

УДК 621.372.8

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПОЛОСКОВЫХ ЛИНИЙ В МНОГОСЛОЙНОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

А.Н. Коваленко^{1,@},

А.Н. Жуков^{1,2}

¹МИРЭА - Российский технологический университет, Москва 119454, Россия

²Научно-производственный центр «Специальные космические комплексы и системы», АО «Корпорация «ВНИИЭМ», Москва 107078, Россия

@Автор для переписки, e-mail: a_kovalenko@mirea.ru

Электродинамическая задача сведена к интегральному уравнению относительно плотности тока на полосковом проводнике. Оно решается проекционным методом с использованием «чебышёвского» базиса. Приведена однородная система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно коэффициентов разложения продольной и поперечной составляющих плотности тока по полиномам Чебышёва с весовыми функциями, учитывающими особенность поля на краях полосковых проводников. Из условия равенства нулю определителя этой системы численными методами определяются постоянные распространения собственных волн. Проведена процедура улучшения сходимости медленно сходящихся рядов для матричных коэффициентов СЛАУ. Решена проблема вычисления с высокой точностью функций, представленных в виде бесконечных медленно сходящихся рядов, через которые определяются матричные коэффициенты. Получена универсальная, не зависящая от числа слоев, формула для расчета волновых сопротивлений собственных волн. Использование «чебышёвского» базиса и улучшение сходимости рядов позволили разработать эффективный алгоритм расчета основных электродинамических параметров полосковых линий – постоянных распространения и волновых сопротивлений собственных волн. Построенные алгебраические модели полосковых линий позволяют путем компьютерного моделирования получить численные результаты быстро и с высокой точностью независимо от числа диэлектрических слоев и их параметров. На основе разработанного алгоритма создан комплекс компьютерных программ расчета постоянных распространения, коэффициентов разложений плотности тока по «взвешенным» полиномам Чебышёва и волновых сопротивлений экранированных полосковых линий различного типа: одиночной и связанных (с боковой и лицевой связью) микрополосковых линий; компланарной полосковой линией; щелевой линии и компланарного волновода. Эти программы позволяют определять электродинамические параметры основной волны и до 50 волн высших типов. Представлены результаты численного анализа сходимости разработанного алгоритма расчета собственных волн, подтверждающие эффективность построенных моделей. Приведены численные результаты, полученные без проведения процедуры улучшения сходимости рядов для матричных коэффициентов, и результаты, полученные проекционным методом с использованием тригонометрического базиса.

Ключевые слова: проекционный метод, «чебышёвский» базис, собственные волны, эффективный алгоритм расчета, постоянные распространения, волновые сопротивления, алгебраические модели, компьютерное моделирование.

ALGEBRAIC MODELS OF STRIP LINES IN A MULTILAYER DIELECTRIC MEDIUM

A.N. Kovalenko^{1,@},

A.N. Zhukov^{1,2}

¹MIREA - Russian Technological University, Moscow 119454, Russia

²Scientific and Production Center "Special Space Complexes and Systems", JSC "VNIEM Corporation", Moscow 107078, Russia

@Corresponding author e-mail: a_kovalenko@mirea.ru

The electrodynamic problem is reduced to an integral equation with respect to the current density on the strip conductor. It is solved by the projection method using the Chebyshev basis. A homogeneous system of linear algebraic equations (SLAE) is described with respect to the coefficients of the expansion of the longitudinal and transverse components of the current density in terms of Chebyshev polynomials with weight functions that take into account the specificity of the field at the edges of the strip conductors. On the basis of the condition that the determinant of this system is zero the constants of the natural waves propagation are determined by numerical methods. A procedure for improving the convergence of slowly convergent series for the matrix coefficients of SLAE is carried out. The problem of high-accuracy calculation of the functions represented in the form of infinite slowly convergent series, by means of which the matrix coefficients are determined, is solved. A universal formula independent of the number of layers for calculating the wave impedances of natural waves is obtained. The use of the Chebyshev basis and the improvement of the series convergence made it possible to develop an effective algorithm for calculating the basic electrodynamic parameters of the strip lines – the propagation constants and the wave impedances of the natural waves. The constructed algebraic models of strip lines allow computer simulation to obtain numerical results quickly and with high accuracy irrespectively of the number of dielectric layers and their parameters. On the basis of the developed algorithm we created a set of computer programs for calculating the propagation constants, the coefficients of the current density decomposition in terms of Chebyshev weighted polynomials and the wave impedances of screened strip lines of various types: a single and connected microstrip lines (with side and face communication); coplanar strip line; slit line and coplanar waveguide. These programs allow determining the electrodynamic parameters of the main wave and up to 50 waves of higher types. The results of a numerical analysis of the convergence of the developed algorithm for the calculation of natural waves are presented. This confirms the effectiveness of the constructed models. Numerical results obtained without the procedure for improving the convergence of series for matrix coefficients and results obtained by the projection method using the trigonometric basis are given.

Keywords: projection method; "Chebyshev" basis; eigenwaves; effective calculation algorithm; constant propagation; wave resistance; algebraic models; computer modelling.

Введение

Основной проблемой в электродинамической теории полосковых линий является построение системы собственных волн. Ее решение дает возможность рассмотреть задачи дифракции на нерегулярностях линии и на их основе разработать методы электродинамического анализа различных элементов интегральных схем СВЧ. Современная

технология монолитных интегральных схем СВЧ включает изготовление многоуровневых планарных структур. Использование покрывающих и подстилающих слоев и слоев диэлектрика между металлическими элементами приводит к необходимости анализа элементов с учетом многослойности диэлектрической среды. Собственные волны определяются как решения однородной системы уравнений электродинамики, удовлетворяющие граничным условиям. Эти решения представляют электродинамические модели полосковых линий. Построение электродинамических моделей полосковых линий возможно лишь с использованием численных методов, на основе которых разрабатываются вычислительные алгоритмы и реализующие их компьютерные программы. Наиболее универсальными являются проекционные (вариационные) методы решения электродинамических задач [1, 2]. Проекционные методы можно применить непосредственно к уравнениям Максвелла и к интегральному или иному операторному уравнению, к которому сведена электродинамическая задача. Проекционный метод преобразует электродинамическую задачу в систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), которую называют проекционной, или алгебраической, моделью этой задачи.

Проблема эффективного нахождения собственных волн особенно актуальна при решении задач дифракции на скачкообразных нерегулярностях полосковых линий методом проекционного «сшивания» [3] и создании математических моделей нерегулярных полосковых структур, представляющих каскадное соединение отрезков регулярных линий на основе линейной декомпозиции [4]. При этом для каждой линии требуется найти не только основную волну, но и достаточно большое число высших волн. Предложен эффективный численно-аналитический метод построения системы собственных волн экранированной микрополосковой линии [5]. В основу метода положен проекционный способ решения интегральных уравнений специального вида с использованием «чебышёвского» базиса, учитывающего в явном виде краевые особенности решения. Этот метод позволяет получить численные результаты с высокой точностью при небольшом числе базисных функций. В работах [6, 7] данный метод обобщен на многослойные полосковые и щелевые направляющие структуры. Однако при численной реализации метода необходимо решить проблему вычисления с высокой точностью медленно сходящихся рядов для матричных коэффициентов СЛАУ.

Цель настоящей работы – получить расчетные соотношения для матричных коэффициентов СЛАУ и представить результаты численного исследования сходимости разработанного алгоритма.

1. Алгебраическая модель одиночной полосковой линии

Поперечное сечение линии показано на рис. 1. Область ниже полоскового проводника ($y < c$) обозначена как 1, область выше полоскового проводников – 2. В области 1 – K слоев, в области 2 – N слоев, $\epsilon_{j,1,2}$ – относительная диэлектрическая проницаемость среды в j -том слое областей 1, 2.

