Russian Technological Journal.
2024;12(2):77–89

ISSN 2782-3210 (Print)
ISSN 2500-316X (Online)

Математическое моделирование

Mathematical modeling

УДК 531.391
https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-2-77-89

CC BY

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Математическая модель гравитационного потенциала планеты с учетом приливных деформаций

А.В. Шатина [@], **А.С. Борец**

МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, 119454 Россия
[@] *Автор для переписки, e-mail: shatina_av@mail.ru*

Резюме

Цели. В работе исследуется гравитационный потенциал вязкоупругой планеты, совершающей движение в гравитационном поле массивного притягивающего центра (звезды), спутника и еще одной или нескольких планет, движущихся по кеплеровским эллиптическим орбитам относительно притягивающего центра. Отличные от вязкоупругой планеты небесные тела моделируются материальными точками. В рамках линейной модели теории вязкоупругости решается задача нахождения вектора упругого смещения. Традиционно для определения гравитационного поля Земли используется модель твердого тела, а учет приливных деформаций отражается в виде малых поправок к коэффициентам модели геопотенциала. В данной работе для учета приливных эффектов используется модель вязкоупругого шара. Актуальность темы исследования связана с высокоточным прогнозированием движения искусственных спутников Земли, высокоточным измерением гравитационного поля Земли.

Методы. Используются асимптотические и аналитические методы, разработанные В.Г. Вильке для механических систем, содержащих вязкоупругие элементы большой жесткости, методы классической механики, математического анализа. Построение графиков выполнено с помощью математического пакета *Octave*.

Результаты. На основе решения квазистатической задачи теории упругости путем вычисления тройных интегралов по шаровой области получена формула для гравитационного потенциала деформируемой планеты, а также вычислен гравитационный потенциал Земли с учетом твердотельных приливных эффектов от Луны, Солнца и Венеры во внешней точке. Построены графики, показывающие зависимость гравитационного потенциала Земли от времени.

Выводы. Из полученных теоретических и численных результатов следует, что основной вклад в гравитационный потенциал Земли вносят Луна и Солнце. Влияние других планет Солнечной системы мало. Значение гравитационного потенциала во внешней точке Земли с учетом приливных эффектов зависит как от положения точки в подвижной системе координат, так и от взаимного расположения небесных тел.

Ключевые слова: гравитационный потенциал, вязкоупругая планета, приливы, орбита, элементы орбиты, математическое моделирование

© А.В. Шатина, А.С. Борец, 2024

• **Поступила:** 25.07.2023 • **Доработана:** 25.09.2023 • **Принята к опубликованию:** 13.02.2024

Для цитирования: Шатина А.В., Борец А.С. Математическая модель гравитационного потенциала планеты с учетом приливных деформаций. *Russ. Technol. J*. 2024;12(2):77–89. https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-2-77-89

Прозрачность финансовой деятельности: Авторы не имеют финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

RESEARCH ARTICLE

A mathematical model of the gravitational potential of the planet taking into account tidal deformations

Albina V. Shatina [@], **Alexandra S. Borets**

MIREA – Russian Technological University, Moscow, 119454 Russia
[@] *Corresponding author, e-mail: shatina_av@mail.ru*

Abstract

Objectives. This paper investigates the gravitational potential of a viscoelastic planet moving in the gravitational field of a massive attracting center (star), a satellite and one or more other planets moving in Keplerian elliptical orbits relative to the attracting center. Celestial bodies other than a viscoelastic planet are modeled by material points. Within the framework of the linear model of the theory of viscoelasticity, the problem of finding the vector of elastic displacement has been resolved. Traditionally, a solid body model is used to determine the Earth's gravitational field, while tidal deformations are taken into account in the form of small corrections to the coefficients of the geopotential model. In this work, the viscoelastic ball model is used to take into account tidal effects. The relevance of the research topic is associated with high-precision forecasting of the movement of artificial satellites of the Earth, high-precision measurement of the Earth's gravitational field.

Methods. In this study the asymptotic and analytical methods developed by V.G. Vilke are used for mechanical systems containing viscoelastic elements of high rigidity, as well as methods of classical mechanics, mathematical analysis. The graphs were plotted using the *Octave* mathematical package.

Results. After resolving the quasi-static problem of elasticity theory by calculating triple integrals over a spherical area, a formula for the gravitational potential of a deformable planet was obtained. In addition, the gravitational potential of the Earth was also calculated taking into account solid-state tidal effects from the Moon, Sun, and Venus at an external point. Graphs were constructed to show the dependence of the Earth's gravitational potential on time.

