ISSN 2500-316X (Online)

https://doi.org/10.32362/2500-316X-2020-8-6-63-77

CC BY

УДК 621.391

Оптимизация характеристик цифровых фильтров одновременно в частотной и временной областях

А.В. Смирнов

МИРЭА – Российский технологический университет, Москва 119454, Россия
@Автор для переписки, e-mail: av_smirnov@mirea.ru

Широко используемый метод проектирования цифровых фильтров состоит в преобразовании аналогового фильтра-прототипа с требуемыми характеристиками в цифровой. Этот метод применим, если в результате преобразования сохраняется оптимальность характеристик фильтра по выбранной совокупности показателей качества (ПК). Ранее было показано, что такое возможно при одновременной оптимизации амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) и фазочастотной характеристики (ФЧХ). Представляет интерес также одновременная оптимизация АЧХ и переходной характеристики (ПХ) цифровых фильтров. Другой возможный метод решения этой задачи – прямой поиск оптимальной по АЧХ и ПХ передаточной функции (ПФн) цифрового фильтра. Для исследования возможностей первого метода был выполнен поиск ПФн аналоговых фильтров, Парето-оптимальных по длительностям нарастания и установления переходного процесса при выполнении ограничений на другие показатели АЧХ и ПХ. Затем эти фильтры были преобразованы в цифровые с помощью билинейного преобразования и преобразования методом инвариантности импульсной характеристики. Далее был осуществлен поиск ПФн цифровых фильтров оптимальных по тем же ПК. В обоих случаях поиск проводился в пространстве координат полюсов и нулей ПФн с применением гибридного эвристического алгоритма. Результаты исследования показали, что поиск позволил получить цифровые фильтры, превосходящие по совокупности ПК фильтры, полученные путем преобразования аналоговых фильтров-прототипов. Следовательно, указанные методы преобразования не сохраняют Парето-оптимальность фильтров по АЧХ и ПХ, и для получения оптимальных по этим характеристикам

цифровых фильтров следует применять поиск их ПФн. Кроме того, аналоговые фильтры, полученные путем обратного билинейного преобразования найденных цифровых фильтров, в ряде случаев превосходят по тем же ПК аналоговые фильтры, полученные путем поиска. В таких случаях целесообразно применение цифровых фильтров-прототипов при проектировании аналоговых фильтров.

Ключевые слова: цифровой фильтр, фильтр-прототип, билинейное преобразование, инвариантность импульсной характеристики, амплитудно-частотная характеристика, переходная характеристика, Парето-оптимальность.

Для цитирования: Смирнов А.В. Оптимизация характеристик цифровых фильтров одновременно в частотной и временной областях. *Российский технологический журнал.* 2020;8(6):63-77. https://doi.org/10.32362/2500-316X-2020-8-6-63-77

Optimization of digital filters performances simultaneously in frequency and time domains

Alexander V. Smirnov

MIREA – Russian Technological University, Moscow 119454, Russia
@Corresponding author, e-mail: av_smirnov@mirea.ru

Wide used method of digital filters design consists in transformation of analog filter-prototype with required performances into digital filter. This method is applicable if the transformation preserves optimality of filter performances under specified set of quality indexes (QI). It was denoted earlier that such situation is possible when gain-frequency response (GFR) and phase-frequency response are optimized simultaneously. The task of simultaneous optimization of digital filters GFR and step response (SR) is also important but yet a little explored. Alternative method of this problem solving consists in search of digital filter transfer function (TF) which is optimal under GFR and SR QI's. To investigate capabilities of the first method we found examples of analog filters Pareto-optimal under rise time and transient duration. Other QI's of these filters fulfilled specified constraints. Then these filters were transformed into digital filters. Bilinear transformation and transformation with invariant impulse response were applied. Further we did the search of digital filters optimal under the same set of QI's. In either method the hybrid heuristic algorithm was applied for search optimal solutions in the space of TF poles and zeroes coordinates. The results of investigation demonstrated that digital filters developed via search are superiorly under specified set of QI's then digital filters developed via transformation of analog filters. Accordingly Pareto-optimality for QI of GFR and SR is not preserved during such transformation and direct search must be applied to optimized digital filters simultaneously in frequency and time domains. Further in some cases analog filters developed via reverse bilinear transformation of the found optimal digital filters are superiorly under the same set of QI's then analog filters developed using search. In such cases using of digital filter-prototypes for design of analog filters is practical.

Keywords: digital filter, filter-prototype, bilinear transformation, impulse response invariance, gain-frequency response, step response, Pareto-optimality.

For citation: Smirnov A.V. Optimization of digital filters performances simultaneously in frequency and time domains. *Rossiiskii tekhnologicheskii zhurnal = Russian Technological Journal.* 2020;8(6):63-77 (in Russ.). https://doi.org/10.32362/2500-316X-2020-8-6-63-77

Введение

Цифровые фильтры находят широкое применение в радиотехнических и телекоммуникационных системах. Свойства цифровых фильтров, как и аналоговых, в частотной области описываются амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) и фазочастотной характеристикой (ФЧХ) или частотной характеристикой времени задержки (ЧХЗ). Во временной области используют импульсную характеристику (ИХ) и переходную характеристику (ПХ). Все эти характеристики могут быть получены из комплексной передаточной функции (ПФн) [1, 2].

$$H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{NZ} b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{NP} a_k z^{-k}}=K_0\frac{\prod_{k=1}^{NZ}\left(1-z_k z^{-1}\right)}{\prod_{k=1}^{NP}\left(1-p_k z^{-1}\right)}, \qquad (1)$$

где z – комплексная переменная; a_k, b_k, K_0 – действительные коэффициенты; z_k, p_k – комплексные координаты нулей и полюсов ПФн; NP – порядок фильтра; NZ – число нулей ПФн.

Характеристики цифрового фильтра оцениваются различными показателями качества (ПК). При проектировании фильтра стремятся оптимизировать какие-либо ПК, выбор которых зависит от назначения фильтра.