Собственные волны находятся из решения граничной задачи для уравнений Максвелла. Решение этой задачи представляется в виде бесконечных рядов Фурье по координате x . Коэффициенты разложений выражаются через интегралы от поверхностной плотности тока на полосковом проводнике. Граничное условие для тангенциальной составляющей напряженности электрического поля на поверхности полоскового проводника приводит

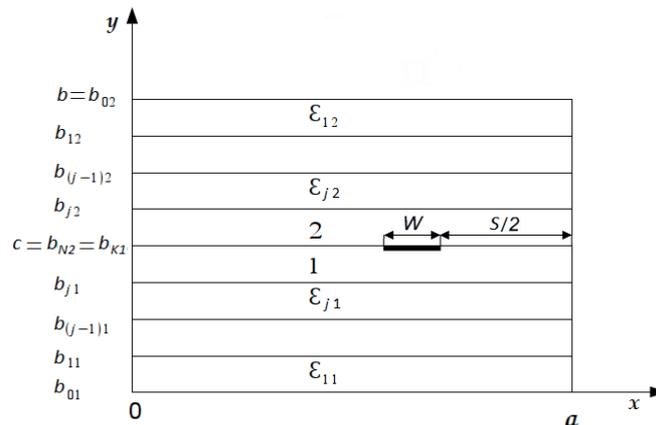


Рис. 1. Поперечное сечение линии.

к системе интегральных уравнений относительно продольной η_z и поперечной η_x составляющих плотности тока на полосковом проводнике. Решение системы представляется в виде произведения двух функций, одна из которых, весовая, учитывает краевые особенности решения, а другая, регулярная, представляется в виде разложения по полиномам Чебышёва:

$$\eta_z = \frac{1}{\sqrt{1-\tilde{x}^2}} \sum_{l=0}^{\infty} a_l T_l(\tilde{x}), \quad i\Gamma \eta_x = \frac{W}{2} \sqrt{1-\tilde{x}^2} \sum_{l=0}^{\infty} b_l U_l(\tilde{x}), \quad \tilde{x} = \frac{x-x_0}{W/2}; \quad (1)$$

где Γ – нормированная (к волновому числу $k_0 = 2\pi f \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$) постоянная распространения;

ϵ_0 – диэлектрическая постоянная;

μ_0 – магнитная постоянная;

f – частота;

x_0 – расстояние от плоскости до центра полоскового проводника;

W – ширина полоскового проводника;

$T_l(\tilde{x})$ – полиномы Чебышёва первого рода;

$U_l(\tilde{x})$ – полиномы Чебышёва второго рода.

В (1) и последующих выражениях опущен множитель $e^{-i\Gamma z}$ и используются безразмерные координаты и элементы длины, переход к которым осуществляется путем умножения их размерных аналогов на волновое число свободного пространства k_0 . Используя [6], получим следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложений a_l и b_l :

$$\begin{aligned} A_{q0}^q a_0 + \sum_{l=1}^L \left(A_{ql}^q a_{2l} + B_{ql}^{Hq} b_{2l-1} + \tilde{A}_{ql}^{Hq} a_{2l-1} + \tilde{B}_{ql}^q b_{2(l-1)} \right) &= 0, q = 0, 1, \dots, L, \\ C_{q0}^q a_0 + \sum_{l=1}^L \left(C_{ql}^q a_{2l} + D_{ql}^{Hq} b_{2l-1} + \tilde{C}_{ql}^{Hq} a_{2l-1} + \tilde{D}_{ql}^q b_{2(l-1)} \right) &= 0, q = 1, 2, \dots, L, \\ \tilde{A}_{q0}^q a_0 + \sum_{l=1}^L \left(\tilde{A}_{ql}^q a_{2l} + \tilde{B}_{ql}^{Hq} b_{2l-1} + A_{ql}^{Hq} a_{2l-1} + B_{ql}^q b_{2(l-1)} \right) &= 0, q = 1, 2, \dots, L, \\ \tilde{C}_{q0}^q a_0 + \sum_{l=1}^L \left(\tilde{C}_{ql}^q a_{2l} + \tilde{D}_{ql}^{Hq} b_{2l-1} + C_{ql}^{Hq} a_{2l-1} + D_{ql}^q b_{2(l-1)} \right) &= 0, q = 1, 2, \dots, L, \quad L \rightarrow \infty \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{ql}^{\text{ч}} &= (-1)^{q+l} \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_{(2q)(2l)}(m\alpha) \sin^2 m\beta, \\
 B_{ql}^{\text{Hч}} &= (-1)^{q+l} 2l \sum_{m=1}^{\infty} B_m J_{(2q)(2l)}(m\alpha) \sin^2 m\beta, \\
 D_{ql}^{\text{Hч}} &= (-1)^{q+l} 4ql \sum_{m=1}^{\infty} D_m J_{(2q)(2l)}(m\alpha) \sin^2 m\beta, \\
 A_{ql}^{\text{Hч}} &= (-1)^{q+l} \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_{(2q-1)(2l-1)}(m\alpha) \cos^2 m\beta, \\
 B_{ql}^{\text{ч}} &= (-1)^{q+l} (2l-1) \sum_{m=1}^{\infty} B_m J_{(2q-1)(2l-1)}(m\alpha) \cos^2 m\beta, \\
 D_{ql}^{\text{ч}} &= (-1)^{q+l} (2q-1)(2l-1) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m}{2} D_m J_{(2q-1)(2l-1)}(m\alpha) \cos^2 m\beta, \\
 \tilde{A}_{ql}^{\text{Hч}} &= -(-1)^{q+l} \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_{(2q)(2l-1)}(m\alpha) \sin m\beta \cos m\beta, \\
 \tilde{B}_{ql}^{\text{ч}} &= -(-1)^{q+l} (2l-1) \sum_{m=1}^{\infty} B_m J_{(2q)(2l-1)}(m\alpha) \sin(m\beta) \cos(m\beta), \\
 \tilde{C}_{ql}^{\text{Hч}} &= -(-1)^{q+l} 2q \sum_{m=1}^{\infty} B_m J_{(2q)(2l-1)}(m\alpha) \sin m\beta \cos m\beta \\
 \tilde{D}_{ql}^{\text{ч}} &= -(-1)^{q+l} 2q(2l-1) \sum_{m=1}^{\infty} D_m J_{(2q)(2l-1)}(m\alpha) \sin m\beta \cos m\beta
 \end{aligned}$$

$$C_{ql}^{\text{ч}} = B_{lq}^{\text{Hч}}, \quad C_{ql}^{\text{Hч}} = B_{lq}^{\text{ч}}, \quad \tilde{A}_{ql}^{\text{Hч}} = \tilde{A}_{lq}^{\text{Hч}}, \quad \tilde{B}_{ql}^{\text{ч}} = \tilde{C}_{lq}^{\text{ч}}, \quad \tilde{C}_{ql}^{\text{ч}} = B_{lq}^{\text{Hч}}, \quad \tilde{D}_{ql}^{\text{Hч}} = \tilde{D}_{lq}^{\text{ч}}, \quad (3)$$

где

$$A_m = \frac{1}{\chi^2} (\Gamma^2 G_m^{\text{э}} + \alpha_m^2 G_m^{\text{м}}), \quad B_m = \frac{1}{\chi^2} (G_m^{\text{м}} - G_m^{\text{э}}), \quad D_m = \frac{1}{\chi^2} \left(\frac{G_m^{\text{э}}}{\Gamma^2} + \frac{G_m^{\text{м}}}{\alpha_m^2} \right), \quad (4)$$

$$\varepsilon_m = \begin{cases} 1 & \text{при } m = 0 \\ 2 & \text{при } m \neq 0 \end{cases},$$

$$J_{ql}(x) = J_q(x) J_l(x);$$

$J_\nu(x)$ – функция Бесселя;

$$\alpha = \frac{\pi W}{2a}, \quad \beta = \alpha \left(1 + \frac{S}{W} \right);$$