Conclusions. The theoretical and numerical results established herein show that the main contribution to the gravitational potential of the Earth is made by the Moon and the Sun. The influence of other planets in the solar system is small. The value of the gravitational potential at the outer point of the Earth, taking into account tidal effects, depends both on the position of the point in the moving coordinate system and on the relative position of celestial bodies.

Keywords: gravitational potential, viscoelastic planet, tides, orbit, orbit elements, mathematical modeling

• **Submitted:** 25.07.2023 • **Revised:** 25.09.2023 • **Accepted:** 13.02.2024

For citation: Shatina A.V., Borets A.S. A mathematical model of the gravitational potential of the planet taking into account tidal deformations. *Russ. Technol. J*. 2024;12(2):77–89. https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-2-77-89

Financial disclosure: The authors have no a financial or property interest in any material or method mentioned.

The authors declare no conflicts of interest.

ВВЕДЕНИЕ

Одной из важнейших задач в настоящее время является определение формы геоида Земли (эквипотенциальной поверхности земного поля тяжести). Это необходимо для топографических съемок различных масштабов, определения координат поворотных точек земельных участков при постановке на кадастровый учет, инженерных изысканий, геодезического обеспечения строительства и т.д. Чтобы определить точную поверхность геоида в любой точке планеты, необходимо выполнить совокупность измерений на поверхности геоида или в конкретной точке на поверхности Земли с учетом характера распределения масс, что практически неосуществимо.

Для решения этой задачи на околоземную орбиту были отправлены космические аппараты GRACE (совместная спутниковая миссия NASA и Германского центра авиации и космонавтики, 2002 г.) и GOCE (Европейское космическое агентство, 2009 г.). С помощью данных спутников были получены важные с точки зрения гравиметрии и высшей геодезии данные. В частности, была построена усовершенствованная модель геоида, которая превосходит по точности все предыдущие. Тем не менее, учитывая так называемые приливные эффекты, в т.ч. упругие деформации всего земного шара под действием силы тяготения Луны и Солнца, все полученные результаты измерения формы геоида Земли представляют собой некоторую усредненную картину и выполнены с определенной погрешностью.

Для решения фундаментальной задачи получения реальной формы геоида Земли с учетом всех приливных эффектов еще в 1950 г. советским ученым М.С. Молоденским было предложено [1, 2] вместо геоида использовать поверхность близкую к нему – квазигеоид, который не требует знания внутреннего строения земной коры. При сравнении квазигеоида и геоида необходимо учитывать, что в высоких горах расхождение будет приблизительно на 2–4 м, в низменных равнинах на 0.02–0.12 м, а на водной поверхности расхождений не будет. Поверхность квазигеоида определяется значениями гравитационного потенциала.

В работе [3] дается обзор методов изучения классической теории приливов. Впервые мысль о вековом замедлении вращения Земли под действием приливного трения была высказана И. Кантом в 1755 г. Первые фундаментальные исследования по влиянию приливов на движение планет и спутников принадлежат Дж.Г. Дарвину [4]. В связи с освоением космического пространства в 60-е годы прошлого века, а также в связи с появлением атомных стандартов времени интерес к приливной теории возродился вновь [5].

В настоящее время в соответствии с соглашениями IERS[1] (2010 г.) [6] приливные деформации регистрируются в виде небольших поправок к коэффициентам геопотенциальной модели.

Приливы в планетах и их естественных спутниках играют важнейшую роль в их динамике и являются причиной перехода в спин-орбитальный резонанс 1:1 [4, 5, 7]. Считается также, что приливные силы приводят экзопланеты в спин-орбитальные резонансы более высокого порядка с их родительскими звездами [8].

Лунно-солнечные приливы влияют на изменение угловой скорости вращения Земли [9–11], погоды и климата [12], оказывают влияние на вулканическую деятельность [13]. Актуальность темы исследования связана с высокоточным прогнозированием движения искусственных спутников Земли [14–17].