Стандартный метод проектирования цифровых фильтров основан на использовании аналоговых фильтров-прототипов, в качестве которых применяются фильтры нижних частот (ФНЧ), имеющие АЧХ, оптимальные по каким-либо ПК. К ним относятся фильтры Баттерворта, Чебышева и эллиптические. Из фильтров-прототипов посредством преобразования комплексного аргумента ПФн получают цифровые фильтры требуемого типа и с заданными параметрами АЧХ [1, 2]. Реализация стандартного метода обеспечена наличием обширной справочной и учебной литературы, а также программного обеспечения.

Задача оптимизации характеристик радиотехнических устройств, в том числе и линейных фильтров, является, как правило, многокритериальной, и ее решением должно быть множество Парето-оптимальных по выбранной совокупности ПК решений [3, 4], то есть таких решений, которые нельзя улучшить ни по одному из показателей этой совокупности, не ухудшая при этом хотя бы один из остальных. Далее под оптимальностью везде понимается именно оптимальность по Парето.

Представляет теоретический и практический интерес задача проектирования фильтров, оптимальных по ПК двух или более характеристик частотной и временной областей. Оптимизации аналоговых и цифровых фильтров одновременно по АЧХ и ФЧХ с применением различных численных методов посвящено большое число публикаций, например, [4–8]. Вопрос о возможности применения метода фильтров-прототипов для получения оптимальных по этим характеристикам аппроксимаций ПФн был исследован в работе [9]. При этом были определены условия сохранения такой оптимальности при билинейном преобразовании аналогового ФНЧ в цифровой и при преобразовании Константинидиса цифрового ФНЧ в цифровой ФНЧ с другим значением верхней граничной частоты полосы пропускания.

Значительно меньше публикаций связано с решением задачи оптимизации характеристик фильтров одновременно в частотной и временной областях. В работе [10] изложен метод решения указанной задачи для аналоговых фильтров с применением эвристического алгоритма поиска экстремумов целевой функции. Продемонстрировано получение множеств Парето-оптимальных аппроксимаций ФНЧ, среди которых есть превосходящие по совокупности ПК фильтры Бесселя и Баттерворта. Однако цифровые фильтры в этой работе не рассматривались. Прямой перенос результатов, полученных для аналоговых фильтров, на цифровые, очевидно, невозможен в силу дискретности процессов в последних.

В работе [11] осуществлялась оптимизация цифровых фильтров по шести ПК, один из которых – взвешенная частичная энергия ИХ (weighted partial energy of the impulse response). Максимизация этого показателя приводит к концентрации энергии в начале переходного процесса, что обеспечивает минимизацию длительности задержки, вносимой фильтром. Другие ПК, относящиеся к временной области, в этой работе не учитываются. Это не дает возможности оптимизировать длительность переходного процесса, которая оказывает существенное влияние на искажения формы сигналов, создаваемые фильтрами. Другие работы по оптимизации цифровых фильтров одновременно в частотной и временной областях автору не известны.

Актуальность задачи оптимизации цифровых ФНЧ по совокупности ПК, характеризующих АЧХ и ПХ, обусловлена тем, что ПХ в наибольшей степени влияет на искажения формы сигнала и межсимвольные искажения в системах передачи информации. В то же время необходимо выполнять требования к АЧХ в полосе задерживания, чтобы предотвратить межканальные помехи. Один из возможных путей решения данной задачи состоит в поиске оптимальных по этим характеристикам аналоговых фильтров-прототипов и последующем преобразовании их в цифровые фильтры. Другой вариант – непосредственное осуществление поиска оптимальных цифровых фильтров. Первый метод позволяет унифицировать методики проектирования аналоговых и цифровых фильтров, но его применимость требует проверки, так как вопрос о сохранении оптимальности одновременно по АЧХ и ПХ при преобразованиях аналоговых фильтров в цифровые не исследован. Второй метод требует разработки алгоритма поиска оптимальных аппроксимаций ПФн цифровых фильтров.

Цель данной работы – реализовать два указанных метода решения задачи одновременной оптимизации ПХ и АЧХ цифровых фильтров, сравнить получаемые с их помощью результаты и сделать выводы о возможностях использования этих методов.

Методы исследования

Предметом исследования в данной работе являются ФНЧ. Фильтры этого типа применяются для ограничения полосы частот сигналов в системах передачи информации, и для них необходимо выполнять требования как к АЧХ, так и к ПХ.

В первую очередь определим ПК, по которым будем оптимизировать характеристики фильтров. В работе [10] были даны определения показателей, оценивающих качество указанных характеристик аналоговых фильтров. Определения, относящиеся к АЧХ, могут быть применены и к цифровым фильтрам. Отличие заключается только в использова-

нии шкалы частот, нормированной к частоте дискретизации $F \in [0, 0.5]$. Из числа этих ПК далее используются следующие:

– минимальное ослабление в полосе задерживания, выраженное в дБ;

$$Hs = -20\lg\left(\max\left(K\left(F\right)\right)\right),\ F_S \le F \le 0.5, \tag{2}$$

где $K(F)$ – АЧХ фильтра, Fs – нижняя граничная частота полосы задерживания;

– максимальное превышение АЧХ над заданным уровнем $K_t(F)$ в полосе перехода между полосами пропускания и задерживания;

$$DHt = \max\left(\frac{K\left(F\right)}{K_t\left(F\right)}, 0\right), \quad F_P \le F \le F_S, \tag{3}$$

где F_P – верхняя граничная частота полосы пропускания.

При расчете и оценке качества переходного процесса в цифровом фильтре необходимо исходить из дискретной шкалы времени, в которой за единицу принят период дискретизации [12]. Определения ПК во временной области поясняются примером на рис. 1, где ПХ $g(n)$ нормирована к установившемуся значению, а нумерация ее отсчетов начинается с нуля.