W – ширина полоскового проводника;

$S/2$ – расстояние от проводника до плоскости $x = a$.

$$\begin{aligned}
 G_m^{\text{э,м}} &= (1 / Z_{mK1}^{\text{э,м}} + 1 / Z_{mN2}^{\text{э,м}})^{-1}, \\
 Z_{mj1,2}^{\text{э,м}} &= \frac{Z_{m(j-1),2}^{\text{э,м}} + W_{mj1,2}^{\text{э,м}} \operatorname{tg}(\beta_{mj1,2} |b_{j1,2} - b_{(j-1),1,2}|)}{1 - (Z_{m(j-1),2}^{\text{э,м}} / W_{mj1,2}^{\text{э,м}}) \operatorname{tg}(\beta_{mj1,2} |b_{j1,2} - b_{(j-1),1,2}|)},
 \end{aligned}$$

$$W_{mj1,2}^{\mathcal{E}} = \beta_{mj1,2} / \varepsilon_{j12}, \quad W_{mj1,2}^{\mathcal{M}} = 1 / \beta_{mj1,2}, \quad Z_{m01,2}^{\mathcal{E},\mathcal{M}} = 0,$$

$$\beta_{mj1,2} = \sqrt{\varepsilon_{j1,2} - \chi_m^2}, \quad \chi_m^2 = \alpha_m^2 + \Gamma^2, \quad \alpha_m = \frac{\pi}{a} m. \quad (5)$$

Выражения (3) для матричных коэффициентов системы (2) имеют такой же вид, как и для микрополосковой линии на однослойной подложке, приведенные в [5]. Поэтому алгоритмы расчета характеристик многослойных полосковых структур такие же, как и соответствующие алгоритмы для микрополосковых линий на однослойной подложке.

Из условия равенства нулю определителя D системы (2) получим дисперсионное уравнение:

$$D(\Gamma^2) = 0. \quad (6)$$

Из этого уравнения численными методами определяются постоянные распространения собственных волн полосковых линий.

Бесконечные ряды для матричных коэффициентов системы (2), определяемых выражениями (3), сходятся медленно, и непосредственное их вычисление требует большого времени счета. Оно может приводить к неустойчивым результатам даже при учете весьма большого числа членов в этих рядах. Поэтому при численном решении дисперсионного уравнения (6) и СЛАУ (2) необходимо выполнить процедуру улучшения сходимости рядов по разработанной в [5] методике.

2. Улучшение сходимости рядов для матричных коэффициентов

Сходимость медленно сходящихся рядов можно существенно улучшить, если к коэффициентам A_m , B_m и D_m , определяемых выражениями (4), прибавить и вычесть их асимптотические выражения $A_m^\infty, B_m^\infty, D_m^\infty$. Используя (4) и (5), можно показать, что асимптотические выражения для функций $G_m^{\mathcal{E},\mathcal{M}}$ и коэффициентов A_m, B_m и D_m не зависят от числа диэлектрических слоев и представляются в виде:

$$G_m^{\mathcal{E}} \Big|_{m \rightarrow \infty} \cong -\alpha_m / (\varepsilon_{K1} + \varepsilon_{N2}), \quad G_m^{\mathcal{M}} \Big|_{m \rightarrow \infty} \cong 1 / (2\alpha_m),$$

$$A_m^\infty \cong \frac{1}{\alpha_m} \left(\frac{1}{2} - \frac{\Gamma^2}{\varepsilon_{K1} + \varepsilon_{N2}} \right), \quad B_m^\infty \cong \frac{1}{\alpha_m (\varepsilon_{K1} + \varepsilon_{N2})}, \quad D_m^\infty \cong -\frac{1}{\alpha_m \Gamma^2 (\varepsilon_{K1} + \varepsilon_{N2})}. \quad (7)$$

Таким образом, выражения для коэффициентов $A_m^{\mathcal{H}}, A_{ql}^{\mathcal{H}}, \tilde{A}_{ql}^{\mathcal{H}}$ имеют вид:

$$A_{ql}^{\mathcal{H}} = (-1)^{q+l} (A_m^\infty m S_{ql}(\alpha, \beta) + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m - A_m^\infty) J_{(2q)(2l)}(m\alpha) \sin^2(m\beta)),$$

$$A_{ql}^{\mathcal{H}\mathcal{H}} = (-1)^{q+l} (A_m^\infty m P_{ql}(\alpha, \beta) + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m - A_m^\infty) J_{(2q-1)(2l-1)}(m\alpha) \cos^2(m\beta)),$$

$$A_{ql}^{\mathcal{H}} = (-1)^{q+l} (A_m^\infty m Q_{ql}(\alpha, \beta) + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m - A_m^\infty) J_{(2q)(2l-1)}(m\alpha) \sin(m\beta) \cos(m\beta)),$$

где

$$S_{ql}(\alpha, \beta) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \cdot J_{(2q)(2l)}(m\alpha) \cdot \sin^2 m\beta, \quad (8)$$

$$P_{ql}(\alpha, \beta) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \cdot J_{(2q-1)(2l-1)}(m\alpha) \cdot \cos^2 m\beta, \quad (9)$$

$$Q_{ql}(\alpha, \beta) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \cdot J_{(2q)(2l-1)}(m\alpha) \cdot \sin m\beta \cdot \cos m\beta. \quad (10)$$

Аналогичные выражения можно получить и для остальных матричных коэффициентов.

При численном решении дисперсионного уравнения (6) и СЛАУ (2), а также при расчете волновых сопротивлений возникает проблема вычисления функций $S_{ql}(\alpha, \beta)$, $P_{ql}(\alpha, \beta)$, $Q_{ql}(\alpha, \beta)$, определяемых медленно сходящимися рядами (7)–(9). Для достижения высокой точности расчета коэффициентов замедления и волновых сопротивлений необходимо учитывать в них до десяти тысяч членов, что обуславливает большие вычислительные затраты. Используя интегральные выражения для функций Бесселя и их производных [5], можно получить следующие представления для этих функций:

$$S_{ql}(\alpha, \beta) = R_{(2q)(2l)}(\alpha) - \frac{1}{2} R_{(2q)(2l)}(2\alpha) + F_{(2q)(2l)}(\alpha, \beta),$$

$$P_{ql}(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} R_{(2q-1)(2l-1)}(2\alpha) - F_{(2q-1)(2l-1)}(\alpha, \beta),$$

$$Q_{ql}(\alpha, \beta) = E_{2q(2l-1)}(\alpha, \beta),$$

где

$$R_{kn}(\alpha) = -\frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \cos[(k-n)\theta] \cos[(k+n)\varphi] \ln \left(2 \sin \frac{u}{2} \right) d\theta d\varphi, \quad (11)$$

$k + n$ – четное число;

$$F_{kn}(\alpha) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \cos[(k-n)\theta] \cdot \cos[(k+n)\varphi] \cdot \left[\frac{1}{2} \ln(\sin \beta) + \frac{1}{4} \ln \left(1 - \frac{\text{tg}^2 \frac{u}{2}}{\text{tg}^2 \beta} \right) \right] d\theta d\varphi, \quad (12)$$

$k + n$ – четное число;

$$E_{kn}(\alpha, \beta) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \cos[(k-n)\theta] \sin[(k+n)\varphi] \ln \frac{1 + \text{tg} \frac{u}{2} / \text{tg} \beta}{1 - \text{tg} \frac{u}{2} / \text{tg} \beta} d\theta d\varphi, \quad (13)$$

$k + n$ – нечетное число, $u = 2\alpha \cos \theta \sin \varphi$.

