 2007. 19 p. (in Russ.).]

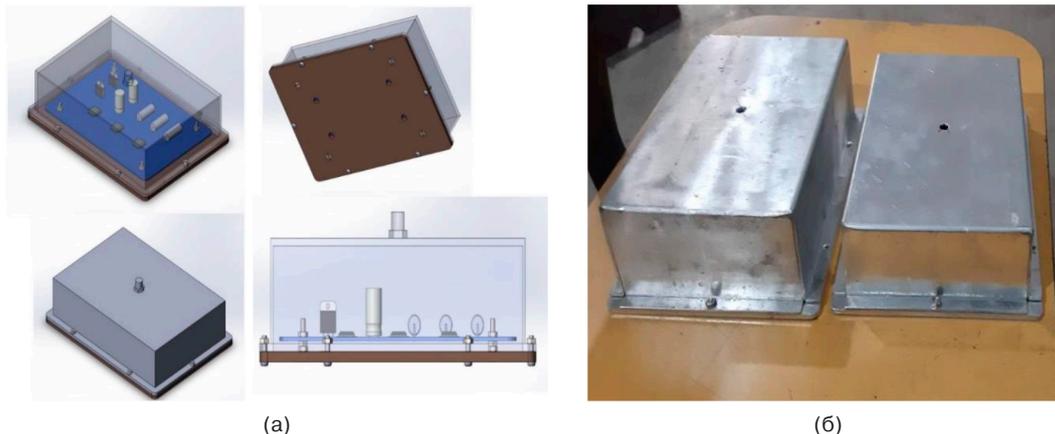


Рис. 4. Вид модели блока БРЭСКА (а) и реального образца (б)

размером  $100 \times 150$  мм, размещенная на неподвижной стойке с помощью удерживающего винта (рис. 4).

Исследуемое устройство размещается на вибростенде (IMV Corporation, Япония), который подключается к компьютеру с программным обеспечением (рис. 5). Датчик, используемый для измерения механических характеристик БРЭСКА, относится к типу VP-32<sup>10</sup>.



Рис. 5. Внешний вид вибростенда

Экспериментальные исследования блока БРЭСКА проводили при трапециевидном импульсном ударе с ускорением  $A = 30 \text{ м/с}^2$ , длительностью удара  $T = 0.04 \text{ с}$ . Возможные дефекты описаны в табл. 1.

<sup>10</sup> <https://ostec-test.ru/catalog/equipment/datchiki-vibratsii/vibropreobrazovatel-uskoreniya-vp-32/> (in Russ.). Дата обращения 19.12.2023. / Accessed December 19, 2023.

Таблица 1. Описание дефектов блоков БРЭСКА

Наименование дефектов	Описание дефектов	Изображение
Нет дефектов	Исправное состояние	
Дефект 1	Ослабление винтов печатного узла	
Дефект 2	Отсутствие резистора	
Дефект 3	Отсутствие транзистора и конденсатора	

Результаты экспериментальных измерений механических характеристик, полученные на макете БРЭСКА, представляют собой АЧХ для каждого его дефекта (рис. 6). Особенность полученных АЧХ – в том, что значения собственных резонансных частот в контрольной точке, где установлен датчик, для БРЭСКА с дефектом отличаются от значений собственных резонансных частот для БРЭСКА в исправном состоянии. Полученные результаты записываются в базу данных АЧХ для различных технических состояний БРЭСКА (табл. 2). Их можно использовать для диагностического анализа технического состояния блока БРЭСКА в будущем.

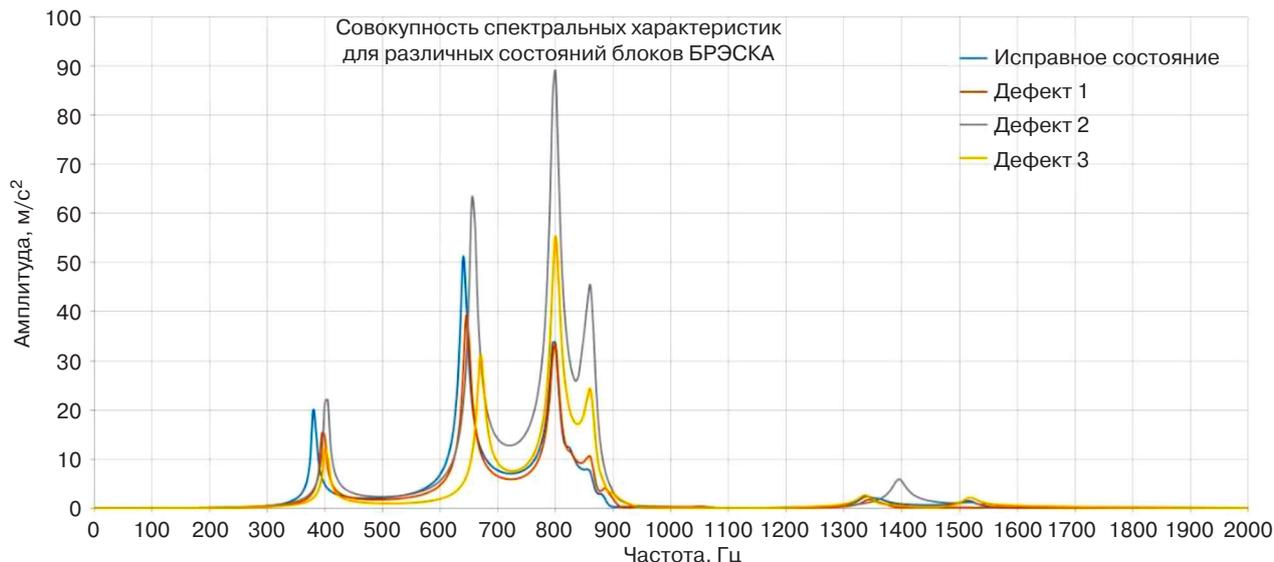


Рис. 6. Спектральные характеристики для различных состояний блоков БРЭСКИ

Таблица 2. База данных для различных состояний блоков БРЭСКИ

Частота, Гц	Исправное состояние	Дефект 1	Дефект 2	Дефект 3
0	0.0038	0.0024	0.0023	0.0021
5	0.0038	0.0024	0.0024	0.0022
10	0.0038	0.0024	0.0023	0.0021
15	0.0037	0.0023	0.0021	0.0020
20	0.0034	0.0022	0.0018	0.0018
25	0.0031	0.0020	0.0014	0.0014
30	0.0028	0.0017	0.0010	0.0011
.....	.....	.....	.....	.....
1970	0.0089	0.0166	0.0770	0.0694
1975	0.0087	0.0162	0.0749	0.0675
1980	0.0085	0.0158	0.0729	0.0656
1985	0.0083	0.0153	0.0708	0.0637
1990	0.0081	0.0149	0.0688	0.0618
1995	0.0079	0.0145	0.0668	0.0600
2000	0.0077	0.0140	0.0648	0.0582

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Предложенный в данной работе метод диагностирования блоков БРЭСКИ при воздействии механических ударных нагрузок позволяет эффективно проводить диагностику и обнаружение дефектов блоков БРЭСКИ. Дальнейшие исследования данного вопроса будут направлены на определение всех возможных типов дефектов, которые могут выявляться

с использованием данного метода, разработку алгоритма и методики диагностирования. Результаты исследований будут внедрены в учебный процесс РТУ МИРЭА и других вузов.

**Вклад авторов.** Все авторы в равной степени внесли свой вклад в исследовательскую работу.

**Authors' contributions.** All authors equally contributed to the research work.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Брумштейн Ю.М., Выборнова О.Н. Анализ некоторых моделей группового управления рисками. *Прикаспийский журнал: Управление и высокие технологии*. 2015;4:64–72.
2. Сысуйев В.А., Полканов С.А., Лысенко Ю.С. Анализ современных методов защиты бортовых радиоэлектронных устройств от внешних механических воздействий. *Труды международного симпозиума «Надежность и качество»*. 2020. Т. 2. С. 39–41.
3. Балиж К.С., Еремеев П.М., Симахина Е.А. Анализ причин сбоев и отказов при проектировании аппаратуры космического назначения. *XLV Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С.П. Королёва и других выдающихся отечественных ученых – пионеров освоения космического пространства: сборник тезисов*. М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана; 2021. Т. 2. С. 396–398.
4. Голушко Д.А., Трусков В.А., Юрков Н.К., Бростилов С.А., Бростилова Т.Ю., Рыбаков И.М. Программно-аппаратный комплекс для проведения испытаний изделий электронной техники на воздействие вибрации. *Прикаспийский журнал: управление и высокие технологии*. 2016;1:151–160.
5. Клестов С.А. Классификация дефектов радиоэлектронной аппаратуры. *Интеллектуальные системы 4-й промышленной революции. Сборник материалов V Международного форума*. Томск. 2023. С. 52–53.
6. Романов А.М., Нелюцков М.А., Рязяпов И.Н. Анализ дефектов РЭС, методов и средств их обнаружения. *Труды международного симпозиума «Надежность и качество»*. 2023. Т. 1. С. 413–414.
7. Сартаков С.С. Анализ методов и средств испытаний радиоэлектронного оборудования воздушных судов. *Актуальные проблемы радиоэлектроники и телекоммуникаций: материалы Всероссийской научно-технической конференции*. Самара. 2020. С. 206–207.
8. Фам Л.К.Х., Дао А.К., Увайсов С.У., Черноверская В.В., Бушмелева К.И. Определение эффективного уровня одиночных ударных импульсов для выявления дефектов печатных узлов электронных средств. *Вестник Международного университета природы, общества и человека «Дубна». Серия: Естественные и инженерные науки*. 2020;3(48):46–54.
9. Нелюцков М.А., Марченко В.В., Лысенко А.В., Таньков Г.В., Рыбаков И.М. Ударные импульсы как метод испытаний радиоэлектронных средств. *Труды международного симпозиума «Надежность и качество»*. 2020. Т. 2. С. 238–240.
10. Кофанов Ю.Н., Сотникова С.Ю. Повышение точности моделирования на основе идентификации. *Инновации на основе информационных и коммуникационных технологий*. 2015;1:176–178.
11. Кондрашов Д.Е. Система поддержки принятия решений диагностики электронных средств на основе анализа ударных воздействий. *Проблемы и решения автоматизации XXI века: материалы VI Национальной научно-практической студенческой конференции*. Сургут. 2023. С. 93–98.
12. Лышов С.М., Иванов И.А., Увайсов С.У. Методика определения порогового значения критерия подобия по экспериментальным характеристикам. *Труды Международного симпозиума «Надежность и качество»*. 2013. Т. 2. С. 372–374.
13. Бушмелева К.И., Кондрашов Д.Е., Увайсов С.У., Фам Л.К.Х. Автоматизированная система диагностики радиоэлектронных средств на основе ударных воздействий. *Инновационные, информационные и коммуникационные технологии: сборник трудов XVII Международной научно-практической конференции*. 2020. С. 384–389.
14. Кондрашов Д.Е., Бушмелева К.И., Увайсов С.У., Демченко С.К. Методика диагностики электронных средств на основе анализа ударных воздействий посредством алгоритмов машинного обучения. *Инновационные, информационные и коммуникационные технологии: сборник трудов XVIII Международной научно-практической конференции*. Сочи. 2021. Р. 190–195.
15. Шалумов А.С. АСОНИКА – российская САПР электроники в части виртуальных испытаний. *Электроника: Наука, технология, бизнес*. 2022;3:82–83. <https://doi.org/10.22184/1992-4178.2022.214.3.82.83>
16. Резчикова Е.В., Лыонг К.Л. Виброзащита бортовой электронной аппаратуры от внешних воздействий. *Контроль. Диагностика*. 2021;24(11):22–30. <https://doi.org/10.14489/td.2021.11.pp.022-030>
17. Ирзаев Г.Х. Обеспечение и оценка контролепригодности конструкции сложных радиоэлектронных средств на этапах их проектирования. *Контроль. Диагностика*. 2023;26(5):34–41. <https://doi.org/10.14489/td.2023.05.pp.034-041>
18. Кашникова А.П., Беляева М.Б. Метод Монте-Карло в задачах моделирования процессов и систем. *Modern Science*. 2021;(1–2):358–362.

## REFERENCES

1. Brumsteyn Yu.M., Vybornova O.N. Analysis of some models for group risk management. *Prikaspiiskii zhurnal: Upravlenie i vysokie tekhnologii = Caspian Journal: Management and High Technologies*. 2015;4:64–72 (in Russ.).
2. Sysuev V.A., Polkanov S.A., Lysenko Yu.S. Analysis of modern methods of protection of on-board electronic devices from external mechanical influences. In: *Proceedings of the International Symposium “Reliability and Quality.”* 2020. V. 2. P. 39–41 (in Russ.).
3. Balizh K.S., Eremeev P.M., Simakhina E.A. Analysis of the causes of faults and failures for design of space equipment. In: *The 45th Academic Space Conference, Dedicated to the Memory of Academician S.P. Korolev and Other Outstanding Russian Scientists – Pioneers of Space Exploration (Korolev Academic Space Conference): collection of abstracts*. Moscow: Bauman Press; 2021. V. 2. P. 396–398 (in Russ.).

4. Golushko D.A., Trusov V.A., Yurkov N.K., Brostilov S.A., Brostilova T.Yu., Rybakov I.M. Hardware Software complex for testing electronic devices on the effect of vibration. *Prikaspiiskii zhurnal: Upravlenie i vysokie tekhnologii = Caspian Journal: Management and High Technologies*. 2016;1:151–160 (in Russ.).
5. Klestov S.A. Classification of defects in electronic equipment. In: *Intelligent Systems of the 4th Industrial Revolution: Collection of Materials of the V International Forum*. Tomsk. 2023. P. 52–53 (in Russ.).
6. Romanov A.M., Nelyutskov M.A., Ryazyapov I.N. Analysis of defects in radio-electronic devices, methods and means of their detection. In: *Proceedings of the International Symposium "Reliability and Quality."* 2023. V. 1. P. 413–414 (in Russ.).
7. Sartakov S.S. Analysis of methods and means of testing electronic equipment of aircraft. In: *Actual Problems of Radio Electronics and Telecommunications: Materials of the All-Russian Scientific and Technical Conference*. Samara; 2020. P. 206–207 (in Russ.).
8. Pham L.Q.Kh., Dao A.Q., Uvaysov S.U., Chernoverskaya V.V., Bushmeleva K.I. Determination of the effective level of single shock pulses for detecting defects in printed board assemblies of electronic devices. *Vestnik Mezhdunarodnogo universiteta prirody, obshchestva i cheloveka "Dubna." Seriya: Estestvennye i inzhenernye nauki = Bulletin of Dubna International University for Nature, Society, and Man. Series: "Natural and Engineering Sciences"*. 2020;3(48):46–54 (in Russ.).
9. Nelyutskov M.A., Marchenko V.V., Lysenko A.V., Tan'kov G.V., Rybakov I.M. Shock pulses as a test method of radio-electronic means. In: *Proceedings of the International Symposium "Reliability and Quality."* 2020. V. 2. P. 238–240 (in Russ.).
10. Kofanov Yu.N., Sotnikova S.Yu. Improving the accuracy of modeling based on identification. *Innovatsii na osnove informatsionnykh i kommunikatsionnykh tekhnologii = Innovations Based on Information and Communication Technologies*. 2015;1:176–178 (in Russ.).
11. Kondrashov D.E. Decision support system for diagnostics of electronic means based on the analysis of shock effects. In: *Problems and Solutions of Automation of the 21st Century: Materials of the Sixth National Scientific and Practical Student Conference*. Surgut. 2023. P. 93–98 (in Russ.).
12. Lyshov S.M., Ivanov I.A., Uvaysov S.U. Methodology for determining the threshold value of the similarity criterion by experimental characteristics. In: *Reliability and Quality: Proceedings of the International Symposium*. 2013. V. 2. P. 372–374 (in Russ.).
13. Bushmeleva K.I., Kondrashov D.E., Uvaysov S.U., Pham L.Q.H. Automated system of diagnostics of radio-electronic means based on shock effects. In: *Innovative, Information and Communication Technologies: Proceedings of the 17th International Scientific and Practical Conference*. 2020. P. 384–389 (in Russ.).
14. Kondrashov D.E., Bushmeleva K.I., Uvaysov S.U., Demchenko S.K. Methods of diagnostics of electronic means based on the analysis of shock effects by means of machine learning algorithms. In: *Innovative, Information and Communication technologies: Proceedings of the 18th International Scientific and Practical Conference*. Sochi. 2021. P. 190–195 (in Russ.).
15. Shalumov A.S. ASONIKA – Russian CAD electronics in terms of virtual tests. *Elektronika: Nauka, tekhnologiya, biznes = Electronics: Science, Technology, Business*. 2022;3:82–83 (in Russ.). <https://doi.org/10.22184/1992-4178.2022.214.3.82.83>
16. Rezhikova E.V., Luong Q.L. Vibration protection of on-board electronic equipment from external influences. *Kontrol'. Diagnostika = Testing, Diagnostics*. 2021;24(11):22–30 (in Russ.). <https://doi.org/10.14489/td.2021.11.pp.022-030>
17. Irzaev G.H. Provision and evaluation of testability of the design of complex radio-electronic means/devices at the stages of their design. *Kontrol'. Diagnostika = Testing, Diagnostics*. 2023;26(5):34–41 (in Russ.). <https://doi.org/10.14489/td.2023.05.pp.034-041>
18. Kashnikova A.P., Belyaeva M.B. The Monte Carlo method in the problems of modeling processes and systems. *Modern Science*. 2021;(1–2):358–362 (in Russ.).

#### Об авторах

**Увайсов Сайгид Увайсович**, д.т.н., профессор, заведующий кафедрой конструирования и производства радиоэлектронных средств, Институт радиоэлектроники и информатики ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: uvajsov@mirea.ru. Scopus Author ID 55931417100, ResearcherID H-6746-2015, SPIN-код РИНЦ 3801-4816, <https://orcid.org/0000-0003-1943-6819>

**Долматов Алексей Вячеславович**, к.т.н., доцент, кафедра конструирования и производства радиоэлектронных средств, Институт радиоэлектроники и информатики ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: dolmatov@mirea.ru. SPIN-код РИНЦ 3887-2405, <https://orcid.org/0000-0003-2969-2971>

**Во Тхе Хай**, аспирант, кафедра конструирования и производства радиоэлектронных средств, Институт радиоэлектроники и информатики ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: thehai.trtd@gmail.com. <https://orcid.org/0009-0009-7240-4374>

**Льфу Нгок Тиен**, аспирант, кафедра конструирования и производства радиоэлектронных средств, Институт радиоэлектроники и информатики ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: alex05vn@gmail.com. <https://orcid.org/0009-0001-8779-7563>

**Нгуен Конг Дык**, аспирант, кафедра конструирования и производства радиоэлектронных средств, Институт радиоэлектроники и информатики ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: ngcongduc9x@gmail.com. <https://orcid.org/0009-0000-9237-156X>

### About the authors

**Saygid U. Uvaysov**, Dr. Sci. (Eng.), Professor, Head of the Department of Design and Production of Radioelectronic Devices, Institute of Radio Electronics and Informatics, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: uvajsov@mirea.ru. Scopus Author ID 55931417100, ResearcherID H-6746-2015, RSCI SPIN-code 3801-4816, <https://orcid.org/0000-0003-1943-6819>

**Aleksey V. Dolmatov**, Cand. Sci. (Eng.), Associate Professor, Department of Design and Production of Radioelectronic Devices, Institute of Radio Electronics and Informatics, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: dolmatov@mirea.ru, RSCI SPIN-code 3887-2405, <https://orcid.org/0000-0003-2969-2971>

**The H. Vo**, Postgraduate Student, Department of Design and Production of Radioelectronic Devices, Institute of Radio Electronics and Informatics, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: thehai.ttrd@gmail.com. <https://orcid.org/0009-0009-7240-4374>

**Ngoc T. Luu**, Postgraduate Student, Department of Design and Production of Radioelectronic Devices, Institute of Radio Electronics and Informatics, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: alex05vn@gmail.com. <https://orcid.org/0009-0001-8779-7563>

**Cong D. Nguyen**, Postgraduate Student, Department of Design and Production of Radioelectronic Devices, Institute of Radio Electronics and Informatics, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: ngcongduc9x@gmail.com. <https://orcid.org/0009-0000-9237-156X>

Современные радиотехнические и телекоммуникационные системы  
Modern radio engineering and telecommunication systems

УДК 519.718:004.722  
<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-2-39-47>



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

## Анализ структурной надежности сетей связи с механизмами защитного переключения для одного защищаемого и одного резервного участков

К.А. Батенков <sup>1, @</sup>,  
А.Б. Фокин <sup>2</sup>

<sup>1</sup> МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, 119454 Россия

<sup>2</sup> Академия Федеральной службы охраны Российской Федерации, Орёл, 302015 Россия

@ Автор для переписки, e-mail: [pustur@yandex.ru](mailto:pustur@yandex.ru)

### Резюме

**Цели.** Известно, что соглашение об уровне обслуживания является важным инструментом выстраивания разумных отношений между абонентами и операторами телекоммуникационных сетей, в т.ч. в части качества предоставляемых услуг, одной из составляющих которого является надежность, оцениваемая коэффициентом готовности. Наиболее подходящей моделью для оценки надежности предоставляемой услуги оказывается случайная графовая модель, строящаяся на основе контура обслуживания – совокупности технических средств, участвующих в оказании данной услуги. В данной постановке оценка надежности услуги отталкивается от надежности составляющих телекоммуникационную сеть (граф) элементов – узлов (вершин) и линий связи (ребер). При этом коэффициенты готовности узлов и линий определяются конструктивными особенностями среды распространения и организующих их технических средств. Целью работы является разработка подхода к анализу надежности телекоммуникационных сетей, поддерживающих механизмы защитного переключения для одного защищаемого и одного резервного участков, позволяющего на основе компьютерного моделирования проводить сравнение подобных механизмов.

**Методы.** Используются методы теории случайных графов, матриц, вероятностей и компьютерного моделирования.

**Результаты.** Предложено разбивать на три группы элементы маршрута (как основные, так и резервирующие): первая группа указывает на постоянные неизменяемые части путей, вторая – идентифицирует резервируемые участки, а третья группа указывает на резервирующие участки. При этом каждый из резервируемых и резервирующих участков формируется на основе заданных предпочтений и обычно направлен на увеличение результирующей надежности, хотя возможно использование и других правил. Для схем защитного переключения для одного защищаемого и одного резервного участков показан вариант формирования маршрутов, используемых для дальнейших расчетов показателя надежности путем компьютерного моделирования.

**Выводы.** На примере магистральной сети путем компьютерного моделирования показано, что использование механизмов защитного переключения для случая одного требуемого маршрута передачи демонстрирует существенный рост надежности, за исключением применения защитного переключения на участках, что связано, прежде всего, с особенностями топологии рассматриваемой сети.

**Ключевые слова:** сеть связи, граф, вероятность связности, защитное переключение, надежность, услуга, коэффициент готовности

• Поступила: 03.07.2023 • Доработана: 20.09.2023 • Принята к опубликованию: 09.02.2024

**Для цитирования:** Батенков К.А., Фокин А.Б. Анализ структурной надежности сетей связи с механизмами защитного переключения для одного защищаемого и одного резервного участков. *Russ. Technol. J.* 2024;12(2):39–47. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-2-39-47>

**Прозрачность финансовой деятельности:** Авторы не имеют финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## RESEARCH ARTICLE

# Analysis of the structural reliability of communication networks supporting protective switching mechanisms for one protected section and one backup section

Kirill A. Batenkov <sup>1, @</sup>,  
Aleksandr B. Fokin <sup>2</sup>

<sup>1</sup> MIREA – Russian Technological University, Moscow, 119454 Russia

<sup>2</sup> Academy of Federal Guard Service of Russian Federation, Orel, 302015 Russia

@ Corresponding author, e-mail: [pustur@yandex.ru](mailto:pustur@yandex.ru)

### Abstract

**Objectives.** The service level agreement is an important tool used in building reasonable relations between subscribers and operators of telecommunication networks. This includes the quality of services provided. One key component is reliability as assessed by the availability factor. The most suitable model for assessing the reliability of the service provided is a random graph model based on the service contour. This is the set of technical resources involved in the provision of this service. In this formulation, the assessment of the reliability of the service is based on the reliability of elements which constitute the telecommunications network (graph), nodes (vertices) and communication lines (edges). At the same time, the availability factors of nodes and lines are determined by the design features of the distribution environment, as well as the technical means used to organize them. The purpose of this work is to develop an approach to analyzing the reliability of telecommunication networks which support protective switching mechanisms for one protected and one backup sections.

**Methods.** The following methods are used: theory of random graphs, matrices, probabilities and computer modeling.

**Results.** The elements of the route, both basic and reserving, are divided into three groups. The first indicates permanent unchangeable parts of the paths, the second group identifies the reserved sections, and the third group indicates the reserving sections. At the same time, each of the reserved and reserving sections is formed on the basis of specified preferences. They are usually aimed at increasing the resulting reliability, although other rules may be used. In the case of protective switching schemes for one protected section and one backup sections, a variant of forming routes used for further calculations of the reliability indicator is shown.

**Conclusions.** Using the example of a backbone network, the study shows that the use of protective switching mechanisms for the case of one required transmission route demonstrates a significant increase in reliability, with the exception of the use of protective switching in sections. This is primarily due to the topology features of the network under consideration.

**Keywords:** communication network, graph, connectivity probability, protective switching, reliability, service, availability factor

• Submitted: 03.07.2023 • Revised: 20.09.2023 • Accepted: 09.02.2024

**For citation:** Batenkov K.A., Fokin A.B. Analysis of the structural reliability of communication networks supporting protective switching mechanisms for one protected section and one backup section. *Russ. Technol. J.* 2024; 12(2):39–47. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-2-39-47>

**Financial disclosure:** The authors have no a financial or property interest in any material or method mentioned.

The authors declare no conflicts of interest.

## ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что соглашение об уровне обслуживания (SLA – service level agreement) является важным инструментом выстраивания разумных отношений между абонентами и операторами телекоммуникационных сетей [1]. При этом и международные рекомендации, и российские стандарты предполагают его использование в отраслях информационных и телекоммуникационных технологий. В соответствии с данным соглашением обе стороны достигают определенного понимания о предоставляемой услуге, ее качестве, ответственности, приоритетности и других факторах.

В базовую структуру соглашения об уровне обслуживания для любой услуги связи входят девять разделов. В разделе, содержащем информацию об уровне обслуживания, обязательно приводится информация о показателях качества услуги и значениях этих показателей, гарантируемых абоненту оператором (ГОСТ Р 55389-2012<sup>1</sup>). При этом наиболее значимыми оказываются показатели, характеризующие готовность услуги. Допускается включение как прямых показателей, например, времени простоя или наработки на отказ, так и косвенных – коэффициента готовности, являющегося наиболее часто используемым показателем надежности. Иногда применяются и более простые детерминированные показатели, характеризующие связность эквивалентного графа, моделирующего исходную телекоммуникационную сеть или даже услугу [2].

Выбор данного показателя в качестве ключевого вызван тем, что он просто и ясно устраняет недопонимание между пользователями и операторами, поскольку задается в форме доли (процента) времени работоспособности услуги на соответствующей точке доступа к ней.

Гарантируемые оператором значения коэффициента готовности, как, впрочем, и других показателей, устанавливаются на основе действующих

федеральных и отраслевых документов. Например, существуют нормы на услугу местной телефонной связи (ГОСТ Р 53727-2009<sup>2</sup>), каналов тональной частоты<sup>3</sup>, сетевых и линейных трактов<sup>4, 5</sup>. Однако ситуация с динамично развивающимися современными телекоммуникационными услугами оказывается не такой радужной, и обычно приходится довольствоваться нормативными значениями российских или зарубежных операторов связи, формализуемыми на основе опыта эксплуатации их телекоммуникационных сетей (Rec. E. 860<sup>6</sup>). Примером может являться набор рекомендаций Международного союза электросвязи для оптических транспортных сетей (Rec. G. 8201<sup>7</sup>) или услуг мультимедиа (Rec. G. 1010<sup>8</sup>).

<sup>2</sup> ГОСТ Р 53727-2009. Национальный стандарт Российской Федерации. *Качество услуги «местная телефонная связь». Показатели качества.* М.: Стандартинформ; 2011. 11 с. [GOST R 53727-2009. National Standard of the Russian Federation. *Quality of service "Local telephone communication."* Quality indices. Moscow: Standartinform; 2011. 11 p. (in Russ.)]

<sup>3</sup> *Нормы на электрические параметры каналов тональной частоты магистральной и внутризоновых первичных сетей.* Утв. Министерством связи РФ 15.04.96. М.: МК-Полиграф; 1996. 96 с. [Regulations for electrical parameters of tone frequency channels of main and intra-area primary networks. Approved by the Ministry of Communications of the Russian Federation 15.04.96. Moscow: MK-Polygraph; 1996. 96 p. (in Russ.)]

<sup>4</sup> *Нормы на электрические параметры сетевых трактов магистральной и внутризоновых первичных сетей.* I часть. Утв. Министерством связи РФ 08.01.1997. М.: МК-Полиграф; 1996. 134 с. [Regulations for electrical parameters of network paths of main and intra-area primary networks. Part I. Approved by the Ministry of Communications of the Russian Federation 08.01.1997. Moscow: MK-Polygraph; 1996. 134 p. (in Russ.)]

<sup>5</sup> *Нормы на электрические параметры линейных трактов магистральной и внутризоновых первичных сетей.* II часть. Утв. Министерством связи РФ 08.01.1997. М.: МК-Полиграф; 1996. 168 с. [Regulations for electrical parameters of network paths of main and intra-area primary networks. Part II. Approved by the Ministry of Communications of the Russian Federation 08.01.1997. Moscow: MK-Polygraph; 1996. 168 p. (in Russ.)]

<sup>6</sup> Rec. E. 860. *Framework of a service level agreement.* Geneva: ITU-T; 2003. 30 p. <https://www.itu.int/rec/T-REC-E.860-200206-I/en>. Дата обращения 26.02.2024. / Accessed February 26, 2024.

<sup>7</sup> Rec. G. 8201. *Error performance parameters and objectives for multi-operator international paths within optical transport networks.* Geneva: ITU-T; 2012. 24 p. <https://www.itu.int/rec/T-REC-G.8201>. Дата обращения 26.02.2024. / Accessed February 26, 2024.

<sup>8</sup> Rec. G. 1010. *End-user multimedia QoS categories.* Geneva: ITU-T; 2002. 18 p. <https://www.itu.int/rec/T-REC-G.1010/en>. Дата обращения 26.02.2024. / Accessed February 26, 2024.

<sup>1</sup> ГОСТ Р 55389-2012. Национальный стандарт Российской Федерации. *Система национальных стандартов в области качества услуг связи. Соглашение об уровне обслуживания (SLA).* М.: Стандартинформ; 2019. 12 с. [GOST R 55389-2012. National Standard of the Russian Federation. *System of National Standards for quality of telecommunication services. Service Level Agreement (SLA).* Moscow: Standartinform; 2019. 12 p. (in Russ.)]

В подобной ситуации для оператора связи крайне важной оказывается оценка коэффициента готовности запрашиваемой пользователем услуги. Основным препятствием выступает довольно значительный интервал измерений, требуемый для получения достоверных экспериментальных оценок, существенно возрастающий при увеличении коэффициентов готовности. Применение расчетных соотношений, позволяющих вычислить подобные оценки на основе определенного набора исходных данных, имеющихся у оператора связи, позволяет предварительно проанализировать его возможности с точки зрения запросов конечного пользователя.

## 1. НАДЕЖНОСТЬ СЕТИ И ЕЕ ЭЛЕМЕНТОВ

Наиболее подходящей моделью для оценки надежности предоставляемой услуги оказывается случайная графовая модель [3], строящаяся на основе контура обслуживания – совокупности технических средств, участвующих в оказании данной услуги [1, 4]. Понятно, что в данной постановке оценка надежности услуги отталкивается от надежности составляющих телекоммуникационную сеть (граф) элементов – узлов (вершин) и линий связи (ребер) [5]. При этом часто используются методы, требующие отыскания заданных подграфов, например, путей [6] или сечений [7], в структуре исходного графа.

Коэффициенты готовности узлов и линий определяются конструктивными особенностями среды распространения и их организующих технических средств (Rec. G. 911<sup>9</sup>) [8]. Однако обычно детального описания подобных особенностей у оператора просто нет, и используют упрощенные модели.

Используемое сетевое оборудование, такое как оптические кросс-коннекторы и мультиплексоры ввода-вывода, состоит из значительного числа различных элементов, каждый из которых характеризуется собственными средними наработкой на отказ и временем восстановления (Rec. G. 911) [9]. Средняя наработка на отказ  $T_0$  сетевого оборудования имеет размерность времени или количества отказов в единицу времени, обычно принимаемую равной  $10^9$  ч, или примерно 114 155 лет. Среднее же время восстановления  $T_r$  выражается в часах. При этом коэффициент готовности соответствует вероятности связности  $p$  соответствующего узла или линии:  $p = \frac{T_r}{T_0}$ .

