

Математическое моделирование
Mathematical modeling

УДК 621.372.8

<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-5-77-89>

EDN GTXQII



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Модели симметричных трехслойных волноводных структур с градиентной сердцевиной и нелинейно-оптическими обкладками

С.Е. Савотченко ©

МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, 119454 Россия

© Автор для переписки, e-mail: savotchenkose@mail.ru

Резюме

Цели. Выявление закономерностей дисперсионных свойств волноводных мод оптического диапазона в слоистых средах с распределенными оптическими характеристиками представляет собой актуальную и важную задачу, имеющую фундаментальное и прикладное значение в нелинейной оптике и оптоэлектронике. Сочетание нелинейного отклика и градиентных распределений оптических свойств соседних слоев слоистой структуры дает возможность легко подобрать требуемые значения выходных характеристик с помощью широкого ряда управляющих параметров, что делает такие волноводы наиболее перспективными с точки зрения возможных технических приложений. Цель работы – развитие теории трехслойных плоских волноводных структур с градиентной сердцевиной и нелинейно-оптическими обкладками с произвольными профилями, в рамках которой представляется возможным нахождение точных аналитических решений нелинейных стационарных волновых уравнений, описывающих в явном виде поперечное распределение электрического поля волноводных мод.

Методы. Используются аналитические методы математической физики и теории специальных функций применительно к нелинейной и волноводной оптике.

Результаты. Проведено теоретическое описание поперечных стационарных волн, распространяющихся вдоль плоской симметричной трехслойной волноводной структуры, состоящей из внутреннего градиентного слоя, зажатого между нелинейно-оптическими обкладками, причем пространственный профиль диэлектрической проницаемости прослойки и вид нелинейного отклика среды обкладок предполагаются произвольными. Сформулирована математическая модель такой волноводной структуры на основе нелинейных уравнений с распределенными коэффициентами. Получены решения, описывающие в общем виде поперечное распределение амплитуды огибающей электрического поля. В силу поперечной симметрии трехслойной волноводной структуры в ней могут возбуждаться четные и нечетные стационарные моды, соответствующие симметричным и антисимметричным поперечным профилям поля. Разработан метод построения четных (симметричных) и нечетных (антисимметричных) решений, существующих при определенных дискретных значениях эффективного показателя преломления / константы распространения. Такие дискретные спектры получены в слоях с градиентными линейным, параболическим и экспоненциальным профилями. В качестве примера применения сформулированной теории детально проанализирован случай симметричной трехслойной волноводной структуры, внутренний градиентный слой которой характеризуется параболическим пространственным профилем, а внешние обкладки представляют собой керровские нелинейно-оптические среды. На основе анализа полученного точного аналитического решения установлено, что напряженность электрического поля для основной моды и моды первого порядка увеличивается с ростом параметра параболического профиля, характеризующего относительное изменение диэлектрической проницаемости в прослойке, однако уменьшается для мод более высоких порядков.

Выводы. Развита в данной работе теория позволяет наглядно описать в явном аналитическом виде поперечные распределения стационарного электрического поля в плоских симметричных трехслойных волноводах. Полученные результаты расширяют представления о физических свойствах нелинейных волн и закономерностях локализации световых пучков в распределенных средах и могут быть полезными для разработки различных оптических волноводных устройств.

Ключевые слова: слоистая структура, слоистый волновод, оптический волновод, нелинейная оптика, оптическая нелинейность, градиентный слой, нелинейные волны, керровские нелинейно-оптические среды, управляемые волны, волноводная мода

• Поступила: 01.03.2024 • Доработана: 29.03.2024 • Принята к опубликованию: 05.08.2024

Для цитирования: Савотченко С.Е. Модели симметричных трехслойных волноводных структур с градиентной сердцевинной и нелинейно-оптическими обкладками. *Russ. Technol. J.* 2024;12(5):77–89. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-5-77-89>

Прозрачность финансовой деятельности: Автор не имеет финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

RESEARCH ARTICLE

Models of symmetric three-layer waveguide structures with graded-index core and nonlinear optical liners

Sergey E. Savotchenko [®]

MIREA – Russian Technological University, Moscow, 119454 Russia

[®] Corresponding author, e-mail: savotchenkose@mail.ru

Abstract

Objectives. Determining the patterns of dispersion properties of waveguide modes of the optical range in layered media with distributed optical properties is a both a pressing and significant matter for study. It has fundamental and applied importance in nonlinear optics and optoelectronics. The combination of a nonlinear response and graded-index distributions of the optical properties of adjacent layers of a layered structure enables the desired values of the output characteristics using a wide range of control parameters to be selected easily. This renders such waveguides the most promising from the point of view of possible technical applications. The aim of this paper is to develop the theory of three-layer planar waveguide structures with a graded-index core and nonlinear optical liners with arbitrary profiles. By doing so it may be possible to find exact analytical solutions to nonlinear stationary wave equations describing explicitly the transverse electric field distribution of waveguide modes.

Methods. The analytical methods of mathematical physics and the theory of special functions applied to nonlinear and waveguide optics are used herein.

Results. The study provides a theoretical description of transverse stationary waves propagating along a symmetrical three-layer planar waveguide structure consisting of the inner graded-index layer sandwiched between nonlinear optical plates. It assumes an arbitrary spatial profile of the interlayer dielectric constant and the nature of the nonlinear response of the liner medium. The mathematical model of this waveguide structure formulated herein is based on nonlinear equations with distributed coefficients. The solutions obtained describe in general terms the transverse distribution of the amplitude of the electric field envelope. The transverse symmetry of the three-layer waveguide structure enables even and odd stationary modes corresponding to symmetric and antisymmetric transverse field profiles to be excited in it. A method was developed for constructing even (symmetric) and odd (antisymmetric) solutions which exist at certain discrete values of the effective refractive index/propagation constant. These discrete

spectra were obtained in layers with graded-index linear, parabolic, and exponential profiles. The symmetrical three-layer waveguide structure with inner graded-index layer characterized by parabolic spatial profile and outer liners as Kerr nonlinear optical media is analyzed in detail, as an example of the application of the formulated theory. Analysis of the resulting exact analytical solution indicates that the electric field strength for the fundamental and first-order modes increases with increasing parabolic profile parameter, characterizing the relative change of the dielectric constant in the interlayer, while decreasing for higher order modes.

Conclusions. The theory developed in this paper supports the unambiguous description of the transverse distributions of the stationary electric field in planar symmetrical three-layer waveguides in an explicit analytical form. The results extend the understanding of the physical properties of nonlinear waves and the localization patterns of light beams in distributed media, and may be useful in the design of various optical waveguide devices.

Keywords: layered structure, layered waveguide, optical waveguide, nonlinear optics, optical nonlinearity, graded-index layer, nonlinear waves, Kerr nonlinear optical media, guided waves, waveguide mode

• Submitted: 01.03.2024 • Revised: 29.03.2024 • Accepted: 05.08.2024

For citation: Savotchenko S.E. Models of symmetric three-layer waveguide structures with graded-index core and nonlinear optical liners. *Russ. Technol. J.* 2024;12(5):77–89. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-5-77-89>

Financial disclosure: The author has no financial or property interest in any material or method mentioned.

The author declares no conflicts of interest.

ВВЕДЕНИЕ

Разработка оптических волноводов с требуемыми характеристиками является важной прикладной задачей нелинейной оптики [1–3]. Для успешного решения таких задач необходимо теоретическое моделирование проектируемых систем, позволяющее описать их свойства, прогнозировать характеристики и оптимизировать процесс разработки. В связи с этим большое внимание в научной литературе уделяется развитию теоретических основ моделирования процессов возбуждения, распространения и локализации электромагнитных волн в различных оптических средах [4, 5].