Разлагая логарифмическую функцию в степенной ряд и интегрируя почленно, приведем выражения для функции $R_{kn}(\alpha)$ к следующему виду:

$$\begin{aligned}
 R_{kn}(\alpha)|_{k \neq n} &= (-1)^{\frac{k+n}{2}} \sum_{v=\frac{k+n}{2}}^{\infty} S_{2v} \frac{1}{v} \left[\frac{(2v-1)!!}{(2v)!!} \right]^2 \times \\
 &\times \frac{v(v-1) \dots \left(v+1 - \frac{k+n}{2} \right)}{(v+1)(v+2) \dots \left(v + \frac{k+n}{2} \right)} \times \frac{v(v-1) \dots \left(v+1 - \left\lfloor \frac{k-n}{2} \right\rfloor \right)}{(v+1)(v+2) \dots \left(v + \left\lfloor \frac{k-n}{2} \right\rfloor \right)} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{2v}, \\
 R_{kk}(\alpha)|_{k \neq 0} &= \frac{1}{2k} + (-1)^k \sum_{v=k}^{\infty} S_{2v} \frac{1}{v} \left[\frac{(2v-1)!!}{(2v)!!} \right]^2 \times \frac{v(v-1) \dots (v+1-k)}{(v+1)(v+2) \dots (v+k)} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{2v}, \\
 R_{00}(\alpha) &= \ln \frac{2}{\alpha} + \sum_{v=1}^{\infty} S_{2v} \frac{1}{v} \left[\frac{(2v-1)!!}{(2v)!!} \right]^2 \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{2v}, \quad S_{2v} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^{2v}}. \tag{11'}
 \end{aligned}$$

Из полученных выражений следует, что ряд быстро сходится, и при расчете функции $R_{kn}(\alpha)$ в нем достаточно учесть несколько первых членов. При больших значениях q и l этот ряд близок к нулю, и тогда для функции $R_{kn}(\alpha)$ получим следующее асимптотическое выражение: $R_{kn} \cong \frac{\delta_{kn}}{2k}$, где $\delta_{kn} = \begin{cases} 1 & \text{при } k = n \\ 0 & \text{при } k \neq n \end{cases}$.

Аналогичные представления можно получить также для функций $F_{kn}(\alpha, \beta)$ и $E_{kn}(\alpha, \beta)$, разлагая в выражениях (12), (13) тангенс и логарифм в степенные ряды и интегрируя почленно. Для широких экранов, для которых $\alpha \ll 1$, в формулах (12), (13) можно положить $\text{tg}(u/2) \approx u/2$. В таком случае:

$$\begin{aligned}
 F_{kn}(\alpha, \beta)|_{k \neq n} &= -\frac{1}{4} (-1)^{\frac{k+n}{2}} \sum_{v=\frac{k+n}{2}}^{\infty} \frac{1}{v} \left[\frac{(2v-1)!!}{(2v)!!} \right]^2 \times \\
 &\times \frac{v(v-1) \dots \left(v+1 - \frac{k+n}{2} \right)}{(v+1)(v+2) \dots \left(v + \frac{k+n}{2} \right)} \cdot \frac{v(v-1) \dots \left(v+1 - \left\lfloor \frac{k-n}{2} \right\rfloor \right)}{(v+1)(v+2) \dots \left(v + \left\lfloor \frac{k-n}{2} \right\rfloor \right)} \cdot \left(\frac{\alpha}{\text{tg} \beta} \right)^{2v}, \\
 F_{kk}(\alpha, \beta)|_{k \neq 0} &= -\frac{1}{4} (-1)^k \sum_{v=k}^{\infty} \frac{1}{v} \left[\frac{(2v-1)!!}{(2v)!!} \right]^2 \frac{v(v-1) \dots (v+1-k)}{(v+1)(v+2) \dots (v+k)} \cdot \left(\frac{\alpha}{\text{tg} \beta} \right)^{2v}, \\
 F_{00}(\alpha, \beta) &= \frac{1}{2} \ln(\sin \beta) - \frac{1}{4} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v} \left[\frac{(2v-1)!!}{(2v)!!} \right]^2 \left(\frac{\alpha}{\text{tg} \beta} \right)^{2v}. \tag{12'}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_{kn}(\alpha, \beta) \Big|_{n \neq k+1} &= (-1)^{\frac{k+n-1}{2}} \frac{1}{2} \sum_{\nu=\frac{k+n+1}{2}}^{\infty} \frac{1}{2^{2\nu-1}} \frac{\left(\nu - \left\lfloor \frac{k+n-1}{2} \right\rfloor\right) \left(\nu + \frac{k-n+1}{2}\right)}{\nu^2} \left[\frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu)!!} \right]^2 \times \\
 &\times \frac{\nu(\nu-1)\dots\left(\nu+1 - \frac{k+n-1}{2}\right)}{(\nu+1)(\nu+2)\dots\left(\nu + \frac{k+n-1}{2}\right)} \frac{\nu(\nu-1)\dots\left(\nu+1 - \left\lfloor \frac{k-n+1}{2} \right\rfloor\right)}{(\nu+1)(\nu+2)\dots\left(\nu + \left\lfloor \frac{k-n+1}{2} \right\rfloor\right)} \left(\frac{\alpha}{\operatorname{tg}\beta}\right)^{2\nu-1}, \\
 E_{k(k+1)}(\alpha, \beta) \Big|_{k \neq 0} &= (-1)^k \frac{1}{2} \sum_{\nu=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^{2\nu-1}} \frac{1}{\nu} (\nu-k) \left[\frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu)!!} \right]^2 \frac{\nu(\nu-1)\dots(\nu+1-k)}{(\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+k)} \left(\frac{\alpha}{\operatorname{tg}\beta}\right)^{2\nu-1} \\
 E_{01}(\alpha, \beta) &= \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2\nu-1}} \left[\frac{(2\nu-1)!!}{(2\nu)!!} \right]^2 \left(\frac{\alpha}{\operatorname{tg}\beta}\right)^{2\nu-1}.
 \end{aligned} \tag{13'}$$

Таким образом, используя интегральные уравнения (11)–(13), можно получить выражения для функций $S_{ql}(\alpha, \beta)$, $P_{ql}(\alpha, \beta)$, $Q_{ql}(\alpha, \beta)$ в виде быстроходящихся рядов. При больших значениях q и l указанные функции представляются в виде:

$$S_{ql} \cong \frac{1}{8q} \delta_{ql}, \quad P_{ql} \cong \frac{1}{4(2q-1)} \delta_{ql}, \quad Q_{ql} \cong 0 \tag{14}$$

Используя (14), можно получить асимптотические выражения для матричных коэффициентов системы (2), заменив в (3) A_m, D_m, D_m на $A_m^\infty, B_m^\infty, D_m^\infty$ определяемые формулами (7). Из их анализа вытекает вывод о диагональном характере матрицы коэффициентов СЛАУ (2), быстрой сходимости разложений (1) для плотности тока на полосковом проводнике и возможности решения бесконечной системы уравнений методом редукции при небольшом порядке редуцированной СЛАУ. Порядок системы $P = 4L + 1$ ($L = 0, 1, 2, \dots$). В разложениях (1) нужно учитывать $2L$ членов для поперечного тока η_x и $2L + 1$ для продольного η_z . При симметричном расположении полоскового проводника относительно боковых стенок экрана $S = a - W$, $\beta = \pi/2$, и усеченная система (2) распадается на две независимые подсистемы относительно коэффициентов $a_{2l}(l = 0, 1, \dots, L)$, $b_{2l-1}(l = 1, \dots, L)$ и относительно коэффициентов $a_{2l-1}(l = 1, \dots, L)$, $b_{2l}(l = 1, \dots, L)$. Первая подсистема порядка $2L + 1$ соответствует собственным волнам четного типа; вторая – порядка $2L$ соответствует собственным волнам нечетного типа.