Отказы линий связи могут вызываться как выходом из строя оптического кабеля, так и сбоями

в работе оптических усилителей или систем уплотнения линии WDM (wavelength division multiplexing – уплотнение с разделением по длине волны, спектральное уплотнение). Часто принимаемое допущение – отказы отдельных волокон в оптическом кабеле происходят одновременно, поскольку чаще всего вызываются разрывами при копке, приводящими к выходу из строя сразу всех волокон. Для кабеля среднее время наработки на отказ  $T_0$  задается, исходя из меры длины разрыва, соответствующей средней длине кабеля  $d_0$ , подверженной единичному разрыву в год. Данное условие объясняется ростом вероятности разрыва кабеля при увеличении его длины  $d$ , поскольку более протяженные участки потенциально имеют больше возможностей быть поврежденными внешними воздействиями. Среднее время наработки на отказ оптического кабеля, выраженное в часах, определяется выражением [9]:

$$T_0 = 8760 \frac{d_0}{d}.$$

Среднее время восстановления  $T_r$  кабеля включает в себя время локализации неисправности, доступа к кабелю, ремонта повреждения и введения в эксплуатацию, подразумевающего в т.ч. тестирование качества информационного обмена.

Перечень средних времен наработки на отказ и восстановления для наиболее часто используемого сетевого оборудования представлен в [9]. Данные значения являются в некоторой степени слишком усредненными, могут различаться у производителей оборудования и тем более изменяться с течением времени вследствие совершенствования элементной базы. Тем не менее, их применение оправдано не с точки зрения получения абсолютных величин рассчитываемых показателей надежности телекоммуникационных сетей, а при сравнении механизмов обеспечения отказоустойчивости вследствие близости показателей к реальным типовым величинам. Следует также отметить, что время наработки на отказ для современного оборудования зачастую оказывается даже ниже приведенных данных [10], причиной чего, судя по всему, является усложнение базы электронных компонентов.

Далее рассматривается двунаправленная линия связи, соединяющая два узла отрезками кабеля, перемеженными оптическими усилителями на расстоянии порядка 100 км. Понятно, что линия связи является работоспособной в случае готовности всех составляющих ее элементов. Предполагая статистическую независимость выходов их из строя, коэффициент готовности  $p_{\text{line}}$  линии можно рассчитать по формуле:

$$p_{\text{line}}(d) = (1 - 6.088 \cdot 10^{-6} d) \cdot 0.999952 \left\lfloor \frac{d}{100} \right\rfloor \cdot 0.999988^2. \quad (1)$$

<sup>9</sup> Rec. G. 911. *Parameters and calculation methodologies for reliability and availability of fibre optic systems (Previously CCITT Recommendation)*. Geneva: ITU-T; 1994. 39 p. <https://www.itu.int/rec/T-REC-G.911/en>. Дата обращения 26.02.2024. / Accessed February 26, 2024.

## 2. МЕХАНИЗМЫ ЗАЩИТНОГО ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ

Коэффициент готовности отдельной линии связи рассчитывается достаточно просто на основе модели последовательного соединения элементов. Однако в реальных телекоммуникационных сетях, для которых характерно наличие альтернативных маршрутов, ситуация существенно усложняется [11]. При этом немалую важную роль в итоговой надежности соединений играют механизмы защитного переключения [12], или избыточные схемы.

Отметим, что в настоящей работе рассматривается влияние характеристик телекоммуникационной сети на ее итоговую надежность с позиции наиболее часто используемого показателя – коэффициента готовности. Вопросы, связанные с оперативностью переключения на резервные каналы, требуют дальнейшего уточнения [13]. В качестве базовых механизмов обеспечения отказоустойчивости рассматриваются методы защитного переключения (protection) для одного основного маршрута (Rec. G. 808<sup>10</sup>) [14]. При этом выделяют архитектуру защитного переключения с одним защищаемым и одним резервным участком (1 : 1 или 1 + 1), а также шесть разновидностей защищаемых участков элементов сети: линия, узел, маршрут, сегмент, кольцо,  $p$ -цикл [9]. Каждая из разновидностей обладает своими особенностями с позиции технической реализации, однако с точки зрения анализа надежности на основе случайных графов достаточно рассматривать защищаемый участок как некоторый набор вершин и ребер графа, использование которых допустимо лишь на основном маршруте. При этом использование колец или  $p$ -циклов также сводится к подобным типам резервирования путем несложных преобразований.

## 3. АРХИТЕКТУРА МАРШРУТОВ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Элементы маршрута, как основные, так и резервирующие, целесообразно разбить на три группы (рис. 1). Первая указывает на постоянные неизменяемые части путей и задается как вектор  $\mathbf{s} = \{s_i\}_{i=\overline{1, l+v}}$  элементов исходного графа, где  $s_i = 1$ , если  $i$ -й элемент графа (ребро или вершина) содержится в данном пути и  $s_i = 0$ , если нет;  $l$  – число ребер в графе;  $v$  – число вершин в графе. Вторая группа идентифицирует резервируемые участки и представляется в форме матрицы  $\mathbf{S} = \{s_{i,j}\}_{i=\overline{1, l+v}, j=\overline{1, n}}$ , каждый

столбец которой эквивалентен одному из  $n$  резервируемых участков, где аналогично  $s_{i,j} = 1$ , если  $i$ -й элемент содержится в  $j$ -м пути и  $s_{i,j} = 0$ , если нет. Третья группа указывает на резервирующие участки, записывается в форме матрицы  $\mathbf{T} = \{t_{i,j}\}_{i=\overline{1, l+v}, j=\overline{1, m}}$ , каждый столбец которой эквивалентен одному из  $m$  резервирующих участков, где также  $t_{i,j} = 1$ , если  $i$ -й элемент содержится в  $j$ -м пути и  $t_{i,j} = 0$ , если нет. Каждый из резервируемых и резервирующих участков формируется на основе заданных предпочтений и обычно направлен на увеличение результирующей надежности, хотя возможно использование и других правил.

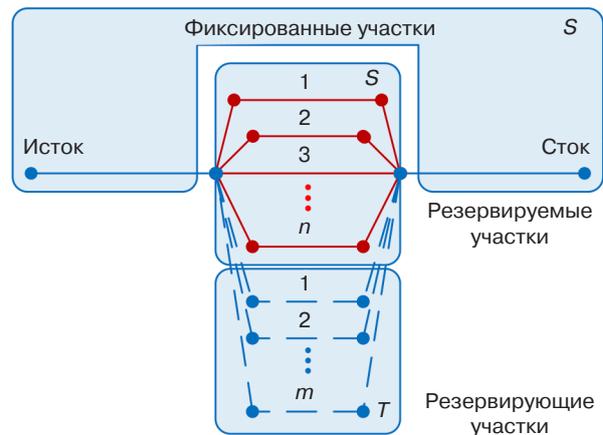


Рис. 1. Архитектура маршрутов передачи информации с механизмами защитного переключения

Так, в общем случае для архитектур защитного переключения целесообразно в качестве основы рассматривать  $n$  основных маршрутов передачи информации, которые обычно задаются в форме простых цепей с независимыми защищаемыми участками, обладающими максимальными коэффициентами готовности. Тогда матрица резервируемых участков выбирается исходя из максимальной величины коэффициента готовности между заданными элементами исходного графа с учетом их независимости и невключенными в фиксированную часть маршрута

$$\mathbf{S}^{(1)} = \left\{ \mathbf{W}^{(j)} : \max [\mathbf{s} + \mathbf{W}^{(j)}] = 1, \max_{j=1, s} \prod_{i=1}^{l+v} p_i w_{i,j} \right\},$$

$$\mathbf{S}^{(i)} = \left\{ \mathbf{W}^{(j)} : \max [\mathbf{s} + \text{sign}(\mathbf{S}\mathbf{1}_{i-1}) + \mathbf{W}^{(j)}] = 1, \right.$$

$$\left. \max_{j=1, s} \prod_{i=1}^{l+v} p_i w_{i,j} \right\}, i = \overline{2, n},$$

где  $\mathbf{W} = \{w_{i,j}\}_{i=\overline{1, l+v}, j=\overline{1, s}}$  – матрица путей между истоком и стоком резервируемых участков;  $w_{i,j} = 1$ , если

<sup>10</sup> Rec. G. 808. *Terms and definitions for network protection and restoration*. Amendment 1. 2018–03. Geneva: ITU-T; 2018. 20 p. <https://www.itu.int/rec/T-REC-G.808/en>. Дата обращения 26.02.2024. / Accessed February 26, 2024.

$i$ -й элемент содержится в  $j$ -м пути и  $w_{i,j} = 0$  – если не содержится;  $\mathbf{p} = \{p_i\}_{i=1, l+v}$  – вектор вероятностей связности (работоспособности) ребер и вершин;  $p_i$  – вероятность связности (коэффициент готовности)  $i$ -го элемента.

Здесь каждый столбец  $\mathbf{S}^{(i)}$  матрицы резервируемых участков формируется из такого столбца  $\mathbf{W}^{(j)}$  матрицы путей, который одновременно не имеет повторных элементов в уже использованных предыдущих основных путях, что проверяется общим условием  $\max[\mathbf{s} + \text{sign}(\mathbf{S}\mathbf{1}_{i-1} + \mathbf{W}^{(j)})]$ , и имеет максимальную вероятность связности (коэффициент готовности) из возможных альтернативных путей, задаваемую выражением  $\max_{j=1,s} \prod_{i=1}^{l+v} p_i w_{i,j}$ .

Основные маршруты представляются в виде матрицы путей  $\mathbf{R}$ :

$$\mathbf{R} = \mathbf{s}\mathbf{1}_n^T + \mathbf{S}.$$

Аналогично, в общем случае,  $m$  маршрутов, содержащих резервируемые участки, задаются в форме простых цепей с независимыми резервируемыми и резервирующими участками, обладающими максимальными коэффициентами готовности. Тогда матрица резервирующих участков выбирается исходя из максимальной величины коэффициента готовности между заданными элементами исходного графа с учетом их независимости и невключенными в фиксированную часть маршрута и резервируемые участки.

$$\mathbf{T}^{(1)} = \left\{ \mathbf{W}^{(j)} : \max \left[ \text{sign}(\mathbf{R}\mathbf{1}_n) + \mathbf{W}^{(j)} \right] = 1, \right.$$

$$\left. \max_{j=1,s} \prod_{i=1}^{l+v} p_i w_{i,j} \right\},$$

$$\mathbf{T}^{(i)} = \left\{ \mathbf{W}^{(j)} : \max \left[ \text{sign}(\mathbf{R}\mathbf{1}_n) + \text{sign}(\mathbf{T}\mathbf{1}_{i-1}) + \mathbf{W}^{(j)} \right] = 1, \right.$$

$$\left. \max_{j=1,s} \prod_{i=1}^{l+v} p_i w_{i,j} \right\}, i = 2, m.$$

Здесь каждый столбец  $\mathbf{T}^{(i)}$  матрицы резервирующих участков формируется из такого столбца  $\mathbf{W}^{(j)}$  матрицы путей, который одновременно не имеет повторных элементов в уже использованных предыдущих основных и резервных путях, что проверяется общим условием  $\max[\mathbf{s} + \text{sign}(\mathbf{S}\mathbf{1}_{i-1} + \mathbf{W}^{(j)})]$ , и имеет максимальную вероятность связности (коэффициент готовности) из возможных альтернативных путей, задаваемую выражением  $\max_{j=1,s} \prod_{i=1}^{l+v} p_i w_{i,j}$ .

Сами резервные маршруты представляются также в виде матрицы путей  $\mathbf{U}$ :

$$\mathbf{U} = \mathbf{s}\mathbf{1}_m^T + \mathbf{T}.$$

#### 4. АРХИТЕКТУРА ЗАЩИТНОГО ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО ЗАЩИЩАЕМОГО И ОДНОГО РЕЗЕРВНОГО УЧАСТКОВ

Для одного защищаемого и одного резервного участков (схемы 1 + 1 или 1 : 1) (рис. 2) исходный основной путь дополняется резервным с теми же самыми истоком и стоком, не имеющим в своем составе элементов защищаемого участка основного пути и обладающим максимальным коэффициентом готовности из всех возможных альтернатив. Таким образом, матрицы резервируемых  $\mathbf{S}$  и резервирующих  $\mathbf{T}$  участков редуцируются в векторы, а матрица простых цепей  $\mathbf{R}$  содержит два столбца, первый  $\mathbf{R}^{(1)}$  из которых указывает на основной маршрут, а второй  $\mathbf{R}^{(2)}$  – на резервирующий путь:

$$\mathbf{R}^{(1)} = \mathbf{s} + \mathbf{S},$$

$$\mathbf{R}^{(2)} = \mathbf{s} + \mathbf{T}.$$

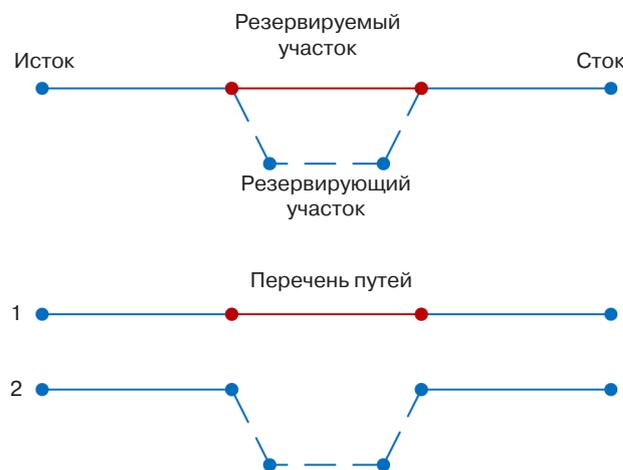


Рис. 2. Архитектура защитного переключения для одного защищаемого и одного резервного участков и перечень путей

#### 5. ПРИМЕР АНАЛИЗА НАДЕЖНОСТИ МАГИСТРАЛЬНОЙ СЕТИ

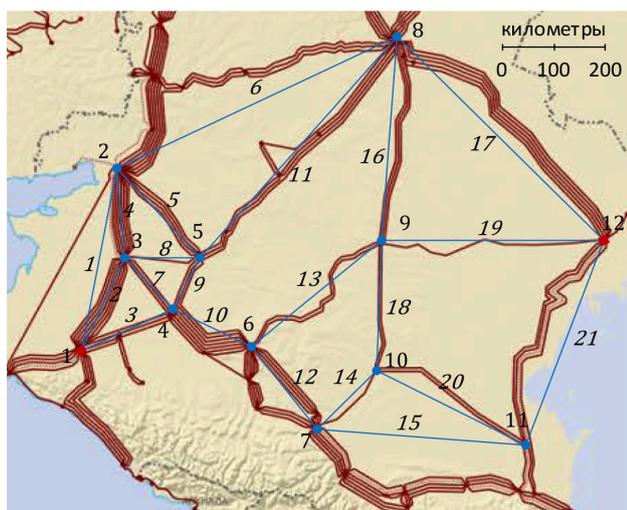
Кабельная структура магистральной сети юга России (рис. 3) доступна на официальном сайте Международного союза электросвязи<sup>11</sup>. На рис. 3 также представлен пронумерованный эквивалентный

<sup>11</sup> <https://bbmaps.itu.int/bbmaps/>. Дата обращения 26.02.2024. / Accessed February 26, 2024.

**Таблица 1.** Параметры надежности линий связи

Номер линии	Протяженность $d_1$ , км	Коэффициент готовности $p_1$	Номер линии	Протяженность $d_1$ , км	Коэффициент готовности $p_1$	Номер линии	Протяженность $d_1$ , км	Коэффициент готовности $p_1$
1	375	0.99755	8	150	0.99901	15	410	0.99729
2	200	0.99866	9	115	0.99923	16	400	0.99735
3	200	0.99866	10	110	0.99926	17	565	0.9963
4	175	0.99886	11	575	0.99624	18	265	0.99827
5	250	0.99836	12	225	0.99851	19	430	0.99717
6	600	0.99604	13	325	0.99785	20	325	0.99785
7	140	0.99908	14	165	0.99892	21	440	0.99711

граф  $G(12, 21)$ , вероятность связности которого согласно ГОСТ Р 53111–2008<sup>12</sup> трактуется как коэффициент готовности и характеризует надежность.



**Рис. 3.** Кабельная структура магистральной сети юга России

Предполагается, что на узле находится, по крайней мере, один кросс-коннектор или мультиплексор ввода-вывода, работающий сразу на все допустимые направления связи и имеющий среднее время наработки на отказ  $10^5$  ч и среднее время восстановления 6 ч [9]. Значит коэффициент готовности любого узла

$$p_{\text{vertex}} = 1 - \frac{6}{10^5} = 0.99994.$$

<sup>12</sup> ГОСТ Р 53111–2008. Национальный стандарт Российской Федерации. Устойчивость функционирования сети связи общего пользования. Требования и методы проверки. М.: Стандартинформ; 2009. 16 с. [GOST R 53111–2008. National Standard of the Russian Federation. *Stability of functioning of the public communications network. Requirements and check methods.* Moscow: Standartinform; 2009. 16 p. (in Russ.).]

Коэффициент готовности  $p_1$  отдельных линий связи вычисляется для волоконно-оптических систем передачи на основе протяженности, рассчитываемой по географическим координатам городов, между которыми развернута данная линия связи.

Рассчитанные параметры линий связи на основе (1) приведены в табл. 1.

Рассмотрены все типы защищаемых участков для механизмов защитного переключения для одного защищаемого и одного резервного участков (схемы 1 + 1 или 1 : 1). Результаты расчетов, полученные путем компьютерного моделирования в соответствии с методом многопеременной инверсии [15], приведены в табл. 2.

**Таблица 2.** Параметры надежности сети без резервирования и с защитным переключением

Участок	Коэффициент готовности
линия	0.99966
узел	0.99984
сегмент	0.99284
маршрут	0.99981
кольцо	0.99985
$p$ -цикл	0.99986
без резервирования	0.99266

Использование механизмов защитного переключения для случая одного требуемого маршрута передачи (табл. 2) демонстрирует существенный рост надежности, за исключением применения защитного переключения на сегментах. Это связано, прежде всего, с особенностями топологии рассматриваемой сети. Так, наиболее надежный маршрут 1–4–6–9–12 содержит три резервируемых участка 1–4–6, 4–6–9 и 6–9–12, каждый из которых имеет резервирующий

путь, пересекающийся с резервирующими путями соседних участков, что значительно снижает защитные свойства.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный метод анализа надежности телекоммуникационных сетей, поддерживающих механизмы защитного переключения, использует разбиение элементов основного и резервного маршрутов на три группы, первая из которых включает постоянные неизменяемые части путей, вторая – резервируемые, а третья – резервирующие участки. Подобное представление позволяет учесть эффекты дублирования элементов в различных маршрутах и, как следствие, устранить погрешности оценки коэффициента готовности относительно методов, использующих допущение о независимости путей передачи информации.

На примере магистральной сети путем компьютерного моделирования показано, что использование

механизмов защитного переключения для случая одного требуемого маршрута передачи демонстрирует существенный рост надежности, за исключением применения защитного переключения на сегментах, что связано, прежде всего, с особенностями топологии рассматриваемой сети, не позволяющей сформировать полностью независимые от других путей сегменты.

#### Вклад авторов

**К.А. Батенков** – идея исследования, консультации по вопросам проведения всех этапов исследования.

**А.Б. Фокин** – разработка подхода к анализу структурной надежности сетей связи с механизмами защитного переключения, проведение компьютерного моделирования.

#### Authors' contributions

**K.A. Batenkov** – the idea of the study, consultations on conducting all stages of the study.

**A.B. Fokin** – developing the approach to the analysis of the structural reliability of communication networks with protective switching mechanisms, computer modeling.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нетес В.А. Соглашение об уровне обслуживания и надежность. *Надежность*. 2017;17(4):27–30. <http://doi.org/10.21683/1729-2646-2017-17-4-27-30>
2. Батенков К.А., Батенков А.А. Анализ и синтез структур сетей связи по детерминированным показателям устойчивости. *Труды СПИИРАН*. 2018;3(58):128–159. <https://doi.org/10.15622/sp.58.6>
3. Батенков А.А., Батенков К.А., Фокин А.Б. Вероятность связности телекоммуникационной сети на основе приведения нескольких событий несвязности к объединению независимых событий. *Информационно-управляющие системы*. 2021;6(115):53–63. <https://doi.org/10.31799/1684-8853-2021-6-53-63>
4. Нетес В.А. Виртуализация, облачные услуги и надежность. *Вестник связи*. 2016;8:7–9.
5. Батенков К.А. Точные и граничные оценки вероятностей связности сетей связи на основе метода полного перебора типовых состояний. *Труды СПИИРАН*. 2019;18(5):1093–1118. <https://doi.org/10.15622/sp.2019.18.5.1093-1118>
6. Анфёров М.А. Алгоритм поиска подкритических путей на сетевых графиках. *Russ. Technol. J.* 2023;11(1):60–69. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2023-11-1-60-69>
7. Батенков А.А., Батенков К.А., Фокин А.Б. Формирование сечений телекоммуникационных сетей для анализа их устойчивости с различными мерами связности. *Информатика и автоматизация*. 2021;20(2):371–406. <https://doi.org/10.15622/ia.2021.20.2.5>
8. Wosinska L., Chen J., Larsen C.P. Fiber Access Networks: Reliability Analysis and Swedish Broadband Market. *IEICE Trans. Commun.* 2009;E92–B(10):3006–3014. <https://doi.org/10.1587/transcom.E92.B.3006>
9. Vasseur J.-P., Pickavet M., Demeester P. *Network Recovery. Protection and Restoration of Optical, SONET-SDH, IP, and MPLS*. San Francisco, CA: Elsevier; 2004. 542 p.
10. Lashgari M., Tonini F., Scaracchione M., Woosinka L., Rigamonti G., Monti P. Techno-economics of Fiber vs. Microwave for Mobile Ntransport Network Deployments. *J. Opt. Comm. and Netw.* 2023;15(7):C74–C87. <https://doi.org/10.1364/JOCN.482865>
11. Yusuf M.N., Bakar K.b.A., Isyaku B., Saheed A.L. Review of Path Selection Algorithms with Link Quality and Critical Switch Aware for Heterogeneous Traffic in SDN. *Int. J. Electr. Computer Eng. Syst.* 2023;14(3):345–370. <https://doi.org/10.32985/ijeces.14.3.12>
12. Isyaku B., Bakar K.B.A., Nagmeldin W., Abdelmaboud A., Saeed F., Ghaleb F.A. Reliable Failure Restoration with Bayesian Congestion Aware for Software Defined Networks. *CSSE*. 2023;46(3):3729–3748. <https://doi.org/10.32604/csse.2023.034509>
13. Bosisio A., Berizzi A., Lupis D., Morotti A., Iannarelli G., Greco B. A Tabu-search-based Algorithm for Distribution Network Restoration to Improve Reliability and Resiliency. *J. Modern Power Systems and Clean Energy*. 2023;11(1):302–311. <https://doi.org/10.35833/MPCE.2022.000150>
14. Сергеева Т.П., Тетёкин Н.Н. Методы повышения надежности в сетях SDN. *T-Comm*. 2014;6:53–55.
15. Батенков А.А., Батенков К.А., Фокин А.Б. Анализ вероятности связности телекоммуникационной сети на основе инверсий ее состояний. *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2022;59:91–98. <https://doi.org/10.17223/19988605/59/10>

## REFERENCES

1. Netes V.A. Service level agreement and dependability. *Nadezhnost' = Dependability*. 2017;17(4):27–30 (in Russ.). <http://doi.org/10.21683/1729-2646-2017-17-4-27-30>
2. Batenkov K.A., Batenkov A.A. Analysis and synthesis of communication network structures by deterministic stability indicators. *Trudy SPIIRAN = SPIIRAS Proceedings*. 2018;3(58):128–159 (in Russ.). <https://doi.org/10.15622/sp.58.6>
3. Batenkov A.A., Batenkov K.A., Fokin A.B. Analysis of the probability of connectivity of a telecommunications network based on the reduction of several non-connectivity events to a union of independent events. *Informatsionno-upravlyayushchie sistemy = Information and Control Systems*. 2021;6(115):53–63 (in Russ.). <https://doi.org/10.31799/1684-8853-2021-6-53-63>
4. Netes V.A. Virtualization, cloud services and reliability. *Vestnik svyazi = Vestnik Communications*. 2016;8:7–9 (in Russ.).
5. Batenkov K.A. Accurate and Boundary Estimate of Communication Network Connectivity Probability Based on Model State Complete Enumeration Method. *Trudy SPIIRAN = SPIIRAS Proceedings*. 2019;18(5):1093–1118 (in Russ.). <https://doi.org/10.15622/sp.2019.18.5.1093-1118>
6. Anfyorov M.A. Algorithm for finding subcritical paths on network diagrams. *Russ. Technol. J*. 2023;11(1):60–69 (in Russ.). <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2023-11-1-60-69>
7. Batenkov A.A., Batenkov K.A., Fokin A.B. Forming the telecommunication networks' cross-sections to analyze the latter stability with different connectivity measures. *Informatika i avtomatizatsiya = Informatics and Automation*. 2021;20(2):371–406 (in Russ.). <https://doi.org/10.15622/ia.2021.20.2.5>
8. Wosinska L., Chen J., Larsen C.P. Fiber Access Networks: Reliability Analysis and Swedish Broadband Market. *IEICE Trans. Commun.* 2009;E92–B(10):3006–3014. <https://doi.org/10.1587/transcom.E92.B.3006>
9. Vasseur J.-P., Pickavet M., Demeester P. *Network Recovery. Protection and Restoration of Optical, SONET-SDH, IP, and MPLS*. San Francisco, CA: Elsevier; 2004. 542 p.
10. Lashgari M., Tonini F., Capacchione M., Woosinka L., Rigamonti G., Monti P. Techno-economics of Fiber vs. Microwave for Mobile Ntransport Network Deployments. *J. Opt. Comm. and Netw.* 2023;15(7):C74–C87. <https://doi.org/10.1364/JOCN.482865>
11. Yusuf M.N., Bakar K.b.A., Isyaku B., Saheed A.L. Review of Path Selection Algorithms with Link Quality and Critical Switch Aware for Heterogeneous Traffic in SDN. *Int. J. Electr. Computer Eng. Syst.* 2023;14(3):345–370. <https://doi.org/10.32985/ijeces.14.3.12>
12. Isyaku B., Bakar K.B.A., Nagmeldin W., Abdelmaboud A., Saeed F., Ghaleb F.A. Reliable Failure Restoration with Bayesian Congestion Aware for Software Defined Networks. *CSSE*. 2023;46(3):3729–3748. <https://doi.org/10.32604/csse.2023.034509>
13. Bosisio A., Berizzi A., Lupis D., Morotti A., Iannarelli G., Greco B. A Tabu-search-based Algorithm for Distribution Network Restoration to Improve Reliability and Resiliency. *J. Modern Power Systems and Clean Energy*. 2023;11(1):302–311. <https://doi.org/10.35833/MPCE.2022.000150>
14. Sergeeva T.P., Tetekin N.N. Reliability Enhancemrnt Methods for SDN Networks. *T-Comm*. 2014;6:53–55 (in Russ.).
15. Batenkov A.A., Batenkov K.A., Fokin A.B. Network connectivity probability analysis based on its states inversion. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naja tehnika i informatika = Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2022;59:91–98 (in Russ.). <https://doi.org/10.17223/19988605/59/10>

### Об авторах

**Батенков Кирилл Александрович**, д.т.н., доцент, профессор кафедры прикладной математики, Институт информационных технологий ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: [pustur@yandex.ru](mailto:pustur@yandex.ru). Scopus Author ID 35777325300, SPIN-код РИНЦ 8570-6327, <https://orcid.org/0000-0001-6083-1242>

**Фокин Александр Борисович**, сотрудник, ФГКВУ ВО «Академия Федеральной службы охраны Российской Федерации» (302015, Россия, Орёл, ул. Приборостроительная, д. 35). E-mail: [tatarin57ru@mail.ru](mailto:tatarin57ru@mail.ru). Scopus Author ID 57218934996, SPIN-код РИНЦ 7727-1166, <https://orcid.org/0000-0002-2187-7325>

### About the authors

**Kirill A. Batenkov**, Dr. Sci. (Eng.), Docent, Professor, Department of Applied Mathematics, Institute of Information Technologies, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: [pustur@yandex.ru](mailto:pustur@yandex.ru). Scopus Author ID 35777325300, RSCI SPIN-code 8570-6327, <https://orcid.org/0000-0001-6083-1242>

**Aleksandr B. Fokin**, Employee, Russian Federation Security Guard Service Federal Academy (FSO Academy of Russia) (35, Priborostroitelnaya ul., Orel, 302015 Russia). Email: [tatarin57ru@mail.ru](mailto:tatarin57ru@mail.ru). Scopus Author ID 57218934996, RSCI SPIN-code 7727-1166, <https://orcid.org/0000-0002-2187-7325>

Современные радиотехнические и телекоммуникационные системы  
Modern radio engineering and telecommunication systems

УДК 621.396.969.3  
<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-2-48-56>



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

## Математическое моделирование сверхвысокочастотных каналов полуактивной радиолокационной головки самонаведения

Н.М. Легкий<sup>@</sup>,  
И.В. Унченко

МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, 119454 Россия  
<sup>@</sup> Автор для переписки, e-mail: [legki@mirea.ru](mailto:legki@mirea.ru)

### Резюме

**Цели.** Радиолокационные головки самонаведения (РГСН) управляемых ракет – это большая группа радиолокаторов, которые в виду особенностей назначения отличаются от других радиолокаторов. Преимуществом полуактивной РГСН является возможность иметь мощный облучатель на командном пункте и, как следствие, мощный отраженный сигнал от цели, что в результате приводит к увеличению дальности ее обнаружения и точности наведения на цель. Отсутствие аппаратуры излучения упрощает бортовую аппаратуру управления ракетой, уменьшает ее вес и габариты и, следовательно, улучшаются ее маневренные свойства, что обуславливает наибольшее распространение данного типа РГСН. Для точного определения доплеровского смещения сигнала цели в приемный тракт полуактивной РГСН должен поступать эталонный сигнал, частота которого совпадает с частотой сигнала передатчика подсвета. Цель работы – оптимизация бортовой аппаратуры и подтверждение предлагаемого подхода с помощью моделирования.

**Методы.** В работе использованы методы статистической радиотехники, теории оптимального приема сигналов и компьютерное моделирование в системе автоматизированного проектирования *AWR Design Environment*.

**Результаты.** Получена и проанализирована математическая модель приемника РГСН. Предложенная модель приемника позволяет произвести расчет спектральных характеристик сигналов в любой точке СВЧ-трактов, характеристик сигналов на входе основного канала, на выходе смесителя первого преобразования, на выходе селектора первой промежуточной частоты и на выходе приемного тракта. Приведены расчетные значения основных характеристик высокочастотных каналов.

**Выводы.** Полученная модель позволяет оценивать частотные зависимости основных параметров приемного тракта, таких как коэффициент передачи, коэффициент шума, точки децибельной компрессии, точки пересечения интермодуляций третьего порядка. Полученные при моделировании значения максимально приближены к характеристикам существующих систем, т.к. в качестве основных элементов высокочастотных трактов использовались созданные модели реально существующих и массово используемых микросхем. Модель может использоваться для исследования путей совершенствования технических показателей, разработки новых принципов и схем построения радиоэлектронных комплексов, например, при построении приемного тракта с использованием перспективных средств радиофоники.

**Ключевые слова:** полуактивная радиолокационная головка самонаведения, СВЧ-приемник, характеристики приемника, моделирование

• Поступила: 26.04.2023 • Доработана: 09.08.2023 • Принята к опубликованию: 15.02.2024

**Для цитирования:** Легкий Н.М., Унченко И.В. Математическое моделирование сверхвысокочастотных каналов полуактивной радиолокационной головки самонаведения. *Russ. Technol. J.* 2024;12(2):48–56. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-2-48-56>

**Прозрачность финансовой деятельности:** Авторы не имеют финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## RESEARCH ARTICLE

# Mathematical modeling of microwave channels of a semi-active radar homing head

Nikolay M. Legkiy<sup>@</sup>,  
Ivan V. Unchenko

MIREA – Russian Technological University, Moscow, 119454 Russia

<sup>@</sup> Corresponding author, e-mail: legki@mirea.ru

### Abstract

**Objectives.** Radar homing heads of guided missiles form a large group of radars which differ from other radars due to their specific purpose. The advantages of a semi-active radar homing head (SARH) include the ability to have a powerful irradiator at the command post and, as a result, a powerful reflected signal from the target. This results in an increase in the range of its detection and guidance. The absence of an emitter simplifies the missile's onboard control equipment, reduces its weight and dimensions, thereby improving its maneuverability and increasing the guidance accuracy, resulting in the greatest distribution of this type of SARH. However, in order to determine the exact Doppler shift of the target signal as part of SARH, a reference signal with a frequency coinciding with the illumination transmitter signal must be supplied to the receiving path. This study aims to synthesize and analyze the SARH receiver circuit with improved accuracy characteristics.

**Methods.** The following methods are used: statistical radio engineering; optimal signal reception theories; and computer modeling in CAD AWR Design Environment.

**Results.** A mathematical model of the SARH receiver was obtained and analyzed. The proposed receiver model allows the spectral characteristics of signals to be calculated at any point of the microwave paths, as well as signal characteristics at the input of the head channel, at the output of the first conversion mixer, at the output of the first intermediate frequency selector, and at the output of the receiving path. The calculated values of the main characteristics of high-frequency channels are also given.