Получить требуемые, зачастую, уникальные характеристики полей в волноводных структурах можно наиболее эффективно в случае сочетания сред с различными оптическими свойствами [6, 7]. В частности, перспективными и обладающими широким разнообразием свойств признаны такие классы сред, в которых оптические свойства существенно зависят от пространственного распределения показателя преломления (или диэлектрической проницаемости) [8] или характеризуются нелинейным оптическим откликом, при котором диэлектрическая проницаемость зависит от интенсивности электрического поля [9]. Первую группу сред называют градиентными [10], а вторую – нелинейными [11].

Форма зависимости оптических характеристик от указанных величин может быть различной, определяемой физическими свойствами реальных кристаллов. В частности, наиболее часто встречающейся формой нелинейного отклика является линейная зависимость диэлектрической проницаемости

от квадрата амплитуды (интенсивности) электрического поля (света), называемая керровской нелинейностью [12]. Волны и другие локализованные возмущения в таких средах достаточно хорошо изучены в различных модификациях [13, 14], в т.ч. аналитическими методами [15, 16], когда удастся получить точные решения нелинейного волнового уравнения в различных моделях [17, 18].

Для описания экспериментально наблюдаемых зависимостей пространственного распределения оптических характеристик используются различные функции (профили), моделирующие изменение показателя преломления с расстоянием от границы раздела оптических сред [19]. Нахождение точных аналитических решений допускают определенные профили, к примеру, такие как линейный [20], параболический [21], экспоненциальный [22] и другие [23, 24].

В последнее время активизировалось теоретическое изучение волноводных свойств границ раздела между градиентными и нелинейными средами [25, 26]. В частности, были получены решения, описывающие локализацию света вдоль границы раздела между керровской нелинейной средой и средой с линейным [27, 28], экспоненциальным профилями показателя преломления [29].

С точки зрения технических приложений важное место занимают исследования волноводных свойств многослойных сред [30], в т.ч. и трехслойных структур [31]. Теоретическое изучение нелинейных волн в трехслойных структурах проводилось на протяжении многих лет [32, 33], в т.ч. и в слоистых градиентных средах [34]. В последнее время были получены аналитические решения для симметричных трехслойных структур, в которых внутренний

слой описан симметричным линейно-градиентным профилем, а внешние слои характеризуются фото-рефрактивным нелинейным откликом [35], керровской нелинейностью [36], ступенчатой нелинейностью [37]. Также была рассмотрена симметричная структура с параболическим градиентным внутренним слоем, помещенным между средами с керровской нелинейностью.

В связи с возникающим многообразием возможных сочетаний нелинейностей и профилей градиентных слоев возникает необходимость построения обобщенной модели симметричной волноводной структуры. В данной работе предлагается обобщение модели трехслойной симметричной плоской структуры, в которой внутренняя прослойка характеризуется произвольным градиентным профилем, а внешние слои – нелинейно-оптическим откликом. Подстановка конкретного вида профилей диэлектрической проницаемости и формы нелинейного отклика в модельные уравнения позволит получить аналитические решения для описания пространственного распределения амплитуды огибающей перпендикулярно слоям структуры. Получаемые аналитические выражения, в свою очередь, позволяют легко и наглядно выявить закономерности локализации световых пучков в слоистых волноводных структурах.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕХСЛОЙНОЙ ВОЛНОВОДНОЙ СТРУКТУРЫ

1.1. Формулировка модели

Рассмотрим плоскую симметричную относительно центра трехслойную структуру из немагнитных материалов с оптически однородными свойствами в продольном направлении. Границы раздела слоев будем считать плоскими. Поместим начало координат в середину внутреннего слоя (сердцевины или прослойки), в плоскости yz , ось x направим перпендикулярно плоскостям границ раздела слоев, а ось z – вдоль слоев в направлении распространения волн. Границы раздела слоев пусть расположены в плоскостях $x = \pm a$ (тогда толщина прослойки принимается $2a$). Среда во всех слоях рассматриваются без диэлектрических потерь.

В рассматриваемой модели внутренний слой характеризуется пространственной неоднородностью оптических свойств в поперечном направлении (градиентный слой), а внешние прилегающие слои (обкладки) характеризуются оптической нелинейностью (нелинейные слои), т.е. зависимостью показателя преломления (или диэлектрической проницаемости) от интенсивности света. При этом толщина прослойки считается много

меньше толщин внешних обкладок. Поэтому, если рассматривать распределение электрического поля, локализованного вблизи сердцевин, обкладки можно рассматривать как полуограниченные среды, пренебрегая влиянием далеко расположенных по сравнению с величиной a границ. Такое рассмотрение допустимо при условии, что поле быстро убывает при удалении от границ раздела и становится пренебрежительно малым, не достигнув внешних границ толстых обкладок.

Пусть вдоль границ раздела трехслойной волноводной структуры распространяется поперечная волна, компоненту напряженности электрического поля которой можно записать в виде:

$$E_y(x, z) = \psi(x)e^{i(\beta z - \omega t)}, \quad (1)$$

где $\psi(x)$ – пространственное распределение напряженности электрического поля в поперечном направлении (амплитуда огибающей), ω – частота, $\beta = kn$ – константа распространения, $n = ck/\omega$ – эффективный показатель преломления, c – скорость света в вакууме, $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число, λ – длина волны, t – время.

Известно [4, 5], что поле $\psi(x)$ определяется как решение стационарного уравнения (магнитная проницаемость равна единице):

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \{\epsilon(x, I) - n^2\}k^2\psi(x) = 0, \quad (2)$$

где диэлектрическую проницаемость трехслойной волноводной структуры можно записать в виде

$$\epsilon(x, I) = \begin{cases} \epsilon_G(x), & |x| < a, \\ \epsilon_N(I), & |x| > a, \end{cases} \quad (3)$$

где функция $\epsilon_G(x)$ определяет зависимость диэлектрической проницаемости от пространственной координаты в перпендикулярном слоям направлении (диэлектрическая проницаемость градиентного слоя), а функция $\epsilon_N(I)$ определяет зависимость диэлектрической проницаемости от интенсивности света $I = |E|^2$, E – амплитуда напряженности электрического поля (диэлектрическая проницаемость нелинейных обкладок).

Представим поперечное распределение поля в виде:

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_N^{(-)}(x), & x < -a, \\ \psi_G(x), & |x| < a, \\ \psi_N^{(+)}(x), & x > a. \end{cases} \quad (4)$$

Тогда из (2) получаются уравнения:

$$\frac{d^2 \psi_N^{(-)}(x)}{dx^2} + \{\varepsilon_N(I) - n^2\} k^2 \psi_N^{(-)}(x) = 0, \quad x < -a, \quad (5)$$

$$\frac{d^2 \psi_G(x)}{dx^2} + \{\varepsilon_G(x) - n^2\} k^2 \psi_G(x) = 0, \quad |x| < a, \quad (6)$$

$$\frac{d^2 \psi_N^{(+)}(x)}{dx^2} + \{\varepsilon_N(I) - n^2\} k^2 \psi_N^{(+)}(x) = 0, \quad x > a, \quad (7)$$

которые дополняются граничными условиями, соответствующими требованиям непрерывности компонент поля на границах раздела слоев:

$$\begin{aligned} \psi_N(\pm a \pm 0) &= \psi_G^{(\pm)}(\pm a \pm 0), \\ \frac{d\psi_N(\pm a \pm 0)}{dx} &= \frac{d\psi_G^{(\pm)}(\pm a \pm 0)}{dx}, \end{aligned} \quad (8)$$

а также условию исчезновения поля на бесконечности: $|\psi_N^{(\pm)}(x)| \rightarrow 0, |x| \rightarrow \infty$.