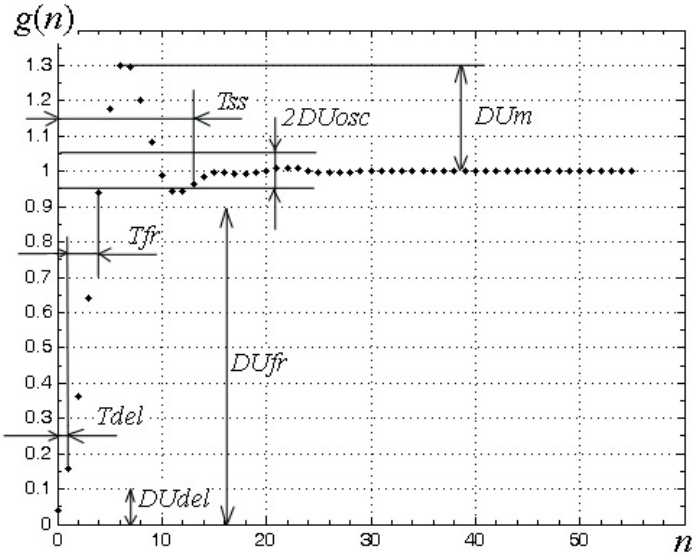

Рис. 1. Определение показателей качества переходной характеристики цифрового фильтра.

Максимальный выброс *DUm* равен разности максимума и установившегося значения ПХ. Длительность задержки *Tdel* определена как номер первого отсчета $g(n)$, оказавшегося выше порога *DUdel.* Длительность фронта равна разности номера первого отсчета $g(n)$, оказавшегося выше порога *DUfr* и значения *Tdel*. Длительность установления переходного процесса *Tss* (steady state) определяется как номер первого отсчета, начиная с которого все отсчеты отличаются от установившегося значения ПХ не более, чем на *DUosc*.

Определенные таким образом величины длительностей являются целочисленными. Их использование затрудняет поиск оптимальных решений, так как в процессе поиска целевая функция изменяется скачками, в промежутках между которыми остается неизменной. Для устранения этого недостатка в данной работе применялись интерполирован-

ные длительности. Интерполяция проводится между отсчетом, входящим в определение дискретного ПК, и предыдущим отсчетом. Интерполированная длительность задержки определяется как

$$Tdeli = Tdel - 1 + \frac{DUdel - g\left(Tdel - 1\right)}{g\left(Tdel\right) - g\left(Tdel - 1\right)}. \tag{4}$$

Длительность фронта:

$$Tfri = Tfr - 1 + \frac{DUfr - g\left(Tdel + Tfr - 1\right)}{g\left(Tdel + Tfr\right) - g\left(Tdel + Tfr - 1\right)} + Tdel - Tdeli. \tag{5}$$

Длительность установления переходного процесса:

$$Tssi = \begin{cases} Tss - 1 + \dfrac{g(Tss-1) - 1 - DUosc}{g(Tss-1) - g(Tss)} & \text{при } g(Tss-1) > 1; \\ Tss - 1 + \dfrac{1 - DUosc - g(Tss-1)}{g(Tss) - g(Tss-1)} & \text{при } g(Tss-1) < 1. \end{cases} \tag{6}$$

Поиск оптимальных по АЧХ и ПХ аналоговых ФНЧ-прототипов проводился с применением программы SOFTD, описанной в работе [10]. При этом использовалась нормированная шкала частот, на которой Fpa = 1 (символ а показывает, что это параметр аналогового фильтра), а Fsa – задаваемое значение, например, Fsa = 2. Результатом поиска являются координаты полюсов и нулей, обеспечивающих минимальное значение целевой функции при заданной совокупности ПК. Для получения цифровых ФНЧ из аналоговых фильтров-прототипов применялись методы билинейного преобразования и инвариантности ИХ [2].

При выполнении билинейного преобразования задаются фиксированное значение частоты дискретизации, например, $f_д$ = 1 и нормированное к частоте дискретизации значение нижней границы полосы задерживания цифрового ФНЧ Fs. Затем с использованием формулы обратного билинейного преобразования рассчитывается значение соответствующей аналоговой частоты

$$F^{*}sa = 2 f_d \cdot \mathrm{tg}\left(\pi \cdot Fs\right). \tag{7}$$

Далее проводится денормирование аналогового ФНЧ-прототипа путем умножения координат полюсов и нулей его ПФн на коэффициент денормирования

$$K_{дн} = \frac{F^{*}sa}{Fsa} \tag{8}$$

и последующего расчета коэффициентов многочленов числителя и знаменателя ПФн. Наконец, выполняется билинейное преобразование ПФн денормированного фильтрапрототипа в ПФн цифрового фильтра путем замены комплексной переменной p в соответствии с равенством [2]:

$$p = 2f_d \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}. \tag{9}$$

При преобразовании методом инвариантности ИХ последовательность действий аналогичная. Отличие состоит в том, что частота среза нормированного аналогового ФНЧ-прототипа определяется равенством:

$$F^* sa = Fs. \tag{10}$$

Денормирование фильтра-прототипа выполняется так же, как и в случае билинейного преобразования. ПФн цифрового фильтра при использовании метода инвариантности ИХ получается в виде [2]:

$$H(z) = \sum_{k=1}^{NP} \frac{C_k}{1 - \exp\left({p_{ak}}/{f_d} \right) z^{-1}}, \tag{11}$$

где p_{ak} – полюса ПФн аналогового фильтра, C_k – коэффициенты в разложении этой ПФн на простые дроби вида $\frac{C_k}{p - p_{ak}}$.

Для реализации обоих методов преобразования и последующего расчета ПК цифрового фильтра были написаны программы в среде Matlab. Сами преобразования выполнялись с помощью функций bilinear(..) и impinvar(..) из модуля Signal Processing Toolbox. АЧХ и ПХ цифровых фильтров рассчитывались с применением функций, соответственно, freqz(..) и stepz(..). Вычисление ПК производилось в соответствии с соотношениями (2) – (6).

Отметим, что в результате денормирования ПФн аналогового ФНЧ-прототипа его АЧХ растягивается по оси частот в $K_{дн}$ раз, а ПХ во столько же раз сжимается по оси времени. При этом минимальное ослабление в полосе задерживания *Hs* и нормированное значение выброса *DUm* не изменяются, а отношения «больше-меньше» между выражаемыми длительностями интервалов времени ПК разных фильтров сохраняются. Как было показано в [9], преобразование с такими свойствами сохраняет Парето-оптимальность по совокупности этих ПК. В то же время сами билинейное преобразование и преобразование методом инвариантности ИХ могут и не обладать необходимыми для сохранения Парето-оптимальности свойствами.