**Conclusions.** The resulting model allows the frequency dependencies of main parameters of the receiving path, such as the gain factor, noise factor, decibel compression points, and third-order intermodulation intercept points to be estimated. The values obtained during the simulation are maximally close to existing systems, since the models of real-life and mass-used microcircuits thus created are used as the main elements when designing high-frequency paths. The model can be used to study methods of improving technical indicators, as well as to develop new principles and schemes for developing radioelectronic complexes, for example, when designing a receiving path using advanced radio photonics.

**Keywords:** semi-active radar homing head, microwave receiver, receiver characteristics, modeling

• Submitted: 26.04.2023 • Revised: 09.08.2023 • Accepted: 15.02.2024

**For citation:** Legkiy N.M., Unchenko I.V. Mathematical modeling of microwave channels of a semi-active radar homing head. *Russ. Technol. J.* 2024;12(2):48–56. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-2-48-56>

**Financial disclosure:** The authors have no a financial or property interest in any material or method mentioned.

The authors declare no conflicts of interest.

## ВВЕДЕНИЕ

Радиолокационные головки самонаведения (РГСН) управляемых ракет – это большая группа радиолокаторов, которые в виду особенностей назначения отличаются от других радиолокаторов [1–3]. Различают активные и полуактивные РГСН. Каждый вид имеет свои преимущества и недостатки. При активном самонаведении ракета с помощью РГСН облучает цель и принимает от нее часть отраженной энергии посредством одиночной антенны, активной [4] или цифровой [5] фазированной антенной решетки. Принятая информация (энергия) обрабатывается РГСН и выдается в виде сигналов управления автопилоту ракеты.

Преимуществом полуактивной РГСН является возможность иметь мощный облучатель на командном пункте и, как следствие, мощный отраженный сигнал от цели, что в результате приводит к увеличению дальности обнаружения и точности наведения на цель. Отсутствие генератора сверхвысокочастотного (СВЧ) сигнала упрощает бортовую аппаратуру управления ракеты, уменьшает ее вес и габариты, следовательно, улучшаются ее маневренные свойства. Это обусловило наибольшее распространение данного типа РГСН.

## ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ СХЕМА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПОЛУАКТИВНОЙ РГСН

Для отработки наиболее эффективных решений модулей РГСН используются различные пакеты и технологии моделирования [6–9].

Основная концепция полуактивных головок самонаведения заключается в том, что, поскольку почти все системы обнаружения и сопровождения содержат наземные радиолокационные системы, дублирование этого оборудования на самой ракете в некоторых случаях является избыточным. Для синхронизации аппаратуры РГСН в качестве опорного сигнала может использоваться сигнал наземной радиолокационной станции. Для определения доплеровского смещения сигнала цели в составе полуактивной РГСН в приемный тракт должен поступать опорный сигнал, частота которого совпадает с частотой сигнала передатчика подсвета. Решением этой

задачи является использование принятого специальной антенной прямого сигнала (опорного сигнала), распространяющегося от передатчика наземной радиолокационной станции в сторону РГСН. Для приема этого сигнала в состав полуактивной РГСН вводится специальный опорный приемник, усиливающий сигналы, принятые антенной опорного сигнала, ориентированной в заднюю полусферу ракеты – в сторону станции подсвета. Усиленный опорный сигнал используется для синхронизации гетеродина в РГСН или непосредственно как гетеродинный сигнал в приемном устройстве [10].

Функциональная схема исследуемого приемного устройства полуактивной РГСН приведена на рис. 1 [6]. Пусть станция подсвета излучает сигнал частотой  $f_0$ . Частота  $f_{o,k}$  сигнала, принимаемого опорным каналом, сдвигается вниз за счет эффекта Доплера при удалении ракеты от станции подсвета:

$$f_{o,k} = f_0 - \frac{V_r}{\lambda}, \quad (1)$$

где  $f_0$  – частота сигнала станции подсвета,  $V_r$  – радиальная скорость ракеты,  $\lambda$  – длина волны опорного сигнала.

Частота сигнала цели, принимаемого опорным каналом, сдвигается вверх за счет встречного движения ракеты и цели:

$$f_{r,k} = f_0 + \frac{V_r}{\lambda} + \frac{V_t}{\lambda}, \quad (2)$$

где  $f_{r,k}$  – частота отраженного от цели сигнала, принимаемая основным (главным) каналом;  $V_t$  – скорость цели.

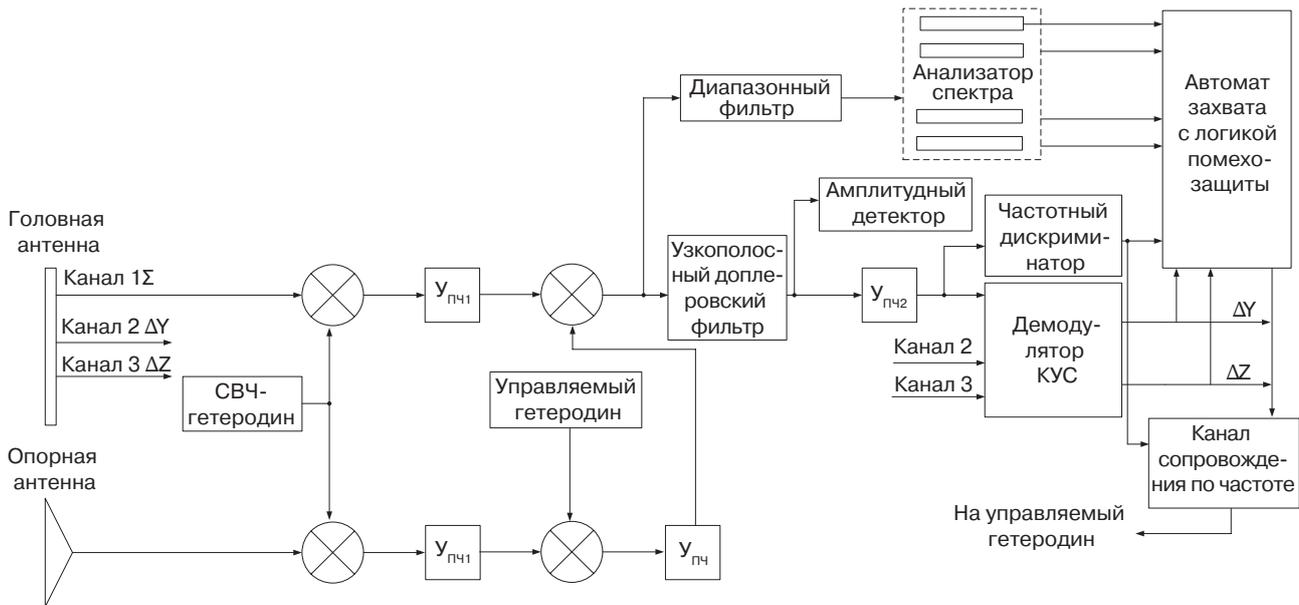
Отраженный от цели и опорный сигналы преобразуются на первую промежуточную частоту с помощью сигнала общего первого гетеродина  $f_{r1}$ :

- первая промежуточная частота опорного канала

$$f_{o,k1} = f_0 - \frac{V_r}{\lambda} - f_{r1}, \quad (3)$$

- первая промежуточная частота основного канала

$$f_{r,k1} = f_0 + \frac{V_r}{\lambda} + \frac{V_t}{\lambda} - f_{r1}. \quad (4)$$



**Рис. 1.** Функциональная схема приемного устройства полуактивной РГСН.  
КУС – канал углового сопровождения;  $У_{ПЧ}$ ,  $У_{ПЧ1}$ ,  $У_{ПЧ2}$  – усилители промежуточной частоты

Опорный сигнал  $f_{o.k1}$  не может быть непосредственно использован как гетеродинный при дальнейшей обработке сигнала основного канала, т.к. в этом случае преобразование сигналов произойдет на низкие частоты, на которых обработка затруднена по схемотехническим причинам. Для того чтобы избежать этих проблем, опорный сигнал с помощью дополнительного управляемого гетеродина переносится на вторую промежуточную частоту. Частота сигнала управляемого гетеродина

$$f_{y.r} = f_{ПЧ2} + f_{ДП}, \quad (5)$$

где  $f_{ПЧ2}$  – фиксированное значение, равное значению второй промежуточной частоты основного канала;  $f_{ДП}$  – прогнозируемое значение доплеровской частоты сигнала цели, полученное от канала целеуказания или в результате сопровождения цели.

Вторая промежуточная частота опорного канала равна:

$$f_{o.k2} = f_0 - \frac{V_r}{\lambda} - f_{r1} + f_{ПЧ2} + f_{ДП}. \quad (6)$$

Сигнал  $f_{o.k2}$  используется как гетеродинный при дальнейшем преобразовании сигналов основного канала в так называемом смесителе свертки, причем, поскольку частота  $f_{o.k2}$  выше, чем  $f_{r.k1}$ , частота второго сигнала вычитается из частоты первого:

$$f_{r.k2} = f_{o.k2} - f_{r.k1} = f_{ПЧ2} + f_{ДП} - \frac{2(V_r - V_t)}{\lambda}. \quad (7)$$

Здесь  $f_{r.k2}$  – частота сигнала второй промежуточной частоты основного канала, а действительное доплеровское смещение сигнала цели:

$$\frac{2(V_r - V_t)}{\lambda} = f_d. \quad (8)$$

Поскольку член  $f_d$  представляет собой действительное доплеровское смещение сигнала цели, сигнал после преобразования имеет частоту, смещенную относительно  $f_{ПЧ2}$  на значение разности между прогнозируемым и действительным значениями доплеровской частоты, а при их равенстве попадает точно на  $f_{ПЧ2}$ . Это позволяет при обработке сигнала цели использовать узкополосный доплеровский фильтр, настроенный на фиксированное значение частоты  $f_{ПЧ2}$ , независимо от доплеровского смещения сигнала цели. Принцип работы и схемы построения РГСН более подробно описаны в [6].

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СВЧ-КАНАЛОВ ПОЛУАКТИВНОЙ РГСН

Для расчета характеристик СВЧ-каналов полуактивной РГСН, максимально приближенных к реальным, необходимо при моделировании использовать характеристики реально существующих микросхем и систем радиолокационных станций [11–17].

Применение модуля *Visual System Simulator (VSS)* системы автоматизированного проектирования и моделирования высокочастотных (ВЧ) систем

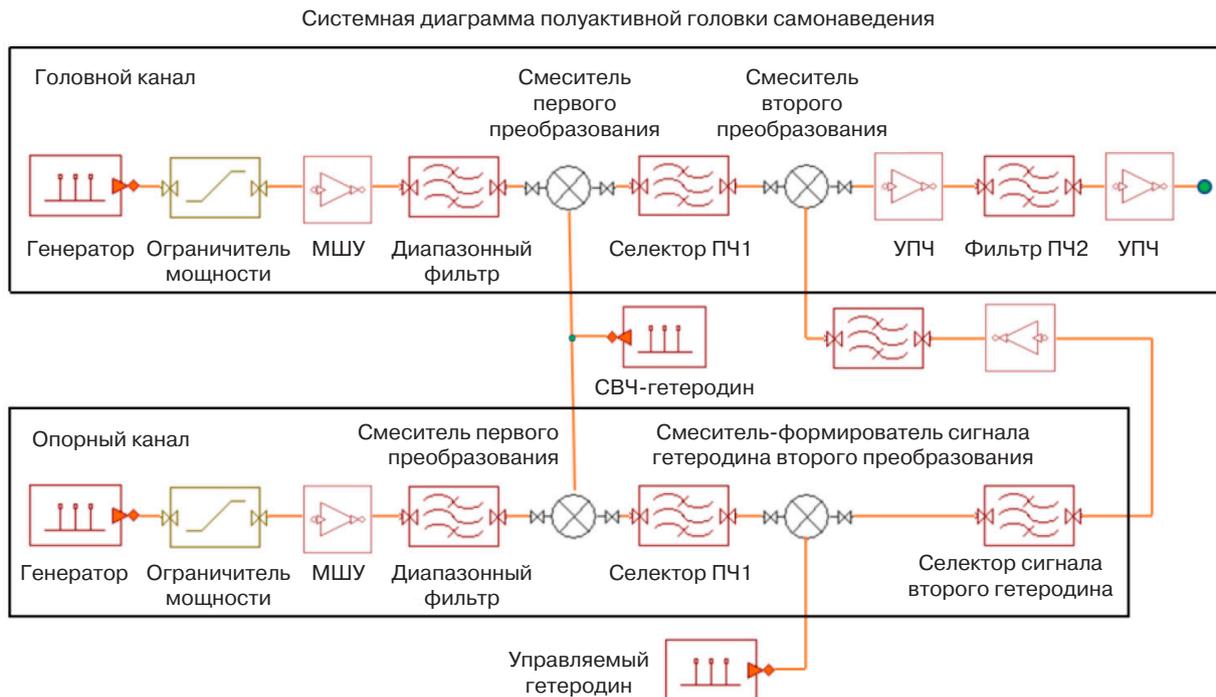


Рис. 2. Модель СВЧ-каналов полуактивной РГСН

и устройств *AWR Design Environment*<sup>1</sup> позволяет автоматизировать работы на этапе проектирования и рассчитать основные характеристики СВЧ-каналов. Разработанная в среде *VSS* модель СВЧ-каналов полуактивной РГСН представлена на рис. 2.

Первый функциональный блок приемного тракта РГСН – это входной ограничитель мощности. Он понижает уровень сигнала, поступающего в малощумящий усилитель (МШУ), до безопасного уровня. В качестве ограничителя мощности используется микросхема TGL2208-SM<sup>2</sup>. Для достижения требуемого коэффициента передачи применяется многокаскадная схема построения приемного тракта. Каждый каскад усиливает поступающий на него сигнал в соответствии с его коэффициентом усиления  $G$  и имеет свой уровень шумов, который характеризуется коэффициентом шума  $F$ .

Формула для определения коэффициента шума каскадного усилителя приведена в [14] и имеет вид:

$$NF = NF_1 + \frac{NF_2 - 1}{G_1} + \dots + \frac{NF_n - 1}{G_{n-1}}, \quad (9)$$

где  $NF$  – коэффициент шума,  $F_1$  – коэффициент шума первого каскада,  $F_n$  – коэффициент шума  $n$ -го каскада,  $G_1$  – коэффициент усиления первого каскада,  $G_n$  – коэффициент усиления  $n$ -го каскада.

Из формулы следует, что больший вклад в общий коэффициент шума вносят шумы первого каскада.

Кроме этого, общий коэффициент шума будет тем ниже, чем выше будет коэффициент усиления первого каскада.

Поскольку смесители, в которых происходит преобразование частоты, обладают достаточно интенсивными шумами, то самый первый каскад усиления (МШУ) выполняется еще до преобразования частоты, т.е. на несущей частоте. При моделировании в качестве МШУ были использованы параметры микросхемы QPA2609<sup>3</sup>.

Усилитель промежуточной частоты (УПЧ) обеспечивает максимальное усиление принимаемого сигнала. Именно УПЧ доводит уровень сигнала до значения, необходимого для нормальной работы средств обработки сигнала, тем самым обеспечивая необходимую чувствительность приемника. В качестве УПЧ использована микросхема PMA3-83LN+<sup>4</sup>.

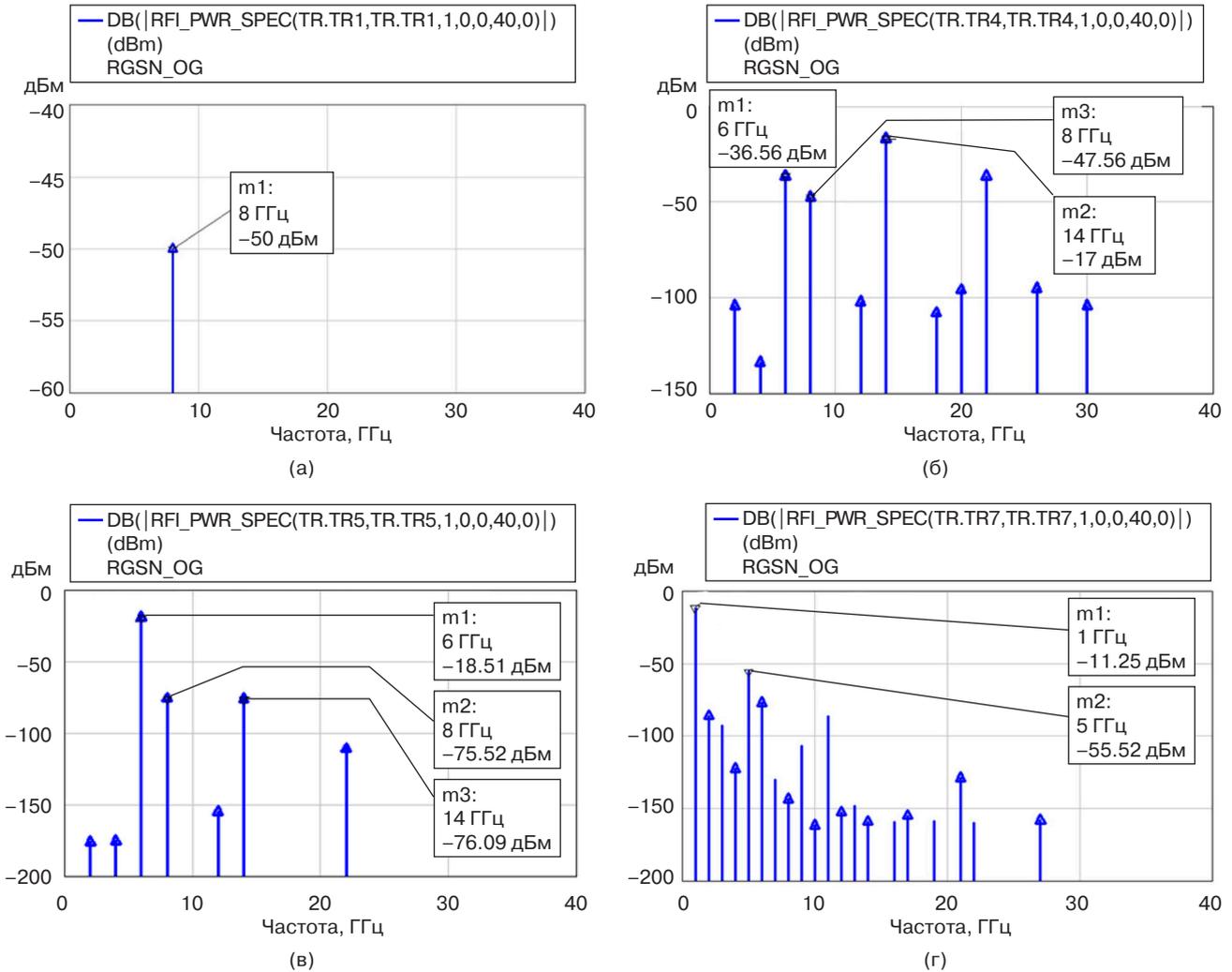
Смеситель используется для переноса принятого сигнала несущей частоты на промежуточную. В качестве смесителя была выбрана микросхема HMC773ALC3B<sup>5</sup>.

При моделировании проведен расчет основных характеристик СВЧ-каналов – частотных зависимостей коэффициента передачи ( $S_{21}$ ), коэффициента шума ( $NF$ ), точки децибельной компрессии (OP1dB), точки пересечения интермодуляции третьего порядка (OIP3) при нормальных климатических условиях.

<sup>3</sup> <https://www.qorvo.com/products/p/QPA2609>. Дата обращения 13.09.2023. / Accessed September 13, 2023.

<sup>4</sup> <https://www.minicircuits.com/pdfs/PMA3-83LN+.pdf>. Дата обращения 13.09.2023. / Accessed September 13, 2023.

<sup>5</sup> <https://www.micro-semiconductor.com/datasheet/46-HMC773ALC3B.pdf>. Дата обращения 13.09.2023. / Accessed September 13, 2023.



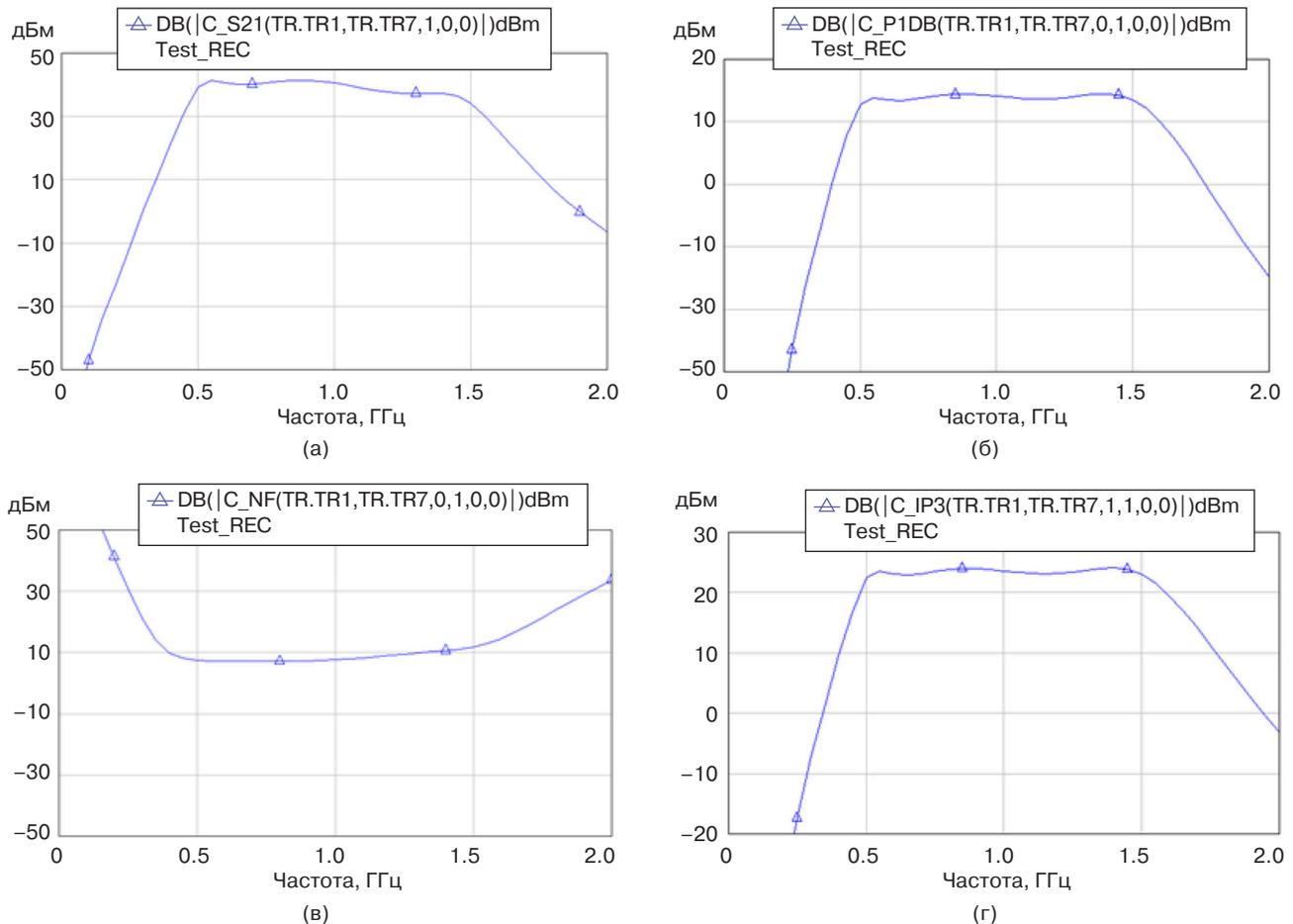
**Рис. 3.** Спектры сигналов: (а) на входе основного канала, (б) на выходе смесителя первого преобразования, (в) на выходе селектора первой промежуточной частоты, (г) на выходе приемного тракта

Для расчета основных параметров модели зададим рабочую частоту станции подсвета  $F_{\text{под}}$  (8 ГГц), частоту отраженного от цели сигнала  $F_{\text{отр}}$ , частоту первого (опорного) СВЧ-гетеродина  $F_{Г1}$ , а также частоту и ширину полосы обработки сигнала (1 ГГц). Сигналы  $F_{\text{под}}$  и  $F_{\text{отр}}$  формируются библиотечными моделями источников сигналов TONE и поступают на вход опорного и основного каналов соответственно, где, при необходимости, снижаются до безопасного уровня первым элементом приемного тракта – ограничителем мощности TGL2208-SM. Далее сигналы безопасного уровня поступают на вход МШУ QRA2609, затем – на вход диапазонного фильтра, который выделяет сигналы рабочего диапазона приемника. Сигналы с выхода диапазонного фильтра поступают на смесители первого преобразования, где смешиваются с сигналом СВЧ-гетеродина  $F_{Г1}$  и переносятся в спектр сигналов первой промежуточной частоты  $F_{\text{ПЧ верх}}$  и  $F_{\text{ПЧ ниж}}$  в верхнем головном канале и в нижнем опорном канале соответственно. Рабочая частота выделяется селектором

первой промежуточной частоты, полоса пропускания которого изменяется в соответствии с заданными уравнениями в зависимости от рабочей частоты станции подсвета  $F_{\text{под}}$ .

Сигнал  $F_{\text{ПЧ ниж}}$ , усиленный в УПЧ, с помощью управляемого гетеродина переносится смесителем-формирователем в спектр частот сигналов второго гетеродина  $F_{Г2}$ . Рабочая частота выделяется селектором сигналов второго гетеродина, а в цепочке УПЧ уровень сигнала увеличивается до необходимого. Сигнал  $F_{Г2}$  поступает на гетеродинный вход смесителя второго преобразования, куда поступает и сигнал  $F_{\text{ПЧ верх}}$ , который переносится на частоту обработки сигнала.

Созданная модель позволяет провести расчет спектральных характеристик сигналов в любой точке СВЧ-трактов. Спектры сигналов на входе основного канала, на выходе смесителя первого преобразования, на выходе селектора первой промежуточной частоты и на выходе приемного тракта представлены на рис. 3. Расчетные значения основных характеристики ВЧ-каналов представлены на рис. 4.



**Рис. 4.** Расчетные значения основных характеристики ВЧ-каналов: (а) коэффициент передачи основного канала S21, (б) OP1dB основного канала, (в) коэффициент шума NF, (г) OIP3

Проанализировав графики, приведенные на рис. 3 и 4, можно сделать вывод, что приемный тракт головного канала в конфигурации, приведенной на рис. 2, имеет коэффициент передачи не менее 38 дБ и обладает уровнем точки децибельной компрессии по выходу не менее 13 дБм.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученная модель позволяет оценивать частотные зависимости основных параметров приемного тракта, таких как коэффициент передачи, коэффициент шума, точки децибельной компрессии, точки пересечения интермодуляций третьего порядка. Значения, полученные при моделировании,

максимально приближены к показателям существующих систем, т.к. при построении ВЧ-трактов в качестве основных элементов использовались созданные модели реально существующих и массово используемых микросхем. Модель может использоваться для исследования путей совершенствования технических показателей, разработки новых принципов и схем построения радиоэлектронных комплексов (в частности, РГСН), например, при построении приемного тракта с использованием перспективных средств радиофотоники.

**Вклад авторов.** Все авторы в равной степени внесли свой вклад в исследовательскую работу.

**Authors' contribution.** All authors equally contributed to the research work.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дегтярева Е.Е., Локачева Ю.А., Судин А.П., Петушкевич Н.А., Недосекова Е.А. Радиолокационная головка самонаведения. В сборнике: *European Research: Сборник статей XXII Международной научно-практической конференции*. 2019. С. 19–21.
2. Горбачев М.А., Свистов В.В., Ульянова Е.А. Особенности работы активной ГСН при воздействии отражений от земной поверхности. *Вестник Концерна ВКО «Алмаз – Антей»*. 2021;4:25–35.
3. Pavlov V., Belousov O., Dorokhova T., Belyaev M., Trapeznikov E. Algorithm for controlling objects implementing a semi-passive guidance technique. *J. Phys.: Conf. Ser.* 2021;1901(1):012018. <http://doi.org/10.1088/1742-6596/1901/1/012018>
4. Легкий Н.М., Унченко И.В. Формирование диаграммы направленности в фазированных антенных решетках. *Russ. Technol. J.* 2019;7(2):29–38. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2019-7-2-29-38>
5. Чистяков В.А. Моноимпульсный радиопеленгатор с использованием цифровой антенной решетки. *Труды МАИ*. 2020;115:7. <https://doi.org/10.34759/trd-2020-115-07>
6. Елизаров В.С., Чепкасов А.В. Имитация отраженного радиолокационного сигнала при полунатурном моделировании активной головки самонаведения. *Антенны*. 2013;1(188): 94–97.
7. Вексин С.И. *Цифровая обработка сигналов в доплеровских головках самонаведения*. М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана; 2018. 324 с.
8. Поркин А.Г. Моделирование приемно-передающих модулей АФАР в головке самонаведения ракет. *Аллея науки*. 2017;2(15):196–199.
9. Коновальцев Э.В., Линник А.П. Обоснование минимального объема выборки при малых количествах наблюдений для оценки характеристик авиационных средств поражения, оснащенных радиолокационными головками самонаведения. *Воздушно-космические силы. Теория и практика*. 2022;23:43–49.
10. Ильчук А.Р., Меркулов В.И., Панас А.И., Чернов В.С., Щербаков С.В. Анализ современного состояния и перспектив развития радиолокационных систем для управляемых средств поражения воздушных объектов. *Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии (РЭНСИТ)*. 2021;13(3):227–244. <https://doi.org/10.17725/rensit.2021.13.227>
11. Муратов И.В. Математическая модель пеленгационной характеристики следящего координатора цели. *Электромагнитные волны и электронные системы*. 2013;11:34–38.
12. Двойрис Л.И., Иванов В.А., Галев К.В. Имитационная модель сигналов и помех для тестирования систем обнаружения. *Радиотехника*. 2020;84(2–4):14–19.
13. Волков В.В., Гордяскина Т.В. Исследование аналогового радиотехнического канала связи в программном пакете MATHCAD. В сборнике: *Великие реки – 2020: Труды 22-го международного научно-промышленного форума*. 2020. С. 94.
14. Дансмор Д.П. *Настольная книга инженера. Измерения параметров СВЧ-устройств с использованием передовых методик векторного анализа цепей*: пер. с англ. М.: Техносфера; 2019. 736 с.
15. Иванников А.П., Иванников Д.А. Способ формирования и обработки широкополосных сигналов в радиолокаторах с антенными решетками. *Радиотехнические и телекоммуникационные системы*. 2018;3(31):17–25.
16. Унченко И.В., Емельянов А.А. Модульная многопозиционная когерентная цифровая радиофотонная система. *Russ. Technol. J.* 2022;10(4):27–37. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2022-10-4-27-37>
17. Шумов А.В., Нефедов С.И., Бикметов А.Р. Концепция построения радиолокационной станции на основе элементов радиофотоники. *Наука и Образование. Научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана*. 2016;5:41–65.

## REFERENCES

1. Degtyareva E.E., Lokacheva Yu.A., Sudin A.P., Petushkevich N.A., Nedosekova E.A. Homing Radar. In: *European Research. Collection of articles of the 22nd International Scientific and Practical Conference*. 2019. P. 19–21 (in Russ.).
2. Gorbachev M., Svistov V., Ulyanova E. The specifics of functioning of the active homing head exposed to ground surface clutter. *Vestnik Koncerna VKO "Almaz – Antey" = Journal of "Almaz – Antey" Air and Space Defence Corporation*. 2021;4:25–35.
3. Pavlov V., Belousov O., Dorokhova T., Belyaev M., Trapeznikov E. Algorithm for controlling objects implementing a semi-passive guidance technique. *J. Phys.: Conf. Ser.* 2021;1901(1):012018. <http://doi.org/10.1088/1742-6596/1901/1/012018>
4. Legky N.M., Unchenko I.V. Formation of the directional diagram in phased antenna array. *Russ. Technol. J.* 2019;7(2):29–38 (in Russ.). <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2019-7-2-29-38>
5. Chistyakov V.A. Monopulse radio direction finder using digital antenna array. *Trudy MAI*. 2020;115:7 (in Russ.). <https://doi.org/10.34759/trd-2020-115-07>
6. Elizarov V.S., Chepkasov A.V. Simulation of radar signal reflection at half-nature modelling of the active homing head. *Antenny = Antennas*. 2013;1(188):94–97 (in Russ.).
7. Veksin S.I. *Tsifrnyaya obrabotka signalov v doplerovskikh golovkakh samonavedeniya (Digital signal processing in Doppler homing heads)*. Moscow: Bauman Press; 2018. 324 p. (in Russ.).
8. Porkin A.G. Modeling of transceiver modules AFAR the homing missiles. *Alleya nauki = Alleya-Science*. 2017;2(15):196–199 (in Russ.).