Очевидным с физической точки зрения дополнением необходимо считать требование ограниченности решения всюду. Таким образом, совокупность уравнений (5)–(7) и граничных условий (8) представляет собой математическую формулировку предложенной модели трехслойной волноводной структуры с профилем диэлектрической проницаемости, описываемой распределенным выражением (3).

1.2. Дисперсионное уравнение в общем случае

Во внутреннем слое решение уравнения (6) можно представить в виде:

$$\psi_G(x) = C_1 F_1(x) + C_2 F_2(x), \quad (9)$$

где $C_{1,2}$ – величины, зависящие от оптических и геометрических параметров системы и определяемые из граничных условий (8); $F_{1,2}(x)$ – специальные функции, которые являются линейно независимыми решениями уравнения (6) при заданном профиле диэлектрической проницаемости $\varepsilon_G(x)$. Поскольку (6) представляет собой линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с зависящим от переменной x коэффициентом, то его решения обычно в наиболее общем виде выражаются через гипергеометрические функции. В случае определенных видов профилей диэлектрической проницаемости решения могут быть выражены через другие пары линейно независимых специальных функций, например, функции Бесселя, Эйри

и другие. Основными требованиями для $F_{1,2}(x)$ являются непрерывность и ограниченность на интервале $-a < x < a$ этих функций, а также их производных $F'_{1,2}(x)$.

Во внешних обкладках решения уравнений (5) и (7) можно представить в виде:

$$\psi_N^{(\pm)}(x) = \psi_a^{(\pm)} \frac{\Psi_N^{(\pm)}(x)}{\Psi_N^{(\pm)}(\pm a)}, \quad (10)$$

где $\psi_a^{(\pm)}$ – амплитуды поля на границах раздела слоев в плоскостях $x = \pm a$; $\Psi_N^{(\pm)}(x)$ – решения нелинейных уравнений (5) и (7), ограниченные в областях $x < -a$ и $x > a$ соответственно и удовлетворяющие требованию $|\Psi_N^{(\pm)}(x)| \rightarrow 0, |x| \rightarrow \infty$. Явный вид функций $\Psi_N^{(\pm)}(x)$ определяется видом модели нелинейности среды внешних обкладок. К примеру, для наиболее распространенной керровской нелинейности $\Psi_N^{(\pm)}(x)$ выражаются через гиперболические функции в зависимости от знака нелинейного отклика.

Подстановка решений (9) и (10) в граничные условия (8) приводит к системе алгебраических уравнений относительно величин $C_{1,2}$ и амплитуд $\psi_a^{(\pm)}$:

$$\begin{cases} \psi_a^{(\pm)} = C_1 F_1(\pm a) + C_2 F_2(\pm a), \\ \psi_a^{(\pm)} \varepsilon_{\text{Neff}}^{(\pm)} = C_1 F'_1(\pm a) + C_2 F'_2(\pm a), \end{cases} \quad (11)$$

где обозначили

$$\varepsilon_{\text{Neff}}^{(\pm)} = \frac{1}{\Psi_N^{(\pm)}(\pm a)} \cdot \frac{d\Psi_N^{(\pm)}(\pm a)}{dx}. \quad (12)$$

Условие разрешимости системы (11) позволяет получить дисперсионное уравнение, определяющее значения константы распространения для волноводных мод рассматриваемой трехслойной структуры в общем случае:

$$\Delta_1^{(+)} \Delta_2^{(-)} = \Delta_1^{(-)} \Delta_2^{(+)}, \quad (13)$$

где

$$\Delta_{1,2}^{(\pm)} = F_{1,2}(\pm a) \varepsilon_{\text{Neff}}^{(\pm)} - F'_{1,2}(\pm a). \quad (14)$$

Данное дисперсионное уравнение позволяет указать связь константы распространения β , волнового числа k , оптических характеристик слоев (невозмущенные значения диэлектрических констант и параметры зависимостей диэлектрической проницаемости в градиентном и нелинейном слоях,

определяемые конкретным видом модели), геометрический параметр трехслойной структуры – полупрозрачности прослойки a .

В качестве независимой характеристики можно выбрать амплитуду на одной из границ раздела и через нее выразить остальные параметры решений (9) и (10). В частности, из (11) вытекает отношение амплитуд на левой и правой границах прослойки:

$$\frac{\psi_a^{(+)}}{\psi_a^{(-)}} = \frac{\Delta_1^{(-)} \Delta^{(+)}}{\Delta_1^{(+)} \Delta^{(-)}}, \quad (15)$$

где

$$\Delta^{(\pm)} = F_1(\pm a) F_2'(\pm a) - F_2(\pm a) F_1'(\pm a). \quad (16)$$

Тогда величины $C_{1,2}$ можно записать в виде:

$$C_{1,2} = \psi_a^{(+)} \frac{\Delta_{1,2}^{(+)}}{\Delta^{(+)}} = \psi_a^{(-)} \frac{\Delta_{1,2}^{(-)}}{\Delta^{(-)}}. \quad (17)$$

С учетом (15) распределение поля во внутреннем слое можно переписать в виде:

$$\psi_G(x) = \frac{\psi_a^{(\pm)}}{\Delta^{(\pm)}} \{ \Delta_1^{(\pm)} F_1(x) + \Delta_2^{(\pm)} F_2(x) \}. \quad (18)$$

Таким образом, полученные выражения (10) и (18) определяют распределение поля в поперечном слое направления, параметры которых определяются выражениями (12), (14), (16), а константа распространения определяется дисперсионным уравнением (13).

1.3. Построение волноводных мод заданной симметрии и дискретным спектром

Очевидно, что в силу симметрии рассматриваемой трехслойной волноводной структуры в ней должны существовать четные и нечетные моды, описываемые соответственно симметричным и антисимметричным распределениями поля в поперечном направлении. Тогда решение задачи (5)–(8) можно искать на полуоси $x > 0$, продолжим его четным или нечетным образом для симметричных или антисимметричных мод соответственно.

Для симметричного распределения решения должны быть четными функциями: $\psi_N^{(+)}(-x) = \psi_N^{(+)}(x)$ и $\psi_G(-x) = \psi_G(x)$, а для антисимметричного распределения они должны быть нечетными: $\psi_N^{(+)}(-x) = -\psi_N^{(+)}(x)$ и $\psi_G(-x) = -\psi_G(x)$. Далее верхние индексы $(\pm)$ можно опустить в силу выбора заданной симметрии.

Мода, обладающая заданной симметрией, может быть описана решением:

$$\psi_G(x) = \psi_a \frac{F_G(g(x))}{F_G(g(a))}, \quad (19)$$

где $F_G(g)$ – определенным образом подобранная специальная функция, разрешающая уравнение (6) на полуоси $x > 0$, с внутренним аргументом $g(x)$, явный вид которого связан с видом профиля пространственной зависимости диэлектрической проницаемости внутреннего слоя. Аргумент g содержит константу распространения β , оптические и геометрические параметры волноводной системы.

Для симметричной моды функция F_G должна иметь экстремум в центре симметрии трехслойной волноводной структуры (при $x = 0$). Это означает, что производная функции F_G должна обращаться в ноль при $x = 0$. Для антисимметричной моды сама функция F_G должна обращаться в ноль. Такие требования, обусловленные необходимостью обладания симметрией искомого профиля поля, приводят к тому, что спектр значений константы распространения (или эффективного показателя преломления) становится дискретным.