Далее рассмотрим разработанный метод поиска оптимальных цифровых ФНЧ. Поиск осуществляется в пространстве координат полюсов и нулей ПФн (1). При этом для обеспечения устойчивости цифрового фильтра на координаты полюсов наложено ограничение $|p_k| < 1$. На координаты нулей ограничений нет. Используется гибридный эвристический алгоритм, в основном подобный алгоритмам, описанным ранее в работе [10] и других публикациях автора. Сущность алгоритма – многократное выполнение локального поиска (мульти-старт) с применением различных вариантов выбора стартовой точки.

Минимизируемая целевая функция имеет вид:

$$GF = \sum_{k=1}^{N} \left(W_k^{+} \cdot \frac{(Q_k - Q_{kt})}{Q_{kt}^{\,q_k}} \cdot S(Q_k - Q_{kt}) + W_k^{-} \cdot \frac{(Q_k - Q_{kt})}{Q_{kt}^{\,q_k}} \cdot S(Q_{kt} - Q_k) \right). \tag{12}$$

Здесь N – число ПК; Q_k и Q_{kt} – текущее и целевое (target) значения k-того ПК; W_k^+ и W_k^- – весовые коэффициенты k-того ПК для отклонений вверх и вниз от целевого значения. Пороговая функция $S(x) = 0$ при $x \le 0$ и $S(x) = 1$ при $x > 0$. Показатель степени $q_k = 1$, если необходимо нормировать отклонение ПК от целевого значения для приведения слагаемых в (12) к одному диапазону величин. Показатель степени $q_k = 0$, если такая нормировка не требуется.

Алгоритм поиска был реализован в виде программы HODF (Heuristic Optimization if Digital Filters), написанной в системе Borland C++ Builder. На рис. 2 приведен фрагмент окна этой программы с перечнем ПК. Обозначения некоторых из них отличаются от использованных в равенствах (2) – (6). Кроме того, есть ряд ПК, не учитывавшихся в данной работе и поэтому здесь не упомянутых.

N	Name	Sel	St	W+	W–	S	WObj
1	DHpmx	*	1.00	0.0	0.0	3.391	0.000
2	Hsmx	*	40.00	0.0	1000.0	40.039	0.000
3	DTdmx		10.00	0.0	0.0		
4	DHtmx	*	0.00	100.0	0.0	0.000	0.000
5	Tdel	*	0.00	0.0	0.0	0.000	0.000
6	Tfr	*	5.00	300.0	0.0	4.913	0.000
7	DUmx	*	0.10	1000.0	0.0	0.099	0.000
8	Tosc		1.00	0.0	0.0		
9	Tss	*	8.00	1.0	0.0	11.369	3.369
10	TUmx		0.00	0.0	0.0		
11	Teq		0.00	0.0	0.0		
12	QIE		0.00	0.0	0.0		

Рис. 2. Фрагмент окна программы.

В столбце «Sel» звездочками указаны ПК, значения которых рассчитываются. В столбце «St» даны целевые значения, в столбцах «W+» и «W-» – весовые коэффициенты, в столбце S – значение, полученное в результате поиска, в столбце WObj – значение вклада данного ПК в значение целевой функции (12).

После задания набора ПК, их целевых значений, весовых коэффициентов, количеств полюсов и нулей программа выполняет поиск координат полюсов и нулей ПФн, при которых достигается глобальный или близкий к глобальному минимум целевой функции. Найденное решение отображается в таблице и может экспортироваться в Excel и другие программы. Получаемые характеристики выводятся в виде графиков.

Для сравнения результатов поиска оптимальных по АЧХ и ПХ аналоговых и цифровых фильтров выполняется обратное билинейное преобразование цифрового фильтра в аналоговый. При этом значения p_{ak} полюсов ПФн аналогового фильтра рассчитываются по формуле

$$p_{ak} = 2 f_d \frac{p_k - 1}{p_k + 1}, \tag{13}$$

где p_k, $k = 1, ..., NP$ – значения полюсов цифрового фильтра. Аналогично рассчитываются значения нулей аналогового фильтра. Затем его ПФн приводится к нормированной шкале частоты путем деления значений полюсов и нулей на коэффициент денормирования, рас-

считываемый по соотношениям (7) и (8). Программа, выполняющая обратное преобразование и последующий расчет ПК аналогового фильтра, была реализована в среде Matlab.

В заключении раздела отметим, что возможно множество вариантов постановки задачи оптимизации фильтра по АЧХ и ПХ, различающихся выбором оптимизируемых ПК и накладываемых на остальные ПК ограничений. Кроме того, можно варьировать параметры фильтра: количество полюсов и нулей, нижнюю граничную частоту полосы задерживания. Также могут изменяться пороговые уровни, по которым определяются значения длительностей участков переходного процесса. Для получения ответа, охватывающего все возможные варианты, необходимо решить задачу в общем виде. Такое решение пока найти не удалось. Поэтому использован эмпирический подход, основанный на рассмотрении конкретных примеров. В связи с ограниченным объемом статьи здесь приведена одна группа примеров. Полученные результаты являются типичными для большого числа других примеров, хотя утверждать, что они универсальны, нельзя.

Результаты и их обсуждение

В ходе экспериментального исследования выполнялись поиск оптимальных по АЧХ и ПХ аппроксимаций аналоговых фильтров-прототипов, преобразование найденных решений в цифровые фильтры, поиск оптимальных по тем же ПК цифровых фильтров, преобразование их в аналоговые фильтры и сравнение результатов для цифровых и аналоговых фильтров, полученных посредством поиска и преобразования. Рассматривались ФНЧ 4-го порядка.