9. Konovaltsev E.V., Linnik A.P. Justification of the minimum sample size with small numbers of observations to assess the characteristics of aircraft weapons equipped with radar homing heads. *Vozdushno-kosmicheskie sily. Teoriya i praktika = Aerospace Forces. Theory and practice*. 2022;23:43–49 (in Russ.).
10. Ilchuk A.R., Merkulov V.I., Panas A.I., Chernov V.S., Shcherbakov S.V. Analysis of the current state and development prospects of radar systems for guided weapons of air objects destruction. *Radioelektronika. Nanosistemy. Informatsionnye tekhnologii = Radioelectronics. Nanosystems. Information Technologies (RENSIT)*. 2021;13(3):227–244 (in Russ.). <https://doi.org/10.17725/rensit.2021.13.227>
11. Muratov I.V. Mathematical model of direction-finding characteristic of seeker. *Elektromagnitnye volny i elektronnye sistemy = Electromagnetic Waves and Electronic Systems*. 2013;11:34–38 (in Russ.).
12. Dvoiris L.I., Ivanov V.A., Galev K.V. Simulation model of signals and interference for testing detection systems. *Radiotekhnika = Radioengineering*. 2020;84(2-4):14–19 (in Russ.).
13. Volkov V.V., Gordyaskina T.V. Research of analog radio technical communication channel in the MATHCAD software package. In: *Great Rivers – 2020. Proceedings of the 22nd International Scientific and Industrial Forum*. 2020. P. 94 (in Russ.).
14. Dunsmore J.P. *Nastol'naya kniga inzhenera. Izmereniya parametrov SVCh-ustroystv s ispol'zovaniem peredovykh metodik vektornogo analiza tsepei (The Engineer's Handbook. Microwave measurements using advanced vector network analysis techniques)*: transl. from Engl. Moscow: Tekhnosfera; 2019. 736 p. (in Russ.).  
[Dunsmore J.P. *Handbook of Microwave Component Measurements with Advanced VNA Techniques*. Wiley; 2014. 735 p.]
15. Ivannikov A.P., Ivannikov D.A. Broadband signal generation and processing method in antenna array radars. *Radiotekhnicheskie i telekommunikatsionnye sistemy = Radio Engineering and Telecommunications Systems*. 2018;3(31):17–25 (in Russ.).
16. Unchenko I.V., Emelyanov A.A. Photonics-based modular multistate digital coherent system. *Russ. Technol. J.* 2022;10(4):27–37 (in Russ.). <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2022-10-4-27-37>
17. Shumov A.V., Nefedov S.I., Bikmetov A.R. The concept of building a radar station based on the Microwave photonics components. *Nauka i Obrazovanie = Science & Education. Bauman Moscow State Technical University*. 2016;5:41–65 (in Russ.).

#### Об авторах

**Легкий Николай Михайлович**, д.т.н., доцент, заведующий кафедрой инженерной экологии техносферы, Институт радиоэлектроники и информатики ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: legki@mirea.ru. Scopus Author ID 56178415900, ResearcherID GWQ-9074-2022, SPIN-код РИНЦ 6636-6401, <http://orcid.org/0000-0003-1242-5113>

**Унченко Иван Владимирович**, преподаватель, кафедра инженерной экологии техносферы, Институт радиоэлектроники и информатики ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: unchenko@mirea.ru. SPIN-код РИНЦ 8819-1136, <https://orcid.org/0000-0002-6048-3476>

#### About the authors

**Nikolay M. Legkiy**, Dr. Sci. (Eng.), Docent, Head of the Department of Engineering Ecology of the Technosphere, Institute of Radio Electronics and Informatics, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: legki@mirea.ru. Scopus Author ID 56178415900, ResearcherID GWQ-9074-2022, RSCI SPIN-code 6636-6401, <http://orcid.org/0000-0003-1242-5113>

**Ivan V. Unchenko**, Teacher, Department of Engineering Ecology of the Technosphere, Institute of Radio Electronics and Informatics, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: unchenko@mirea.ru. RSCI SPIN-code 8819-1136, <https://orcid.org/0000-0002-6048-3476>

Микро- и нанoeлектроника. Физика конденсированного состояния  
Micro- and nanoelectronics. Condensed matter physics

УДК 538.958  
<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-2-57-66>



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

## Магниторефрактивный эффект в металлических наноструктурах Co/Pt

А.Н. Юрасов<sup>@</sup>, Д.А. Сайфулина, Т.Н. Бахвалова

МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, 119454 Россия  
<sup>@</sup> Автор для переписки, e-mail: [alexey\\_yurasov@mail.ru](mailto:alexey_yurasov@mail.ru)

### Резюме

**Цели.** Теоретически исследовать особенности магниторефрактивного эффекта для наноструктур типа металл – металл на примере многослойных наноструктур Co/Pt (ферромагнитный металл – парамагнитный металл) с разным соотношением ферромагнитной и парамагнитной фаз в видимой и ближней инфракрасной (ИК) областях спектра.

**Методы.** С помощью основных формул для диэлектрической проницаемости, оптической проводимости, коэффициентов рефракции и экстинкции, выявлена и выражена в явном виде связь магниторефрактивного эффекта с эффектом гигантского магнитосопротивления (магниторезистивным эффектом), что подтверждает общую природу этих двух эффектов. С помощью формул Френеля для трехслойной структуры рассчитан магниторефрактивный эффект для s-поляризации света с учетом толщины образцов и влияния подложки. Для расчета диэлектрической проницаемости материалов применялись методы эффективной среды. Так как исследовался средний диапазон концентраций кобальта, то для нахождения эффективных диэлектрических проницаемостей наноструктур применялось приближение Бруггемана. Для всех наноструктур рассчитывался коэффициент отражения при нормальном падении.

**Результаты.** Благодаря тому, что диэлектрическая проницаемость неоднородных образцов была заменена общим эффективным параметром, зависящим от диэлектрической проницаемости каждого компонента, мы смогли применить теорию Друде – Лоренца для проводников в высокочастотном переменном поле и оценить параметры электронной структуры исследуемых образцов. Были рассчитаны значения плазменной и релаксационной частот для каждого образца. Это позволило оценить число свободных электронов и исследовать рассеяние в наноструктурах.

**Выводы.** Было показано, что в исследуемом диапазоне энергий в ИК-области спектра наблюдается ленгмюровская экранировка. Рассчитанные значения хорошо соотносятся с экспериментальными данными.

**Ключевые слова:** магниторефрактивный эффект, гигантское магнитосопротивление, ферромагнетик, наноструктуры

• Поступила: 09.07.2023 • Доработана: 06.10.2023 • Принята к опубликованию: 12.02.2024

**Для цитирования:** Юрасов А.Н., Сайфулина Д.А., Бахвалова Т.Н. Магниторефрактивный эффект в металлических наноструктурах Co/Pt. *Russ. Technol. J.* 2024;12(2):57–66. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-2-57-66>

**Прозрачность финансовой деятельности:** Авторы не имеют финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

RESEARCH ARTICLE

# Magnetorefractive effect in metallic Co/Pt nanostructures

Alexey N. Yurasov<sup>®</sup>, Diana A. Sayfullina, Tatiana N. Bakhvalova

MIREA – Russian Technological University, Moscow, 119454 Russia

<sup>®</sup> Corresponding author, e-mail: alexey\_yurasov@mail.ru

## Abstract

**Objectives.** To carry out a theoretical investigation of the features of magnetorefractive effect for metal-to-metal nanostructures. This study uses the example of multilayer Co/Pt nanostructures (ferromagnetic metal–paramagnetic metal) with a different ratio of ferromagnetic and paramagnetic phases in the visible and near-infrared (IR) spectral regions.

**Methods.** The dependence was expressed explicitly using the basic formulas for permittivity, refraction and extinction coefficients, and optical conductivity. This then confirms the common nature of these two effects. The magnetorefractive effect for s-polarization of light was calculated using Fresnel formulas for a three-layer structure. This took into account the thickness of the samples and the influence of the substrate. Effective medium methods were used to calculate the dielectric permittivity of materials. Since the average range of cobalt concentrations was being studied, the Bruggeman approximation was used to establish the effective permittivity of nanostructures. The reflection coefficient at normal incidence was calculated for all nanostructures.

**Results.** Since the permittivity of inhomogeneous samples was replaced by a common effective parameter depending on the permittivity of each component, we were able to apply the Drude–Lorentz theory for conductors in a high-frequency alternating field and then estimate the parameters of the electronic structure of the samples being studied. Plasma and relaxation frequencies were calculated for each sample. This made it possible for the number of free electrons to be estimated and scattering in nanostructures to be investigated.

**Conclusions.** It was shown that Langmuir shielding can be observed in the given energy range in the IR region of the spectrum. The calculated values correlate well with the experimental data.

**Keywords:** magnetorefractive effect, giant magnetoresistance, ferromagnet, nanostructures

• Submitted: 09.07.2023 • Revised: 06.10.2023 • Accepted: 12.02.2024

**For citation:** Yurasov A.N., Sayfullina D.A., Bakhvalova T.N. Magnetorefractive effect in metallic Co/Pt nanostructures. *Russ. Technol. J.* 2024;12(2):57–66. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-2-57-66>

**Financial disclosure:** The authors have no a financial or property interest in any material or method mentioned.

The authors declare no conflicts of interest.

## ВВЕДЕНИЕ

В гетерогенных металлических магнитных материалах наблюдается эффект гигантского магнитосопротивления (ГМС) – магниторезистивный эффект, связанный с изменением проводимости наноструктуры в зависимости от взаимного расположения векторов магнитных моментов ферромагнитных областей. Подобное изменение свойств вещества неизбежно должно иметь оптический отклик, коррелирующий с ГМС. Такой эффект, названный магниторефрактивным эффектом (МРЭ), действительно наблюдается в металлических наноструктурах и заключается в изменении

коэффициентов отражения, пропускания и поглощения электромагнитной волны под действием магнитного поля [1–4]. В его основе, также как в эффекте ГМС, лежит спин-зависящее рассеяние. Как правило, магнитооптические эффекты связаны с изменением недиагональной компоненты тензора диэлектрической проницаемости (ТДП) под действием магнитного поля, но МРЭ в этом плане – исключение, т.к. не является прямым следствием воздействия магнитного поля на вещество, т.е. не обусловлен непосредственно спин-орбитальным взаимодействием, а является четным по намагниченности и связан в первую очередь с диагональной частью ТДП и магнитосопротивлением [5, 6].

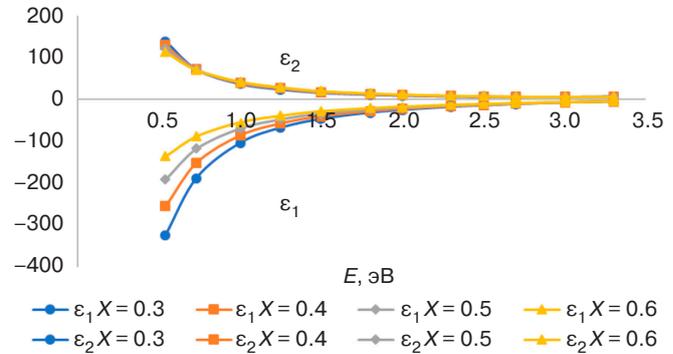
## МЕТОДОЛОГИЯ И ИССЛЕДУЕМЫЕ СТРУКТУРЫ

Для исследования МРЭ были выбраны наноструктуры Co/Pt [7–9] с различной объемной концентрацией кобальта. Платина в чистом виде является классическим парамагнетиком с высокой стабильностью свойств и температурной устойчивостью и также обладает инертностью к окружающей среде, коррозионной стойкостью и хорошими оптическими и проводящими свойствами. В свою очередь, кобальт – один из наиболее значимых ферромагнетиков, обладающий значительной спонтанной намагниченностью и относительно высокой температурой Кюри. Этот элемент находит широкое практическое применение благодаря своей высокой магнитооптической активности. Наноструктуры на основе кобальта и платины обладают хорошим сочетанием механической прочности, проводимости и магнитооптических свойств, к тому же процесс их изготовления относительно простой. По мере роста количества кобальта в наноструктуре происходит переход из парамагнитного состояния в ферромагнитное, так называемый концентрационный фазовый переход. Он сопровождается ростом проводимости структуры. Тип магнитного упорядочения, как правило, определяют с помощью критерия Стонера [10].

В данной работе наноструктуры Co/Pt с объемной концентрацией кобальта от 0.3 до 0.6 рассматривались в диапазоне энергий 0.54–3.3 эВ падающих электромагнитных волн. Рассматриваемые наноструктуры можно считать квазиоднородными. Это значит, что для расчета их диэлектрической проницаемости целесообразно использовать теорию эффективной среды. Так, зная диэлектрические проницаемости кобальта и платины, с помощью методов эффективной среды можно рассчитать их общую эффективную диэлектрическую проницаемость для всех объемных концентраций. Мы рассматриваем концентрации, близкие к средним, поэтому для расчетов лучше всего использовать приближение Бруггемана (effective medium approximation). Такая модель не учитывает размерные эффекты и влияние границ раздела, и для повышения точности расчетов необходимо модифицировать формулы [11]. Полученные зависимости действительной и мнимой частей диэлектрической проницаемости приведены на рис. 1.

Из этих графиков наглядно видно, что в инфракрасной (ИК) области спектра функции действительной и мнимой компонент диэлектрической проницаемости напоминают гиперболическую зависимость от частоты (друдевский характер зависимости). В рамках модели получившиеся образцы с эффективной диэлектрической проницаемостью считаются однородными и далее их можно рассматривать с точки зрения теории проводимости Друде – Лоренца.

Это означает, что мы считаем электроны в образцах классическим газом невзаимодействующих частиц, свободно движущихся в ионной решетке с некоторой средней скоростью. При этом частота столкновений с решеткой и масса электронов не зависят от их скорости, а сами столкновения абсолютно упругие. Как видно из графика на рис. 1, лучше всего эта модель работает в ИК-области спектра.



**Рис. 1.** Спектральные зависимости действительной (ε₁) и мнимой (ε₂) частей комплексной диэлектрической проницаемости для различных объемных концентраций кобальта X. E – энергия электромагнитной волны

В этом случае диэлектрическая проницаемость равна:

$$\begin{aligned} \epsilon(\omega) &= \epsilon_1 - i\epsilon_2 = \\ &= 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\omega\gamma_{rel}} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega} \cdot \frac{(\omega - i\gamma_{rel})}{\omega^2 + \gamma_{rel}^2} = \\ &= 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \gamma_{rel}^2} + i \frac{\gamma_{rel}}{\omega} \cdot \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \gamma_{rel}^2}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\omega_p$  – плазменная частота и  $\gamma_{rel}$  – частота релаксации являются параметрами электронов проводимости, характеризующими число свободных электронов и их рассеяние.

Зная действительную часть эффективной диэлектрической проницаемости, с помощью формулы (2) можно оценить параметры электронов проводимости – эффективные значения плазменной  $\omega_p$  и релаксационной  $\gamma_{rel}$  частот, а также время релаксации  $\tau_{rel}$  (величина, обратная частоте релаксации) [12].

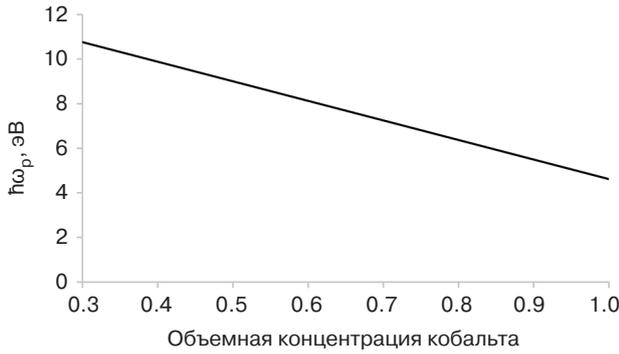
$$\frac{1}{1 - \epsilon_1} = \left( \frac{\omega}{\omega_p} \right)^2 + \left( \frac{\gamma_{rel}}{\omega_p} \right)^2. \quad (2)$$

Результаты расчетов плазменной и релаксационной частот и времени релаксации приведены в таблице.

Для наглядности на рис. 2 построена зависимость плазменной частоты (в электронвольтах) от концентрации кобальта X.

**Таблица.** Результаты расчетов плазменной частоты и времени релаксации

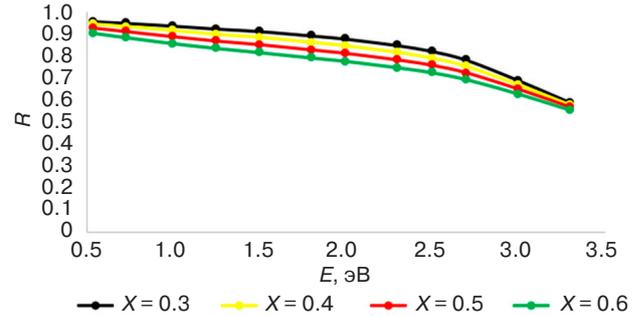
$X$	$\left(\frac{1}{\omega_p}\right)^2, \frac{1}{\text{с}^2}$	$\omega_p \cdot 10^{16}, \frac{1}{\text{с}}$	$\left(\frac{\gamma_{\text{rel}}}{\omega_p}\right)^2, \frac{1}{\text{с}^2}$	$\gamma_{\text{rel}} \cdot 10^{16}, \frac{1}{\text{с}}$	$\tau_{\text{rel}} \cdot 10^{-16}, \text{с}$
0.3	$0.39 \cdot 10^{-32}$	1.60	0.001	0.04	27.87
0.4	$0.45 \cdot 10^{-32}$	1.49	0.001	0.05	21.19
0.5	$0.52 \cdot 10^{-32}$	1.38	0.002	0.06	16.57
0.6	$0.61 \cdot 10^{-32}$	1.28	0.004	0.07	13.00



**Рис. 2.** Зависимость плазменной частоты  $\hbar\omega_p$  ( $\hbar$  – приведенная постоянная Планка) от объемной концентрации кобальта  $X$

Рассчитанное значение плазменной частоты чистого кобальта  $\hbar\omega_p \approx 4.46$  эВ получилось больше реального, равного 3.69 эВ. Это может быть связано с неучтенным влиянием межзонных переходов и разным вкладом в плазменную частоту электронов со спином вверх и вниз. Плазменная частота чистой платины примерно в два раза больше, чем плазменная частота кобальта, а значит, при увеличении концентрации кобальта в наноструктуре плазменная частота уменьшается [13]. Следовательно, уменьшается и число свободных электронов в эффективной среде. Плазменная частота от концентрации меняется равномерно, без резких скачков. Это означает, что фазовый переход начинается на более низких концентрациях кобальта, а значит можно считать, что у всех рассматриваемых наноструктур ферромагнитный порядок.

Изучаемый диапазон электромагнитных волн находится между частотой релаксации и плазменной частотой  $\gamma_{\text{rel}} < \omega < \omega_p$ . В этой области наблюдается ленгмюровская экранировка. Из-за того, что частота излучения больше частоты релаксации (столкновений), поле успевает много раз измениться за время релаксации, равное  $1/\gamma_{\text{rel}}$ , а электроны стремятся скомпенсировать воздействие электромагнитной волны, вследствие чего поле внутрь практически не проникает, хотя затухание очень мало. Из-за отраженной волны коэффициент отражения  $R$  близок к единице, но вблизи плазменной частоты он уменьшается, т.к. глубина ленгмюровской экранировки начинает зависеть от частоты (рис. 3).



**Рис. 3.** Спектральные зависимости коэффициента отражения при нормальном падении для различных концентраций кобальта

Чем больше концентрация кобальта, тем ниже коэффициент отражения. В ультрафиолетовой (УФ) области спектра оптическая проводимость металлической наноструктуры сильно снижается, что в свою очередь влияет на коэффициенты рефракции  $n$  и экстинкции  $k$ , а значит и на коэффициент отражения  $R$ . Помимо того, что значения  $n$  и  $k$  уменьшаются, меняется и соотношение между ними. В ближней ИК и видимой областях спектра  $k \gg n$ , но при приближении к УФ-области их значения постепенно выравниваются.

Действительная и мнимая части диэлектрической проницаемости равны:

$$\varepsilon_1(\omega) = n^2 - k^2, \quad (3)$$

$$\varepsilon_2(\omega) = 2nk. \quad (4)$$

Оптическая проводимость  $\sigma_{\text{opt}}$  равна:

$$\sigma_{\text{opt}}(\omega) = \frac{Ne^2}{m\gamma_{\text{rel}} \left(1 + \left(\frac{\omega}{\gamma_{\text{rel}}}\right)^2\right)^2} = \frac{1}{\rho}, \quad (5)$$

где  $m$  – масса электрона,  $N$  – количество электронов,  $e$  – заряд электрона,  $\rho$  – электрическое сопротивление.

Мнимая часть диагональной компоненты  $\text{Im} \varepsilon$  ТДП связана с оптической проводимостью металла  $\sigma_{\text{opt}}$ :

$$\sigma_{\text{opt}}(\omega) = \frac{\omega}{4\pi} \text{Im} \varepsilon(\omega) = \frac{\omega}{2\pi} nk. \quad (6)$$

При намагничивании сплава с ГМС оптическая проводимость изменяется в соответствии с изменением магнитосопротивления. Изменение оптической проводимости можно выразить через магниторезистивный эффект [14]:

$$\sigma_{\text{opt}}(\omega) = \frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_H} = \frac{\Delta\rho}{\rho_0^2 \left(1 - \frac{\Delta\rho}{\rho_0}\right)} = \frac{\frac{\Delta\rho}{\rho_0}}{\left(1 - \frac{\Delta\rho}{\rho_0}\right)} \sigma, \quad (7)$$

где  $\Delta\sigma_{\text{opt}}$  – магнитопроводимость,  $\rho_H$  – электрическое сопротивление в магнитном поле,  $\rho_0$  – электрическое сопротивление без магнитного поля,  $\Delta\rho/\rho_0$  – магнитосопротивление материала.

С помощью формул (3), (4) и (6) в магнитном поле, заменив коэффициенты рефракции и экстинкции на  $n_H = n + \Delta n$  и  $k_H = k + \Delta k$ , можно рассчитать  $\Delta n$  и  $\Delta k$  через  $\Delta\sigma_{\text{opt}}$ . При этом произведением  $\Delta n \cdot \Delta k$  можно пренебречь как величиной второго порядка малости.

$$\Delta n = \frac{2\pi\Delta\sigma}{\omega} \left( \frac{n+k}{n^2+k^2} \right), \quad (8)$$

$$\Delta k = \frac{2\pi\Delta\sigma}{\omega} \left( \frac{n-k}{n^2+k^2} \right). \quad (9)$$

Таким образом, с учетом формул (7)–(9), можно оценить МРЭ с помощью оптических параметров и параметра магниторезистивного эффекта [11].

МРЭ на отражение при нормальном падении рассчитывается по формуле:

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{R_0 - R_H}{R_0}, \quad (10)$$

где  $R_H$  и  $R_0$  – коэффициенты отражения света образцом в магнитном поле и без поля, соответственно.

### ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

На рис. 4 построены спектральные зависимости параметра МРЭ при разных концентрациях кобальта для магниторезистивного эффекта  $\frac{\Delta\rho}{\rho} = 1\%, 5\%, 10\%$ .

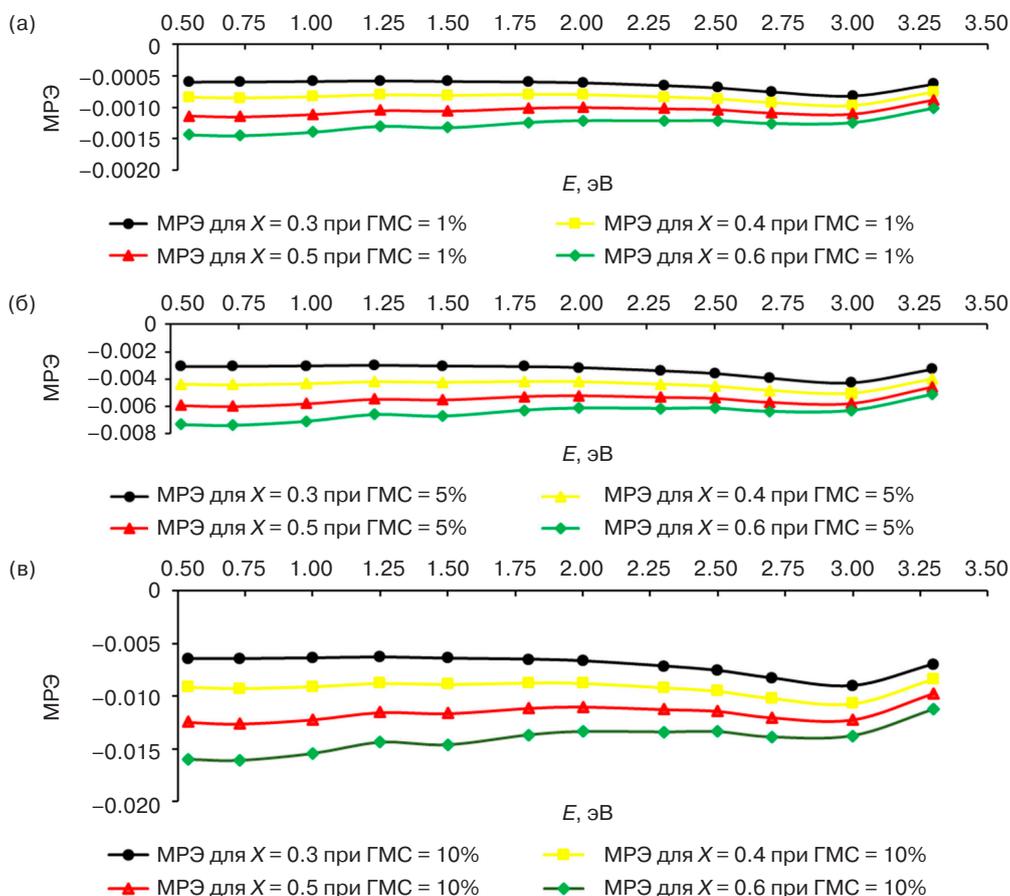


Рис. 4. Спектральные зависимости МРЭ для различных концентраций кобальта при различных значениях ГМС: (а) 1%, (б) 5%, (в) 10%

Значение МРЭ имеет отрицательный знак. Это значит, что в магнитном поле коэффициент отражения наноструктуры возрастает. Эффект тем заметнее, чем больше магниторезистивный эффект и чем выше концентрация кобальта, а значит, МРЭ очень чувствителен к изменениям микроструктуры, влияющим на ее проводимость. Наибольшее значение параметр МРЭ принимает в области низких частот, близких к частоте релаксации [15–18].

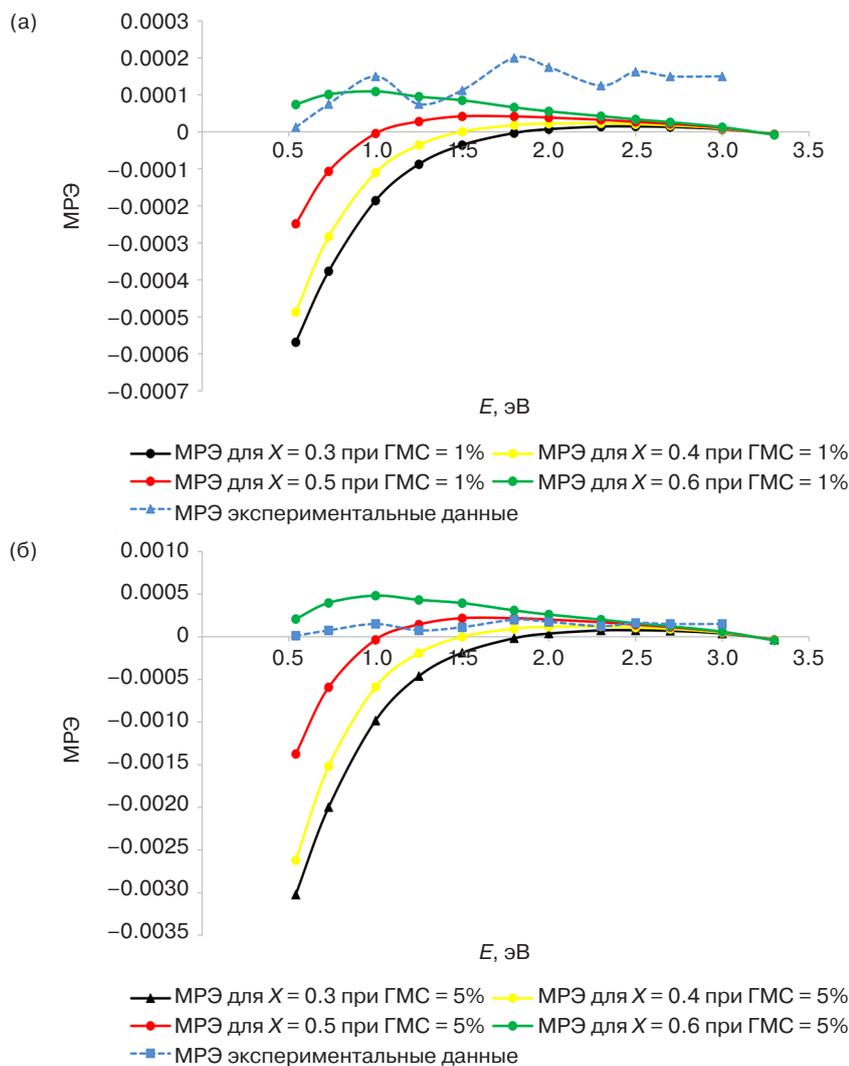
Теперь рассчитаем параметр МРЭ при падении под произвольным углом на примере угла  $30^\circ$  с помощью формул Френеля для s-поляризации. Представим рассматриваемые наноструктуры как пленки, нанесенные на кремниевую подложку. Тогда образцы можно рассматривать как трехслойные структуры воздух-Co/Pt-Si.

Такая модель будет ближе к реальным образцам на кремниевой подложке. Коэффициент отражения s-компоненты для всей трехслойной структуры  $jk_i$  равен [17]:

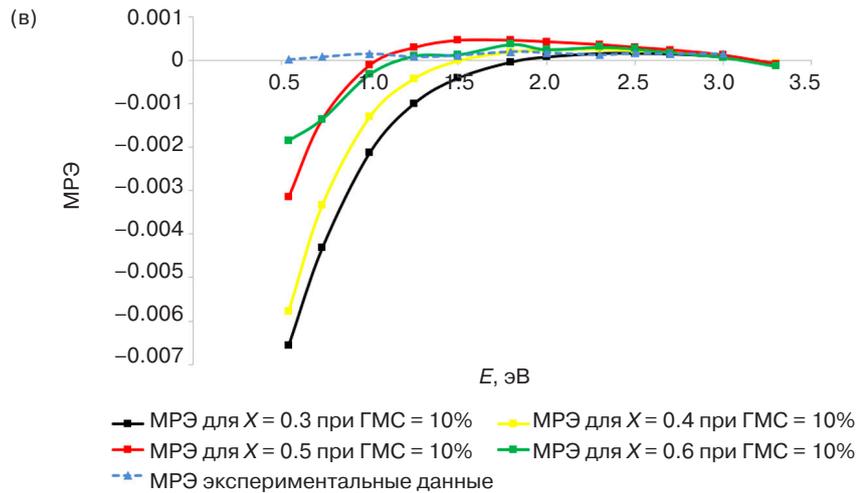
$$R_s = \left| \frac{r_{jk} + F_k^2 r_{ki}}{1 + F_k^2 r_{jk} r_{ki}} \right|^2, \quad (11)$$

где  $F_k = e^{-\frac{2\pi g_k d_k}{\lambda}}$  – фазовый множитель в  $k$ -м слое,  $g_i = \sqrt{n_j^2 - n_i^2 \sin^2 \varphi}$  – параметр для удобного расчета коэффициентов отражения на границах раздела,  $r_{jk} = \frac{g_j n_j^2 - g_k n_k^2}{g_j n_j^2 + g_k n_k^2}$  – порционный коэффициент отражения и прохождения на границе раздела  $j-k$  сред,  $\varphi$  – угол падения света из первой среды,  $d_k$  – толщина соответствующей среды.

На рис. 5 построены спектральные зависимости параметра МРЭ с учетом угла падения, влияния подложки и толщины при разных концентрациях кобальта для магниторезистивного эффекта  $\frac{\Delta\rho}{\rho} = 1\%, 5\%, 10\%$ .