Важными электродинамическими параметрами собственных волн являются коэффициенты замедления и волновые сопротивления. Коэффициенты замедления n , равные нормированным к волновому числу постоянным распространения Γ (для распространяющихся типов волн), определяются из дисперсионного уравнения (6). Волновые сопротивления Z находят через мощность и ток:

$$Z = \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b [\vec{E}, \vec{H}^*] \vec{z}^0 dx dy / \left(\int_{x_0-W/2}^{x_0+W/2} \eta_z dx \right)^2$$

Используя разложения (1) для плотности тока и выражения для поля собственных волн, приведенные в [6], можно получить следующее выражение для волнового сопротивления:

$$\begin{aligned}
 Z = \frac{W_o}{a} \Gamma \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_m}{\chi_m^2} & \left[\Gamma^2 (G_m^{\ominus})^2 \left(\frac{1}{G_m^{\ominus}} \right)' \cdot \left(\tilde{I}_{zm} - \frac{\alpha_m}{\Gamma^2} \tilde{I}_{xm} \right)^2 + \right. \\
 & + (G_m^{\text{M}})^2 \left(\frac{1}{G_m^{\text{M}}} \right)' \left(\alpha_m \tilde{I}_{zm} + \tilde{I}_{xm} \right)^2 + \frac{\alpha_m}{\chi_m^2} (G_m^{\text{M}} - G_m^{\ominus}) \times \\
 & \left. \times \left(\tilde{I}_{zm} - \frac{\alpha_m}{\Gamma^2} \tilde{I}_{xm} \right) \left(\alpha_m \tilde{I}_{zm} + \tilde{I}_{xm} \right) \right], \quad (15)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \tilde{I}_{zm} &= \sin(\alpha_m x_o) \sum_{l=0}^L (-1)^l \frac{a_{2l}}{a_o} J_{2l} \left(\alpha_m \frac{W}{2} \right) + \\
 & - \cos(\alpha_m x_o) \sum_{l=1}^L (-1)^l \frac{a_{2l-1}}{a_o} J_{2l-1} \left(\alpha_m \frac{W}{2} \right), \\
 \tilde{I}_{xm} &= \sin(\alpha_m x_o) \sum_{l=1}^L (-1)^l \frac{b_{2l-1}}{a_o} 2l J_{2l} \left(\alpha_m \frac{W}{2} \right) \frac{1}{\alpha_m} - \\
 & - \cos(\alpha_m x_o) \sum_{l=1}^L (-1)^l \frac{b_{2(l-1)}}{a_o} (2l-1) \cdot J_{2l-1} \left(\alpha_m \frac{W}{2} \right) \frac{1}{\alpha_m},
 \end{aligned}$$

$(1/G_m)'$ – производная функции $1/G_m$ по Γ^2 .

Выражение для волнового сопротивления, также, как и выражения для матричных коэффициентов системы (2), не зависят от числа диэлектрических слоев. Усложнение функций G_m^{\ominus} и G_m^{M} в зависимости от числа слоев не вызывает принципиальных затруднений при проведении процедуры улучшения сходимости рядов для матричных коэффициентов и волнового сопротивления, так как асимптотические выражения для этих функций не зависят от числа слоев и их параметров. Поэтому алгоритмы расчета многослойных структур, разработанные с использованием формул (5), те же что и для двухслойной структуры.

Заметим, что при улучшении сходимости ряда (15) для волнового сопротивления подобно рядам для матричных коэффициентов СЛАУ (2) необходимо решить проблему вычисления с высокой точностью медленно сходящихся рядов (8)–(10).

3. Алгебраическая модель связанных полосковых линий

Поперечное сечение экранированных связанных щелевых линий для трехслойной структуры показано на рис. 2.

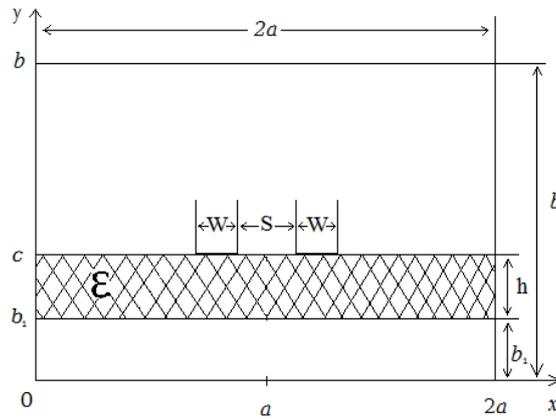


Рис. 2. Поперечное сечение связанных полосковых линий:
 W – ширина полосковых проводников; S – расстояние между ними;
 h – толщина подложки; b_1 – высота подвеса подложки;
 ϵ – относительная диэлектрическая проницаемость подложки;
 $2a, b$ – размеры экрана.

При одинаковой ширине полосковых проводников задача о собственных волнах связанных линий сводится к двум задачам о собственных волнах одиночной линии: 1) с электрической стенкой в плоскости симметрии $x = a$; 2) с магнитной стенкой в этой плоскости. Из первой задачи определяются собственные волны нечетного типа, из второй – четного типа. Для волн нечетного типа в плоскости симметрии тангенциальная составляющая напряженности электрического поля равна нулю. Для волн четного типа в этой плоскости равна нулю тангенциальная составляющая напряженности магнитного поля. Собственные волны нечетного типа определяются выражениями, приведенными в первом и во втором разделах. Собственные волны четного типа определяются этими же выражениями, в которых нужно заменить m на $m - \frac{1}{2}$ ($m \neq 0$), $\sin(m\beta)$ на $\cos((m - \frac{1}{2})\beta)$, $\cos(m\beta)$ на $\sin((m - \frac{1}{2})\beta)$, $S_{ql}(\alpha, \beta)$ на $S_{ql}^M(\alpha, \beta)$, $P_{ql}(\alpha, \beta)$ на $P_{ql}^M(\alpha, \beta)$, $Q_{ql}(\alpha, \beta)$ на $Q_{ql}^M(\alpha, \beta)$, где

$$\begin{aligned}
 S_{ql}^M(\alpha, \beta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m - \frac{1}{2}} J_{(2q)(2l)} \left[\left(m - \frac{1}{2} \right) \alpha \right] \cos^2 \left[\left(m - \frac{1}{2} \right) \beta \right], \\
 P_{ql}^M(\alpha, \beta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m - \frac{1}{2}} J_{(2q-1)(2l-1)} \left[\left(m - \frac{1}{2} \right) \alpha \right] \sin^2 \left[\left(m - \frac{1}{2} \right) \beta \right], \\
 Q_{ql}^M(\alpha, \beta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m - \frac{1}{2}} J_{(2q)(2l-1)} \left[\left(m - \frac{1}{2} \right) \alpha \right] \sin \left[\left(m - \frac{1}{2} \right) \beta \right] \cos \left[\left(m - \frac{1}{2} \right) \beta \right]. \quad (16)
 \end{aligned}$$

Путем математических преобразований, используя интегральные представления для функций Бесселя и их произведений [5], получаются следующие уравнения для функций, определяемых рядами (15):

$$S_{ql}^M(\alpha, \beta) = R_{(2q)(2l)}(\alpha) - 2F_{(2q)(2l)} \left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2} \right) - \left[\frac{1}{2} R_{(2q)(2l)}(2\alpha) - F_{(2q)(2l)}(\alpha, \beta) \right],$$

$$\begin{aligned}
 P_{ql}^M(\alpha, \beta) &= 2R_{(2q-1)(2l-1)}\left(\frac{\alpha}{2}\right) - R_{(2q-1)(2l-1)}(\alpha) + 2F_{(2q-1)(2l-1)}\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right) - \\
 &- R_{(2q-1)(2l-1)}(\alpha) + \frac{1}{2}R_{(2q-1)(2l-1)}(2\alpha) - F_{(2q-1)(2l-1)}(\alpha, \beta), \\
 Q_{ql}^M(\alpha, \beta) &= 2E_{2q(2l-1)}\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right) - E_{2q(2l-1)}(\alpha, \beta).
 \end{aligned} \tag{17}$$

При больших значениях q и l эти функции, как и функции $S_{ql}(\alpha, \beta)$, $P_{ql}(\alpha, \beta)$, $Q_{ql}(\alpha, \beta)$, представляются в виде (14). Из анализа асимптотических выражений для матричных коэффициентов очевидно, что матрицы коэффициентов системы (2) имеют диагональный характер. Кроме того, можно сделать вывод о быстрой сходимости разложений (1) для плотности тока собственных волн и нечетного, и четного типа.