Пороговые уровни для расчета ПК во временной области были установлены равными $DUdel = 0.01$; $DUfr = 0.9$; $DUosc = 0.01$. Значения нормированной нижней граничной частоты полосы задерживания были равны $Fsa = 2$ для аналогового фильтра и $Fs = 0.2$ для цифрового. Как для аналоговых, так и для цифровых фильтров задавались ограничения

$$Hs \geq 40 \text{ дБ}; \; DHt \leq 0; \; DUm \leq 0.1. \tag{14}$$

Сразу необходимо отметить, что в результате преобразования методом инвариантности ИХ, во-первых, во многих случаях нарушалось выполнение заданного ограничения на АЧХ в полосе задерживания; во-вторых, ПК во временной области для цифрового фильтра, полученного путем такого преобразования оказывались несколько хуже, чем для фильтра, полученного из того же прототипа с помощью билинейного преобразования. Поэтому далее результаты применения метода инвариантности ИХ не излагаются.

Для аналоговых фильтров-прототипов исследовались два случая: $NZ = 0$ и $NZ = 4$. В обоих случаях билинейное преобразование дает цифровые фильтры с $NZ = 4$, но при $NZ = 0$ выполняется равенство

$$z_k = -1, \quad k = 1, ..., NZ. \tag{15}$$

С учетом этого факта для цифровых фильтров поиск выполнялся при $NZ = 4$ по двум вариантам. В первом варианте координаты нулей задавались равенством (15), а во втором – могли принимать произвольные значения. При обратном билинейном преобразовании цифрового фильтра в аналоговый в первом варианте ПФн аналогового фильтра не имеет нулей, а во втором – имеет 4 нуля.

В экспериментах осуществлялся поиск решений, являющихся точками двумерного среза фронта Парето в многомерном пространстве ПК, в виде зависимости длительности установления переходного процесса *Tss* от длительности нарастания *Tfr*. Для цифровых фильтров использовались интерполированные значения *Tfri* (5) и *Tssi* (6). Поиск Парето-оптимальных решений проводился путем последовательного задания целевых значений *Tfr* и минимизации значения *Tss* при выполнении ограничений (14). При этом весовые коэффициенты всех фиксируемых ПК в (12) устанавливались на 2–3 порядка больше, чем для *Tss*, как это видно на рис. 2. Для каждой точки поиск выполнялся не менее трех раз при количестве стартов локального поиска равном 1000, и отбирался лучший результат.

Ниже приведены множества Парето-оптимальных решений для четырех случаев: аналоговые фильтры с $NZ = 0$ (рис. 3), аналоговые фильтры с $NZ = 4$ (рис. 4), цифровые фильтры с $NZ = 4$ при выполнении равенства (15) (рис. 5), цифровые фильтры с $NZ = 4$ и произвольным расположением нулей ПФн (рис. 6). Найденные решения представлены сериями точек «Поиск». Единица измерения времени для аналоговых фильтров соответствует нормированной шкале частоты. Единицей времени для цифровых фильтров является период отсчетов.

На тех же графиках в виде серий точек «Преобр.» приведены результаты преобразований найденных оптимальных решений в фильтры другого типа. На рис. 3 показаны результаты обратного билинейного преобразования цифровых фильтров с $NZ = 4$ при условии (15), на рис. 4 – результаты обратного билинейного преобразования цифровых фильтров с $NZ = 4$ и произвольным расположением нулей, на рис. 5 – результаты билинейного преобразования аналоговых фильтров с $NZ = 0$, на рис. 6 – результаты билинейного преобразования аналоговых фильтров с $NZ = 4$. Если в результате преобразования нарушались ограничения (14), то такая точка исключалась. Такая ситуация имела место для нескольких случаев билинейного преобразования, но не встречалась при обратном билинейном преобразовании.

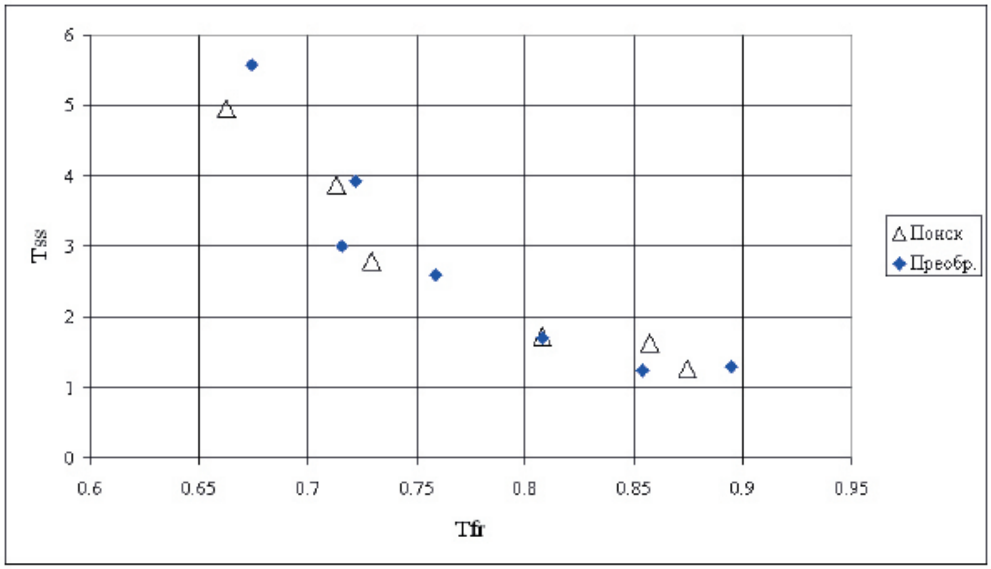

Рис. 3. Результаты для аналоговых фильтров с $NZ = 0$.