В частности, для симметричной моды должно быть

$$\left. \frac{dF_G(g(x))}{dx} \right|_{x=0} = F_G'(g(0))g'(0) = 0. \quad (20)$$

Следовательно, если $g'(0) \neq 0$, то

$$g(0) = \xi_j \quad (j = 1, 2, \dots), \quad (21)$$

где ξ_j – нули производной специальной функции F_G . Поскольку аргумент g содержит константу распространения β , то разрешив относительно нее уравнение (21), можно получить дискретный спектр ее значений $\beta = \beta(\xi_j)$, определяемый последовательностью нулей производной специальной функции F_G , разрешающей уравнение (6).

Аналогично, для антисимметричной моды должно быть

$$F_G(g(0)) = 0. \quad (22)$$

Следовательно,

$$g(0) = \zeta_j \quad (j = 1, 2, \dots), \quad (23)$$

где ζ_j – нули специальной функции F_G . Разрешив относительно константы распространения уравнение (23), можно получить дискретный спектр ее значений $\beta = \beta(\zeta_j)$, определяемый последовательностью нулей специальной функции F_G , разрешающей уравнение (6).

Решение нелинейного уравнения (7) во внешнем слое при $x > a$ можно представить в виде:

$$\Psi_N(x) = \Psi_a \frac{\Psi_N(q_N(x - a - x_N))}{\Psi_N(q_N x_N)}, \quad (24)$$

где зависимость коэффициента q_N от параметров системы известна для конкретной модели нелинейного отклика, а величина x_N определяется из граничных условий. Функция Ψ_N должна обладать четностью, совпадающей с четностью функции F_G .

Следует отметить, что выбранные в виде (19) и (24) решения автоматически удовлетворяют условиям непрерывности на границах раздела слоев волноводной структуры при $x = \pm a$.

Для удовлетворения условия непрерывности производной поля на границе раздела градиентного и нелинейного слоев следует подставить (19) и (24) в (8) при $x = a$, откуда получается уравнение:

$$\frac{F'_G(g(a))g'(a)}{F_G(g(a))} = \frac{q_N \Psi'_N(q_N x_N)}{\Psi_N(q_N x_N)}, \quad (25)$$

которое позволяет определить величину x_N в зависимости от оптических и геометрических характеристик слоистой структуры.

Таким образом, показана возможность существования волноводных мод заданной симметрии в том случае, когда константа распространения задается дискретным спектром значений.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

2.1. Некоторые аналитически разрешимые профили градиентного слоя

Рассмотрим сначала виды симметричных профилей диэлектрической проницаемости в градиентном слое, для которых известны точные аналитические решения. Для сравнения рассмотрим также случай и ступенчатой структуры, в которой внутренняя прослойка характеризуется постоянным независимым от пространственной координаты значением диэлектрической проницаемости (рис. 1а): $\varepsilon_G = \varepsilon_0 - \text{const}$. Тогда решение уравнения (6) определяется тригонометрическими функциями и для четных мод имеет вид:

$$\Psi_G(x) = \Psi_a \frac{\cos(px)}{\cos(pa)}, \quad (26)$$

а для нечетных мод:

$$\Psi_G(x) = \Psi_a \frac{\sin(px)}{\sin(pa)}, \quad (27)$$

где $p^2 = k^2(\varepsilon_0 - n^2)$. Такие моды существуют для значений эффективного показателя преломления $n^2 < \varepsilon_0$.

Симметричные градиентные профили:

1) Линейный (рис. 1б):

$$\varepsilon_G(x) = \varepsilon_0 \left(1 - \Delta \frac{|x|}{a} \right), \quad (28)$$

где ε_0 – диэлектрическая проницаемость в центре симметрии волноводной структуры, $\Delta = (\varepsilon_0 - \varepsilon_a) / \varepsilon_0$ –

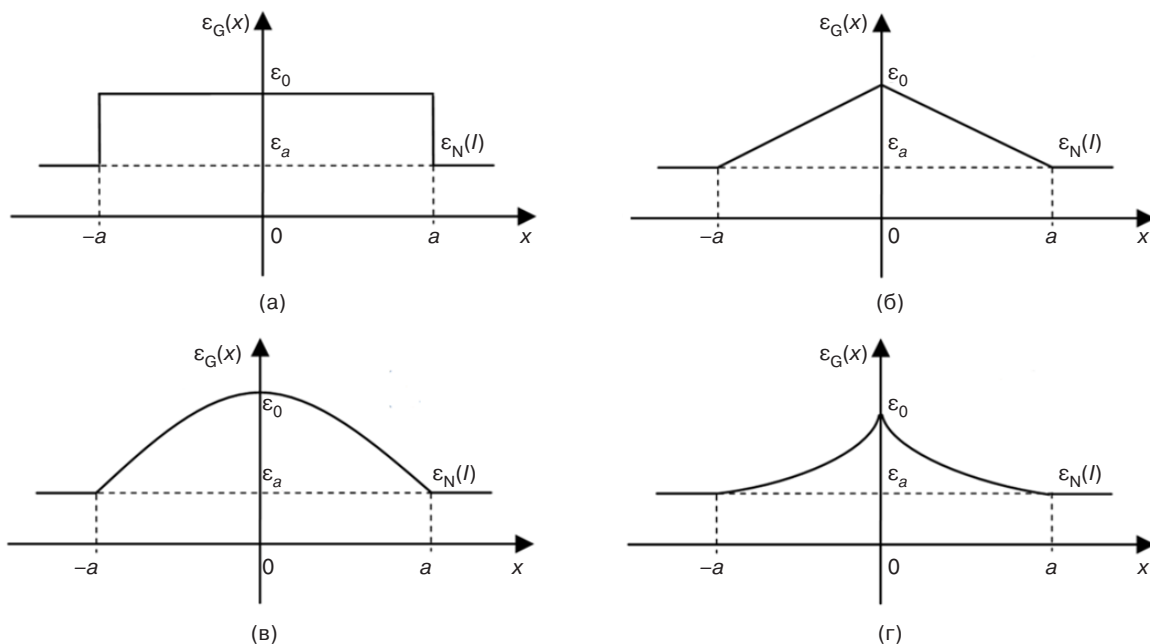


Рис. 1. Пространственные симметричные профили диэлектрической проницаемости трехслойной волноводной структуры: постоянный (а), линейный (б), параболический (в), экспоненциальный (г)

изменение диэлектрической проницаемости от ε_0 до значения диэлектрической проницаемости на границе раздела слоев ε_a .