4. Результаты численного анализа сходимости

Использование в разложениях (1) для плотности тока «взвешенных» полиномов Чебышёва, учитывающих в явном виде краевые особенности решения, приводит к быстрой сходимости этих разложений и позволяет получить решение при небольшом порядке редуцированной СЛАУ (2). Улучшение сходимости рядов для матричных коэффициентов СЛАУ обеспечивает высокую точность и устойчивость численных результатов при изменении порядка СЛАУ.

Таким образом, использование «чебышёвского» базиса и улучшение сходимости рядов позволили разработать эффективный алгоритм расчета электродинамических параметров полосковых линий – коэффициентов замедления и волновых сопротивлений. На основе разработанного алгоритма создана компьютерная программа, позволяющая с высокой точностью и скоростью определять постоянные распространения, распределение тока на полосковых проводниках и волновые сопротивления одиночной и связанных полосковых линий.

В результате расчетов, выполненных на персональном компьютере (ПК), исследована сходимость разложений (1) для плотности тока на полосковом проводнике и решен вопрос о выборе числа L , определяющего порядок СЛАУ, и числа M_y , которое нужно учитывать в рядах для матричных коэффициентов после улучшения сходимости этих рядов. При $L = 2$ и $M_y = 50$ погрешность расчета постоянных распространения и волновых сопротивлений основной волны и двух высших волн не превышает 0.1% в широком диапазоне изменения параметров. Для иллюстрации быстрой сходимости и высокой точности разработанного алгоритма расчета собственных волн полосковых линий ниже приведены результаты расчета коэффициентов замедления и волновых сопротивлений двухслойной структуры (рис. 1, $K=1$, $N=1$), моделирующей микрополосковую линию, и трехслойной структуры (рис. 1, $K=2$, $N=1$), моделирующей компланарную полосковую линию. Для трехслойной структуры (рис. 2) функции G_m^{∂} и G_m^M , определяемые формулами (5), можно представить в виде:

$$G_m^{\exists} = \left[\frac{\varepsilon}{\beta_m} \operatorname{ctg}(\beta_m h) \frac{\operatorname{ctg}(\beta_{m1} b_1) / \beta_{m1} - \operatorname{ctg}(\beta_m h) / \beta_m}{\operatorname{ctg}(\beta_{m1} b_1) / \beta_{m1} + \varepsilon \operatorname{ctg}(\beta_m h) / \beta_m} + \frac{\varepsilon_2}{\beta_{m2}} \operatorname{ctg}(\beta_{m2} b_2) \right]^{-1},$$

$$G_m^M = \left[\beta_m \operatorname{ctg}(\beta_m h) \cdot \frac{\beta_{m1} \operatorname{ctg}(\beta_{m1} b_1) - \beta_m \operatorname{tg}(b_m h)}{\beta_{m1} \operatorname{ctg}(\beta_{m1} b_1) + \beta_m \operatorname{ctg}(b_m h)} + \beta_{m2} \operatorname{ctg}(\beta_{m2} b_2) \right]^{-1},$$
(18)

где $\beta_{m1,2} = \sqrt{\varepsilon_{1,2} - \chi_m^2}$;

$$\beta_m = \sqrt{\varepsilon - \chi_m^2}, \quad \chi_m^2 = \Gamma^2 + \alpha_m^2;$$

ε_1 – диэлектрическая проницаемость первого слоя области 1;

ε – диэлектрическая проницаемость второго слоя области 1;

ε_2 – диэлектрическая проницаемость области;

$$b_2 = b - h - b_1.$$

Полагая в (18) $b_1=0$, получим выражения для функций и для двухслойной структуры:

$$G_m^{\exists} = \left[\frac{\varepsilon}{\beta_m} \operatorname{ctg}(\beta_m h) + \frac{\varepsilon_2}{\beta_{m2}} \operatorname{ctg}(\beta_{m2} b_2) \right]^{-1},$$

$$G_m^M = \left[\beta_m \operatorname{ctg}(\beta_m h) + \beta_{m2} \operatorname{ctg}(\beta_{m2} b_2) \right]^{-1}.$$
(19)

Из (18) и (19) видно, что асимптотические выражения для функций G_m^{\exists} и G_m^M одинаковые. Следовательно, предлагаемый способ улучшения сходимости рядов для матричных коэффициентов СЛАУ (2) и волнового сопротивления (15) приводит к решению проблемы вычисления функций $S_{q1}(\alpha, \beta)$, $P_{q1}(\alpha, \beta)$, $Q_{q1}(\alpha, \beta)$, определяемых медленно сходящимися рядами (8)–(10), независимо от числа диэлектрических слоев и их параметров.

В табл. 1 приведены результаты расчета коэффициента замедления n и волнового сопротивления Z экранированной микрополосковой линии при различных значениях числа L и отношения W/h . Параметры линии (рис. 2): $b_1 = 0$, $S = a - W$, $a/h = 10$, $b/h = 4$, $h = 1$ мм, $\varepsilon = 9$, $f = 10$ ГГц.

Таблица 1. Результаты расчета коэффициента замедления и волнового сопротивления

W/h		0.1	1.0	2.0	5.0	9.0	9.9
$L = 0$	n	2.390	2.561	2.663	2.765	2.679	2.668
	Z	113.70	52.10	35.66	19.17	10.89	8.03
$L = 1$	n	2.390	2.562	2.668	2.814	2.813	2.760
	Z	113.70	52.08	35.53	18.68	10.94	8.92
$L = 2$	n	2.390	2.562	2.668	2.814	2.813	2.757
	Z	113.70	52.08	35.53	18.68	10.96	8.83
$L = 3$	n	2.390	2.562	2.668	2.814	2.813	2.756
	Z	113.70	52.08	35.53	18.68	10.96	8.78

При $W/h \leq 1$ малая погрешность расчета ($\sim 0.1\%$) обеспечивается уже при $L = 0$, т.е. при учете в разложениях (1) только одного члена для плотности продольного тока: $\eta_z(\tilde{x}) = a_0(1 - \tilde{x}^2)^{-1/2}$. Первое приближение ($L = 1$) дает точность до четырех значащих цифр при $W/h \leq 0.5$. С увеличением отношения W/h сходимость ухудшается. Однако

даже при значениях отношения $W/h \approx a/h$ погрешность второго приближения ($L = 2$) не превышает 0.1% при $W/a = 0.9$ и 0.6% при $W/a = 0.99$.

В табл. 2 представлены результаты расчета n и Z рассмотренной выше линии в зависимости от числа членов M , учитываемых в ряде (8), при $L = 2$, $W/h = 2$ и различных значениях a/W . В последнем столбце приведены численные результаты, полученные при использовании представления функций $R_{kn}(a)$ в виде быстро сходящихся рядов (11'). Из представленных результатов видно, что для достижения малой погрешности (~0.1%) расчета волнового сопротивления в (8) нужно учитывать более 1000 членов при $a/W \geq 5$ и более 10000 при $a/W \geq 100$.