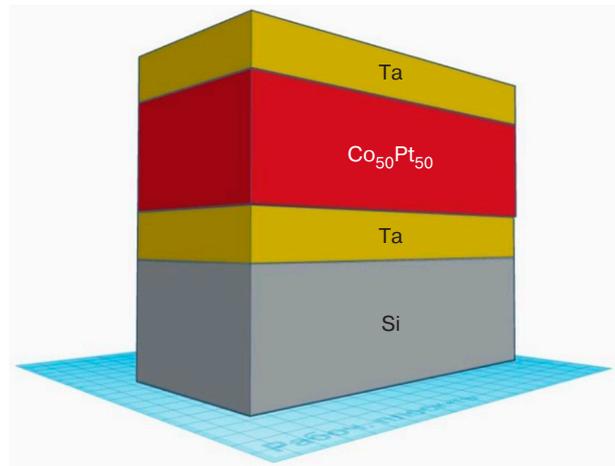
**Рис. 5 (начало).** Спектральные зависимости МРЭ для различных концентраций кобальта при разных значениях ГМС для s-поляризации и угла падения  $30^\circ$ , рассчитанные по формулам Френеля, и экспериментальные данные для s-поляризации, угле падения  $30^\circ$ : (а) ГМС = 1%, (б) ГМС = 5%, (в) ГМС = 10%



**Рис. 5 (окончание).** Спектральные зависимости МРЭ для различных концентраций кобальта при разных значениях ГМС для s-поляризации и угла падения  $30^\circ$ , рассчитанные по формулам Френеля, и экспериментальные данные для s-поляризации, угле падения  $30^\circ$ : (а) ГМС = 1%, (б) ГМС = 5%, (в) ГМС = 10%

На графиках (рис. 5) для сравнения нанесены экспериментальные данные параметра МРЭ для наноструктуры  $\text{Si}/\text{Ta}(2)/\text{Co}_{50}\text{Pt}_{50}(4.6)/\text{Ta}(2)$ , где Ta – это буферный слой (рис. 6). Экспериментальная кривая находится примерно между графиками для  $X = 0.5$  и  $X = 0.6$  при ГМС = 5%. Стоит учитывать, что толщина  $k$ -го слоя оказывает заметное влияние на параметр МРЭ, т.к. находится под функцией экспоненты. Как видно из графика на рис. 5, параметр МРЭ в ИК-области спектра резко возрастает до некоторого максимального значения, а затем постепенно спадает. Чем больше концентрация кобальта, тем сильнее сдвинута в сторону ИК-диапазона эта точка максимума. При этом, чем больше концентрация кобальта и ГМС, тем сильнее проявляются осцилляции параметра МРЭ. Знак параметра эффекта изменяется, значит, после некоторого значения частоты излучения коэффициент отражения в магнитном поле уменьшается. При ГМС = 10% параметр МРЭ для концентрации кобальта 0.5 на некоторых частотах немного превышает параметр МРЭ для концентрации 0.6.

На высоких частотах концентрация кобальта практически никак не влияет на МРЭ, и сам он очень мал. Это вполне соотносится с данными на рис. 1. Значения действительной и мнимой компонент диэлектрической проницаемости для всех образцов также сходятся на высоких частотах. При энергии электромагнитной волны порядка 2 эВ уже нет особой разницы между образцами с  $X = 0.3$  и 0.6. Это не совпадает с экспериментальными данными, т.к. экспериментальная кривая на высоких частотах наоборот возрастает, что связано с тем, что рассматриваемая модель не описывает эффекты на высоких частотах. В основе всех расчетов лежит диэлектрическая проницаемость наноструктуры, и значит,



**Рис. 6.** Схематическое изображение гетерогенной слоистой наноструктуры  $\text{Si}/\text{Ta}(2)/\text{Co}_{50}\text{Pt}_{50}(4.6)/\text{Ta}(2)$

уточняя модель, необходимо более точно рассчитать диэлектрическую проницаемость рассматриваемых наноструктур на высоких частотах [18].

Можно сделать вывод, что рассматриваемая модель лучше всего подходит для расчета спектров в ИК-области, однако в ней не учтено влияние межзонных переходов и размерных эффектов. МРЭ сильно зависит от ГМС. Чем больше концентрация кобальта, тем заметнее эта зависимость, а значит он очень чувствителен к микроструктуре образца. Наибольший интерес представляет график на рис. 5в, на нем заметен осцилляционный характер зависимости параметра МРЭ для наноструктуры с  $X = 0.6$ . Более того, на нем, в отличие от предыдущих графиков, наблюдается пересечение кривых с  $X = 0.5$  и 0.6 в ИК-области спектра, на некоторых частотах кривая 0.5 находится выше, чем кривая 0.6.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследованы плазменные частоты, коэффициенты отражения и спектры МРЭ на отражении при нормальном падении. Рассчитаны спектры МРЭ для наноструктур Co/Pt с разной концентрацией кобальта при угле  $30^\circ$  для s-поляризации. Полученные данные для угла падения  $30^\circ$  сравнивались с экспериментальными данными, получено хорошее согласие. Была в явном виде показана полная корреляция МРЭ и магнитосопротивления. Эффект тем заметнее, чем больше магниторезистивный эффект и чем выше концентрация кобальта, а значит, МРЭ очень чувствителен к изменениям микроструктуры, влияющим на ее проводимость. Наибольшее значение параметр МРЭ принимает в области низких частот, близких к частоте релаксации.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена в научном структурном подразделении «Лаборатория новых функциональных материалов» РТУ МИРЭА по гранту FSFZ-2022-0007 и при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Государственное задание для университетов № ФГФЗ-2023-0005).

## ACKNOWLEDGMENTS

The work was implemented in the scientific structural subdivision “Laboratory of New Functional Materials” of RTU MIREA under the grant FSFZ-2022-0007 of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation and with the support of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (State task for universities No. FGFZ-2023-0005).

### Вклад авторов

**А.Н. Юрасов** – постановка целей и задач исследования, обсуждение и обобщение полученных результатов, выводы.

**Д.А. Сайфуллина** – расчет магниторефрактивного эффекта и построение графиков.

**Т.Н. Бакхвалова** – развитие теории магниторефрактивного эффекта.

### Authors' contributions

**A.N. Yurasov** – setting the aims and objectives of the study, discussing and summarizing the results, and drawing conclusions.

**D.A. Sayfullina** – calculation of the magnetorefractive effect and plotting.

**T.N. Bakhvalova** – developing the theory of the magnetorefractive effect.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Granovsky A., Sukhorukov Yu., Gan'shina E., Telegin A. Magnetorefractive effect in magnetoresistive materials. In: *Magnetophotonics: From Theory to Applications*. Berlin Heidelberg: Springer; 2013. P. 107–133. [http://doi.org/10.1007/978-3-642-35509-7\\_5](http://doi.org/10.1007/978-3-642-35509-7_5)
2. Shkurdoda Yu.O., Dekhtyaruk L.V., Basov A.G., Chornous A.M., Shabelnyk Yu.M., Kharchenko A.P., Shabelnyk T.M. The giant magnetoresistance effect in Co/Cu/Co three-layer films. *J. Magn. Magn. Mater.* 2019;477:88–91. <https://doi.org/10.1016/j.jmmm.2019.01.040>
3. Dekhtyaruk L.V., Kharchenko A.P., Klymenko Yu.O., Shkurdoda Yu.O., Shabelnyk Yu.M., Bezdidko O.V., Chornous A.M. Negative and Positive Effect of Giant Magnetoresistance in The Magnetically Ordered Sandwich. In: *2020 IEEE 10th International Conference Nanomaterials: Applications & Properties (NAP)*. 2020. P. 01NMM13-1–01NMM13-3. <https://doi.org/10.1109/NAP51477.2020.9309694>
4. Kelley C.S., Naughton J., Benson E., Bradley R.C., Lazarov V.K., Thompson S.M., Matthew J.A. Investigating the magnetic field-dependent conductivity in magnetite thin films by modelling the magnetorefractive effect. *J. Phys.: Condens. Matter.* 2014;26(3):036002. <http://doi.org/10.1088/0953-8984/26/3/036002>
5. Лысина Е.А., Юрасов А.Н. Магнитооптические эффекты в нанокompозите CoSiO<sub>2</sub>. *Информатика и технологии. Инновационные технологии в промышленности и информатике (МНТК ФТИ – 2017)*. М.: МИРЭА; 2017. С. 622–628.
6. Лобов И.Д., Кириллова М.М., Махнев А.А., Ромашев Л.Н., Королев А.В., Миляев М.А., Проглядо В.В., Банникова Н.С., Устинов В.В. Магнитооптические, оптические и магнитотранспортные свойства сверхрешеток Co/Cu с ультраотонкими слоями кобальта. *Физика твердого тела.* 2017;59(1):54–62. <https://doi.org/10.21883/FTT.2017.01.43950.161>
7. Oh J., Humbard L., Humbert V., Sklenar J., Mason N. Angular evolution of thickness-related unidirectional magnetoresistance in Co/Pt multilayers. *AIP Advances.* 2019;9(4):045016. <https://doi.org/10.1063/1.5079894>
8. Kawaguchi M., Towa D., Lau Y.-C., Takahashi S., Hayashi M. Anomalous spin Hall magnetoresistance in Pt/Co bilayers. *Appl. Phys. Lett.* 2018;112(20):202405. <https://doi.org/10.1063/1.5021510>
9. Heigl M., Wendler R., Haugg S.D., Albrecht M. Magnetic properties of Co/Ni-based multilayers with Pd and Pt insertion layers. *J. Appl. Phys.* 2020;127(23):233902. <https://doi.org/10.1063/5.0010112>
10. Повзнер А.А., Волков А.Г., Филанович А.Н. Электронная структура и магнитная восприимчивость почти магнитных металлов (на примере палладия и платины). *Физика твердого тела.* 2010;52(10):1879–1884.
11. Юрасов А.Н., Телегин А.В., Банникова Н.С., Миляев М.А., Сухоруков Ю.П. Особенности магниторефрактивного эффекта в многослойной металлической наноструктуре [CoFe/Cu]<sub>n</sub>. *Физика твердого тела.* 2018;60(2):276–282. <https://doi.org/10.21883/FTT.2018.02.45381.201>

12. Лобов И.Д., Кириллова М.М., Ромашев Л.Н., Миляев М.А., Устинов В.В. Магниторефрактивный эффект и гигантское магнитосопротивление в сверхрешетках Fe( $t_x$ )/Cr. *Физика твердого тела*. 2009;51(12):2337–2341.
13. Погодаева М.К., Левченко С.В., Драчев В.П., Габитов И.Р. Оптические свойства металлов из первых принципов. *Фотон-экспресс*. 2021;6(174):294–295. <https://doi.org/10.24412/2308-6920-2021-6-294-295>
14. Устинов В.В., Сухоруков Ю.П., Миляев М.А., Грановский А.Б., Юрасов А.Н., Ганьшина Е.А., Телегин А.В. Магнитопропускание и магнитоотражение в многослойных наноструктурах FeCr. *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. 2009;135(2):293–300.
15. Jacquet J.C., Valet T. A new magneto-optical effect discovered on magnetic multilayers: The magnetorefractive effect. *MRS Online Proceedings Library (OPL)*. 1995;384:477–490. <https://www.doi.org/10.1557/PROC-384-477>
16. Kravets V.G. Correlation between the magnetoresistance, IR magnetorefractance, and spin-dependent characteristics of multilayer magnetic films. *Phys. Res. Int.* 2012;2012(5):323279. <https://www.doi.org/10.1155/2012/323279>
17. Маевский В.М. Теория магнитооптических эффектов в многослойных системах с произвольной ориентацией намагниченности. *Физика металлов и металловедение*. 1985;59:213–216.
18. Юрасов А.Н. Магниторефрактивный эффект в наноструктурах. *Приборы*. 2022;4(262):22–25.

## REFERENCES

1. Granovsky A., Sukhorukov Yu., Gan'shina E., Telegin A. Magnetorefractive effect in magnetoresistive materials. In: *Magnetophotonics: From Theory to Applications*. Berlin Heidelberg: Springer; 2013. P. 107–133. [http://doi.org/10.1007/978-3-642-35509-7\\_5](http://doi.org/10.1007/978-3-642-35509-7_5)
2. Shkurdoda Yu.O., Dekhtyaruk L.V., Basov A.G., Chornous A.M., Shabelnyk Yu.M., Kharchenko A.P., Shabelnyk T.M. The giant magnetoresistance effect in Co/Cu/Co three-layer films. *J. Magn. Magn. Mater.* 2019;477:88–91. <https://doi.org/10.1016/j.jmmm.2019.01.040>
3. Dekhtyaruk L.V., Kharchenko A.P., Klymenko Yu.O., Shkurdoda Yu.O., Shabelnyk Yu.M., Bezdidko O.V., Chornous A.M. Negative and Positive Effect of Giant Magnetoresistance in The Magnetically Ordered Sandwich. In: *2020 IEEE 10th International Conference Nanomaterials: Applications & Properties (NAP)*. 2020. P. 01NMM13-1–01NMM13-3. <https://doi.org/10.1109/NAP51477.2020.9309694>
4. Kelley C.S., Naughton J., Benson E., Bradley R.C., Lazarov V.K., Thompson S.M., Matthew J.A. Investigating the magnetic field-dependent conductivity in magnetite thin films by modelling the magnetorefractive effect. *J. Phys.: Condens. Matter*. 2014;26(3):036002. <http://doi.org/10.1088/0953-8984/26/3/036002>
5. Lysina E.A., Yurasov A.N. Magneto-optical effects in CoSiO<sub>2</sub> nanocomposite. In: *Informatika i tekhnologii. Innovatsionnyye tekhnologii v promyshlennosti i informatike (MNTK FTI 2017) (Informatics and Technologies. Innovative Technologies in Industry and Informatics)*. Moscow: MIREA; 2017. P. 622–628 (in Russ.).
6. Lobov I.D., Kirillova M.M., Makhnev A.A., et al. Magneto-optical, optical, and magnetotransport properties of Co/Cu superlattices with ultrathin cobalt layers. *Phys. Solid State*. 2017;59(1):53–62. <https://doi.org/10.1134/S1063783417010206> [Original Russian Text: Lobov I. D. Kirillova M.M., Makhnev A.A., Romashev L.N., Korolev A.V., Milyaev M.A., Proglyado V.V., Bannikova N.S., Ustinov V.V. Magneto-optical, optical, and magnetotransport properties of Co/Cu superlattices with ultrathin cobalt layers. *Fizika Tverdogo Tela*. 2017;59(1):54–62 (in Russ.). <https://doi.org/10.21883/FTT.2017.01.43950.161>]
7. Oh J., Humbarad L., Humbert V., Sklenar J., Mason N. Angular evolution of thickness-related unidirectional magnetoresistance in Co/Pt multilayers. *AIP Advances*. 2019;9(4):045016. <https://doi.org/10.1063/1.5079894>
8. Kawaguchi M., Towa D., Lau Y.-C., Takahashi S., Hayashi M. Anomalous spin Hall magnetoresistance in Pt/Co bilayers. *Appl. Phys. Lett.* 2018;112(20):202405. <https://doi.org/10.1063/1.5021510>
9. Heigl M., Wendler R., Haugg S.D., Albrecht M. Magnetic properties of Co/Ni-based multilayers with Pd and Pt insertion layers. *J. Appl. Phys.* 2020;127(23):233902. <https://doi.org/10.1063/5.0010112>
10. Povzner A.A., Volkov A.G., Filanovich A.N. Electronic structure and magnetic susceptibility of nearly magnetic metals (palladium and platinum). *Phys. Solid State*. 2010;52(10):2012–2018. <https://doi.org/10.1134/S1063783410100021> [Original Russian Text: Povzner A.A., Volkov A.G., Filanovich A.N. Electronic structure and magnetic susceptibility of nearly magnetic metals (palladium and platinum). *Fizika Tverdogo Tela*. 2010;52(10):1879–1884 (in Russ.).]
11. Yurasov A.N., Telegin A.V., Bannikova N.S., et al. Features of Magnetorefractive Effect in a [CoFe/Cu]<sub>n</sub> Multilayer Metallic Nanostructure. *Phys. Solid State*. 2018;60(2):281–287. <https://doi.org/10.1134/S1063783418020300> [Original Russian Text: Yurasov A.N., Telegin A.V., Bannikova N.S., Milyaev M.A., Sukhorukov Yu.P. Features of Magnetorefractive Effect in a [CoFe/Cu]<sub>n</sub> Multilayer Metallic Nanostructure. *Fizika Tverdogo Tela*. 2018;60(2):276–282 (in Russ.). <https://doi.org/10.21883/FTT.2018.02.45381.201>]
12. Lobov I.D., Kirillova M.M., Romashev L.N., et al. Magnetorefractive effect and giant magnetoresistance in Fe( $t_x$ )/Cr superlattices. *Phys. Solid State*. 2009;51(12):2480–2485. <https://doi.org/10.1134/S1063783409120099> [Original Russian Text: Lobov I.D., Kirillova M.M., Romashev L.N., Milyaev M.A., Ustinov V.V. Magnetorefractive effect and giant magnetoresistance in Fe( $t_x$ )/Cr superlattices. *Fizika Tverdogo Tela*. 2009;51(12):2337–2341 (in Russ.).]
13. Pogodaeva M.K., Levchenko S.V., Drachev V.P., Gabitov I.R. Optical properties of metals from the first principles. *Photon Express*. 2021;6(174):294–295 (in Russ.).
14. Ustinov V.V., Sukhorukov Yu.P., Milyaev M.A., et al. Magnetotransmission and magnetoreflexion in multilayer FeCr nanostructures. *J. Exp. Theor. Phys.* 2009;108(2):260–266. <https://doi.org/10.1134/S1063776109020083>

[Original Russian Text: Ustinov V.V., Sukhorukov Yu.P., Milyaev M.A., Granovskii A.B., Yurasov A.N., Gan'shina E.A., Telegin A.V. Magnetotransmission and magnetoreflexion in multilayer FeCr nanostructures. *Zhurnal Eksperimental'noi i Teoreticheskoi Fiziki*. 2009;135(2):293–300 (in Russ.).]

15. Jacquet J.C., Valet T. A new magneto-optical effect discovered on magnetic multilayers: The magnetorefractive effect. *MRS Online Proceedings Library (OPL)*. 1995;384:477–490. <https://www.doi.org/10.1557/PROC-384-477>
16. Kravets V.G. Correlation between the magnetoresistance, IR magnetoreflexance, and spin-dependent characteristics of multilayer magnetic films. *Phys. Res. Int.* 2012;2012(5):323279. <https://www.doi.org/10.1155/2012/323279>
17. Maevskii V.M. Theory of magneto-optical effects in multilayer systems with arbitrary orientation of magnetization. *Fizika metallov i metallovedenie = Physics of Metals and Metallography*. 1985;59:213–216 (in Russ.).
18. Yurasov A.N. Magnetorefractive effect in nanostructures. *Pribery = Instruments*. 2022;4(262):22–25 (in Russ.).

#### Об авторах

**Юрасов Алексей Николаевич**, д.ф.-м.н., профессор, профессор кафедры нанoeлектроники, Институт перспективных технологий и промышленного программирования ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: alexey\_yurasov@mail.ru. ResearcherID M-3113-2016, Scopus Authors ID 6602974416, SPIN-код РИНЦ 4259-8885, <https://orcid.org/0000-0002-9104-3529>

**Сайфулина Диана Алексеевна**, студент, Институт перспективных технологий и промышленного программирования ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: diana-sayfullina@mail.ru. ResearcherID IQU-6785-2023, SPIN-код РИНЦ 4397-9205, <https://orcid.org/0009-0006-2905-9753>

**Бахвалова Татьяна Николаевна**, преподаватель, кафедра нанoeлектроники, Институт перспективных технологий и промышленного программирования ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: bahvalova@mirea.ru. ResearcherID ITW-2747-2023, Scopus Author ID 35145196400, <https://orcid.org/0000-0001-7595-785X>

#### About the authors

**Alexey N. Yurasov**, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Department of Nanoelectronics, Institute for Advanced Technologies and Industrial Programming, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: alexey\_yurasov@mail.ru. ResearcherID M-3113-2016, Scopus Authors ID 6602974416, RSCI SPIN-code 4259-8885, <https://orcid.org/0000-0002-9104-3529>

**Diana A. Sayfullina**, Student, Institute for Advanced Technologies and Industrial Programming, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: diana-sayfullina@mail.ru. ResearcherID IQU-6785-2023, RSCI SPIN-code 4397-9205, <https://orcid.org/0009-0006-2905-9753>

**Tatiana N. Bakhvalova**, Teacher, Department of Nanoelectronics, Institute for Advanced Technologies and Industrial Programming, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: bahvalova@mirea.ru. ResearcherID ITW-2747-2023, Scopus Author ID 35145196400, <https://orcid.org/0000-0001-7595-785X>

Математическое моделирование  
Mathematical modeling

УДК 519.95:621.3  
<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-2-67-76>



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

## Исследование вероятностно-временных характеристик беспроводных сетей с методом доступа CSMA/CA

А.С. Леонтьев,  
Д.В. Жматов<sup>@</sup>

МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, 119454 Россия  
<sup>@</sup> Автор для переписки, e-mail: [zhamatov@mirea.ru](mailto:zhamatov@mirea.ru)

### Резюме

**Цели.** Целью статьи является разработка аналитических методов оценки вероятностно-временных характеристик и производительности беспроводных сетей с методом доступа CSMA/CA, позволяющих автоматизировать процессы выбора рациональных режимов работы и снизить влияние наложений в сетях, реализующих протоколы 802.11.

**Методы.** Используются методы теории надежности, теории случайных процессов и теории массового обслуживания, преобразование Лапласа – Стильтеса.

**Результаты.** Разработан аналитический метод оценки вероятностно-временных характеристик и производительности беспроводных сетей с методом доступа CSMA/CA с учетом ограничений на время передачи информации. Метод расширяет область применимости аналитических подходов, предложенных ранее для исследования локальных сетей Ethernet. Проведен анализ сетей, которые используют метод доступа CSMA/CA. Разработана оригинальная математическая модель, позволяющая оценить различные характеристики процессов передачи пакетов в беспроводных сетях при ограничениях на время передачи. Эти характеристики включают время ожидания, время передачи пакетов, загрузку узлов и производительность сети. Для упрощения анализа и оценки различных режимов работы беспроводных сетей с методом доступа CSMA/CA был разработан программный комплекс.

**Выводы.** Показана необходимость первоочередной разработки вложенных аналитических моделей, описывающих процессы передачи пакетов в беспроводных сетях при ограничениях на время передачи информации на канальном уровне. Это означает, что для более точного описания процессов передачи пакетов в таких сетях требуется создание более сложных моделей. Разработанный программный комплекс позволяет изучать различные варианты функционирования сети и проводить аналитические расчеты. Были проведены расчеты для оценки вероятностно-временных характеристик процессов передачи пакетов и производительности беспроводной сети. Исследования включали изменение количества рабочих станций и интенсивности потоков пакетов, поступающих в узлы сети, при ограничении времени передачи пакетов. Применение разработанных математических моделей может быть полезным при создании и оптимизации беспроводных сетей, таких как Wi-Fi-сети, сети связи на основе стандарта IEEE 802.11 и другие системы передачи данных с использованием метода доступа CSMA/CA. Такие модели и анализ на их основе различных режимов функционирования беспроводных сетей могут помочь в оптимизации производительности сетей, настройке параметров, а также при выборе емкости и конфигурации беспроводных сетей.

**Ключевые слова:** аналитический метод, математическая модель, беспроводные сети, jam-пакеты, CSMA/CA, стандарт 802.11, временные характеристики

• Поступила: 29.06.2023 • Доработана: 10.10.2023 • Принята к опубликованию: 12.02.2024

**Для цитирования:** Леонтьев А.С., Жматов Д.В. Исследование вероятностно-временных характеристик беспроводных сетей с методом доступа CSMA/CA. *Russ. Technol. J.* 2024;12(2):67–76. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-2-67-76>

**Прозрачность финансовой деятельности:** Авторы не имеют финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## RESEARCH ARTICLE

# Study of the probabilistic and temporal characteristics of wireless networks using the CSMA/CA access method

Alexander S. Leontyev,  
Dmitry V. Zhmatov<sup>@</sup>

*MIREA – Russian Technological University, Moscow, 119454 Russia*

<sup>@</sup> *Corresponding author, e-mail: zhmatov@mirea.ru*

### Abstract

**Objectives.** The aim of this study is to develop analytical methods to evaluate the probabilistic and temporal characteristics and performance of wireless networks using the CSMA/CA access method. These methods enable the process of selecting rational operating modes to be automated and the impact of collisions in networks implementing the 802.11 protocols to be reduced.

**Methods.** The methods employed herein include reliability theory, theory of random processes, queuing theory, and the Laplace–Stieltjes transform.

**Results.** A problem statement is presented and developed, along with an analytical method for evaluating the probabilistic and temporal characteristics and performance of wireless networks using the CSMA/CA access method. This method considers time constraints on information transmission, thus expanding the applicability of previously proposed analytical approaches for studying Ethernet local area networks. The analysis of networks that use the CSMA/CA access method was carried out. An original mathematical model was developed that allows evaluating various characteristics of packet transmission processes in wireless networks under time constraints on the transmission. These characteristics include latency, packet transfer time, node load, and network performance. A software package was developed to simplify the analysis and evaluation of various operation modes of wireless networks using the CSMA/CA access method.

**Conclusions.** We demonstrate the need for developing nested analytical models describing packet transmission processes in wireless networks under time constraints on link-layer transmission. This implies the development of more complex models for more exact description of packet transmission processes in such networks. The software package developed herein enables the various options for the functioning of the network to be studied and analytical calculations to be performed. Calculations were carried out, in order to assess the probabilistic and temporal characteristics of packet transmission processes and the wireless network performance. The research involved varying the number of workstations and the intensity of packet flows entering the network nodes under the time constraint on packet transmission. The application of the developed mathematical models will be useful in creating and optimizing wireless networks such as Wi-Fi networks, networks based on the IEEE 802.11 standard, and other data transmission systems using the CSMA/CA access method. Such models and the analysis based on them will be useful in optimizing network performance, adjusting parameters, as well as selecting the capacity and configuration of wireless networks.

**Keywords:** analytical method, mathematical model, wireless networks, jam packets, CSMA/CA, 802.11 standard, temporal characteristics

• Submitted: 29.06.2023 • Revised: 10.10.2023 • Accepted: 12.02.2024

**For citation:** Leontyev A.S., Zhmatov D.V. Study of the probabilistic and temporal characteristics of wireless networks using the CSMA/CA access method. *Russ. Technol. J.* 2024;12(2):67–76. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-2-67-76>

**Financial disclosure:** The authors have no a financial or property interest in any material or method mentioned.

The authors declare no conflicts of interest.

## ВВЕДЕНИЕ

Поиск новых способов повышения производительности беспроводной локальной сети (wireless local area network, WLAN) вызван резким увеличением количества устройств с поддержкой Wi-Fi и интенсивным растущим спросом.

Для качественной передачи потоковой информации WLAN использует общую физическую среду для обмена данными между активными устройствами. Одной из важных проблем WLAN является контроль доступа к физической среде. В наиболее распространенных беспроводных сетях Wi-Fi станция доступа к среде использует множественный доступ с предотвращением коллизий (carrier sensing multiple access with collision avoidance, CSMA/CA). Использование части пропускной способности сети для реализации CSMA/CA уменьшает пропускную способность сети для передачи абонентского трафика, что негативно влияет на производительность беспроводной сети

Методы доступа к физической среде беспроводных компьютерных сетей играют важную роль в функционировании подуровня управления доступом к среде. Доступ к физической среде WLAN регулируется стандартом IEEE 802.11<sup>1</sup>. Наиболее широко используется протокол MAC-адресации (media access control), который основан на схеме CSMA/CA. Эта схема обеспечивает конкурентный доступ к физической среде.

В ранних версиях IEEE 802.11 механизм CSMA/CA был реализован как функция распределенной координации и обеспечивал равный доступ для всех узлов в сети.

Кроме того, в сетях, ориентированных на точки доступа, стандарт IEEE 802.11 реализует функцию координации точек, которая обеспечивает централизованный доступ к физической среде. Функция распределенной координации не поддерживает качество услуг (quality of service, QoS).

Как правило, кадры с более высоким приоритетом имеют больше шансов быть переданными, а нагрузка на канал снижается. Многие исследовательские

<sup>1</sup> IEEE 802.11 – набор стандартов связи для коммуникации в беспроводной локальной сетевой зоне частотных диапазонов 2.4, 3.6 и 5 ГГц. [IEEE 802.11 is a set of communication standards for communication in the wireless local area networking frequency bands of 2.4, 3.6, and 5 GHz.]

работы направлены на улучшение производительности подуровня MAC с помощью различных методов и подходов. При этом большинство из них ориентировано на обеспечение передачи различных типов трафика, однако влияние различных соотношений типов трафика на производительность сети еще не изучалось. Знание этого даст возможность разработать специализированные алгоритмы для улучшения передачи информации в беспроводных сетях.

Подуровень MAC ориентирован на определенные соотношения типов трафика в каждом конкретном приложении.

Разработка математических методов оценки загрузки узлов, передающей среды, временных характеристик и производительности локальных и беспроводных сетей позволяет автоматизировать процесс проектирования [1, 2], в результате чего эффективность сети может быть повышена. Современные сетевые технологии и протоколы описаны в работах [3, 4].

К основным методам исследования многомашиных вычислительных систем и локальных сетей относятся методы теории надежности [5–7], методы теории массового обслуживания и имитационного моделирования [8–15]. Известные аналитические методы исследования не учитывают директивные ограничения на время передачи пакетов в беспроводных сетях. Для метода доступа CSMA/CA должны быть выдержаны определенные соотношения параметров «скорость передачи / размер кадра» и «размер сети / размер кадра».

В работе представлена оригинальная аналитическая модель оценки вероятностно-временных характеристик и производительности беспроводных сетей с методом доступа CSMA/CA при директивных ограничениях на время передачи информации, развивающая известные аналитические методы исследования Ethernet-сетей [16].

## 1. ХАРАКТЕРИСТИКА МЕТОДА ДОСТУПА CSMA/CA

В беспроводной среде вероятность ошибки передачи данных гораздо выше, чем в проводной, а мощность сигнала, который передается, гораздо больше мощности сигнала, который принимается. Диапазон работы передатчиков в этом случае ограничен, поэтому не все компьютеры в сети Wi-Fi могут принимать

передаваемые данные. Это приводит к ряду проблем, наиболее известные из которых – это проблемы скрытой и засвеченной станций [11, 12]. В сети Ethernet используется метод доступа CSMA/CD – случайный множественный метод доступа с контролем несущей и обнаружением конфликтов (carrier-sense multiple access with collision detection), поскольку конфликты обходятся сравнительно дешево, они обнаруживаются почти сразу, и при этом компьютеры сразу останавливают передачу [4]. В беспроводных сетях Wi-Fi, т.к. коллизии обходятся очень дорого, используется метод доступа CSMA/CA – случайный множественный метод доступа с контролем несущей и предотвращением конфликтов [9, 10]. В работах [11, 12] рассмотрены современные технологии передачи данных и перспективы их развития.

Метод доступа CSMA/CA чаще всего используется в беспроводных сетях, работа которых на физическом уровне описывается моделью ISO/OSI (International Organization for Standardization / Open Systems Interconnection model) и стандартом 802.11. В частности, в высокоскоростных Wi-Fi-сетях используются стандарты связи IEEE 802.11x, 802.11ac, 802.11ah и 802.11be [16]. Метод CSMA/CA показывает высокую эффективность в компактных беспроводных сетях с небольшим числом узлов.

С увеличением количества рабочих станций и нагрузки на них наблюдается резкое снижение эффективности беспроводной сети. Эти два фактора неизбежно увеличивают количество конфликтов и приводят к тому, что на их решение тратится больше времени. Отметим, что, в отличие от методов исследования кабельных или оптоволоконных локальных сетей [16], аналитические методы исследования вероятностно-временных характеристик беспроводных сетей недостаточно развиты. Разработка моделей на основе методов имитационного моделирования [13, 14] очень трудоемка и требует много времени для достижения надежных результатов во всей области исследования транспортной среды с поддержкой CSMA/CA и нагрузки сетевых узлов, т.к. количество конфликтов сильно зависит от загрузки. Кроме того, данная модель является вложенной по отношению к моделям оценки вероятностно-временных характеристик информационных процессов в распределенной вычислительной системе, поэтому расчеты требуют ее многократного использования, что резко увеличивает время, необходимое для исследования.

Поэтому для сетей, реализующих протоколы 802.11, необходима разработка аналитических методов оценки вероятностно-временных характеристик и производительности беспроводных сетей с методом доступа CSMA/CA, позволяющих автоматизировать процессы выбора рациональных режимов работы и снизить влияние коллизий, что имеет актуальную и бесспорную новизну.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Заданы:

1. Передающая среда беспроводной сети – эфир.
2. Доступ к передающей среде – CSMA/CA.
3. Количество узлов беспроводной сети –  $N$ .
4. Размещение узлов. Основная характеристика: расстояние между узлами сети –  $L_{ik}$  ( $i$  и  $k$  – номера узлов), м.
5. Пропускная способность –  $c$ , Мбит/с.
6. Скорость распространения сигнала –  $V_c$ , м/с.
7. Задержка повторной передачи jam-пакетов при обнаружении конфликтов –  $\tau$ , с.
8. Размер jam-пакета –  $L_{jam}$ , бит.
9. Задержка получения подтверждения на переданный jam-пакет –  $\Delta t_{jam}$ , с.
10. Длина информационного пакета –  $L_{пак}$ , бит.
11. Директивное время передачи информационных пакетов –  $T_{дир}^{(1)}$ , с.
12. Потоки пакетов, поступающих в узлы беспроводной сети –  $\lambda_k$ , пак/с ( $k = \overline{1, N}$ ).
13. Межкадровый интервал –  $\Delta t$ , с.

Определяются:

1.  $T_k^{(1)}$  – время доставки информационных пакетов ( $k = \overline{1, N}$ ).
2.  $Q_k$  – вероятность своевременной доставки информационных пакетов ( $k = \overline{1, N}$ ).
3.  $\lambda_{sum}$  – производительность сети.
4. Загрузка узлов и передающей среды беспроводной сети.

Производительность беспроводной сети определяется как суммарная интенсивность своевременно обслуженного потока.