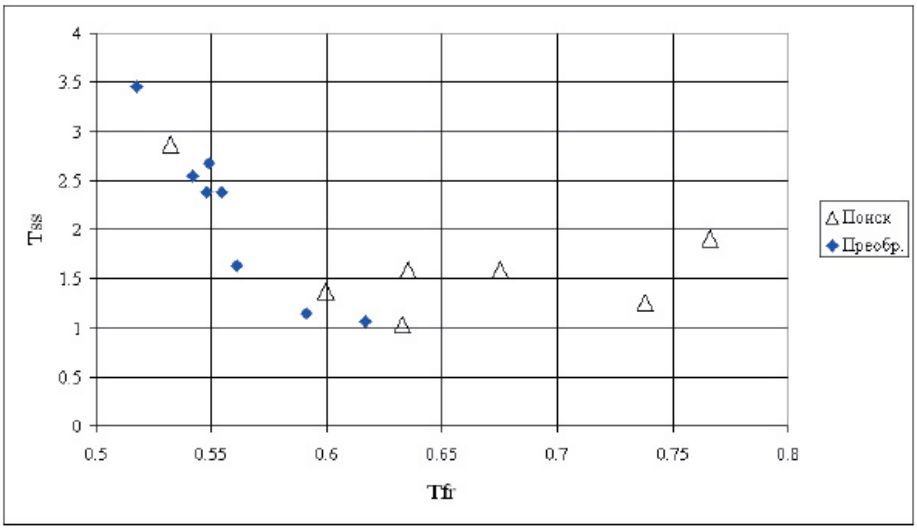

Рис. 4. Результаты для аналоговых фильтров с *NZ* = 4.

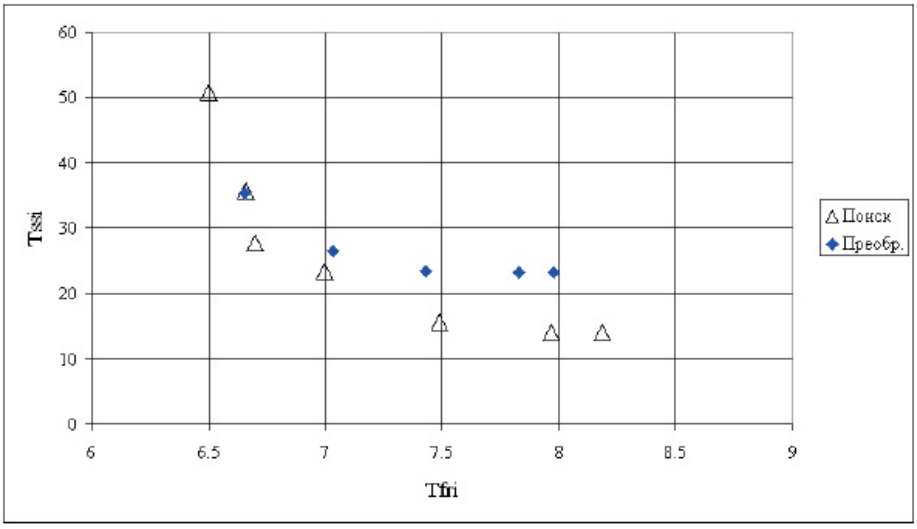

Рис. 5. Результаты для цифровых фильтров с нулями, определяемыми равенством (15).

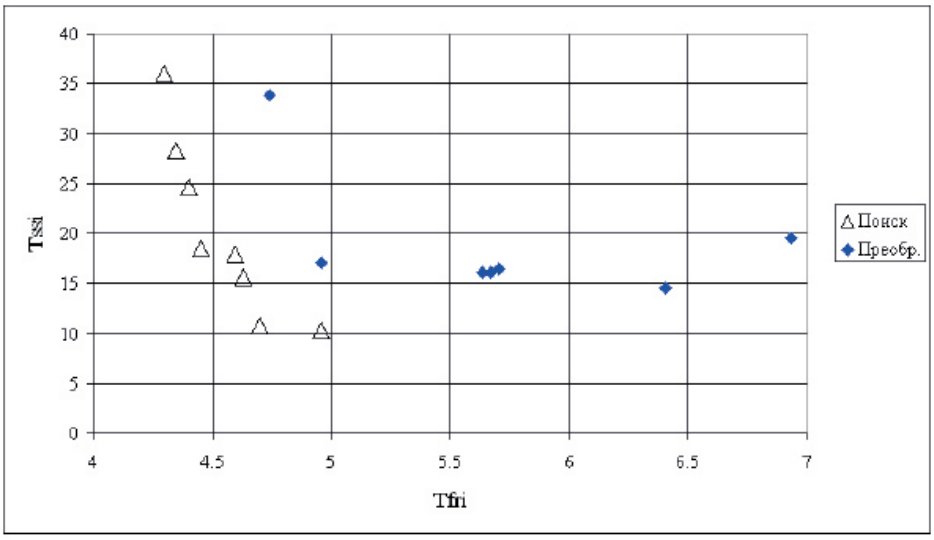

Рис. 6. Результаты для цифровых фильтров с произвольным расположением нулей.

Наглядное представление о характеристиках цифровых фильтров, полученных путем поиска, дают примеры их АЧХ и ПХ на рис. 7.

Кривые 1 получены для фильтра, показанного правой крайней точкой серии «Поиск» на рис. 5. Кривые 2 относятся к фильтру, отмеченному левой крайней точкой той же серии. Кривые 3 принадлежат фильтру, которому соответствует правая крайняя точка серии «Поиск» на рис. 6. Кривые 4 получены для фильтра, показанного левой крайней точкой этой серии.