Таблица 2. Результаты расчета волнового сопротивления и коэффициентов замедления в зависимости от числа членов в ряде (8)

M		500	1000	2000	5000	10000	
$a/W = 5$	n	2.669	2.668	2.668	2.668	2.668	2.668
	Z	35.48	35.50	35.52	35.52	35.52	35.53
$a/W = 100$	n	2.704	2.681	2.677	2.675	2.674	2.674
	Z	32.46	35.18	35.68	35.88	35.93	35.98

При построении проекционных моделей полосковых линий, наряду с чебышёвским базисом, широкое распространение получил также тригонометрический базис, который обеспечивает более быструю сходимость рядов для матричных коэффициентов. В то же время тригонометрический базис приводит к медленной сходимости разложений для плотности тока в силу особенности поля на краях полоскового проводника. В табл. 3 представлены результаты расчета коэффициента замедления и волнового сопротивления, иллюстрирующие сходимость проекционного метода с использованием тригонометрического базиса. В последнем столбце табл. 3 приведены результаты, полученные с использованием чебышёвского базиса (см. табл. 1). Следует отметить, что, несмотря на медленную сходимость разложений для плотности тока, погрешность расчета коэффициентов замедления достаточно мала при небольшом числе базисных функций ($L \leq 2$). Погрешность расчета волновых сопротивлений больше и составляет несколько процентов.

Таблица 3. Результаты расчета коэффициентов замедления и волновых сопротивлений с использованием тригонометрического базиса

L		0	1	2	5	10	25	
$W/h = 1$	n	2.541	2.556	2.558	2.560	2.561	2.561	2.562
	Z	54.83	53.23	52.79	52.41	52.26	52.15	52.08
$W/h = 2$	n	2.660	2.663	2.664	2.666	2.667	2.668	2.668
	Z	37.63	36.47	36.13	35.1	35.68	35.59	35.53
$W/h = 5$	n	2.823	2.814	2.813	2.813	2.813	2.814	2.814
	Z	19.61	19.22	19.04	18.86	18.78	18.72	18.68
$W/h = 9$	n	2.840	2.830	2.824	2.817	2.816	2.814	2.813
	Z	11.41	11.37	11.27	11.13	11.05	11.00	10.96

С увеличением числа L до значения $L = 5$ погрешность расчета волнового сопротивления уменьшается до 1% и при дальнейшем увеличении L медленно приближается к предельному значению. При этом с увеличением порядка СЛАУ для обеспечения устойчивости

результатов необходимо увеличивать число членов M в бесконечных рядах для матричных коэффициентов ($M \gg L a / W$).

В табл. 4 приведены результаты расчета коэффициента замедления основной волны при $a / h = 8, b / h = 4, W / h = 0.4, h = 0.5 \text{ мм}, f = 20 \text{ ГГц}$, полученные в настоящей работе и в [8, 9]. Во второй строке представлены результаты, полученные в [8] проекционным методом с использованием тригонометрического базиса. В последней строке представлены результаты, полученные в [9] методом сингулярного интегрального уравнения [10] в первом, во втором и в третьем приближениях.

Таблица 4. Сравнительные результаты расчетов коэффициентов замедления

L	0	1	2	3	4
n	2.5259	2.5261	2.5261	2.5261	2.5261
n , [8]	2.5358	2.5259	2.5253	2.5254	2.5255
n , [9]	2.4694	2.5168	2.5242		

Для связанных полосковых линий сходимость разложений (1) зависит, в основном, от отношения S / W . При его уменьшении сходимость ухудшается. В табл. 5 приведены результаты расчета коэффициента замедления n и волнового сопротивления Z экранированной компланарной полосковой линии при различных значениях числа L и отношения W / h . Параметры линии (рис. 2): $a / h = 50, b / h = 50, b_1 / h = 50, S / h = 0.05, \epsilon = 9, f [\text{ГГц}] \times h [\text{мм}] = 10$.

Таблица 5. Результаты расчетов величин n и Z , полученных при использовании различных значений числа L и отношения W / h

W / S		5	10	20	30	40	50
$L = 1$	n	2.231	2.221	2.192	2.161	2.136	2.117
	Z	34.98	29.87	26.09	24.48	23.65	23.23
$L = 2$	n	2.231	2.221	2.192	2.162	2.137	2.119
	Z	34.97	29.79	25.85	24.07	23.00	22.53
$L = 3$	n	2.231	2.221	2.192	2.162	2.138	2.120
	Z	34.97	29.79	25.83	24.03	23.01	22.41
$L = 4$	n	2.231	2.221	2.192	2.162	2.138	2.120
	Z	34.97	29.79	25.83	24.02	22.99	22.37

Из данных, представленных в табл. 5, видно, что при уменьшении отношения S / W сходимость ухудшается, но уже при $L = 2$ погрешность расчета коэффициента замедления не превышает 0.05% при $S / W \geq 0.02$, а погрешность расчета волнового сопротивления не превышает 0.1% при $S / W \geq 0.05$. При $L = 4$ погрешность расчета волнового сопротивления не превышает 0.1% при $S / W \geq 0.02$.

В табл. 6 представлены результаты расчета n и Z , полученные при использовании функций $S_{qt}(\alpha, \beta), P_{qt}(\alpha, \beta), Q_{qt}(\alpha, \beta)$ в виде медленно сходящихся рядов (8)–(10) в зависимости от числа учитываемых членов M в этих рядах при $L = 4$ и различных значениях отношения W / S . В последнем столбце приведены результаты, полученные при использовании этих функций в виде быстро сходящихся степенных рядов.

Из представленных в табл. 6 результатов следует, что для достижения высокой точности численного решения СЛАУ (2) в рядах (8)–(10) нужно учитывать более десяти тысяч членов. Это существенно увеличивает время счета на ПК.

Таблица 6. Результаты расчета величин n и Z , полученных при использовании функций $S_{qt}(\alpha, \beta)$, $P_{qt}(\alpha, \beta)$, $Q_{qt}(\alpha, \beta)$

M		1000	2000	5000	10000	20000	
$W/S = 10$	n	2.222	2.222	2.221	2.221	2.221	2.221
	Z	27.77	28.71	29.49	29.63	29.71	29.78
$W/S = 30$	n	2.162	2.164	2.163	2.163	2.162	2.162
	Z	23.24	23.48	23.82	23.89	23.92	24.02
$W/S = 50$	n	2.123	2.122	2.121	2.120	2.120	2.120
	Z	21.84	21.99	22.24	22.29	22.32	22.37

Таким образом, использование чебышёвского базиса при построении алгебраических моделей полосковых линий обеспечивает высокую эффективность лишь в том случае, если решена проблема суммирования медленно сходящихся рядов для матричных коэффициентов СЛАУ. Без улучшения сходимости этих рядов более эффективными являются модели, полученные с использованием тригонометрического базиса на основе подхода, предложенного в работе [11]. Использование построенных в настоящей статье и в [7] алгебраических моделей полосковых и щелевых линий позволяет существенно повысить качество математических моделей нерегулярных СВЧ-элементов на полосковых линиях, рассмотренных в [12–15]. В этих работах собственные волны регулярных линий находились проекционным методом с использованием тригонометрического базиса.

Заключение

Построенные в данной статье алгебраические модели полосковых линий позволяют путем компьютерного моделирования получить численные результаты с высокой точностью и с малыми вычислительными затратами в широком диапазоне изменения геометрических и физических параметров линий, независимо от числа диэлектрических слоев и их параметров. Это позволяет эффективно использовать их как при инженерном проектировании, так и в системах анализа и оптимизации с учетом технологических особенностей изготовления интегральных схем, работающих на сверхвысоких частотах. Разработанные алгоритмы расчета коэффициента замедления, распределения тока и волнового сопротивления такие же, как и соответствующие алгоритмы для полосковых линий на однослойной подложке. Построенные модели решают задачу эффективного нахождения системы собственных волн с учетом межэлементной электромагнитной связи и многослойности диэлектрической среды. Математические модели регулярных линий представляют не только самостоятельный интерес, но и необходимы для решения задач дифракции на нерегулярностях линий и являются основой для построения математических моделей нерегулярных элементов интегральных схем СВЧ.