## 3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МЕТОДА ОЦЕНКИ ХАРАКТЕРИСТИК БЕСПРОВОДНЫХ СЕТЕЙ

Задача решается в предположении о пуассоновском характере потоков  $\lambda_k$  ( $k = \overline{1, N}$ ), поступающих на обслуживание в узлы беспроводной сети.

При передаче jam-пакета из  $k$ -го узла конфликт возникает, если в интервале  $(0, T_{ik}]$  узел  $i$  начинает передачу jam-пакета или узел  $i$  начинает передачу jam-пакета в интервале  $[-T_{ik}, 0)$ :

$$\{T_{ik} = L_{ik} / V_c, i = \overline{1, N}, i \neq k\}.$$

Вероятность, что узел  $i$  не начнет передачу в интервале  $2T_{ik}$  при пуассоновском потоке пакетов, поступающих в узлы сети, определяется соотношением  $e^{-\lambda_i 2T_{ik}}$ .

Тогда, вероятность того, что при передаче jam-пакета из  $k$ -го узла не возникнет конфликтов

с jam-пакетами, передаваемыми из других узлов сети, можно оценить с помощью формулы:

$$g_k = \prod_{i=1, i \neq k}^N e^{-\lambda_i 2T_{ik}}, \quad k = \overline{1, N}. \quad (1)$$

Пусть  $P_k^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dP_k(t)$  – преобразование

Лапласа – Стилтеса функции распределения (ФР)  $P_k(t)$  времени передачи пакета из  $k$ -го узла с учетом возникающих конфликтов,  $s$  – комплексный параметр.  $P_k^*(s)$  определяется выражением:

$$P_k^*(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \{P_n(X^*(s))^{n-1} \cdot (V_k^*(s))^{n-1} F^*(s)\}, \quad (2)$$

где  $P_n = (1 - g_k)^{n-1} g_k$  – вероятность того, что пакет будет передан ровно за  $n$  попыток (при передаче jam-пакета конфликты возникнут  $n - 1$  раз);

$F^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dF(t)$ ,  $F(t)$  – зависимость времени передачи пакета данных с jam-пакетом без наложения;

$X^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dX(t)$ ,  $X(t)$  – ФР случайной задержки повторной передачи jam-пакета при возникновении конфликта (наложении jam-пакетов от разных узлов

сети);  $V_k^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dV_k(t)$ ,  $V_k(t)$  – зависимость времени передачи jam-пакета и задержки передачи подтверждения на переданный jam-пакет из  $k$ -го узла при возникновении конфликта.

Тогда

$$P_k^*(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - g_k)^{n-1} g_k (X^*(s))^{n-1} \times \times (V_k^*(s))^{n-1} F^*(s) = g_k F^*(s) \frac{1}{1 - (1 - g_k) X^*(s) V_k^*(s)}. \quad (3)$$

Учитывая свойства преобразования Лапласа – Стилтеса [16], легко получить выражения для моментов  $P_k^{(1)}$  и  $P_k^{(2)}$  ФР  $P_k(t)$ , продифференцировав по  $s$  выражение (3).

Методики расчета моментов ФР  $V_k(t)$  и  $X(t)$  и необходимые расчетные формулы для оценки загрузки передающей среды и узлов сети представлены в работе [16].

Моменты ФР  $G_k(t)$  времени обслуживания пакета, поступившего в  $k$ -й узел сети, определяются следующей очевидной формулой:

$$G_k^{(1)} = P_k^{(1)} + W_k^{(1)}, \quad G_k^{(2)} = P_k^{(2)} + 2P_k^{(1)}W_k^{(1)} + W_k^{(2)}, \quad (4)$$

где  $W_k^{(1)}$  и  $W_k^{(2)}$  – моменты ФР  $W_k(t)$  времени ожидания начала передачи пакета при его поступлении в свободный  $k$ -й узел беспроводной сети [16].

Учитывая, что потоки пакетов, поступающие в узлы сети, являются пуассоновскими, среднее время ожидания пакетов в очереди на обслуживание в  $k$ -м узле  $W_{ожk}^{(1)}$  определяется формулой Поллачека – Хинчина [10]:

$$W_{ожk}^{(1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda_k G_k^{(2)}}{1 - \lambda_k G_k^{(1)}}. \quad (5)$$

Среднее время обслуживания пакетов  $T_k^{(1)}$  с учетом времени ожидания начала передачи в узлах сети определяется выражением:

$$T_k^{(1)} = W_{ожk}^{(1)} + G_k^{(1)}. \quad (6)$$

Также как и в работе [16], вероятности своевременной доставки пакетов  $Q_k$ , поступающих в  $k$ -й узел беспроводной сети, задаются соотношениями:

$$Q_k = \frac{h(1 - \lambda_k G_k^{(1)})}{h - \lambda_k + \lambda_k G_k^*(h)} G_k^*(h), \quad k = \overline{1, N}, \quad (7)$$

где  $h = 1 / T_{дир}^{(1)}$ ,  $T_{дир}(t) = 1 - e^{-ht}$ ,  $T_{дир}^{(1)}$  – директивное время передачи пакетов в сети.

$$G_k^*(h) = \frac{1}{\left(\frac{h}{y_k} + 1\right)^{x_k}}, \quad x_k = \frac{(G_k^{(1)})^2}{G_k^{(2)} - (G_k^{(1)})^2}, \quad (8)$$

$$y_k = \frac{G_k^{(1)}}{G_k^{(2)} - (G_k^{(1)})^2}.$$

Соотношения (8) можно легко получить, аппроксимируя ФР  $G_k(t)$  по двум моментам  $G_k^{(1)}$  и  $G_k^{(2)}$  гамма-распределением и учитывая предположение, что ограничение на директивное время обслуживания пакетов в сети  $T_{дир}(t)$  является случайной величиной, распределенной по экспоненциальному закону. Соответствующие преобразования представлены в работе [16].

Суммарная интенсивность своевременно обслуженного потока (производительность сети) рассчитывается по формуле

$$\lambda_{sum} = \sum_{k=1}^N \lambda_k Q_k, \quad (9)$$

где  $Q_k$  определяется соотношением (7).

Разработанный метод оценки эффективности беспроводных сетей с методом доступа CSMA/CA является основой для реализации систем автоматизированного проектирования беспроводных сетей различного назначения, включая Wi-Fi и беспроводные сети большой протяженности, использующие для связи узконаправленные антенны и метод доступа CSMA/CA.

#### 4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ОЦЕНКИ ЭФФЕКТИВНОСТИ БЕСПРОВОДНЫХ СЕТЕЙ

Для практического использования рассмотренной аналитической модели оценки эффективности сетей с методом доступа CSMA/CA на языке C++ в среде объектно-ориентированного программирования *Boland C++ Builder* разработан комплекс программ «Система аналитического моделирования процессов передачи информации в сетях».

Исходные данные вводятся с экрана дисплея в режиме диалога в соответствии с заданными формами. Оператор, не выходя из системы моделирования, имеет возможность осуществить корректировку исходных данных, сохранить соответствующие им результаты расчетов в текстовых и графических файлах.

На рис. 1 представлена экранная форма ввода исходных данных и вывода результатов моделирования.

Комплекс программ позволяет проводить расчеты при любых заданных размерах беспроводной сети CSMA/CA, ее пропускной способности и различном размещении узлов сети. Тип размещения узлов может быть случайным или детерминированным. При детерминированном размещении узлы могут находиться на одинаковом расстоянии от соседних узлов (эквидистантное размещение) или на разных расстояниях (неэквидистантное размещение). Отметим, что ограничение на время передачи пакетов задается при вводе исходных данных. Вероятность доставки пакетов за время, не превышающее директивное, существенно зависит от заданного ограничения на время доставки пакетов. Производительность, определенная нами как суммарный своевременно переданный в беспроводной сети поток пакетов, также существенным образом зависит от заданных ограничений на время доставки пакетов. Такие характеристики как загрузка узлов и передающей среды, а также вероятностно-временные характеристики (время ожидания в очередях, время передачи пакетов) не зависят от введенных ограничений на время передачи, но, естественно, существенным образом зависят от пропускной способности передающей среды, количества узлов, их размещения, размеров сети,

интенсивности потоков пакетов, поступающих на обслуживание в узлы беспроводной сети, длины информационных пакетов и от временных задержек, возникающих при наложениях jam-пакетов. При моделировании скорость распространения сигналов в передающей среде принималась равной скорости света.

Для демонстрации проведения расчетов вероятностно-временных характеристик процессов доставки пакетов и производительности беспроводных сетей с помощью разработанного аналитического метода проведем моделирование передачи пакетов в беспроводной сети CSMA/CA. Для моделирования выбраны следующие исходные данные:

- размер беспроводной сети CSMA/CA – 500 м;
- тип распределения узлов в сети – случайный;
- количество узлов в сети  $N = 100$ ;
- пропускная способность – 100 Мбит/с;
- скорость распространения сигнала –  $3 \cdot 10^8$  м/с;
- максимальная задержка повторной передачи пакета – 10 мкс;
- длина jam-пакета – 32 бит;
- директивное время – 0.005 с;
- длина информационного пакета – 1 кбит;
- интенсивность поступления пакетов во все узлы одинакова.

Отметим, что разработанный комплекс программ позволяет проводить моделирование и при разной интенсивности пакетов, поступающих на обслуживание в узлы сети.

Результаты расчетов вероятностно-временных характеристик, производительности, загрузки узлов и передающей среды с заданными исходными данными при изменении нагрузки (изменении интенсивности потоков пакетов, поступающих на обслуживание в узлы сети) представлены на рис. 2–6.

Время доставки пакетов в беспроводной сети зависит от времени ожидания передачи в очереди на узлах сети и времени передачи пакета с учетом возникающих конфликтов. Поэтому параметры обработки информации в беспроводной сети должны выбираться таким образом, чтобы во всем диапазоне изменения интенсивности потоков обрабатываемых пакетов в системе не возникало узких мест, т.е. перегрузок отдельных узлов и передающей среды. В сбалансированной системе загрузка передающей среды и загрузка узлов при увеличении нагрузки должны быть близки друг другу. С уменьшением длины сети и уменьшением количества узлов при заданной пропускной способности передающей среды длина передаваемых пакетов должна увеличиваться таким образом, чтобы сеть была сбалансированной при увеличении нагрузки.

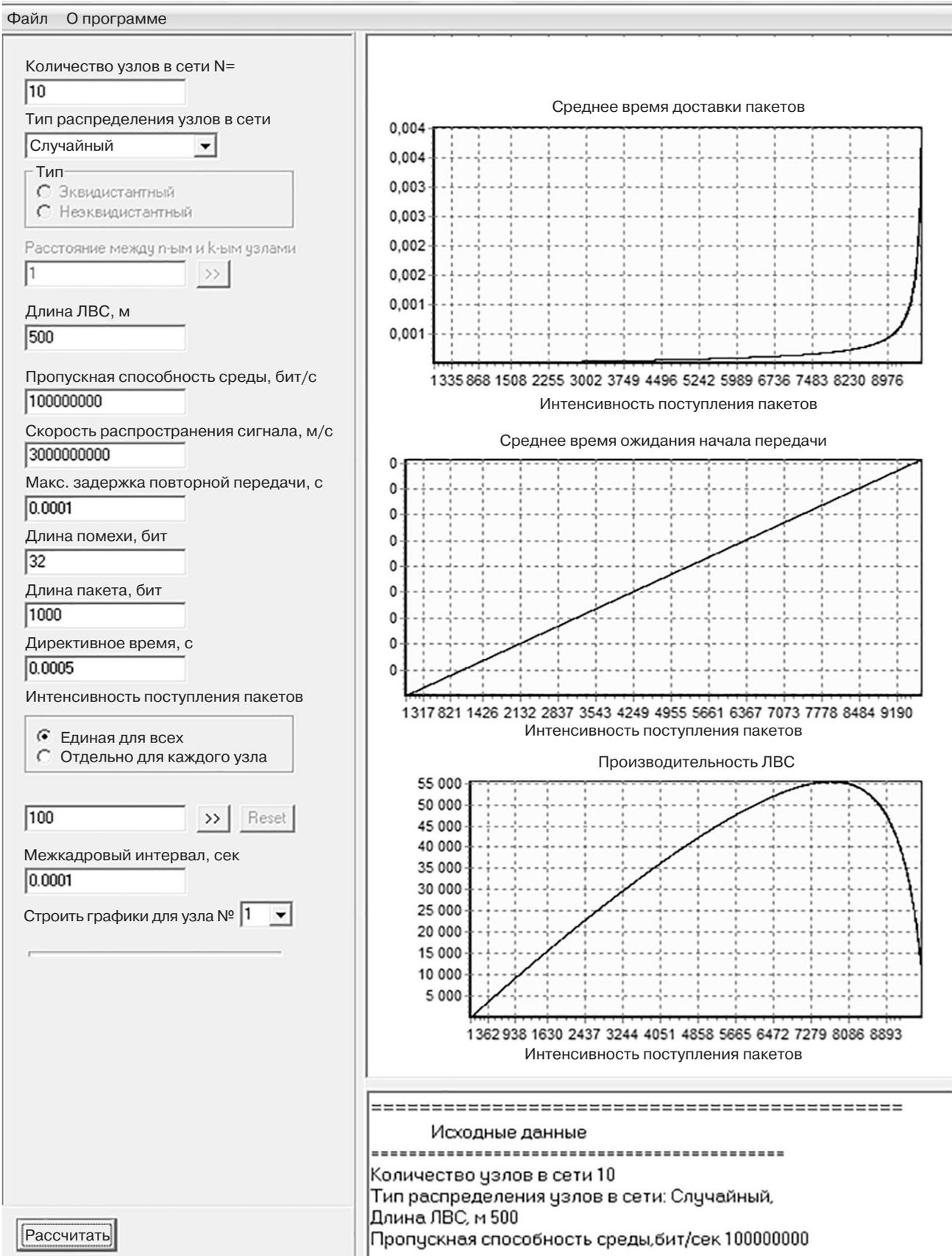


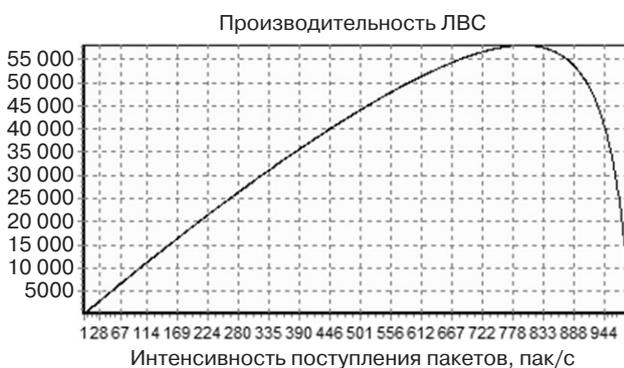
Рис. 1. Экранная форма ввода-вывода результатов моделирования.  
ЛВС – локальная вычислительная сеть



**Рис. 2.** Зависимость среднего времени ожидания передачи пакетов в узлах от интенсивности поступления пакетов в узлы беспроводной сети и одинаковой интенсивности поступления пакетов в узлы сети



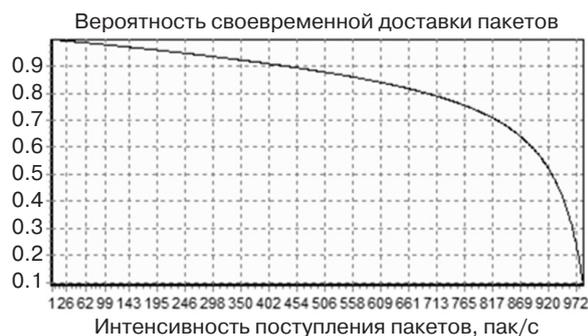
**Рис. 5.** Зависимость загрузки передающей среды при поступлении пакета в узел от интенсивности поступления пакетов в узлы беспроводной сети при случайном размещении узлов ( $N = 100$ ), одинаковой интенсивности поступления пакетов в узлы сети



**Рис. 3.** Зависимость производительности сети от интенсивности поступления пакетов в узлы беспроводной сети при случайном размещении узлов ( $N = 100$ ), одинаковой интенсивности поступления пакетов в узлы сети и ограничении на время доставки пакетов



**Рис. 6.** Зависимость загрузки узлов сети от интенсивности поступления пакетов в узлы беспроводной сети при случайном размещении узлов ( $N = 100$ ) и одинаковой интенсивности поступления пакетов в узлы сети



**Рис. 4.** Зависимость вероятности своевременной доставки пакетов от интенсивности поступления пакетов в узлы беспроводной сети при случайном размещении узлов ( $N = 100$ ), одинаковой интенсивности поступления пакетов в узлы сети и ограничении на время доставки пакетов

Отметим, что с увеличением размеров сети и увеличением количества узлов при заданной пропускной способности сети для сбалансированности сети во всем диапазоне изменения нагрузки для

получения оптимальной производительности при ограничениях на время передачи необходимо уменьшать длину передаваемых информационных пакетов, т.к. при этом будет уменьшаться вероятность возникновения конфликтов.

Конкретные рекомендации по выбору параметров и режимов функционирования беспроводной сети можно получить, проводя многовариантные аналитические расчеты с помощью комплекса программ, реализующего разработанный аналитический метод исследования беспроводных сетей с множественным доступом CSMA/CA к передающей среде.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получены следующие основные результаты.

Проведена классификация моделей анализа вероятностно-временных характеристик обработки информации в распределенных информационно-вычислительных системах.

Показана необходимость первоочередной разработки вложенных аналитических моделей,

описывающих процессы передачи пакетов при ограничениях на время передачи информации в сетях на канальном уровне.

Получены аналитические формулы для оценки временных характеристик передачи пакетов, загрузки узлов, загрузки передающей среды и производительности беспроводных сетей с методом доступа CSMA/CA, работа которых описывается стандартом связи IEEE 802.11.

На базе разработанного аналитического метода реализован комплекс программ. Применение программных средств позволяет оценить производительность беспроводной сети и вероятностно-временные характеристики передачи пакетов при различных пропускных способностях передающей среды и размерах сети, а также дает возможность осуществить многовариантный анализ различных

режимов функционирования беспроводных сетей с методом доступа CSMA/CA.

Изложение теоретических положений предложенного аналитического метода по оценке вероятностно-временных характеристик и производительности при ограничении на время передачи информации в беспроводных сетях CSMA/CA является достаточно универсальным и используется при формировании практических работ по дисциплинам «Архитектура вычислительных систем» и «Методы и средства защиты компьютерной информации» РТУ МИРЭА.

**Вклад авторов.** Все авторы в равной степени внесли свой вклад в исследовательскую работу.

**Authors' contribution.** All authors equally contributed to the research work.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Таненбаум Э.С., Уэзеролл Д. *Компьютерные сети*: пер. с англ. СПб.: Питер; 2018. 960 с.
2. Кузьменко Н.Г. *Компьютерные сети и сетевые технологии*. М.: Наука и техника; 2015. 368 с.
3. Епанишников А.М. *Локальные вычислительные сети*. М.: Диалог-МИФИ; 2014. 224 с.
4. Смирнова Е.В. *Технологии современных сетей Ethernet. Методы коммутации и управления потоками данных*. М.: БХВ-Петербург; 2012. 272 с.
5. Акимова Г.П., Соловьев А.В., Тарханов И.А. Моделирование надежности распределенных вычислительных систем. *Информационные технологии и вычислительные системы (ИТuBC)*. 2019;3:79–86. <https://doi.org/10.14357/20718632190307>
6. Павский В.А., Павский К.В. Математическая модель для расчета показателей надежности масштабируемых вычислительных систем с учетом времени переключения. *Известия ЮФУ. Технические науки*. 2020;2(212):134–145. <https://doi.org/10.18522/2311-3103-2020-2-134-145>
7. Леонтьев А.С. Многоуровневые аналитические и аналитико-имитационные модели оценки вероятностно-временных характеристик многомашинных вычислительных комплексов с учетом надежности. *Международный научно-исследовательский журнал*. 2023;5(131). <https://doi.org/10.23670/IRJ.2023.131.8>
8. Леонтьев А.С., Тимошкин М.С. Исследование погрешности многоуровневых аналитических и аналитико-имитационных моделей оценки вероятностно-временных характеристик многомашинных вычислительных комплексов с учетом надежности. *Научный журнал «Наукаосфера»*. 2023;3(1):143–156. <https://doi.org/10.5281/zenodo.7736570>
9. Альшаев И.А., Лаврухин В.А. О проектировании и оптимизации сетей Wi-Fi. *Информационные технологии и телекоммуникации*. 2016;4(1):87–95.
10. Денисенко В. Беспроводные локальные сети. Часть 2. *Современные технологии автоматизации (СТА)*. 2009;2:96–101.
11. Хелд Г. *Технологии передачи данных*: пер. с англ. СПб.: Питер, ВHV; 2003. 720 с.
12. Шарафуллина А.Ю., Галямов Р.Р., Зарипова Р.С. Технические принципы создания беспроводной локальной сети Wi-Fi. *T-Comm: Телекоммуникация и транспорт*. 2021;15(7):28–33.
13. Звонарева Г.А., Бузунов Д.С. Использование имитационного моделирования для оценки временных характеристик распределенной вычислительной системы. *Открытое образование*. 2022;26(5):32–39. <https://doi.org/10.21686/1818-4243-2022-5-32-39>
14. Бродский Ю.И. *Распределенное имитационное моделирование сложных систем*. М.: Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН; 2010. 156 с.
15. Zhmatov D.V. Impulse Disturbance Filtration at Digital Substations. In: *Proceedings of 14th International Conference Management of Large-Scale System Development (MLSD)*. 2021. <https://doi.org/10.1109/MLSD52249.2021.9600257>
16. Леонтьев А.С. Разработка аналитических методов, моделей и методик анализа локальных вычислительных сетей. *Теоретические вопросы программного обеспечения: Межвузовский сборник научных трудов*. М.: МИРЭА; 2001. С. 70–94.

## REFERENCES

1. Tanenbaum E.S., Wetherall D. *Computer Networks*: transl. from Engl. St. Petersburg: Piter; 2018. 960 p. (in Russ.). [Tanenbaum E.S., Wetherall D. *Computer Networks*. Prentice Hall; 2011. 962 p.]
2. Kuzmenko N.G. *Komp'yuternye seti i setevye tekhnologii (Computer Networks and Networking Technologies)*. Moscow: Nauka i Tekhnika; 2015. 368 p. (in Russ.).
3. Epanishnikov A.M. *Lokal'nye vychislitel'nye seti (Local Area Networks)*. Moscow: Dialog-MIFI; 2014. 224 p. (in Russ.).
4. Smirnova E.V. *Tekhnologii sovremennykh setei Ethernet. Metody kommutatsii i upravleniya potokami dannykh (Modern Ethernet Network Technologies. Methods of Data Switching and Flow Control)*. Moscow: BKhV-Peterburg; 2012. 272 p. (in Russ.).
5. Akimova G.P., Solovyev A.V., Tarkhanov I.A. Modelling the Reliability of Distributed Information Systems. *Informatsionnye tekhnologii i vychislitel'nye sistemy (ITiVS) = J. Inform. Technol. & Computing Syst.* 2019;3:79–86 (in Russ.). <https://doi.org/10.14357/20718632190307>
6. Pavsky V.A., Pavsky K.V. Mathematical Model for Calculating Reliability Indicators of Scalable Computer Systems Considering Switching Time. *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki = Izvestiya SFedU. Engineering Sciences.* 2020;2(212): 134–145 (in Russ.). <https://doi.org/10.18522/2311-3103-2020-2-134-145>
7. Leontyev A.S. Multilevel Analytical and Analytical-Simulation Models for Evaluating the Probabilistic and Temporal Characteristics of Multimachine Computing Complexes with Regard to Reliability. *Mezhdunarodnyi nauchno-issledovatel'skii zhurnal = International Research Journal.* 2023;5(131) (in Russ.). <https://doi.org/10.23670/IRJ.2023.131.8>
8. Leontyev A.S., Timoshkin M.S. Research of the error of multilevel analytical and analytic-simulation models for evaluation of the probabilistic-time characteristics of multi-machine computing complexes with reliability included. *Naukosfera.* 2023;3(1):143–156 (in Russ.). <https://doi.org/10.5281/zenodo.7736570>
9. Alshaev I.A., Lavrukhin V.A. Wi-Fi Networks Design and Optimization. *Informatsionnye tekhnologii i telekommunikatsii = Information Technologies and Telecommunications.* 2016;4(1):87–95 (in Russ.).
10. Denisenko V. Wireless Local Area Networks. Part 2. *Sovremennye Tekhnologii Avtomatizatsii = STA.* 2009;2:96–101 (in Russ.).
11. Held G. *Tekhnologii peredachi dannykh (Data Transmission Technologies)*: transl. from Engl. St. Petersburg: Piter, BHV; 2003. 720 p. (in Russ.). [Held G. *Understanding Data Communications*. Boston: Addison-Wesley; 2002. 788 p.]
12. Sharafullina A.Yu., Galyamov R.R., Zaripova R.S. Technical Principles of Creating a Wireless Local Network Wi-Fi. *T-Comm: Telekommunikatsiya i transport = T-Comm.* 2021;15(7):28–33 (in Russ.).
13. Zvonareva G.A., Buzunov D.S. Using Simulation Modeling to Estimate Time Characteristics of a Distributed Computing System. *Otkrytoe obrazovanie = Open Education.* 2022;26(5):32–39 (in Russ.). <https://doi.org/10.21686/1818-4243-2022-5-32-39>
14. Brodskii Yu.I. *Raspredelelnoe imitatsionnoe modelirovanie slozhnykh sistem (Distributed Simulation Modeling of Complex Systems)*. Moscow: Vychislitel'nyi tsentr im. A.A. Dorodnitsyna RAN; 2010. 156 p. (in Russ.).
15. Zhmatov D.V. Impulse Disturbance Filtration at Digital Substations. In: *Proceedings of 14th International Conference Management of Large-Scale System Development (MLSD)*. 2021. <https://doi.org/10.1109/MLSD52249.2021.9600257>
16. Leontyev A.S. Development of Analytical Methods, Models, and Techniques for Local Area Networks Analysis. In: *Theoretical Issues of Software Engineering: Interuniversity Collection of Scientific Papers*. Moscow: MIREA; 2001. P. 70–94 (in Russ.).

### Об авторах

**Леонтьев Александр Савельевич**, к.т.н., старший научный сотрудник, доцент кафедры математического обеспечения и стандартизации информационных технологий, Институт информационных технологий ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: leontev@mirea.ru. SPIN-код РИНЦ 5798-9721, <https://orcid.org/0000-0003-3673-2468>

**Жматов Дмитрий Владимирович**, к.т.н., доцент, доцент кафедры математического обеспечения и стандартизации информационных технологий, Институт информационных технологий ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: zhmatov@mirea.ru. Scopus Author ID 56825948100, SPIN-код РИНЦ 2641-6783, <https://orcid.org/0000-0002-7192-2446>

### About the authors

**Alexander S. Leontyev**, Cand. Sci. (Eng.), Senior Researcher, Associate Professor, Department of Mathematical Support and Standardization, Institute of Information Technologies, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: leontev@mirea.ru. RSCI SPIN-code 5798-9721, <https://orcid.org/0000-0003-3673-2468>

**Dmitry V. Zhmatov**, Cand. Sci. (Eng.), Docent, Associate Professor, Department of Mathematical Support and Standardization, Institute of Information Technologies, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: zhmatov@mirea.ru. Scopus Author ID 56825948100, RSCI SPIN-code 2641-6783, <https://orcid.org/0000-0002-7192-2446>

Математическое моделирование  
Mathematical modeling

УДК 531.391  
<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-2-77-89>



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

## Математическая модель гравитационного потенциала планеты с учетом приливных деформаций

А.В. Шатина<sup>®</sup>,  
А.С. Борец

МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, 119454 Россия  
<sup>®</sup> Автор для переписки, e-mail: [shatina\\_av@mail.ru](mailto:shatina_av@mail.ru)

### Резюме

**Цели.** В работе исследуется гравитационный потенциал вязкоупругой планеты, совершающей движение в гравитационном поле массивного притягивающего центра (звезды), спутника и еще одной или нескольких планет, движущихся по кеплеровским эллиптическим орбитам относительно притягивающего центра. Отличные от вязкоупругой планеты небесные тела моделируются материальными точками. В рамках линейной модели теории вязкоупругости решается задача нахождения вектора упругого смещения. Традиционно для определения гравитационного поля Земли используется модель твердого тела, а учет приливных деформаций отражается в виде малых поправок к коэффициентам модели геопотенциала. В данной работе для учета приливных эффектов используется модель вязкоупругого шара. Актуальность темы исследования связана с высокоточным прогнозированием движения искусственных спутников Земли, высокоточным измерением гравитационного поля Земли.

**Методы.** Используются асимптотические и аналитические методы, разработанные В.Г. Вильке для механических систем, содержащих вязкоупругие элементы большой жесткости, методы классической механики, математического анализа. Построение графиков выполнено с помощью математического пакета *Octave*.

**Результаты.** На основе решения квазистатической задачи теории упругости путем вычисления тройных интегралов по шаровой области получена формула для гравитационного потенциала деформируемой планеты, а также вычислен гравитационный потенциал Земли с учетом твердотельных приливных эффектов от Луны, Солнца и Венеры во внешней точке. Построены графики, показывающие зависимость гравитационного потенциала Земли от времени.

**Выводы.** Из полученных теоретических и численных результатов следует, что основной вклад в гравитационный потенциал Земли вносят Луна и Солнце. Влияние других планет Солнечной системы мало. Значение гравитационного потенциала во внешней точке Земли с учетом приливных эффектов зависит как от положения точки в подвижной системе координат, так и от взаимного расположения небесных тел.

**Ключевые слова:** гравитационный потенциал, вязкоупругая планета, приливы, орбита, элементы орбиты, математическое моделирование

• Поступила: 25.07.2023 • Доработана: 25.09.2023 • Принята к опубликованию: 13.02.2024

**Для цитирования:** Шатина А.В., Борец А.С. Математическая модель гравитационного потенциала планеты с учетом приливных деформаций. *Russ. Technol. J.* 2024;12(2):77–89. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-2-77-89>

**Прозрачность финансовой деятельности:** Авторы не имеют финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## RESEARCH ARTICLE

# A mathematical model of the gravitational potential of the planet taking into account tidal deformations

**Albina V. Shatina** @,  
**Alexandra S. Borets**

*MIREA – Russian Technological University, Moscow, 119454 Russia*

@ Corresponding author, e-mail: [shatina\\_av@mail.ru](mailto:shatina_av@mail.ru)

### Abstract

**Objectives.** This paper investigates the gravitational potential of a viscoelastic planet moving in the gravitational field of a massive attracting center (star), a satellite and one or more other planets moving in Keplerian elliptical orbits relative to the attracting center. Celestial bodies other than a viscoelastic planet are modeled by material points. Within the framework of the linear model of the theory of viscoelasticity, the problem of finding the vector of elastic displacement has been resolved. Traditionally, a solid body model is used to determine the Earth's gravitational field, while tidal deformations are taken into account in the form of small corrections to the coefficients of the geopotential model. In this work, the viscoelastic ball model is used to take into account tidal effects. The relevance of the research topic is associated with high-precision forecasting of the movement of artificial satellites of the Earth, high-precision measurement of the Earth's gravitational field.

**Methods.** In this study the asymptotic and analytical methods developed by V.G. Vilke are used for mechanical systems containing viscoelastic elements of high rigidity, as well as methods of classical mechanics, mathematical analysis. The graphs were plotted using the *Octave* mathematical package.

**Results.** After resolving the quasi-static problem of elasticity theory by calculating triple integrals over a spherical area, a formula for the gravitational potential of a deformable planet was obtained. In addition, the gravitational potential of the Earth was also calculated taking into account solid-state tidal effects from the Moon, Sun, and Venus at an external point. Graphs were constructed to show the dependence of the Earth's gravitational potential on time.

**Conclusions.** The theoretical and numerical results established herein show that the main contribution to the gravitational potential of the Earth is made by the Moon and the Sun. The influence of other planets in the solar system is small. The value of the gravitational potential at the outer point of the Earth, taking into account tidal effects, depends both on the position of the point in the moving coordinate system and on the relative position of celestial bodies.

**Keywords:** gravitational potential, viscoelastic planet, tides, orbit, orbit elements, mathematical modeling

• Submitted: 25.07.2023 • Revised: 25.09.2023 • Accepted: 13.02.2024

**For citation:** Shatina A.V., Borets A.S. A mathematical model of the gravitational potential of the planet taking into account tidal deformations. *Russ. Technol. J.* 2024;12(2):77–89. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-2-77-89>

**Financial disclosure:** The authors have no a financial or property interest in any material or method mentioned.

The authors declare no conflicts of interest.

## ВВЕДЕНИЕ

Одной из важнейших задач в настоящее время является определение формы геоида Земли (экви-потенциальной поверхности земного поля тяжести). Это необходимо для топографических съемок различных масштабов, определения координат поворотных точек земельных участков при постановке на кадастровый учет, инженерных изысканий, геодезического обеспечения строительства и т.д. Чтобы определить точную поверхность геоида в любой точке планеты, необходимо выполнить совокупность измерений на поверхности геоида или в конкретной точке на поверхности Земли с учетом характера распределения масс, что практически неосуществимо.