Решение уравнения (6) на интервале $0 < x < a$ с линейным профилем (28) можно записать в виде [36]:

$$\psi_G(x) = \psi_a \frac{\text{Ai}(x/x_G + \delta)}{\text{Ai}(a/x_G + \delta)}, \quad (29)$$

где $F_G = \text{Ai}(g)$ – функция Эйри, $g(x) = x/x_G + \delta$,

$$\delta = -(\varepsilon_0 - n^2)(ak/\varepsilon_0\Delta)^{2/3}, \quad (30)$$

$$x_G = \left(\frac{a}{k^2\varepsilon_0\Delta} \right)^{1/3}. \quad (31)$$

Для построения четного решения, как отмечалось в п. 1.3, необходимо потребовать, чтобы функция (29) имела экстремум в середине волновода при $x = 0$. Поэтому $\delta = \xi_j, j = 1, 2, \dots$, где для случая линейного профиля ξ_j – нули производной функции Эйри: $\text{Ai}'(\xi_j) = 0$: $\xi_1 = -1.018792972$, $\xi_2 = -3.248197582$, $\xi_3 = -4.820099211$, ... Тогда из (30) получается дискретный спектр значений эффективного показателя преломления:

$$n_j^2 = \varepsilon_0 - |\xi_j|(\varepsilon_0\Delta/ak)^{2/3}. \quad (32)$$

Для построения нечетного решения необходимо потребовать, чтобы функция (29) обращалась в ноль в середине волновода при $x = 0$. Поэтому $\delta = \zeta_j$ – нули функции Эйри: $\text{Ai}(\zeta_j) = 0$: $\zeta_1 = -2.338107410$, $\zeta_2 = -4.087949444$, $\zeta_3 = -5.520559828$, ...

2) Параболический (рис. 1в):

$$\varepsilon_G(x) = \varepsilon_0 \left(1 - \Delta \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right). \quad (33)$$

Как известно, для параболического профиля (33) ограниченное решение уравнения (6) выражается через полиномы Эрмита $H_j(x)$:

$$\psi_G(x) = \psi_a \frac{H_j(x/x_0)}{H_j(a/x_0)} e^{-(x^2 - a^2)/2x_0^2}, \quad (34)$$

где $j = 2m$ для четных мод и $j = 2m + 1$ для нечетных мод, $m = 0, 1, 2, \dots$, $x_0^2 = a/k\sqrt{\varepsilon_0\Delta}$, которые существуют при дискретных значениях эффективного показателя преломления [38]:

$$n_j^2 = \varepsilon_0 - (2j + 1)\sqrt{\varepsilon_0\Delta}/ak. \quad (35)$$

3) Экспоненциальный (рис. 1г):

$$\varepsilon_G(x) = \varepsilon_0 \{1 - \Delta(1 - e^{-|x|/a})\}. \quad (36)$$

Решение уравнения (6) с экспоненциальным профилем (36) можно записать в виде:

$$\psi_G(x) = \psi_a \frac{J_{2w}(2ve^{-|x|/2a})}{J_{2w}(2ve^{-1/2})}, \quad (37)$$

где $F_G = J_{2w}(g)$ – функция Бесселя первого рода порядка $w = ak(n^2 - \varepsilon_a)^{1/2}$, $g = 2ve^{-|x|/2a}$, $v = ak(\Delta\varepsilon_0)^{1/2}$ [4].

Четные моды определяются дисперсионным уравнением $J'_{2w}(2v) = 0$. Если обозначить ξ_j корни уравнения $J'_{\xi_j}(2v) = 0$, то получается дискретный спектр значений эффективного показателя преломления:

$$n_j^2 = \varepsilon_a + (\xi_j/2ak)^2. \quad (38)$$

Нечетные моды определяются дисперсионным уравнением $J_{2w}(2v) = 0$. Если обозначить ζ_j корни уравнения $J_{\zeta_j}(2v) = 0$, то получается дискретный спектр значений эффективного показателя преломления:

$$n_j^2 = \varepsilon_a + (\zeta_j/2ak)^2. \quad (39)$$

Анализ корней таких уравнений и соответствующих спектров можно найти в работе [39].

Следует отметить, что существуют точные аналитические уравнения (6) для других пространственных профилей диэлектрической проницаемости, таких как гладкая ступенька, описываемая гиперболическим тангенсом [40], симметричный профиль Эпштейна (инвертированный симметричный потенциал Пёшль – Теллера), описываемый гиперболическим косинусом [41]. Такие решения достаточно громоздки и выражаются через гипергеометрическую функцию, затруднительную для простого анализа, поэтому здесь они не рассматриваются.

Таким образом, выше приведены точные аналитические решения, описывающие распределения поля для трех различных пространственных профилей диэлектрической проницаемости.

2.2. Некоторые аналитически разрешимые модели нелинейности внешних обкладок

Рассмотрим теперь некоторые виды моделей нелинейных сред внешних обкладок, в которых диэлектрическая проницаемость зависит от напряженности электрического поля, и для которых известны точные аналитические решения. Для сравнения рассмотрим

также случай линейной среды, в которой внешние слои характеризуются постоянным, независящим от напряженности поля значением диэлектрической проницаемости: $\varepsilon_N = \varepsilon_{0N} - \text{const}$. Тогда ограниченное на полуоси $x > a$ решение уравнения (7) имеет вид:

$$\psi_N(x) = \psi_a e^{-q_N(x-a)}, \quad (40)$$

где $q_N^2 = k^2(n^2 - \varepsilon_{0N})$. На отрицательную полуось такое решение очевидным образом продолжается четным или нечетным образом для описания симметричных и антисимметричных мод, соответственно. Используя условия (8) для функций (19) и (40), можно получить аналог дисперсионного уравнения (25) для волновода с линейными обкладками: $\gamma_G + q_N = 0$, где обозначили $\gamma_G = F'_G(g(a))g'(a) / F_G(g(a))$, из которого получается спектр значений эффективного показателя преломления:

$$n^2 = \varepsilon_{0N} + (\gamma_G / k)^2. \quad (41)$$

Связывая (41) с дискретным спектром, полученным для конкретного градиентного профиля внутреннего слоя, можно получить ограничения для порядков мод, возбуждаемых в прослойке заданной толщины.

Простейшие модели нелинейных сред внешних обкладок:

1) Керровская нелинейность:

$$\varepsilon_N(I) = \varepsilon_{0N} + \alpha I, \quad (42)$$

где α – коэффициент керровской нелинейности, $I = |E|^2$ – интенсивность поля. Тогда четное/нечетное решение уравнения (7) с диэлектрической проницаемостью (42) при $|x| > a$ в случае самофокусирующей нелинейности при $\alpha > 0$ имеет вид:

$$\psi_N(x) = \pm \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \cdot \frac{q}{k \text{ch}(q(x \mp a \mp x_N))}. \quad (43)$$

Используя условия (8) для функций (19) и (43), можно определить величину параметра

$$x_N = -\frac{1}{q_N} \text{Arth} \left(\frac{\gamma_G}{q_N} \right) \quad (44)$$

и амплитуду поля на границе слоев

$$\psi_a = \sqrt{\frac{2}{\alpha} (n^2 - \varepsilon_{0N} - (\gamma / k)^2)}. \quad (45)$$

В выражения (43)–(45) следует подставить дискретный спектр, полученный для конкретного градиентного профиля внутреннего слоя.