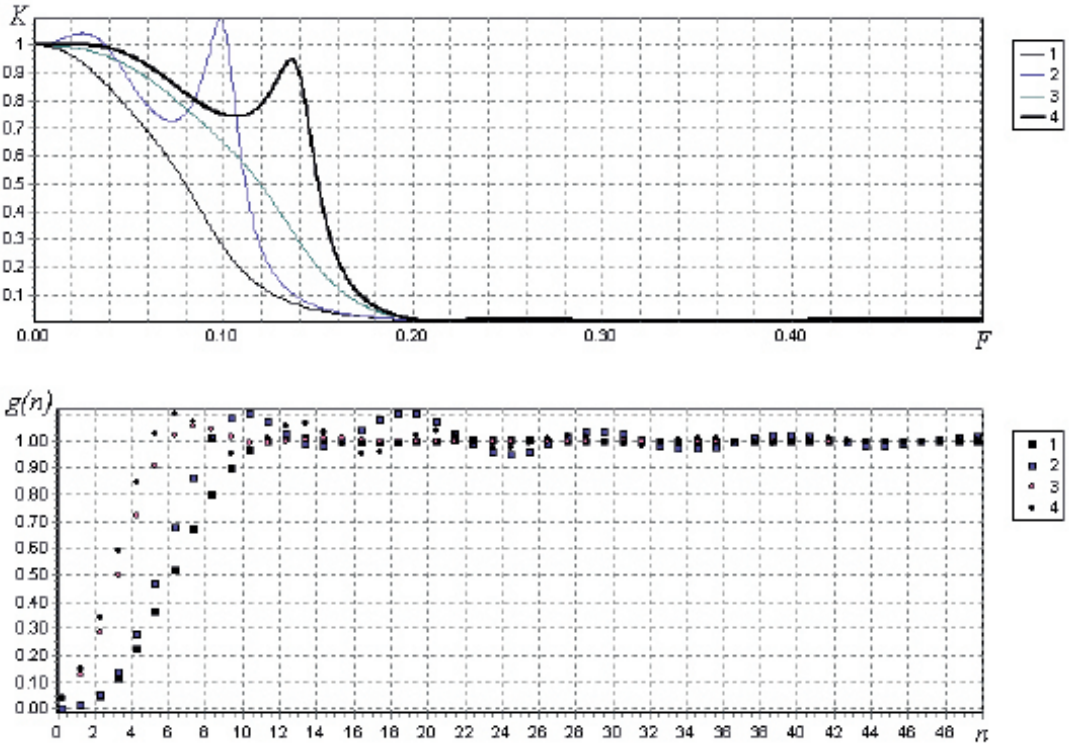

Рис. 7. Примеры АЧХ (верхние графики) и ПХ цифровых фильтров.

В качестве дополнительной информации для последующего сравнения разных методов получения оптимальных цифровых и аналоговых фильтров в таблице приведены данные о среднем времени T100, затрачиваемом на выполнение серии из 100 циклов локального поиска, среднем количестве NGF вычислений целевой функции в цикле локального поиска и среднем времени TGF одного вычисления целевой функции. Счетчик числа расчетов целевой функции и таймер для измерения продолжительности работы имеются в программах SOFTD и HODF. Все эксперименты выполнялись на одном компьютере с двуядерным процессором Intel Core 2 с тактовой частотой 1.87 ГГц.

Затраты времени на поиск

Фильтр	Нули	T100, с	NGF	TGF, мс
Цифровой	В соотв. с (15)	15	260	0.58
	Произвольные	37	620	0.59
Аналоговый	NZ = 0	110	370	2.93
	NZ = 4	260	830	3.10

Первое, что следует из графиков на рис. 5 и рис. 6, это превосходство цифровых фильтров, полученных путем поиска оптимальных решений, над фильтрами, полученными путем преобразования оптимальных по тем же ПК аналоговых фильтров-прототипов. Особенно заметно это преимущество в случае произвольного положения нулей цифрового фильтра (рис. 6). Можно сделать вывод, что при билинейном преобразовании Парето-оптимальность по АЧХ и ПХ не сохраняется.

Для аналоговых фильтров с числом нулей ПФн $NZ = 0$ результаты, полученные путем поиска оптимальных решений и путем обратного билинейного преобразования, приблизительно одинаковые и составляют единый фронт Парето (рис. 3). В случае аналоговых фильтров с $NZ = 4$ результаты, полученные путем обратного билинейного преобразования, образуют вполне определенный фронт Парето. В то же время в результатах поиска оптимальных решений для таких фильтров не видно отчетливой и монотонной закономерности. По-видимому, рельефы целевых функций для этих фильтров слишком сложные, и применяемый алгоритм поиска не находит решений достаточно близких к оптимальным.

Продолжительность вычисления целевой функции для аналогового фильтра приблизительно в 5 раз больше, чем для цифрового. Это связано с тем, что при расчете ПХ цифрового фильтра необходимо учитывать значительно меньше отсчетов, чем при аналогичном расчете для аналогового фильтра, который выполняется методом пространства состояний [10]. В результате поиск оптимальных по АЧХ и ПХ аналоговых фильтров требует значительно большего времени по сравнению с оптимизацией цифровых фильтров.

Заключение

Проведенное исследование показало, что для получения цифровых фильтров, оптимальных по совокупности ПК, характеризующих АЧХ и ПХ, следует выполнять поиск непосредственно цифровых фильтров, так как преобразование в цифровую форму оптимальных в том же смысле аналоговых фильтров-прототипов дает худшие результаты. Разработанная программа поиска Парето-оптимальных цифровых фильтров обеспечивает решение этой задачи и позволяет выбирать необходимые сочетания ПК.

Кроме того, в ряде случаев рациональным способом получения оптимальных по указанной совокупности ПК аналоговых фильтров оказывается обратное билинейное преобразование ПФн найденных оптимальных цифровых фильтров. Такой вариант может обеспечить получение лучших решений при значительной экономии времени по сравнению с поиском оптимальных аналоговых фильтров.

Не исключено, что существуют возможности использования цифровых фильтров-прототипов, оптимальных по каким-то совокупностям ПК с сохранением этой оптимальности при преобразовании в цифровые фильтры с другими параметрами, например, с другой нижней граничной частотой полосы задерживания. Исследование таких возможностей является одной из задач последующих работ.

Полученные результаты еще раз показывают перспективность применения эвристических методов поиска оптимальных решений в радиоэлектронике.

Литература:

1. Нефедов В.И., Сигов А.С. Основы радиоэлектроники и связи: учебное пособие, под ред. В.И. Нефедова. М.: Высшая школа, 2009. 735 с. ISBN 978-5-06-006161-1

2. Гадзиковский В.И. Методы проектирования цифровых фильтров. М.: Горячая линия – Телеком, 2007. 416 с. ISBN 978-5-9912-0007-3

3. Гуткин Л.С. Оптимизация радиоэлектронных устройств по совокупности показателей качества. М.: Сов. радио, 1975. 368 с.

4. Смирнов А.В. Оптимальные по Парето аппроксимации передаточных функций электрических фильтров. *Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук.* 2015;5-1(76):74-78.