Для решения этой задачи на околоземную орбиту были отправлены космические аппараты GRACE (совместная спутниковая миссия NASA и Германского центра авиации и космонавтики, 2002 г.) и GOCE (Европейское космическое агентство, 2009 г.). С помощью данных спутников были получены важные с точки зрения гравиметрии и высшей геодезии данные. В частности, была построена усовершенствованная модель геоида, которая превосходит по точности все предыдущие. Тем не менее, учитывая так называемые приливные эффекты, в т.ч. упругие деформации всего земного шара под действием силы тяготения Луны и Солнца, все полученные результаты измерения формы геоида Земли представляют собой некоторую усредненную картину и выполнены с определенной погрешностью.

Для решения фундаментальной задачи получения реальной формы геоида Земли с учетом всех приливных эффектов еще в 1950 г. советским ученым М.С. Молоденским было предложено [1, 2] вместо геоида использовать поверхность близкую к нему – квазигеоид, который не требует знания внутреннего строения земной коры. При сравнении квазигеоида и геоида необходимо учитывать, что в высоких горах расхождение будет приблизительно на 2–4 м, в низменных равнинах на 0.02–0.12 м, а на водной поверхности расхождений не будет. Поверхность квазигеоида определяется значениями гравитационного потенциала.

В работе [3] дается обзор методов изучения классической теории приливов. Впервые мысль о вековом замедлении вращения Земли под действием приливного трения была высказана И. Кантом в 1755 г. Первые фундаментальные исследования по влиянию приливов на движение планет и спутников принадлежат Дж.Г. Дарвину [4]. В связи с освоением космического пространства в 60-е годы прошлого века, а также в связи с появлением атомных стандартов времени интерес к приливной теории возродился вновь [5].

В настоящее время в соответствии с соглашениями IERS<sup>1</sup> (2010 г.) [6] приливные деформации

регистрируются в виде небольших поправок к коэффициентам геопотенциальной модели.

Приливы в планетах и их естественных спутниках играют важнейшую роль в их динамике и являются причиной перехода в спин-орбитальный резонанс 1:1 [4, 5, 7]. Считается также, что приливные силы приводят экзопланеты в спин-орбитальные резонансы более высокого порядка с их родительскими звездами [8].

Лунно-солнечные приливы влияют на изменение угловой скорости вращения Земли [9–11], погоды и климата [12], оказывают влияние на вулканическую деятельность [13]. Актуальность темы исследования связана с высокоточным прогнозированием движения искусственных спутников Земли [14–17].

Целью данной работы является вывод формулы для гравитационного потенциала планеты, моделируемой вязкоупругим телом шарообразной формы, движущимся в гравитационном поле притягивающего тела, естественного спутника и еще одной планеты. Для достижения поставленной цели используется метод разделения движения для механических систем, содержащих вязкоупругие тела большой жесткости [18]. Данная работа является продолжением и развитием результатов, полученных в работах [19, 20].

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для исследования гравитационного потенциала деформируемой планеты рассмотрим механическую систему, состоящую из неподвижного притягивающего центра (материальной точки  $O$  с массой  $m_1$ ), связки «вязкоупругая планета – спутник» и еще одной планеты. Спутник и вторую планету будем моделировать материальными точками  $F$  и  $P$  с массами  $m_2$  и  $m_3$  соответственно, а исследуемую планету – однородным вязкоупругим телом, имеющим форму шара радиуса  $r_0$  при отсутствии деформаций. Масса вязкоупругой планеты равна  $m$ , а плотность –  $\rho$ .

Пусть  $OXYZ$  – инерциальная система координат, начало которой совпадает с притягивающим центром;  $Dx_1x_2x_3$  – подвижная, связанная с вязкоупругой планетой, система координат с началом в ее центре масс  $D$ ;  $C$  – барицентр системы «вязкоупругая планета – спутник». Также введем в рассмотрение системы осей Кёнига  $CX''Y''Z''$  и  $DX''Y''Z''$  (рис. 1).

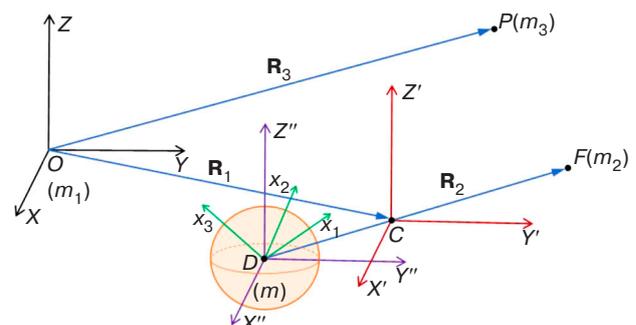


Рис. 1. Постановка задачи

<sup>1</sup> International Earth Rotation and Reference Systems Service.

Положим  $\mathbf{R}_1 = \overline{OC}$  и  $\mathbf{R}_2 = \overline{DF}$ ,  $\mathbf{R}_3 = \overline{OP}$ . Согласно постановке задачи

$$m_2 \ll m \ll m_1, |\mathbf{R}_2| \ll |\mathbf{R}_1|. \quad (1.1)$$

Деформации вязкоупругой планеты в точке  $M$  с радиус-вектором  $\mathbf{r}$  описываются вектором упругого смещения  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ . В подвижной системе координат  $Dx_1x_2x_3$

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3), \mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3).$$

Радиус-вектор точки  $M$  в системе координат  $OXYZ$  имеет вид:

$$\zeta(\mathbf{r}, t) = \overline{OD} + \Gamma(\mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)), \quad (1.2)$$

где  $\Gamma$  – матрица перехода от подвижной системы координат  $Dx_1x_2x_3$  к системе координат  $DX''Y''Z''$ .

Для определения центра масс деформированной планеты (радиус-вектора  $\overline{OD}$ ) и связанной с ней системы координат  $Dx_1x_2x_3$  необходимо выполнение условий [7]:

$$\overline{OD} = \frac{1}{m} \int_V \zeta(\mathbf{r}, t) \rho dx, \int_V \mathbf{u} dx = 0, \quad (1.3)$$

$$\int_V \text{rot} \mathbf{u} dx = 0, dx = dx_1 dx_2 dx_3,$$

где интегрирование производится по шару радиуса  $r_0$ :  $V = \{\mathbf{r} \in \mathbb{E}^3, |\mathbf{r}| \leq r_0\}$ ,  $\mathbb{E}^3$  – евклидово пространство.

С учетом условий (1.3) радиус-векторы  $\overline{OD}$ ,  $\overline{OF}$  точек  $D$  и  $F$  выражаются через векторы  $\mathbf{R}_1$ ,  $\mathbf{R}_2$  следующим образом:

$$\overline{OD} = \mathbf{R}_1 - \frac{m_2}{m + m_2} \mathbf{R}_2, \overline{OF} = \mathbf{R}_1 + \frac{m}{m + m_2} \mathbf{R}_2. \quad (1.4)$$

Потенциальная энергия гравитационных полей данной механической системы представляется в виде:

$$\Pi = -\frac{fm_1m_3}{|\overline{OP}|} - \frac{fm_1m_2}{|\overline{OF}|} - \frac{fm_2m_3}{|\overline{FP}|} - \int_V \frac{fm_1\rho dx}{|\zeta(\mathbf{r}, t)|} - \int_V \frac{fm_2\rho dx}{|\zeta(\mathbf{r}, t) - \overline{OF}|} - \int_V \frac{fm_3\rho dx}{|\zeta(\mathbf{r}, t) - \overline{OP}|},$$

где  $f$  – универсальная гравитационная постоянная.

Вязкоупругие свойства планеты описываются следующими параметрами: модулем Юнга  $E$ , коэффициентом Пуассона  $\nu$  и коэффициентом вязкого трения  $\chi$  ( $\chi > 0$ ). Потенциальную энергию упругих

деформаций  $\mathcal{E}$  и диссипативный функционал  $D$  зададим согласно линейной модели [7, 18]:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \int_V \mathcal{E}[\mathbf{u}] dx, \mathcal{E}[\mathbf{u}] = \alpha_1 (I_E^2 - \alpha_2 \Pi_E), \\ \alpha_1 &= \frac{E(1-\nu)}{2(1+\nu)(1-2\nu)}, \alpha_2 = \frac{2(1-2\nu)}{1-\nu}, \\ \alpha_1 &> 0, 0 < \alpha_2 < 3, \\ I_E &= \sum_{i=1}^3 e_{ii}, \Pi_E = \sum_{i < j} (e_{ii}e_{jj} - e_{ij}^2), \\ e_{ij} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$D = \int_V D[\dot{\mathbf{u}}] dx, D[\dot{\mathbf{u}}] = \chi \mathcal{E}[\dot{\mathbf{u}}].$$

Будем считать, что точки  $D$ ,  $C$ ,  $F$ ,  $P$  движутся в плоскости  $OXY$ , а  $\mathbf{R}_1$ ,  $\mathbf{R}_2$ ,  $\mathbf{R}_3$  – заданные вектор-функции времени. Кроме того, предполагаем, что вектор угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$  системы координат  $Dx_1x_2x_3$  относительно  $DX''Y''Z''$  постоянен. Этот вектор определяется равенством

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a} = \Gamma^{-1} \dot{\Gamma} \mathbf{a},$$

где  $\mathbf{a}$  – произвольный вектор.

## 2. ВЕКТОР УПРУГОГО СМЕЩЕНИЯ

Согласно вариационному принципу Даламбера – Лагранжа имеет место равенство [18, 21]:

$$\begin{aligned} \int_V (\ddot{\zeta}, \delta \zeta) \rho dx + \delta \Pi + \int_V (\nabla \mathcal{E}[\mathbf{u}] + \nabla D[\dot{\mathbf{u}}] + \lambda_1, \delta \mathbf{u}) dx + \\ + \lambda_2 \int_V \text{rot} \delta \mathbf{u} dx = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \in (W_2^1(V))^3. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Множители Лагранжа  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  в (2.1) соответствуют условиям (1.3),  $(W_2^1(V))^3$  – пространство Соболева.

Согласно (1.2) и (1.4)

$$\zeta = \mathbf{R}_1 - \frac{m_2}{m + m_2} \mathbf{R}_2 + \Gamma(\mathbf{r} + \mathbf{u}).$$

Тогда

$$\dot{\zeta} = \dot{\mathbf{R}}_1 - \frac{m_2}{m + m_2} \dot{\mathbf{R}}_2 + \Gamma[\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u}) + \dot{\mathbf{u}}],$$

$$\begin{aligned} \ddot{\zeta} &= \ddot{\mathbf{R}}_1 - \frac{m_2}{m+m_2} \ddot{\mathbf{R}}_2 + \\ &+ \mathbf{\Gamma} \left\{ \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u})] + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{u}} + \ddot{\mathbf{u}} \right\}, \\ \delta\zeta &= \mathbf{\Gamma} \delta\mathbf{u}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

В равенстве (2.2) учтено, что орбитальное и вращательное движения механической системы заданы, поэтому вариации  $\mathbf{R}_1$ ,  $\mathbf{R}_2$ ,  $\mathbf{\Gamma}$  равны нулю.

Далее:

$$\begin{aligned} \delta\Pi &= \int_V \left( \frac{fm_1\zeta}{|\zeta|^3}, \delta\zeta \right) \rho dx + \int_V \left( \frac{fm_2(\zeta - \overline{OF})}{|\zeta - \overline{OF}|^3}, \delta\zeta \right) \rho dx + \\ &+ \int_V \left( \frac{fm_3(\zeta - \overline{OP})}{|\zeta - \overline{OP}|^3}, \delta\zeta \right) \rho dx. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \zeta - \overline{OF} &= -\mathbf{R}_2 + \mathbf{\Gamma}(\mathbf{r} + \mathbf{u}), \\ \zeta - \overline{OP} &= \mathbf{R}_1 - \frac{m_2}{m+m_2} \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_3 + \mathbf{\Gamma}(\mathbf{r} + \mathbf{u}). \end{aligned}$$

Пояснение к нахождению вариации (2.3) функционала  $\Pi$ : пусть  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ , тогда

$$\begin{aligned} \delta \frac{1}{|\mathbf{a}|} &= \delta \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} = \\ &= -\frac{1}{2} (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^{-3/2} \cdot \delta(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) = \\ &= -\frac{\delta(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)}{2(\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2})^3} = -\frac{2a_1\delta a_1 + 2a_2\delta a_2 + 2a_3\delta a_3}{2|\mathbf{a}|^3} = \\ &= -\frac{(\mathbf{a}, \delta\mathbf{a})}{|\mathbf{a}|^3}. \end{aligned}$$

С учетом (2.2):

$$\begin{aligned} \delta\Pi &= \int_V \left( \frac{\mathbf{\Gamma}^{-1}\zeta}{|\zeta|^3}, \delta\mathbf{u} \right) fm_1 \rho dx + \\ &+ \int_V \left( \frac{\mathbf{\Gamma}^{-1}(\zeta - \overline{OF})}{|\zeta - \overline{OF}|^3}, \delta\mathbf{u} \right) fm_2 \rho dx + \\ &+ \int_V \left( \frac{\mathbf{\Gamma}^{-1}(\zeta - \overline{OP})}{|\zeta - \overline{OP}|^3}, \delta\mathbf{u} \right) fm_3 \rho dx, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\int_V (\ddot{\zeta}, \delta\zeta) \rho dx = \int_V (\mathbf{\Gamma}^{-1}\ddot{\zeta}, \delta\mathbf{u}) \rho dx. \quad (2.5)$$

Считаем, что жесткость материала деформируемой планеты является большой, т.е.  $\hat{\varepsilon} = |\boldsymbol{\omega}|^2 \rho r_0^2 E^{-1} \ll 1$ . Векторы  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  можно искать в виде разложений по степеням  $\varepsilon = E^{-1}$  [18]:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon \mathbf{u}_1(\mathbf{r}, t) + \varepsilon^2 \mathbf{u}_2(\mathbf{r}, t) + \dots,$$

$$\lambda_1(t) = \lambda_{10}(t) + \varepsilon \lambda_{11}(t) + \dots, \lambda_2(t) = \lambda_{20}(t) + \varepsilon \lambda_{21}(t) + \dots$$

Из уравнения (2.1) с учетом (2.4), (2.5) для вектор-функции  $\mathbf{u}_1$  получим равенство:

$$\begin{aligned} &\int_V \left( \mathbf{\Gamma}^{-1} \left( \ddot{\mathbf{R}}_1 - \frac{m_2}{m+m_2} \ddot{\mathbf{R}}_2 \right) + \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}] + \right. \\ &+ \frac{(\mathbf{\Gamma}^{-1}\overline{OD} + \mathbf{r})}{|\mathbf{\Gamma}^{-1}\overline{OD} + \mathbf{r}|^3} fm_1 + \frac{(\mathbf{\Gamma}^{-1}\overline{FD} + \mathbf{r})}{|\mathbf{\Gamma}^{-1}\overline{FD} + \mathbf{r}|^3} fm_2 + \\ &+ \left. \frac{(\mathbf{\Gamma}^{-1}\overline{PD} + \mathbf{r})}{|\mathbf{\Gamma}^{-1}\overline{PD} + \mathbf{r}|^3} fm_3, \delta\mathbf{u} \right) \rho dx + \\ &+ \int_V (\nabla \mathcal{E}[\mathbf{u}_1] + \nabla D[\dot{\mathbf{u}}_1] + \lambda_{10}, \delta\mathbf{u}) dx + \\ &+ \int_{\partial V} (\lambda_{20} \times \mathbf{n}) \delta\mathbf{u} d\sigma = 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Последнее слагаемое в (2.6) следует из формулы Остроградского – Гаусса, представленной в виде:

$$\int_V (\lambda_{20}, \text{rot} \delta\mathbf{u}) dx = \int_{\partial V} (\delta\mathbf{u} \times \lambda_{20}) \mathbf{n} d\sigma,$$

где  $\partial V$  – граница области  $V$ , а  $\mathbf{n}$  – нормаль к  $\partial V$ .

Следуя [7, 18], подставим в (2.6) последовательно  $\delta\mathbf{u} = \delta\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}$  и  $\delta\mathbf{u} = \boldsymbol{\alpha}$ ,  $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{E}^3$ . В результате получим:

$$\int_{\partial V} ((\lambda_{20} \times \mathbf{n}), (\delta\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r})) d\sigma = \frac{8}{3} \pi r_0^3 (\lambda_{20}, \delta\boldsymbol{\alpha}) = 0$$

$$\forall \delta\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{E}^3 \Rightarrow \lambda_{20} = 0,$$

$$\begin{aligned} &\mathbf{\Gamma}^{-1} \left\{ m\ddot{\mathbf{R}}_1 - \frac{mm_2}{m+m_2} \ddot{\mathbf{R}}_2 + \frac{fmm_1\overline{OD}}{|\overline{OD}|^3} + \right. \\ &+ \left. \frac{fmm_2\overline{FD}}{|\overline{FD}|^3} + \frac{fmm_3\overline{PD}}{|\overline{PD}|^3} \right\} + \frac{4}{3} \pi r_0^3 \lambda_{10} = 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Также при выводе соотношения (2.7) было учтено равенство

$$\int_V \frac{\mathbf{a} + \mathbf{r}}{|\mathbf{a} + \mathbf{r}|^3} \rho dx = \frac{m\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^3},$$

здесь вектор  $\mathbf{a}$  не зависит от  $\mathbf{r}$ .

Так как размеры деформируемой планеты много меньше расстояний между взаимно тяготеющими телами, то

$$|\mathbf{r}| \ll |\overline{OD}|, \quad |\mathbf{r}| \ll |\overline{FD}|, \quad |\mathbf{r}| \ll |\overline{PD}|.$$

Если  $|\mathbf{r}| \ll |\mathbf{a}|$ , то

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{a} + \mathbf{r}}{|\mathbf{a} + \mathbf{r}|^3} &= \frac{\mathbf{a} + \mathbf{r}}{(\mathbf{a} + \mathbf{r}, \mathbf{a} + \mathbf{r})^{3/2}} = \\ &= \frac{\mathbf{a} + \mathbf{r}}{((\mathbf{a}, \mathbf{a}) + 2(\mathbf{a}, \mathbf{r}) + (\mathbf{r}, \mathbf{r}))^{3/2}} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{r}}{|\mathbf{a}|^3} \left\{ 1 + \frac{2(\mathbf{a}, \mathbf{r})}{|\mathbf{a}|^2} + \frac{(\mathbf{r}, \mathbf{r})}{|\mathbf{a}|^2} \right\}^{-3/2} \approx \\ &\approx \frac{\mathbf{a} + \mathbf{r}}{|\mathbf{a}|^3} \left\{ 1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{2(\mathbf{a}, \mathbf{r})}{|\mathbf{a}|^2} \right\} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^3} - \frac{3\mathbf{a}(\mathbf{a}, \mathbf{r})}{|\mathbf{a}|^5} + \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{a}|^3}. \end{aligned}$$

Тогда уравнение (2.6) примет вид:

$$\begin{aligned} &\int_V \left( \Gamma^{-1} \left( \ddot{\mathbf{R}}_1 - \frac{m_2}{m+m_2} \ddot{\mathbf{R}}_2 \right) + \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}] + \right. \\ &+ \sum_{j=1}^3 \left\{ \frac{fm_j \mathbf{q}_j}{|\mathbf{q}_j|^3} + \frac{fm_j}{|\mathbf{q}_j|^3} \cdot \left[ \mathbf{r} - 3(\boldsymbol{\xi}_j, \mathbf{r}) \boldsymbol{\xi}_j \right] \right\} + \\ &\left. + \frac{1}{\rho} \lambda_{10}(t), \delta \mathbf{u} \right) \rho dx + \int_V (\nabla \mathcal{E} [\mathbf{u}_1 + \chi \dot{\mathbf{u}}_1], \delta \mathbf{u}) dx = 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1 &= \Gamma^{-1} \overline{OD} = \Gamma^{-1} \left( \mathbf{R}_1 - \frac{m_2}{m+m_2} \mathbf{R}_2 \right), \\ \mathbf{q}_2 &= \Gamma^{-1} \overline{FD} = -\Gamma^{-1} \mathbf{R}_2, \\ \mathbf{q}_3 &= \Gamma^{-1} \overline{PD} = \Gamma^{-1} \left( \mathbf{R}_1 - \frac{m_2}{m+m_2} \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_3 \right), \\ \boldsymbol{\xi}_i &= \frac{\mathbf{q}_i}{|\mathbf{q}_i|}, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Так как  $m = \frac{4}{3} \pi r_0^3 \rho$ , то из (2.7) следует

$$\begin{aligned} \lambda_{10} &= -\rho \left\{ \Gamma^{-1} \left( \ddot{\mathbf{R}}_1 - \frac{m_2}{m+m_2} \ddot{\mathbf{R}}_2 \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{fm_1 \mathbf{q}_1}{|\mathbf{q}_1|^3} + \frac{fm_2 \mathbf{q}_2}{|\mathbf{q}_2|^3} + \frac{fm_3 \mathbf{q}_3}{|\mathbf{q}_3|^3} \right\}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

С учетом (2.10) получим из (2.8) следующую задачу для определения  $\mathbf{u}_1(\mathbf{r}, t)$ :

$$\rho \left\{ \boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}] + \sum_{j=1}^3 \frac{fm_j}{|\mathbf{q}_j|^3} \cdot \left[ \mathbf{r} - 3(\boldsymbol{\xi}_j, \mathbf{r}) \boldsymbol{\xi}_j \right] \right\} + \quad (2.11)$$

$$+ \varepsilon \nabla \mathcal{E} [\mathbf{u}_1 + \chi \dot{\mathbf{u}}_1] = 0,$$

$$\boldsymbol{\sigma}_n \Big|_{r=r_0} = 0. \quad (2.12)$$

Здесь

$$\varepsilon \nabla \mathcal{E} = -\frac{1}{2(1+\nu)} \left( \frac{1}{1-2\nu} \text{grad div } \mathbf{u} + \Delta \mathbf{u} \right),$$

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3), \quad \mathbf{n} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3), \quad \boldsymbol{\sigma}_n = (\sigma_{n1}, \sigma_{n2}, \sigma_{n3}),$$

$$\sigma_{ni} = \frac{E\nu\gamma_i}{(1+\nu)(1-2\nu)} \text{div } \mathbf{u} + \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} + \text{grad } u_i, \mathbf{n} \right).$$

Решение задачи (2.11)–(2.12) имеет вид [7, 22]:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{u}_{10}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{u}_{11}(\mathbf{r}, t) + \\ &+ \mathbf{u}_{12}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{u}_{13}(\mathbf{r}, t), \end{aligned} \quad (2.13)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{10}(\mathbf{r}, t) &= \rho \left\{ \frac{2}{3} \omega^2 [d_1 r^2 + d_2 r_0^2] \mathbf{r} + \right. \\ &+ b_1 \left[ \frac{1}{6} \omega^2 r^2 - \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r})^2 \right] \mathbf{r} + \\ &+ \left. [b_2 r^2 + b_3 r_0^2] \cdot \left[ \frac{1}{3} \omega^2 \mathbf{r} - (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}) \boldsymbol{\omega} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\boldsymbol{\omega} = |\boldsymbol{\omega}|,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{1k}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{3\rho f m_k}{q_k^3} \left( 1 + \frac{3\chi \dot{q}_k}{q_k} \right) \left\{ b_1 \left[ \frac{1}{6} r^2 - \frac{1}{2} (\boldsymbol{\xi}_k, \mathbf{r})^2 \right] \mathbf{r} + \right. \\ &+ \left. [b_2 r^2 + b_3 r_0^2] \cdot \left[ \frac{1}{3} \mathbf{r} - (\boldsymbol{\xi}_k, \mathbf{r}) \boldsymbol{\xi}_k \right] \right\} - \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$-\frac{3\chi \rho f m_k}{q_k^3} \{ b_1 (\dot{\boldsymbol{\xi}}_k, \mathbf{r}) (\boldsymbol{\xi}_k, \mathbf{r}) \mathbf{r} +$$

$$+ [b_2 r^2 + b_3 r_0^2] [(\dot{\boldsymbol{\xi}}_k, \mathbf{r}) \boldsymbol{\xi}_k + (\boldsymbol{\xi}_k, \mathbf{r}) \dot{\boldsymbol{\xi}}_k] \},$$

$$q_k = |\mathbf{q}_k|, \quad k = 1, 2, 3,$$

$$d_1 = -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{10(1-\nu)}, \quad d_2 = \frac{(1-2\nu)(3-\nu)}{10(1-\nu)},$$

$$b_1 = \frac{2(1+\nu)}{5\nu+7}, \quad b_2 = -\frac{(1+\nu)(2+\nu)}{5\nu+7}, \quad (2.16)$$

$$b_3 = \frac{(1+\nu)(2\nu+3)}{5\nu+7}.$$

Вектор упругого смещения  $\mathbf{u}$  связан с вектор-функцией  $\mathbf{u}_1$  равенством:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{E} \mathbf{u}_1(\mathbf{r}, t). \quad (2.17)$$

В формуле (2.13) слагаемое  $\mathbf{u}_{10}$  отвечает за сплюснутость планеты вдоль оси вращения, а функции  $\mathbf{u}_{1k}$  ( $k = 1, 2, 3$ ) описывают приливные деформации планеты, вызванные гравитационными полями небесных тел  $O$ ,  $F$  и  $P$ .

### 3. ГРАВИТАЦИОННЫЙ ПОТЕНЦИАЛ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПЛАНЕТЫ ВО ВНЕШНЕЙ ТОЧКЕ

Используя вектор упругого смещения (2.17), гравитационный потенциал планеты можно вычислить по формуле:

$$\Pi(\mathbf{R}, t) = -f \int_V \frac{\rho dx}{|\Gamma(\mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)) - \mathbf{R}|}. \quad (3.1)$$

Здесь  $\mathbf{R} = \overline{DK}$  – радиус-вектор точки  $K$ , в которой определяется потенциал,  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор элемента объема  $dx$  с плотностью  $\rho$ . Вектор  $\mathbf{R}$  в формуле (3.1) задан в системе координат  $Dx_1x_2x_3$ . Интеграл вычисляется по шару  $V$  радиуса  $r_0$ .

Предполагается, что

$$|\mathbf{R}| > r_0, \quad |\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)| \ll |\mathbf{r} - \Gamma^{-1}\mathbf{R}|. \quad (3.2)$$

Согласно построенной модели, движение точек  $C$ ,  $F$ ,  $D$ ,  $P$  происходит в плоскости  $OXY$ . Координаты векторов  $\mathbf{R}_1$ ,  $\mathbf{R}_2$ ,  $\mathbf{R}_3$  в инерциальной системе  $OXYZ$  представляются в виде:

$$\mathbf{R}_i = R_i (\cos \psi_i, \sin \psi_i, 0),$$

$$R_i = \frac{a_i (1 - e_i^2)}{(1 + e_i \cos \vartheta_i)}, \quad \psi_i = g_i + \vartheta_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

$a_i$  – большая полуось,  $e_i$  – эксцентриситет,  $g_i$  – долгота перицентра,  $\vartheta_i$  – истинная аномалия орбиты конца вектора  $\mathbf{R}_i$ . Величины  $a_i$ ,  $e_i$ ,  $g_i$  являются постоянными параметрами задачи, а истинные аномалии – зависящими от времени функциями:

$$\dot{\vartheta}_i = \frac{(1 + e_i \cos \vartheta_i)^2}{(1 - e_i^2)^{3/2}} n_i, \quad n_i = \frac{2\pi}{T_i}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.3)$$

Величины  $T_i$  в формуле (3.3) – соответствующие периоды обращения.

Матрицу перехода от подвижной системы координат  $Dx_1x_2x_3$  к системе  $Dx''Y''Z''$  можно представить в виде произведения:

$$\Gamma = \Gamma_3(\psi) \Gamma_1(\theta) \Gamma_3(\varphi),$$

$$\Gamma_3(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_1(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  – углы Эйлера [21]. Связь между координатами вектора угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$  планеты  $p$ ,  $q$ ,  $s$  в системе координат  $Dx_1x_2x_3$  и углами Эйлера выражается посредством кинематических уравнений Эйлера:

$$\begin{cases} p = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ q = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \\ s = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}. \end{cases} \quad (3.4)$$

Направляя ось  $Dx_3$  по вектору  $\boldsymbol{\omega}$ , получим  $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$ . Поэтому из системы (3.4) следует:  $\dot{\psi} = 0$ ,  $\dot{\theta} = 0$ ,  $\dot{\varphi} = \omega$ , т.е. углы  $\psi$ ,  $\theta$  постоянны, а  $\varphi$  является линейной функцией времени. Без ограничения общности можно считать, что  $\psi_0 = 0$ . Поэтому матрицы  $\Gamma$  и  $\Gamma^{-1}$  представляются равенствами:

$$\Gamma = \Gamma_1(\theta_0) \Gamma_3(\varphi), \quad \Gamma^{-1} = \Gamma_3(-\varphi) \Gamma_1(-\theta_0),$$

$$\psi = \psi_0 (\psi_0 = 0), \quad \theta = \theta_0, \quad \varphi = \omega t + \varphi(0).$$

Зададим радиус-вектор внешней точки  $K$  в подвижной системе координат  $Dx_1x_2x_3$  с помощью сферических координат  $R$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$  ( $R = |\overline{DK}|$ ,  $\lambda$  – долгота,  $\mu$  – широта):

$$\mathbf{r}_K = \Gamma^{-1} \mathbf{R} = R \mathbf{e}_R, \quad (3.5)$$

$$\mathbf{e}_R = (\cos \lambda \cos \mu; \sin \lambda \cos \mu; \sin \mu), \quad R = r_0 + h, \quad h > 0.$$

С учетом условий (3.2) гравитационный потенциал (3.1), линеаризованный по компонентам вектора  $\mathbf{u}$ , имеет вид:

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{R}, t) = & - \int_V \frac{f \rho dx}{|\mathbf{r} - \Gamma^{-1} \mathbf{R}|} + \\ & + \int_V \frac{(\mathbf{r} - \Gamma^{-1} \mathbf{R}, \mathbf{u})}{|\mathbf{r} - \Gamma^{-1} \mathbf{R}|^3} f \rho dx. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Подставим в (3.6)

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{E} \sum_{k=0}^3 \mathbf{u}_{1k}(\mathbf{r}, t),$$

где вектор-функции  $\mathbf{u}_{1k}$  определяется формулами (2.14)–(2.16). Вычислим тройные интегралы в (3.6), используя значения вспомогательных интегралов:

$$\begin{aligned} \int_V \frac{dx}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|} &= \frac{V_0}{|\mathbf{a}|}, \quad \int_V \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{a}, \mathbf{r}) dx}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|^3} = 0, \quad \int_V \frac{\mathbf{r}^2 (\mathbf{r}-\mathbf{a}, \mathbf{r}) dx}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|^3} = 0, \\ \int_V \frac{(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r})(\mathbf{r}-\mathbf{a}, \boldsymbol{\omega}) dx}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|^3} &= \frac{r_0^2 V_0}{5} \left\{ \frac{(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega})}{|\mathbf{a}|^3} - \frac{3(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{a})^2}{|\mathbf{a}|^5} \right\}, \\ \int_V \frac{(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r})^2 (\mathbf{r}-\mathbf{a}, \mathbf{r}) dx}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|^3} &= \frac{2r_0^4 V_0}{35} \left\{ \frac{(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega})}{|\mathbf{a}|^3} - \frac{3(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{a})^2}{|\mathbf{a}|^5} \right\}, \\ \int_V \frac{\mathbf{r}^2 (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r})(\mathbf{r}-\mathbf{a}, \boldsymbol{\omega}) dx}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|^3} &= \frac{r_0^4 V_0}{7} \left\{ \frac{(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega})}{|\mathbf{a}|^3} - \frac{3(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{a})^2}{|\mathbf{a}|^5} \right\}, \end{aligned}$$

где  $V_0 = 4\pi r_0^3/3$ . После вычисления тройных интегралов по шаровой области  $V$  получим следующее выражение для гравитационного потенциала:

$$\begin{aligned} \Pi &= -\frac{fm}{R} - \frac{3fm^2 r_0 \Phi(v)}{140\pi ER^3} \left\{ \omega^2 - 3(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}_R)^2 \right\} + \\ &+ \sum_{k=1}^3 \frac{9f^2 m^2 m_k r_0 \Phi(v)}{140\pi E q_k^3 R^3} \left\{ 1 - 3(\boldsymbol{\xi}_k, \mathbf{e}_R)^2 \right\} \left( 1 + \frac{3\chi \dot{q}_k}{q_k} \right) + (3.7) \\ &+ \sum_{k=1}^3 \frac{27\chi f^2 m^2 m_k r_0 \Phi(v)}{70\pi E q_k^3 R^3} (\boldsymbol{\xi}_k, \mathbf{e}_R) (\boldsymbol{\xi}_k, \mathbf{e}_R). \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} R &= |\mathbf{R}|, \quad \mathbf{e}_R = \Gamma^{-1} \frac{\mathbf{R}}{R}, \quad \Phi(v) = \frac{(1+v)(9v+13)}{(5v+7)}, \\ q_k &= |\mathbf{q}_k|, \quad k=1, 2, 3. \end{aligned}$$

Единичный вектор  $\mathbf{e}_R$  в подвижной системе координат  $Dx_1 x_2 x_3$  задан с помощью сферических координат  $\lambda$  и  $\mu$  согласно (3.5).