2) Ступенчатая нелинейность:

$$\varepsilon_N(I) = \begin{cases} \varepsilon_1, & I < I_s, \\ \varepsilon_2, & I > I_s, \end{cases} \quad (46)$$

где I_s – пороговый уровень интенсивности (известная характеристика среды), при переходе через который происходит резкое изменение от одного значения диэлектрической константы ε_1 к другому ε_2 [42, 43]. Таким образом, вблизи границы раздела слоев в нелинейной среде, где $I > I_s$, образуется область (приповерхностный домен) шириной x_s , в которой диэлектрическая константа имеет значение ε_2 , а за ее пределами, далее в обкладках, где $I < I_s$, диэлектрическая константа имеет значение ε_1 . Такие домены возникают симметрично по обе стороны внутренней прослойки [37]. Положение границ приповерхностного домена определяется величиной x_s , которая находится из дополнительных требований непрерывности поля на границах домена:

$$\begin{aligned} \psi_N(\pm x_s + 0) &= \psi_N(\pm x_s - 0) = I_s^{1/2}, \\ \psi'_N(\pm x_s + 0) &= \psi'_N(\pm x_s - 0). \end{aligned} \quad (47)$$

В модели ступенчатой нелинейности уравнение (7) с диэлектрической проницаемостью (46) распадается на два:

$$\psi''_N(x) - (n^2 - \varepsilon_1)k^2\psi_N(x) = 0, \quad I < I_s, |x| > x_s, \quad (48)$$

$$\psi''_N(x)(x) + (\varepsilon_2 - n^2)k^2\psi_N(x) = 0, \quad I > I_s, a < |x| < x_s. \quad (49)$$

Решение уравнения (48) при $n^2 > \varepsilon_1$ для четных/нечетных мод имеет вид:

$$\psi_N(x) = \pm I_s^{1/2} e^{\mp q_1(x \mp x_s)}, \quad (50)$$

где $q_1^2 = (n^2 - \varepsilon_1)k^2$, а решение уравнения (49) при $n^2 < \varepsilon_2$ имеет вид:

$$\psi_N(x) = \pm \psi_a \cos(p_2(x \mp a) \mp \phi) / \cos(\phi), \quad (51)$$

где $p_2^2 = (\varepsilon_2 - n^2)k^2$, а величины x_s , ϕ определяются из граничных условий (8) и (47).

Подставив решения (19), (50) и (51) в граничные условия (8) и (47), можно найти параметры, к примеру, четных мод (нечетных – аналогично):

$$\phi = \arctg\left(\frac{\gamma_G}{p_2}\right), \quad (52)$$

$$x_s = a + \frac{1}{p_2} \left\{ \phi + \arctg\left(\frac{q_1}{p_2}\right) \right\}, \quad (53)$$

$$\Psi_a = I_s^{1/2} \left(\frac{p_2^2 + q_1^2}{p_2^2 + \gamma_G^2} \right)^{1/2}. \quad (54)$$

В выражения (50)–(54) следует подставить дискретные значения эффективного показателя преломления, полученные для конкретного пространственного профиля внутреннего градиентного слоя.

Таким образом, получены точные аналитические решения для двух моделей нелинейности сред.

2.3. Пример распределения поля в симметричной волноводной структуре

В качестве конкретного примера модели симметричной трехслойной волноводной структуры рассмотрим случай, когда внутренний градиентный слой характеризуется параболическим профилем (33), а внешние слои – керровской самофокусирующей нелинейностью (42).

В такой структуре в поперечном сечении направление пространственное распределение электрического поля определяется выражениями (34) и (43), а дискретный спектр значений эффективного показателя преломления определяется выражением (35) [38]. Ограничившись рассмотрением четных мод, для которых $j = 2m$, $m = 0, 1, 2, \dots$, симметричное относительно центра волноводной структуры распределение поля можно записать в виде:

$$\psi(x) = \begin{cases} \sqrt{(n_{pm}^2 - n_{\text{Geff}}^2)} e^{(a^2 - x^2)/2x_0^2} \frac{H_{2m}(x/x_0)}{H_{2m}(a/x_0)}, & |x| < a, \\ \frac{n_{pm}}{\cosh(kn_{pm}(x \mp a \mp x_N))}, & |x| > a, \end{cases} \quad (55)$$

где $n_{pm}^2 = \varepsilon_0 - \varepsilon_{0N} - (4m+1)\sqrt{\varepsilon_0 \Delta} / ak$ и

$$n_{\text{Geff}} = \frac{1}{kx_0} \left\{ \frac{H'_{2m}(a/x_0)}{H_{2m}(a/x_0)} - \frac{a}{x_0} \right\}. \quad (56)$$

Таким образом, выражение (55) представляет собой аналитическое решение задачи (5)–(8) при выборе симметрии, параболического профиля внутреннего слоя (33) и самофокусирующей нелинейности обкладок (42).

На рис. 2 показаны характерные профили решения (55), которые наглядно демонстрируют влияние относительного изменения диэлектрической проницаемости в прослойке Δ на распределение электрического поля при фиксированных значениях остальных параметров волновода для основной моды при $m = 0$ (рис. 2а), четной моды первого порядка $m = 1$ (рис. 2б) и четной моды второго порядка $m = 2$ (рис. 2в).

Результаты показывают, что напряженность электрического поля возрастает с ростом величины Δ для основной (рис. 2а) и первой (рис. 2б) мод. Однако интенсивность падает с увеличением Δ для мод более высокого порядка (рис. 2в). Таким образом, зависимость напряженности поля от Δ не является монотонной. К такому же эффекту приводит увеличение толщины прослойки a .

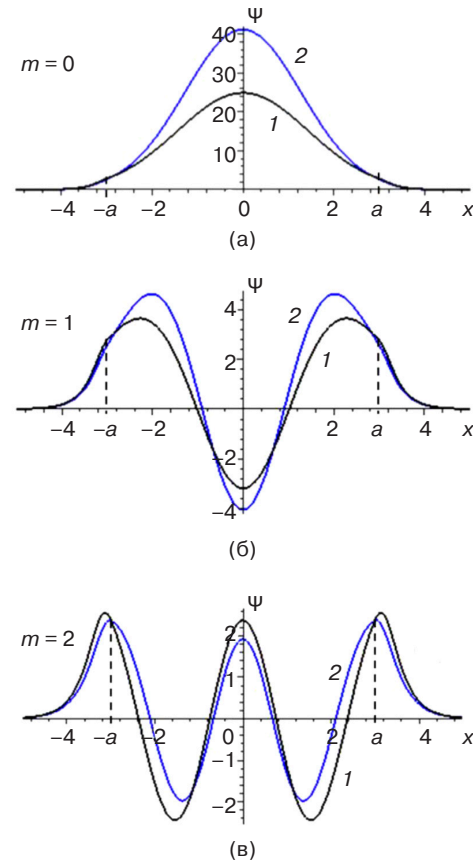


Рис. 2. Распределение поля (55) при значениях параметров (в условных единицах): $k = 0.65$, $\alpha = 6$, $\varepsilon_{0N} = 0.1$, $\varepsilon_0 = 30$, $a = 3$, и различных $\Delta = 5$ (линия 1), $\Delta = 8$ (линия 2) для первых трех четных мод: $m = 0$ (а), $m = 1$ (б), $m = 2$ (в)

Существование дискретного спектра значений эффективного показателя преломления говорит о том, что волноводные моды могут распространяться при определенных значениях параметров параболического профиля. Поскольку константа распространения связана с углом падения луча, возбуждающего волноводную моду, можно сказать, что необходимо учитывать дискретный набор углов падения, т.к. волноводная мода определенного порядка в рассматриваемой системе может возбудиться только под определенным углом падения, зависящим от диэлектрической проницаемости на границах слоев и изменения диэлектрической проницаемости внутри градиентного слоя.

Таким образом, получено и проанализировано точное аналитическое решение, описывающее распределение поля в симметричной трехслойной волноводной структуре, в которой внутренний градиентный слой характеризуется параболическим профилем, а внешние слои – керровской самофокусирующей нелинейностью.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложена модель плоской симметричной трехслойной волноводной структуры, соседние слои которой характеризуются физически различными оптическими свойствами. В частности, внутренний слой характеризуется зависимостью диэлектрической проницаемости от пространственной координаты в направлении, перпендикулярном плоскости границы раздела слоев, а внешние слои – зависимостью диэлектрической проницаемости от амплитуды электрического поля. Другими словами, рассматриваемая трехслойная структура состоит из внутреннего градиентного слоя, зажатого между нелинейно-оптическими обкладками. Пространственный профиль диэлектрической проницаемости прослойки и вид нелинейного отклика среды обкладок предполагаются произвольными.