Литература:

1. Никольский В.В. Вариационные методы для внутренних задач электродинамики. М.: Наука, 1967. 460 с.
2. Никольский В.В. Проекционные методы в электродинамике (экранированные и открытые системы) // Прикладная электродинамика. М.: Высшая школа, 1977. Вып. 1. С. 4–50.
3. Никольский В.В. К обоснованию метода Трефтца для задач дифракции // Труды

МИРЭА. Электродинамика, антенны и техника СВЧ. 1974. Вып. 70. С. 3–59.

4. Никольский В.В., Никольская Т.И. Декомпозиционный подход к задачам электродинамики. М.: Наука, 1983. 304 с.

5. Коваленко А.Н. Собственные волны микрополосковой линии // Изв. вузов. Радиофизика. 1978. Т. 21. № 2. С. 188–194.

6. Коваленко А.Н. Собственные волны многослойных полосковых структур // Изв. вузов. Радиофизика. 2012. Т. 55. № 12. С. 759–766.

7. Коваленко А.Н. Собственные волны многослойных щелевых структур // Изв. вузов. Радиофизика. 2017. Т. 60. № 7. С. 588–599.

8. Никольский В.В., Орлов В.П., Феоктистов В.Г. [и др.] Автоматизированное проектирование устройств СВЧ. М.: Радио и связь, 1982. 272 с.

9. Неганов В.А., Нефедов Е.И., Яровой Г.П. Электродинамические методы проектирования устройств СВЧ и антенн. М.: Радио и связь, 2002. 415 с.

10. Левин Л. Теория волноводов. М.: Радио и связь, 1981. 312 с.

11. Коваленко А.Н. Теоретическое исследование собственных волн полосковых линий проекционным методом // Изв. вузов. Радиофизика. 2008. Т. 51. № 8. С. 764–768.

12. Никольский В.В., Никольская Т.И. Дифракция на полосковых структурах: анализ интегральных схем СВЧ // Изв. вузов. Сер. Радиофизика. 1981. Т. XXII. № 12. С. 1423–1458.

13. Никольский В.В., Никольская Т.И., Белова Т.Г. Многослойные планарные структуры: вопросы алгоритмизации // Межвуз. сб. науч. трудов «Автоматизированное проектирование устройств и систем СВЧ». М.: МИРЭА, 1982. С. 3–29.

14. Никольский В.В., Никольская Т.И. Дифракционные процессы в полосково-щелевых структурах и анализ «интегральных схем» СВЧ // Препринт ИРЭ АН СССР, № 19 (391). М., 1984. 71 с.

15. Никольский В.В., Никольская Т.И. Численное исследование дифракционных моделей интегральных схем СВЧ // Изв. вузов. Радиофизика. 1984. Т. 27. № 6. С. 669–674.

References:

1. Nikolsky V.V. Variational methods for internal problems of electrodynamics. Moscow: Nauka, 1967. 460 p. (in Russ.)

2. Nikolsky V.V. Projection methods in electrodynamics (screened and open systems). // *Prikladnaya elektrodinamika* (Applied Electrodynamics). Moscow: Vysshaya shkola Publ., 1977. Iss. 1. P. 4–50. (in Russ.)

3. Nikolsky V.V. To the justification of the Trefts method for diffraction problems // *Proceed. of MIREA. Electrodynamics, Antennas and Microwave Technology*. 1974, Iss. 70. P. 3–59. (in Russ.)

4. Nikolsky V.V., Nikolskaya T.I. Decomposition approach to the problems of electrodynamics. Moscow: Nauka Publ., 1983. 304 p. (in Russ.)

5. Kovalenko A.N. Natural waves of a microstrip line // *Izvestiya vuzov. Radiofizika* (Proceedings of High Schools. Radiophysics). 1978. V. 21. № 2. P. 188–194. (in Russ.)

6. Kovalenko A.N. Eigenwaves in multilayer strip structures // *Izvestiya vuzov. Radiofizika* (Proceedings of High Schools. Radiophysics). 2012. V. 55. № 12. P. 759–766. (in Russ.)

7. Kovalenko A.N. Eigenwaves in multilayer slot structures // *Izvestiya vuzov. Radiofizika* (Proceedings of High Schools. Radiophysics). 2017. V. 60. № 7. P. 588–599. (in Russ.)
8. Nikolsky V.V., Orlov V.P., Feoktistov V.G. [et al.] Automated design of microwave devices. Moscow: Radio i Svyaz' Publ., 1982. 272 p. (in Russ.)
9. Neganov V.A., Nefedov E.I., Yarovoy G.P. Electrodynamic methods for designing microwave devices and antennas. Moscow: Radio i Svyaz' Publ., 2002. 415 p. (in Russ.)
10. Levin L. The theory of waveguides. Moscow: Radio i Svyaz' Publ., 1981. 312 p. (in Russ.)
11. Kovalenko A.N. Theoretical study of eigenwaves of strip lines by the projection method, *Izvestiya vuzov. Radiofizika* (Proceedings of High Schools. Radiophysics). 2008. V. 51. № 8. P. 764–768. (in Russ.)
12. Nikolsky V.V., Nikolskaya T.I. Diffraction on strip structures: an analysis of integrated microwave circuits // *Izvestiya vuzov. Radiofizika* (Proceedings of High Schools. Radiophysics). 1981. V. XXII. № 12. P. 1423–1458. (in Russ.)
13. Nikolsky V.V., Nikolskaya T.I., Belova TG Multilayer planar structures: algorithms // Interuniversity collection of scientific works "Automated design of devices and microwave systems". Moscow: MIREA, 1982. P. 3–29. (in Russ.)
14. Nikolsky V.V., Nikolskaya T.I. Diffraction processes in strip-gap structures and analysis of "integrated circuits" of microwave // Preprint IRE of the USSR Academy of Sciences, № 19 (391). Moscow, 1984. 71 p. (in Russ.)
15. Nikolsky V.V., Nikolskaya T.I. Numerical investigation of diffraction models of microwave integrated circuits // *Izvestiya vuzov. Radiofizika* (Proceedings of High Schools. Radiophysics). 1984. V. 27. № 6. P. 669–674. (in Russ.)

Об авторах

Коваленко Александр Николаевич, профессор, д.т.н., профессор кафедры теоретической радиотехники и радиофизики Института радиотехнических и телекоммуникационных систем ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78).

Жуков Александр Николаевич, аспирант кафедры теоретической радиотехники и радиофизики Института радиотехнических и телекоммуникационных систем Института радиотехнических и телекоммуникационных систем ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва пр-т Вернадского, д.78); начальник лаборатории научно-производственного центра «Специальные космические комплексы и системы» Акционерного общества «Корпорация «ВНИИЭМ» (107078, Россия, Москва, Хоромный тупик, д. 4, стр. 1).

About the authors:

Alexander N. Kovalenko, Professor, D.Sc. (Eng.), Professor of the Chair of Theoretical Radio Engineering and Radio Physics, Institute of Radio Engineering and Telecommunications Systems, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo Pr., Moscow 119454, Russia).

Alexander N. Zhukov, Postgraduate Student of the Chair of Theoretical Radio Engineering and Radio Physics, Institute of Radio Engineering and Telecommunications Systems, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo Pr., Moscow 119454, Russia); Head of the Laboratory of the Research and Production Center "Special Space Complexes and Systems" of the Joint Stock Company "VNIIEEM Corporation" (4, bld. 1, Khoromnyi tupik, Moscow 107078, Russia).