Выразим  $q_k$  через элементы орбит. Согласно (2.9)

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1 &= \Gamma^{-1} \left( \mathbf{R}_1 - \frac{m_2}{m+m_2} \mathbf{R}_2 \right), \\ q_1 &= |\mathbf{q}_1| = \\ &= R_1 \sqrt{1 - \frac{2m_2}{m+m_2} \frac{R_2}{R_1} \cos \gamma_{12} + \left( \frac{m_2}{m+m_2} \right)^2 \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^2}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где  $\gamma_{12} = \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_1 - \mathfrak{g}_2 - \mathfrak{g}_2$  – угол между векторами  $\mathbf{R}_1$  и  $\mathbf{R}_2$ ,  $R_1 = |\mathbf{R}_1|$ ,  $R_2 = |\mathbf{R}_2|$ .  
В силу условия (1.1)

$$\frac{m_2}{m+m_2} \cdot \frac{R_2}{R_1} \ll 1.$$

Формулу (3.8) перепишем в виде:

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{a_1(1-e_1^2)}{(1+e_1 \cos \mathfrak{g}_1)} F_{21}, \\ F_{21} &= \sqrt{1 - 2k_{21} h_{21} \cos \gamma_{21} + k_{21}^2 h_{21}^2}, \\ k_{21} &= \frac{m_2}{m+m_2} \frac{a_2(1-e_2^2)}{a_1(1-e_1^2)}, \quad h_{21} = \frac{1+e_1 \cos \mathfrak{g}_1}{1+e_2 \cos \mathfrak{g}_2}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Далее:

$$\begin{aligned} q_2 &= \frac{a_2(1-e_2^2)}{(1+e_2 \cos \mathfrak{g}_2)}, \quad (3.10) \\ q_3 &= \sqrt{R_1^2 - 2(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_3) + R_3^2} = \frac{a_3(1-e_3^2)}{1+e_3 \cos \mathfrak{g}_3} F_{13}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{13} &= \sqrt{1 - 2k_{13} h_{13} \cos \gamma_{13} + k_{13}^2 h_{13}^2}, \\ k_{13} &= \frac{a_1(1-e_1^2)}{a_3(1-e_3^2)}, \quad h_{13} = \frac{1+e_3 \cos \mathfrak{g}_3}{1+e_1 \cos \mathfrak{g}_1}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Найдем координаты векторов  $\Gamma^{-1} \mathbf{R}_k$ ,  $k=1, 2, 3$ :

$$\begin{aligned} \Gamma^{-1} \mathbf{R}_k &= \Gamma_3(-\varphi) \Gamma_1(-\theta_0) \mathbf{R}_k = \\ &= R_k \boldsymbol{\eta}_k = \frac{a_k(1-e_k^2)}{(1+e_k \cos \mathfrak{g}_k)} \boldsymbol{\eta}_k, \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\boldsymbol{\eta}_k = (\eta_{k1}, \eta_{k2}, \eta_{k3}), \quad (3.13)$$

$$\eta_{k1} = \cos \varphi \cos(\mathfrak{g}_k + \mathfrak{g}_k) + \sin \varphi \cos \theta_0 \sin(\mathfrak{g}_k + \mathfrak{g}_k),$$

$$\eta_{k2} = -\sin \varphi \cos(\mathfrak{g}_k + \mathfrak{g}_k) + \cos \varphi \cos \theta_0 \sin(\mathfrak{g}_k + \mathfrak{g}_k),$$

$$\eta_{k3} = -\sin \theta_0 \sin(\mathfrak{g}_k + \mathfrak{g}_k).$$

Используя (2.9) и (3.12), найдем координаты векторов  $\boldsymbol{\xi}_k$ :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}_1 &= \frac{1}{F_{21}} (\boldsymbol{\eta}_1 - k_{21} h_{21} \boldsymbol{\eta}_2), \\ \boldsymbol{\xi}_2 &= -\boldsymbol{\eta}_2, \quad \boldsymbol{\xi}_3 = \frac{1}{F_{13}} (k_{13} h_{13} \boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_3). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Таким образом, вычисление скалярных произведений  $(\xi_k, \mathbf{e}_R)$  сводится к вычислению скалярных произведений  $(\boldsymbol{\eta}_k, \mathbf{e}_R)$ . Используя (3.5), (3.13), (3.14), получим:

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\eta}_k, \mathbf{e}_R) = & \left[ \cos(\varphi + \lambda) \cos(g_k + \vartheta_k) + \right. \\ & \left. + \sin(\varphi + \lambda) \cos\theta_0 \sin(g_k + \vartheta_k) \right] \cdot \cos\mu - \\ & - \sin\theta_0 \sin(g_k + \vartheta_k) \sin\mu. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Из (3.14) и (3.15) следует

$$\begin{aligned} (\xi_1, \mathbf{e}_R) = & \frac{1}{F_{21}} \left[ (\boldsymbol{\eta}_1, \mathbf{e}_R) - k_{21} h_{21} \boldsymbol{\eta}_2 \right], \\ (\xi_2, \mathbf{e}_R) = & -(\boldsymbol{\eta}_2, \mathbf{e}_R), \\ (\xi_3, \mathbf{e}_R) = & \frac{1}{F_{13}} \left( k_{13} h_{13} (\boldsymbol{\eta}_1, \mathbf{e}_R) - (\boldsymbol{\eta}_3, \mathbf{e}_R) \right). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Так как  $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$ , то

$$(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}_R) = \omega \sin\mu. \quad (3.17)$$

Учитывая, что влияние диссипативных сил на промежутках времени, соизмеримых с периодом обращения планеты вокруг собственной оси, малó, преобразуем формулу (3.7), положив  $\chi = 0$ :

$$\begin{aligned} \Pi = & -\frac{fm}{R} - \frac{3fm^2 r_0 \Phi(v)}{140\pi ER^3} \left\{ \omega^2 - 3(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}_R)^2 \right\} + \\ & + \sum_{k=1}^3 \frac{9f^2 m^2 m_k r_0 \Phi(v)}{140\pi E q_k^3 R^3} \left\{ 1 - 3(\xi_k, \mathbf{e}_R)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Согласно формуле (3.18) для оценки вклада в гравитационный потенциал Земли от Солнца, Луны и других планет Солнечной системы необходимо оценить величину  $\frac{m_k}{q_k^3}$ . Индекс  $k = 1$  соответствует влиянию Солнца, индекс  $k = 2$  – влиянию Луны, а  $k = 3$  – влиянию планеты. Считая все орбиты круговыми, получим:

$$\begin{aligned} \frac{m_1}{q_1^3} \approx \frac{m_1}{R_1^3}, \quad \frac{m_2}{q_2^3} = \frac{m_2}{R_2^3}, \\ \frac{m_3}{(R_1 + R_2)^3} \leq \frac{m_3}{q_3^3} \leq \frac{m_3}{(R_1 - R_2)^3}. \end{aligned}$$

Для Солнца и Луны значения указанной величины, выраженные в  $10^{24}$  кг/(а.е.)<sup>3</sup>, таковы:

$$m_1/q_1^3 = 1.989 \cdot 10^6, \quad m_2/q_2^3 = 4.332 \cdot 10^6.$$

**Таблица.** Влияние гравитационных полей планет Солнечной системы на гравитационный потенциал Земли (единица измерения  $10^{24}$  кг/(а.е.)<sup>3</sup>)

Планеты	$\frac{m_3}{(R_1 + R_2)^3}$	$\frac{m_3}{(R_1 - R_2)^3}$
Меркурий	0.124	1.434
Венера	0.951	229.889
Марс	0.04	4.47
Юпитер	7.953	25.565
Сатурн	0.486	0.914
Уран	0.011	0.014
Нептун	$3.415 \cdot 10^{-3}$	$4.17 \cdot 10^{-3}$

Результаты вычислений минимального и максимального значений величины  $m_3/q_3^3$ , соответствующие планетам Солнечной системы, представлены в таблице. Численные значения выражены в  $10^{24}$  кг/(а.е.)<sup>3</sup> (1 а.е. =  $1.495978707 \cdot 10^{11}$  м). Из полученных результатов следует, что основной вклад в гравитационный потенциал Земли вносят Луна и Солнце. Влияние других планет Солнечной системы малó. Максимальное значение величины  $m_k/q_k^3$  достигается Венерой в момент ее максимального сближения с Землей. Но даже это значение имеет порядок  $10^{-4}$  по сравнению со значениями соответствующих числовых коэффициентов для Луны и Солнца.

Преобразуем выражение (3.18), выделив безразмерные коэффициенты и учитывая (3.16)–(3.17), таким образом получим следующую формулу для гравитационного потенциала вязкоупругой планеты с учетом приливных эффектов:

$$\begin{aligned} \Pi = & -\frac{fm}{R} \left\{ 1 + k_0 (1 - 3 \sin^2 \mu) + \frac{k_1 (1 + e_1 \cos \vartheta_1)^3}{F_{21}^3} + \right. \\ & + \left( \frac{3}{F_{21}^2} \left[ (\boldsymbol{\eta}_1, \mathbf{e}_R) - k_{21} h_{21} (\boldsymbol{\eta}_2, \mathbf{e}_R) \right]^2 - 1 \right) + \\ & + k_2 (1 + e_2 \cos \vartheta_2)^3 \left( 3(\boldsymbol{\eta}_2, \mathbf{e}_R)^2 - 1 \right) + \\ & + \frac{k_3 (1 + e_3 \cos \vartheta_3)^3}{F_{13}^3} \times \\ & \left. \times \left( \frac{3}{F_{13}^2} \left[ k_{13} h_{13} (\boldsymbol{\eta}_1, \mathbf{e}_R) - (\boldsymbol{\eta}_3, \mathbf{e}_R) \right]^2 - 1 \right) \right\}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

где

$$\begin{aligned} k_0 = & \frac{3m r_0 \omega^2 \Phi(v)}{140\pi ER^2}, \\ k_j = & \frac{9f m m_j r_0 \Phi(v)}{140\pi ER^2 a_j^3 (1 - e_j^2)^3}, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Применим полученный результат для вычисления гравитационного потенциала Земли, движущейся в гравитационном поле Солнца, Луны и Венеры. Возьмем следующие значения параметров, входящих в формулы (3.3), (3.9)–(3.11), (3.20) [23]:

$$r_0 = 6.378 \cdot 10^6 \text{ м}, h = 3 \cdot 10^5 \text{ м}, E = 1.2 \cdot 10^{11} \text{ кг}/(\text{м} \cdot \text{с}^2), \\ v = 0.2, \omega = 7.2922 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1},$$

$$f = 6.672 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2), m = 5.9736 \cdot 10^{24} \text{ кг}, \\ m_1 = 1.98911 \cdot 10^{30} \text{ кг}, m_2 = 7.349 \cdot 10^{22} \text{ кг}, \\ m_3 = 4.8685 \cdot 10^{24} \text{ кг},$$

$$a_1 = 1.4959787 \cdot 10^{11} \text{ м}, a_2 = 3.844 \cdot 10^8 \text{ м}, \\ a_3 = 108208627813 \text{ м},$$

$$e_1 = 0.01671022, e_2 = 0.0549, e_3 = 0.00676, \\ \theta_0 = 23.45^\circ = 0.409280 \text{ рад},$$

$$T_1 = 365.26 \text{ сут}, T_2 = 27.321661 \text{ сут}, T_3 = 224.7 \text{ сут},$$

$$g_1 = 1.7967674 \text{ рад}, g_2 = 0 \text{ рад}, g_3 = 2.2956836 \text{ рад}.$$

Безразмерные коэффициенты, входящие в (3.19), имеют следующие значения:

$$k_0 = 5.73271 \cdot 10^{-4}, k_1 = 1.283118 \cdot 10^{-8},$$

$$k_2 = 2.817287 \cdot 10^{-8}, k_3 = 8.2926 \cdot 10^{-14},$$

$$k_{21} = 3.114226 \cdot 10^{-5}, k_{13} = 1.382169.$$

В качестве безразмерного времени возьмем число оборотов Земли вокруг собственной оси:

$$\tau = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\omega t + \varphi(0)}{2\pi}.$$

Обозначая штрихом производную по  $\tau$ , получим из (3.3):

$$\vartheta'_i = N_i (1 + e_i \cos \vartheta_i)^2, N_i = \frac{2\pi T_{\text{rot}}}{(1 - e_i^2)^{3/2} T_i}, i = 1, 2, 3,$$

где  $T_{\text{rot}} = 23.93419$  ч – период обращения Земли вокруг собственной оси. Значения безразмерных коэффициентов  $N_i$ :

$$N_1 = 0.017162, N_2 = 0.230381, N_3 = 0.027888.$$

Введем в рассмотрение безразмерную функцию – относительный гравитационный потенциал  $\Pi_1$ :

$$\Pi_1 = \frac{\Pi - \Pi_0}{\Pi_0}, \Pi_0 = -\frac{fm}{R}.$$

Согласно (3.19)

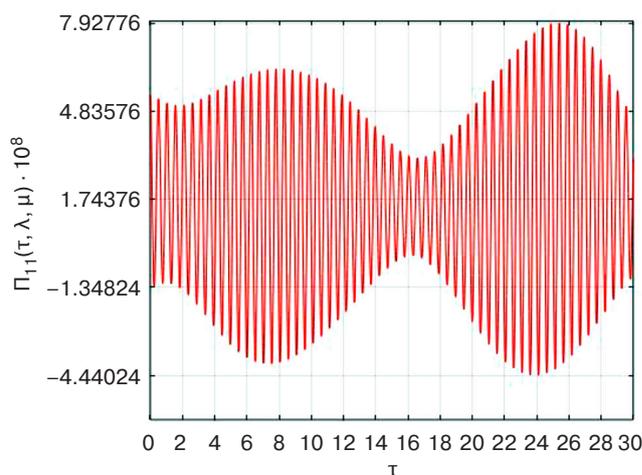
$$\Pi_1 = \Pi_{10} + \Pi_{11}, \Pi_{10} = k_0(1 - 3\sin^2\mu) = \text{const},$$

$$\Pi_{11} = \frac{k_1(1 + e_1 \cos \vartheta_1)^3}{F_{21}^3} \times \\ \times \left( \frac{3}{F_{21}^2} [(\mathbf{n}_1, \mathbf{e}_R) - k_{21}h_{21}(\mathbf{n}_2, \mathbf{e}_R)]^2 - 1 \right) + \\ + k_2(1 + e_2 \cos \vartheta_2)^3 \left( 3(\mathbf{n}_2, \mathbf{e}_R)^2 - 1 \right) + \\ + \frac{k_3(1 + e_3 \cos \vartheta_3)^3}{F_{13}^3} \times \\ \times \left( \frac{3}{F_{13}^2} [k_{13}h_{13}(\mathbf{n}_1, \mathbf{e}_R) - (\mathbf{n}_3, \mathbf{e}_R)]^2 - 1 \right). \quad (3.21)$$

Слагаемое  $\Pi_{10}$  отвечает за возмущающую часть гравитационного потенциала, вызванную сжатием Земли вдоль оси вращения, которая не изменяется со временем. А функция  $\Pi_{11}$ , задаваемая формулой (3.21), – зависящая от времени часть гравитационного потенциала, вызванная приливными эффектами.

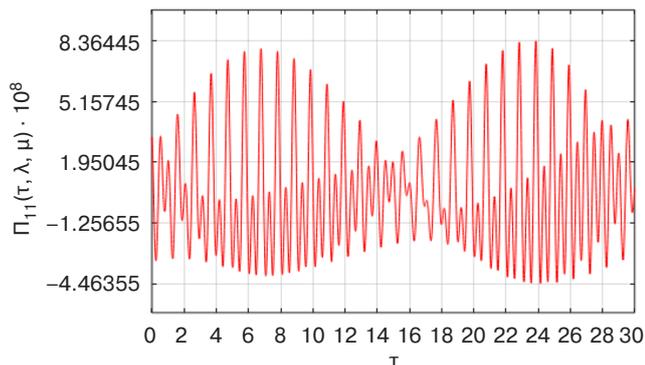
На рис. 2–4 изображены построенные с помощью математического пакета *Octave*<sup>2</sup> графики функции  $\Pi_{11} = \Pi_{11}(\tau)$ , описывающие гравитационный потенциал Земли во внешней точке в течение 30 дней на высоте  $h = 300$  км от поверхности Земли на разных широтах ( $0^\circ, 30^\circ, 60^\circ$ ). В начальный момент времени заданы следующие параметры:

$$\vartheta_1(0) = -0.0433335, \vartheta_2(0) = 0, \vartheta_3(0) = 0.8804619, \\ g_1 = 1.7967674, g_2 = 0, g_3 = 2.2956836, \lambda = 0.$$

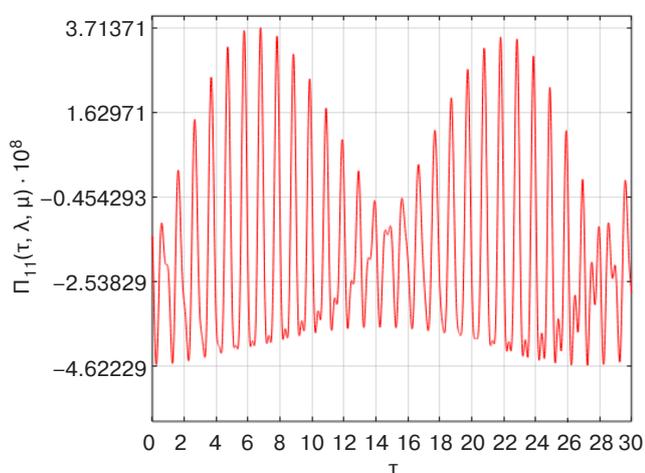


**Рис. 2.** Изменение гравитационного потенциала Земли во внешней точке со сферическими координатами  $R = 6.678 \cdot 10^6 \text{ м}$ ,  $\lambda = 0$ ,  $\mu = 0$  за 30 суток

<sup>2</sup> <https://octave.org/>. Дата обращения 16.05.2023. / Accessed May 16, 2023.



**Рис. 3.** Изменение гравитационного потенциала Земли во внешней точке со сферическими координатами  $R = 6.678 \cdot 10^6$  м,  $\lambda = 0$ ,  $\mu = \pi/6$  за 30 суток



**Рис. 4.** Изменение гравитационного потенциала Земли во внешней точке со сферическими координатами  $R = 6.678 \cdot 10^6$  м,  $\lambda = 0$ ,  $\mu = \pi/3$  за 30 суток

Одно деление по оси абсцисс соответствует двум суткам.

Как видно из полученных графиков, зависимость гравитационного потенциала от времени имеет сложный колебательный характер и существенно зависит от географической широты точки, над которой он измеряется.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получена формула для гравитационного потенциала планеты, моделируемой вязкоупругим шаром, учитывающая приливные эффекты, вызванные гравитационными полями ее естественного спутника, притягивающего центра (звезды) и другой планеты. На основе построенной модели показано, что основной вклад в приливную компоненту гравитационного потенциала Земли вносят Луна и Солнце. Выполнены оценки влияния гравитационных полей остальных планет Солнечной системы на гравитационный потенциал Земли, которая моделируется вязкоупругим телом. Построены графики зависимости от времени приливной компоненты гравитационного потенциала в трех различных точках в связанной с Землей системе координат, расположенных на разных широтах на высоте 300 км от поверхности Земли.

**Вклад авторов.** Все авторы в равной степени внесли свой вклад в исследовательскую работу.

**Authors' contribution.** All authors equally contributed to the research work.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Молоденский М.С. *Избранные труды. Гравитационное поле. Фигура и внутреннее строение Земли*. М.: Наука; 2001. 569 с. ISBN 5-02-002331-0
2. Молоденский С.М. *Приливы, нутация и внутреннее строение Земли*. М.: Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта; 1984. 215 с.
3. Efroimsky M., Williams J.G. Tidal torques. A critical review of some techniques. *Celest. Mech. Dyn. Astr.* 2009;104(3):257–289. <https://doi.org/10.1007/s10569-009-9204-7>
4. Дарвин Дж.Г. *Приливы и родственные им явления в Солнечной системе*: пер. с англ. М.: Наука; 1965. 252 с.
5. *Приливы и резонансы в Солнечной системе*: сборник статей: пер. с англ. под ред. В.Н. Жаркова. М.: Мир; 1975. 288 с.
6. Petit G., Luzum B. (Eds.). *IERS Conventions (2010). IERS Technical Note 36*. Frankfurt am Main: Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie; 2010. 179 p. ISBN 3-89888-989-6
7. Вильке В.Г. Движение вязкоупругого шара в центральном ньютоновском поле сил. *Прикладная математика и механика*. 1980;44(3):395–402.
8. Makarov V.V., Berghea C., Efroimsky M. Dynamical evolution and spin-orbit resonances of potentially habitable exoplanets. The case of GJ 581d. *Astrophys. J.* 2012;761(2):83–96. <https://doi.org/10.1088/0004-637X/761/2/83>
9. Сидоренков Н.С. *Физика неустойчивостей вращения Земли*. М.: Физматлит; 2002. 384 с. ISBN 5-9221-0244-3
10. Баранова Е.Ю., Вильке В.Г. Вращение упругого шара вокруг центра масс в гравитационном поле двух притягивающих центров. *Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика*. 2014;3:33–40.
11. Марков Ю.Г., Перепелкин В.В., Рыжлова Л.В., Филиппова А.С. Численно-аналитический подход к моделированию осевого вращения Земли. *Астрономический журнал*. 2018;95(4):317–326. <https://doi.org/10.7868/S0004629918040047>

12. Сидоренков Н.С. Небесно-механические причины изменений погоды и климата. *Геофизические процессы и биосфера*. 2015;14(3):5–26.
13. Sottili G., Martino S., Palladino D.M., Paciello A., Bozzano F. Effects of tidal stresses on volcanic activity at Mount Etna, Italy. *Geophys. Res. Lett.* 2007;34(1):L01311. <https://doi.org/10.1029/2006GL028190>
14. Аксенов Е.П. *Теория движения искусственных спутников Земли*. М.: Наука; 1977. 360 с.
15. Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г. *Основы механики космического полета*. М.: Наука; 1990. 448 с. ISBN 5-02-014090-2
16. Бордовицына Т.В., Авдюшев В.А. *Теория движения искусственных спутников Земли. Аналитические и численные методы*. Томск: Изд. дом Томского гос. ун-та; 2016. 254 с. ISBN 978-5-9462-1607-4
17. Гусев И.В. Оценка влияния приливных эффектов на низкоорбитальные ИСЗ. *Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъемка*. 2013;57(2):18–24.
18. Вильке В.Г. *Аналитические и качественные методы механики систем с бесконечным числом степеней свободы*. М.: URSS; 2023. 200 с. ISBN 978-5-9710-3847-4
19. Borets A.S., Shatina A.V. Gravitational potential of a planet modeled by a visco-elastic sphere. *J. Phys.: Conf. Ser.* 2020;1705:012001. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1705/1/012001>
20. Борец А.С., Шатина А.В. Математическая модель гравитационного потенциала планеты с учетом диссипации. *Фундаментальные, поисковые, прикладные исследования и инновационные проекты: сборник трудов Национальной научно-практической конференции*. М.: РТУ МИРЭА; 2022. С. 132–136.
21. Вильке В.Г. *Теоретическая механика: учебник и практикум для вузов*. М.: Юрайт; 2023. 311 с. ISBN 978-5-5340-3481-3
22. Вильке В.Г., Шатина А.В. О поступательно-вращательном движении вязкоупругого шара в гравитационном поле притягивающего центра и спутника. *Космические исследования*. 2004;42(1):95–106.
23. Мюррей К., Дермотт С. *Динамика Солнечной системы*: пер. с англ. М.: Физматлит; 2010. 588 с. ISBN 978-5-9221-1121-8

## REFERENCES

1. Molodenskii M.S. *Izbrannyye trudy. Gravitatsionnoye pole. Figura i vnutrennee stroenie Zemli (Selected Works. Gravitational Field. The Figure and Internal Structure of the Earth)*. Moscow: Nauka; 2001. 569 p. (in Russ.). ISBN 5-02-002331-0
2. Molodenskii S.M. *Prilivy, nutatsiya i vnutrennee stroenie Zemli (Tides, Nutation and the Internal Structure of the Earth)*. Moscow: Institut fiziki Zemli im. O.Yu. Shmidta; 1984. 215 p. (in Russ.).
3. Efroimsky M., Williams J.G. Tidal torques. A critical review of some techniques. *Celest. Mech. Dyn. Astr.* 2009;104(3): 257–289. <https://doi.org/10.1007/s10569-009-9204-7>
4. Darwin G.H. *Prilivy i rodstvennyye im yavleniya v Solnechnoi sisteme (Tides and Kindred Phenomena in the Solar System)*: transl. from Engl. Moscow: Nauka; 1965. 252 p. (in Russ.).  
[Darwin G.H. *The Tides and Kindred Phenomena in the Solar System*. Boston: Houghton; 1899. 378 p.]
5. Zharkov V.N. (Ed.). *Prilivy i rezonansy v Solnechnoi sisteme: sbornik statei (Tides and Resonances in the Solar System: a collection of articles)*. Moscow: Mir; 1975. 288 p. (in Russ.).
6. Petit G., Luzum B. (Eds.). *IERS Conventions (2010). IERS Technical Note 36*. Frankfurt am Main: Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie; 2010. 179 p. ISBN 3-89888-989-6
7. Vil'ke V.G. Motion of a visco-elastic sphere in a central Newtonian force field. *J. Appl. Math. Mech.* 1981;44:280–284.  
[Original Russian Text: Vil'ke V.G. Motion of a visco-elastic sphere in a central Newtonian force field. *Prikladnaya Matematika i Mekhanika*. 1980;44(3):395–402 (in Russ.).]
8. Makarov V.V., Berghea C., Efroimsky M. Dynamical evolution and spin-orbit resonances of potentially habitable exoplanets. The case of GJ 581d. *Astrophys. J.* 2012;761(2):83–96. <https://doi.org/10.1088/0004-637X/761/2/83>
9. Sidorenkov N.S. *Fizika nestabil'nostei vrashcheniya Zemli (Physics of Earth Rotation Instabilities)*. Moscow: Fizmatlit; 2002. 384 p. (in Russ.). ISBN 5-9221-0244-3
10. Baranova E.Yu., Vil'ke V.G. Rotation of elastic sphere around its center of mass in the gravitational field of two attractive centers. *Moscow Univ. Mech. Bulletin*. 2014;69(3):57–64. <https://doi.org/10.3103/S0027133014030017>  
[Original Russian Text: Baranova E.Yu., Vil'ke V.G. Rotation of elastic sphere around its center of mass in the gravitational field of two attractive centers. *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya I. Matematika. Mekhanika*. 2014;3:33–40 (in Russ.).]
11. Markov Yu.G., Perepelkin V.V., Rykhlova L.V., Filippova A.S. A Numerical-analytical approach to modeling the axial rotation of the Earth. *Astron. Rep.* 2018;62(4):299–308. <https://doi.org/10.1134/S1063772918040042>  
[Original Russian Text: Markov Yu.G., Perepelkin V.V., Rykhlova L.V., Filippova A.S. Numerical-analytical approach to modeling the axial rotation of the Earth. *Astronomicheskii Zhurnal*. 2018;95(4):317–326 (in Russ.). <https://doi.org/10.7868/S0004629918040047>
12. Sidorenkov N.S. Celestial-mechanical factors of the weather and climate change. *Geofizicheskie protsessy i biosfera = Geophysical Processes and Biosphere*. 2015;14(3):5–26 (in Russ.).
13. Sottili G., Martino S., Palladino D.M., Paciello A., Bozzano F. Effects of tidal stresses on volcanic activity at Mount Etna, Italy. *Geophys. Res. Lett.* 2007;34(1):L01311. <https://doi.org/10.1029/2006GL028190>
14. Aksekov E.P. *Teoriya dvizheniya iskusstvennykh sputnikov Zemli (Theory of Motion of Artificial Earth Satellites)*. Moscow: Nauka; 1977. 360 p. (in Russ.).

15. Okhotsimskii D.E., Sikharulidze Yu.G. *Osnovy mekhaniki kosmicheskogo poleta (Fundamentals of Space Flight Mechanics)*. Moscow: Nauka; 1990. 448 p. (in Russ.). ISBN 5-02-014090-2
16. Bordovitsyna T.V., Avdyushev V.A. *Teoriya dvizheniya iskusstvennykh sputnikov Zemli. Analiticheskie i chislennye metody (Theory of Motion of Artificial Earth Satellites. Analytical and Numerical Methods)*. Tomsk: TSU; 2016. 254 p. (in Russ.). ISBN 978-5-9462-1607-4
17. Gusev I.V. Assessment of tidal effects on low Earth orbit satellites. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Geodeziya i aehrofotosemka = Izvestia VUZOV. Geodesy and Aerophotography*. 2013;57(2):18–24 (in Russ.).
18. Vil'ke V.G. *Analiticheskie i kachestvennye metody mekhaniki sistem s beskonechnym chislom stepeni svobody (Analytical and Qualitative Methods of Mechanics of Systems with an Infinite Number of Degrees of Freedom)*. Moscow: URSS; 2023. 200 p. (in Russ.). ISBN 978-5-9710-3847-4
19. Borets A.S., Shatina A.V. Gravitational potential of a planet modeled by a visco-elastic sphere. *J. Phys.: Conf. Ser.* 2020;1705:012001. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1705/1/012001>
20. Borets A.S., Shatina A.V. Mathematical model of the gravitational potential of the planet taking into account dissipation. In: *Fundamental'nye, poiskovye, prikladnye issledovaniya i innovatsionnye proekty sbornik trudov Natsionalnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii = Fundamental, Exploratory, Applied Research and Innovative Projects: Proceedings of the National Scientific and Practical Conference*. Moscow: MIREA; 2022. P. 132–136 (in Russ.).
21. Vil'ke V.G. *Teoreticheskaya mekhanika: uchebnik i praktikum dlya vuzov (Theoretical Mechanics: Textbook and Workshop for Universities)*. Moscow: Yurait; 2023. 311 p. (in Russ.). ISBN 978-5-5340-3481-3
22. Vil'ke V.G., Shatina A.V. Translational–Rotational Motion of a Viscoelastic Sphere in Gravitational Field of an Attracting Center and a Satellite. *Cosmic Research*. 2004;42(1):91–102. <https://doi.org/10.1023/B:COSM.0000017567.89445.aa>  
[Original Russian Text: Vil'ke V.G., Shatina A.V. Translational–Rotational Motion of a Viscoelastic Sphere in Gravitational Field of an Attracting Center and a Satellite. *Kosmicheskie Issledovaniya*. 2004;42(1):95–106 (in Russ.).]
23. Murray C.D., Dermott S.F. *Dinamika Solnechnoi sistemy (Solar System Dynamics)*. Moscow: Fizmatlit; 2010. 588 p. (in Russ.). ISBN 978-5-9221-1121-8  
[Murray C.D., Dermott S.F. *Solar System Dynamics*. Cambridge University Press; 2000. 592 p. ISBN 9781139174817. <http://doi.org/10.1017/cbo9781139174817>]

## Об авторах

**Шатина Альбина Викторовна**, д.ф.-м.н., доцент, профессор кафедры высшей математики, Институт искусственного интеллекта ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: [shatina\\_av@mail.ru](mailto:shatina_av@mail.ru). Scopus Author ID 6506958326, SPIN-код РИНЦ 8714-6450, <https://orcid.org/0000-0001-5016-5899>

**Борец Александра Сергеевна**, аспирант, кафедра высшей математики, Институт искусственного интеллекта ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: [borec@mirea.ru](mailto:borec@mirea.ru). Scopus Author ID 57221232991, SPIN-код РИНЦ 9669-2076, <https://orcid.org/0000-0002-6878-0184>

## About the authors

**Albina V. Shatina**, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Department of Higher Mathematics, Institute of Artificial Intelligence, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: [shatina\\_av@mail.ru](mailto:shatina_av@mail.ru). Scopus Author ID 6506958326, RSCI SPIN-code 8714-6450, <https://orcid.org/0000-0001-5016-5899>

**Alexandra S. Borets**, Postgraduate Student, Department of Higher Mathematics, Institute of Artificial Intelligence, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: [borec@mirea.ru](mailto:borec@mirea.ru). Scopus Author ID 57221232991, RSCI SPIN-code 9669-2076, <https://orcid.org/0000-0002-6878-0184>

---

Отпечатано в «МИРЭА – Российский технологический университет».  
119454, РФ, г. Москва, пр-т Вернадского, д. 78.  
Подписано в печать 31.03.2024 г.  
Формат 60 × 90/8. Печать цифровая.  
Уч.-изд. листов 11.25.  
Тираж 100 экз. Заказ № 970.

Подписку на печатную версию  
*Russian Technological Journal* можно оформить  
через ООО «Агентство «Книга-Сервис», [www.akc.ru](http://www.akc.ru).  
Подписной индекс: **79641**.

Printed in MIREA – Russian Technological University.  
78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russian  
Federation.  
Signed to print March 31, 2024.  
Format 60 × 90/8. Digital print.  
C.p.l. 11.25.  
100 copies. Order No. 970.

Subscription to the *Russian Technological Journal* printed version can be made through  
the *Kniga-Servis* Agency, [www.akc.ru](http://www.akc.ru).  
Subscription index: **79641**.