5. Slowik A., Bialko M. Design and Optimization of IIR Digital Filters with Non-Standard Characteristics Using Particle Swarm Optimization Algorithm. In: 14th IEEE International Conference on Electronics, Circuits and Systems (ICECS 2007), 11–14 Dec. 2007. P 162-165.
https://doi.org/10.1109/ICECS.2007.4510955

6. Walczak K. Multicriteria design of digital filter with evolutionary optimization. In: IEEE International Symposium on Signal Processing and Information Technology (ISSPIT), 14-17 Dec. 2011. P. 331-335.
https://doi.org/10.1109/ISSPIT.2011.6151583

7. Sidhu D.S., Dhillon J. S., Kaur D. Design of Digital IIR Filter with Conflicting Objectives Using Hybrid Gravitational Search Algorithm. *Mathematical Problems in Engineering.* 2015: Article ID 282809, 16 p.
https://doi.org/10.1155/2015/282809

8. Бугров В.Н. Синтез целочисленных рекурсивных фильтров с произвольно заданными селективными требованиями. *Цифровая обработка сигналов.* 2016;2:35-43.

9. Смирнов А.В. Анализ условий сохранения оптимальности амплитудно-частотной и фазочастотной характеристик при преобразованиях аналоговых и цифровых фильтров. *Российский технологический журнал.* 2020;8(2):43-58.
https://doi.org/10.32362/2500-316X-2020-8-2-43-58

10. Смирнов А.В. Метод одновременной оптимизации характеристик электрических фильтров в частотной и временной областях. *Российский технологический журнал.* 2018;6(6):20-33.
https://doi.org/10.32362/2500-316X-2018-6-6-13-27

11. Maghsoudi Y., Kamandar M. Low delay digital IIR filter design using metaheuristic algorithms. In: Proceedings of the 2017 2nd Conference on Swarm Intelligence and Evolutionary Computation (CSIEC), 7-9 March 2017, Kerman, Iran.
https://doi.org/10.1109/CSIEC.2017.7940159

12. Бобцов А.А., Болтунов Г.И., Быстров С.В., Григорьев В.В. Управление непрерывными и дискретными процессами: учебное пособие. СПб.: СПбГУ ИТМО, 2010. 175 с.

References:

1. Nefedov V.I., Sigov A.S. *Osnovy radioelektroniki i svyazi: uchebnoe posobie* (Basics of radio electronics and communications: text-book, (Ed.). V.I. Nefedov. Moscow: Vysshaya shkola; 2009. 735 p. (in Russ.). ISBN 978-5-06-006161-1

2. Gadzikovskii V.I. *Metody proektirovaniya tsifrovykh fil'trov* (Methods for designing digital filters. Moscow: Goryachaya liniya – Telekom; 2007. 416 p. (in Russ). ISBN 978-5-9912-0007-3

3. Gutkin L.S. Optimizatsiya radioelektronnykh ustroistv po sovokupnosti pokazatelei kachestva (Optimization of electronic devices in terms of a set of quality indicators. Moscow: Sovetskoe radio; 1975. 368 p. (in Russ).

4. Smirnov A.V. Pareto-optimal approximations of electric filters transfer functions. *Aktual'nye problemy gumanitarnykh i estestvennykh nauk = Actual problems of the humanities and natural sciences.* 2015;5-1(76):74-78 (in Russ.).

5. Slowik A., Bialko M. Design and Optimization of IIR Digital Filters with Non-Standard Characteristics Using Particle Swarm Optimization Algorithm. In: 14th IEEE International Conference on Electronics, Circuits and Systems (ICECS 2007), 11–14 Dec. 2007. P 162-165.
https://doi.org/10.1109/ICECS.2007.4510955

6. Walczak K. Multicriteria design of digital filter with evolutionary optimization. In: IEEE International Symposium on Signal Processing and Information Technology (ISSPIT), 14-17 Dec. 2011. P. 331-335.
https://doi.org/10.1109/ISSPIT.2011.6151583

7. Sidhu D.S., Dhillon J. S., Kaur D. Design of Digital IIR Filter with Conflicting Objectives Using Hybrid Gravitational Search Algorithm. *Mathematical Problems in Engineering.* 2015: Article ID 282809, 16 p.
https://doi.org/10.1155/2015/282809

8. Bugrov V.N. Integer design of IIR filters with difficult selective requirements. *Tsifrovaya obrabotka signalov = Digital Signal Processing.* 2016;2:35-43 (in Russ.).

9. Smirnov A.V. The analysis of conditions for preservation of gain-frequency and phase-frequency characteristics optimality under analog and digital filters transformation. *Rossiiskii tekhnologichekii zhurnal = Russian Technological Journal.* 2020;8(2):43-58 (in Russ.).
https://doi.org/10.32362/2500-316X-2020-8-2-43-58

10. Smirnov A.V. Method of simultaneous optimization of radio devices performance in frequency and time domain. *Rossiiskii tekhnologichekii zhurnal = Russian Technological Journal.* 2018;6(6):20-33 (in Russ.). https://doi.org/10.32362/2500-316X-2018-6-6-13-27

11. Maghsoudi Y., Kamandar M. Low delay digital IIR filter design using metaheuristic algorithms. In: Proceedings of the 2017 2nd Conference on Swarm Intelligence and Evolutionary Computation (CSIEC), 7-9 March 2017, Kerman, Iran. https://doi.org/10.1109/CSIEC.2017.7940159

12. Bobtsov A.A., Boltunov G.I., Bystrov S.V., Grigor'ev V.V. *Upravlenie nepreryvnymi i diskretnymi protsessami: uchebnoe posobie* (Control of continuous and discrete processes). St. Petersburg: St. Petersburg ITMO; 2010. 175 p. (in Russ.).

Об авторе:

Смирнов Александр Витальевич, кандидат технических наук, доцент, профессор кафедры Систем связи и телекоммуникаций Института радиотехнических и телекоммуникационных систем ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). Scopus Author Id:56380930700

About the author:

Alexander V. Smirnov, Cand. Sci. (Engineering), Professor of Department of Communication and Telecommunications Systems, Institute of Radio Engineering and Telecommunication Systems, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo Pr., Moscow 119454, Russia). Scopus Author Id:56380930700

Поступила: 24.12.2019; получена после доработки: 28.09.2020; принята к опубликованию: 10.10.2020.