Теоретически описано распространение поперечных электрических волн без учета потерь. Сформулированы уравнения и граничные условия для поперечного распределения поля в трехслойной волноводной структуре.

В общем виде получены решения, описывающие пространственное распределение электрического поля поперечно слоям. Показано, что в силу поперечной симметрии трехслойной волноводной

структуры вдоль нее могут распространяться четные и нечетные стационарные моды, соответствующие симметричным и антисимметричным поперечным профилям поля. Предложен способ построения четных (симметричных) и нечетных (антисимметричных) решений, приводящих к существованию дискретного спектра значения эффективного показателя преломления.

Рассмотрены частные случаи конкретных пространственных профилей диэлектрической проницаемости внутренней прослойки, для которых существуют точные аналитические решения волнового уравнения. В частности, приведены решения для случаев линейного, параболического и экспоненциального профилей, описываемые соответствующими специальными функциями. Получены дискретные спектры значений эффективного показателя преломления в слоях с рассматриваемыми градиентными профилями.

Также рассмотрены частные случаи конкретных моделей нелинейности сред, таких как керровская и ступенчатая. Для таких нелинейностей приведены точные аналитические решения нелинейного волнового уравнения, описывающие зависимости амплитуды стационарного электрического поля от расстояния от границ раздела слоев в нелинейно-оптических средах.

Подробно проанализирован случай симметричной трехслойной волноводной структуры, внутренний градиентный слой в которой характеризуется параболическим пространственным профилем, а внешние обкладки представляют собой керровские нелинейно-оптические среды. Получено точное аналитическое решение сформулированной краевой задачи, описывающее поперечное симметричное распределение поля для случая самофокусирующей нелинейности и проведен его анализ. Интенсивность основной моды значительно превышает интенсивность мод более высокого порядка. Напряженность электрического поля растет с увеличением относительного изменения диэлектрической проницаемости в прослойке для основной моды и мод первого порядка, однако уменьшается с увеличением его значения для мод более высоких порядков.

Результаты данной работы могут быть полезными для разработки различных оптических волноводных устройств. Предложенная теория также расширяет представления о физических свойствах нелинейных волн и закономерностях локализации световых пучков в распределенных средах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

1. Zhao Y., Yang Y., Sun H.B. Nonlinear meta-optics towards applications. *Photonix*. 2021;2(1):3. <http://doi.org/10.1186/s43074-021-00025-1>
2. Bano R., Asghar M., Ayub K., Mahmood T., Iqbal J., Tabassum S., Zakaria R., Gilani M. A Theoretical Perspective on Strategies for Modeling High Performance Nonlinear Optical Materials. *Front. Mater.* 2021;8:783239. <https://doi.org/10.3389/fmats.2021.783239>
3. Dragoman D., Dragoman M. *Advanced Optoelectronic Devices*. Berlin: Springer; 1999. 436 p.
4. Adams M.J. *An Introduction to Optical Waveguides*. Chichester: Wiley; 1981. 432 p.
5. Chen C.-L. *Foundations for Guided-Wave Optics*. New York: John Wiley & Sons, Inc.; 2005. 462 p. <https://doi.org/10.1002/0470042222>
6. Malomed B.A., Mihalache D. Nonlinear waves in optical and matter-wave media: a topical survey of recent theoretical and experimental results. *Rom. J. Phys.* 2019;64(5–6):106. URL: https://rjp.nipne.ro/2019_64_5-6/RomJPhys.64.106.pdf
7. Mihalache D. Localized structures in optical and matter-wave media: a selection of recent studies. *Rom. Rep. Phys.* 2021;73:403. URL: <https://rrp.nipne.ro/2021/AN73403.pdf>
8. Agrawal G.P. *Physics and Engineering of Graded-Index Media*. Cambridge: Cambridge University Press; 2023. 348 p. <https://doi.org/10.1017/9781009282086>
9. Ablowitz M.J., Horikis T.P. Nonlinear waves in optical media. *J. Comp. Appl. Math.* 2010;234(6):1896–1903. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2009.08.039>
10. Bednarik M., Cervenka M. Electromagnetic waves in graded-index planar waveguides. *J. Opt. Soc. Am. B*. 2020;37(12):3631–3643. <https://doi.org/10.1364/JOSAB.408679>
11. Kivshar Yu.S., Agrawa G.P. *Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals*. San Diego: Academic Press; 2003. 540 p.
12. Čada M., Qasymeh M., Pištora J. Optical Wave Propagation in Kerr Media. In: *Wave Propagation. Theories and Applications*. London: IntechOpen; 2013. P. 175–192. <http://doi.org/10.5772/51293>
13. Kartashov Y.V., Malomed B.A., Torner L. Solitons in nonlinear lattices. *Rev. Mod. Phys.* 2011;83(1):247–305. <http://doi.org/10.1103/RevModPhys.83.247>
14. Laine T.A. *Electromagnetic Wave Propagation in Nonlinear Kerr Media*: Doctoral Thesis. Stockholm: Royal Institute of Technology (KTH), Department of Physics; 2000. 58 p. URL: <https://kth.diva-portal.org/smash/get/diva2:8732/FULLTEXT01.pdf>
15. Mihalache D., Bertolotti M., Sibilia C. IV Nonlinear wave propagation in planar structures. *Prog. Opt.* 1989;27:227–313. [https://doi.org/10.1016/S0079-6638\(08\)70087-8](https://doi.org/10.1016/S0079-6638(08)70087-8)
16. Langbein U., Lederer F., Peschel T., Trutschel U., Mihalache D. Nonlinear transmission resonances at stratified dielectric media. *Phys. Rep.* 1990;194(5-6):325–342. [https://doi.org/10.1016/0370-1573\(90\)90032-W](https://doi.org/10.1016/0370-1573(90)90032-W)
17. Mihalache D., Stegeman G.I., Seaton C.T., Wright E.M., Zanon R., Boardman A.D., Twardowski T. Exact dispersion relations for transverse magnetic polarized guided waves at a nonlinear interface. *Opt. Lett.* 1987;12(3):187–189. <https://doi.org/10.1364/OL.12.000187>
18. Каданцев В.Н., Гольцов А.Н., Кондаков М.А. Динамика электросолитона в термализованной молекулярной цепи. *Russian Technological Journal*. 2020;8(1):43–57. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2020-8-1-43-57>
[Kadantsev V.N., Goltsov A.N., Kondakov M.A. Electrosoliton dynamics in a thermalized molecular chain. *Russ. Technol. J.* 2020;8(1):43–57 (in Russ.). <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2020-8-1-43-57>]
19. Shvartsburg A.B., Maradudin A. *Waves in Gradient Metamaterials*. Singapore: World Scientific; 2013. 339 p. <https://doi.org/10.1142/8649>
20. Touam T., Yergeau F. Analytical solution for a linearly graded-index-profile planar waveguide. *Appl. Opt.* 1993;32(3):309–312. <https://doi.org/10.1364/AO.32.000309>
21. Lachance R.L., Belanger P.-A. Modes in divergent parabolic graded-index optical fibers. *J. Lightwave Technol.* 1991;9(11):1425–1430. <https://doi.org/10.1109/50.97628>
22. Taya S.A., Hussein A.J., Ramahi O.M., Colak I., Chaouche Y.B. Dispersion curves of a slab waveguide with a nonlinear covering medium and an exponential graded-index thin film (transverse magnetic case). *J. Opt. Soc. Am. B*. 2021;38(11):3237–3243. <https://doi.org/10.1364/JOSAB.439034>
23. Shvartsburg A.B. Dispersion of electromagnetic waves in stratified and nonstationary media (exactly solvable models). *Phys. Usp.* 2000;43(12):1201–1228. <https://doi.org/10.1070/pu2000v043n12abeh000827>
24. Svendsen B.B., Söderström M., Carlens H., Dalarsson M. Analytical and Numerical Models for TE-Wave Absorption in a Graded-Index GNP-Treated Cell Substrate Inserted in a Waveguide. *Appl. Sci.* 2022;12(14):7097. <https://doi.org/10.3390/app12147097>
25. Almawgani A.H.M., Taya S.A., Hussein A.J., Colak I. Dispersion properties of a slab waveguide with a graded-index core layer and a nonlinear cladding using the WKB approximation method. *J. Opt. Soc. Am. B*. 2022;39(6):1606–1613. <https://doi.org/10.1364/JOSAB.458569>
26. Савотченко С.Е. Модели волноводов, сочетающих градиентные и нелинейно-оптические слои. *Russian Technological Journal*. 2023;11(4):84–93. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2023-11-4-84-93>
[Savotchenko S.E. Models of waveguides combining gradient and nonlinear optical layers. *Russ. Technol. J.* 2023;11(4):84–93 (in Russ.). <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2023-11-4-84-93>]

27. Hussein A.J., Nassar Z.M., Taya S.A. Dispersion properties of slab waveguides with a linear graded-index film and a nonlinear substrate. *Microsyst. Technol.* 2021;27(7):2589–2594. <https://doi.org/10.1007/s00542-020-05016-z>
28. Taya S.A., Hussein A.J., Colak I. An exact solution of a slab waveguide dispersion relation with a linear graded-index guiding layer (TM case). *Microsyst Technol.* 2022;28(22):1213–1219. <https://doi.org/10.1007/s00542-022-05281-0>
29. Hussein A.J., Taya S.A., Vigneswaran D., Udiyakumar R., Upadhyay A., Anwa T., Amiri I.S. Universal dispersion curves of a planar waveguide with an exponential graded-index guiding layer and a nonlinear cladding. *Results in Physics.* 2021;20:103734. <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2020.103734>
30. Panyaev I.S., Dadoenkova N.N., Dadoenkova Yu.S., Rozhleys I.A., Krawczyk M., Lyubchanskii I.L., Sannikov D.G. Four-layer nanocomposite structure as an effective optical waveguide switcher for near-IR regime. *J. Phys. D: Appl. Phys.* 2016;49(43):435103. <http://doi.org/10.1088/0022-3727/49/43/435103>
31. Zhong N., Wang Z., Chen M., Xin X., Wu R., Cen Y., Li Y. Three-layer-structure polymer optical fiber with a rough inter-layer surface as a highly sensitive evanescent wave sensor. *Sensors and Actuators B: Chem.* 2018;254:133–142. <https://doi.org/10.1016/j.snb.2017.07.032>
32. Akhmediev N.N. Novel class of nonlinear surface waves: asymmetric modes in a symmetric layered structure. *J. Exp. Theor. Phys.* 1982;56(2):299–303. URL: http://jetp.ras.ru/cgi-bin/dn/e_056_02_0299.pdf
33. Fedyanin V.K., Mihalache D. P-Polarized nonlinear surface polaritons in layered structures. *Z. Phys. B.* 1982;47:167–173. <https://doi.org/10.1007/BF01441299>
34. Chatterjee S., Chaudhuri P.R. Some Unique Propagation Characteristics of Linearly Graded Multilayered Planar Optical Waveguides. *J. Basic Appl. Phys.* 2014;3(1):1–9.
35. Savotchenko S.E. Temperature controlled waveguide properties of the linearly graded-index film in semiconductor crystal with the photorefractive nonlinearity. *Appl. Phys. B: Lasers and Optics.* 2023;129(1):7. <https://doi.org/10.1007/s00340-022-07950-4>
36. Savotchenko S.E. New types of transverse electric nonlinear waves propagating along a linearly graded-index layer in a medium with Kerr nonlinearity. *Opt. Quant. Electron.* 2023;55(1):74. <https://doi.org/10.1007/s11082-022-04323-1>
37. Savotchenko S.E. Discrete spectrum of waveguide modes of a linearly graded-index film introduced into a medium with a stepwise nonlinearity. *Optik.* 2023;281(6):170835. <https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2023.170835>
38. Savotchenko S.E. Guided waves propagating along a parabolic graded-index slab in Kerr nonlinear medium. *Opt. Quant. Electron.* 2023;55:898. <https://doi.org/10.1007/s11082-023-05178-w>
39. Savotchenko S.E. Surface waves propagating along an interface between media with an exponential spatial profile of the dielectric function and an abruptly appearance of a self-focusing nonlinear response in a near-surface layer at the strong light intensity. *Opt. Quant. Electron.* 2023;55(7):580. <https://doi.org/10.1007/s11082-023-04871-0>
40. Rana B., Svendsen B.B., Dalarsson M. TE-Wave Propagation Over an Impedance-Matched RHM to LHM Transition in a Hollow Waveguide. *Progress In Electromagnetics Research M.* 2022;110:1–10. <http://doi.org/10.2528/PIERM22022505>
41. Kaplan I.G. *Intermolecular Interactions: Physical Picture, Computational Methods and Model Potentials*. Hoboken: John Wiley & Sons, Ltd; 2006. 384 p. <https://doi.org/10.1002/047086334X>
42. Khadzhi P.I., Fedorov L.V., Torstveit S. Nonlinear surface waves for the simplest model of nonlinear medium. *Phys. Tech. Lett.* 1991;61:110–113.
43. Ляхомская К.Д., Хаджи П.И. Эффект самоотражения и простейшие модели нелинейной среды. *Журн. техн. физики.* 2000;70(11):86–90.
[Lyakhomskaya K.D., Khadzhi P.I. Self-reflection effect in naïve model of nonlinear media. *Tech. Phys.* 2000;45(11):1457–1461. <https://doi.org/10.1134/1.1325030>]
[Original Russian Text: Lyakhomskaya K.D., Khadzhi P.I. Self-reflection effect in naïve model of nonlinear media. *Zhurnal Tekhnicheskoi Fiziki.* 2000;70(11):86–90 (in Russ.).]
44. Вигдорович Е.Н. Радиационная стойкость эпитаксиальных структур на основе GaAs. *Russ. Technol. J.* 2019;7(3):41–49. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2019-7-3-41-49>
[Vigdorovich E.N. Radiation resistance of epitaxial structures based on GaAs. *Russ. Technol. J.* 2019;7(3):41–49 (in Russ.). <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2019-7-3-41-49>]

Об авторе

Савотченко Сергей Евгеньевич, д.ф.-м.н., доцент, профессор кафедры высшей математики, Институт кибербезопасности и цифровых технологий, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: savotchenkose@mail.ru. Scopus Author ID 6603577988, ResearcherID N-9227-2018, SPIN-код РИНЦ 2552-4344, <https://orcid.org/0000-0002-7158-9145>

About the author

Sergey E. Savotchenko, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor, Professor of the High Mathematics Department, Institute for Cybersecurity and Digital Technologies, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: savotchenkose@mail.ru. Scopus Author ID 6603577988, ResearcherID N-9227-2018, RSCI SPIN-code 2552-4344, <https://orcid.org/0000-0002-7158-9145>