Целью данной работы является вывод формулы для гравитационного потенциала планеты, моделируемой вязкоупругим телом шарообразной формы, движущимся в гравитационном поле притягивающего тела, естественного спутника и еще одной планеты. Для достижения поставленной цели используется метод разделения движения для механических систем, содержащих вязкоупругие тела большой жесткости [18]. Данная работа является продолжением и развитием результатов, полученных в работах [19, 20].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для исследования гравитационного потенциала деформируемой планеты рассмотрим механическую систему, состоящую из неподвижного притягивающего центра (материальной точки O с массой m_1), связки «вязкоупругая планета – спутник» и еще одной планеты. Спутник и вторую планету будем моделировать материальными точками F и P с массами m_2 и m_3 соответственно, а исследуемую планету – однородным вязкоупругим телом, имеющим форму шара радиуса r_0 при отсутствии деформаций. Масса вязкоупругой планеты равна m, а плотность – ρ.

Пусть $OXYZ$ – инерциальная система координат, начало которой совпадает с притягивающим центром; $Dx_1x_2x_3$ – подвижная, связанная с вязкоупругой планетой, система координат с началом в ее центре масс D; C – барицентр системы «вязкоупругая планета – спутник». Также введем в рассмотрение системы осей Кёнига $CX'Y'Z'$ и $DX''Y''Z''$ (рис. 1).

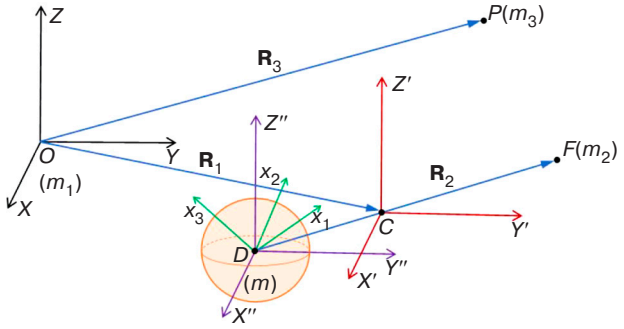

Рис. 1. Постановка задачи

[1] International Earth Rotation and Reference Systems Service.

Положим $\mathbf{R}_1 = \overline{OC}$ и $\mathbf{R}_2 = \overline{DF}$, $\mathbf{R}_3 = \overline{OP}$. Согласно постановке задачи

$$m_2 \ll m \ll m_1, \ |\mathbf{R}_2| \ll |\mathbf{R}_1|. \tag{1.1}$$

Деформации вязкоупругой планеты в точке M с радиус-вектором $\mathbf{r}$ описываются вектором упругого смещения $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$. В подвижной системе координат $Dx_1x_2x_3$

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3), \ \mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3).$$

Радиус-вектор точки M в системе координат $OXYZ$ имеет вид:

$$\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{r},t) = \overline{OD} + \boldsymbol{\Gamma}\left(\mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{r},t)\right), \tag{1.2}$$

где $\boldsymbol{\Gamma}$ – матрица перехода от подвижной системы координат $Dx_1x_2x_3$ к системе координат $DX''Y''Z''$.

Для определения центра масс деформированной планеты (радиус-вектора $\overline{OD}$) и связанной с ней системы координат $Dx_1x_2x_3$ необходимо выполнение условий [7]:

$$\overline{OD} = \frac{1}{m}\int_V \boldsymbol{\zeta}(\mathbf{r},t)\rho\, dx, \ \int_V \mathbf{u}dx = 0,$$
$$\int_V \operatorname{rot}\mathbf{u}\, dx = 0, \ dx = dx_1dx_2dx_3, \tag{1.3}$$

где интегрирование производится по шару радиуса r_0: $V = \{\mathbf{r} \in \mathbb{E}^3, |\mathbf{r}| \le r_0\}$, $\mathbb{E}^3$ – евклидово пространство.

С учетом условий (1.3) радиус-векторы $\overline{OD}$, $\overline{OF}$ точек D и F выражаются через векторы $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$ следующим образом:

$$\overline{OD} = \mathbf{R}_1 - \frac{m_2}{m+m_2}\mathbf{R}_2, \ \overline{OF} = \mathbf{R}_1 + \frac{m}{m+m_2}\mathbf{R}_2. \tag{1.4}$$

Потенциальная энергия гравитационных полей данной механической системы представляется в виде:

$$\Pi = -\frac{fm_1m_3}{|\overline{OP}|} - \frac{fm_1m_2}{|\overline{OF}|} - \frac{fm_2m_3}{|\overline{FP}|} - \int_V \frac{fm_1\rho dx}{|\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{r},t)|} -$$
$$- \int_V \frac{fm_2\rho dx}{|\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{r},t) - \overline{OF}|} - \int_V \frac{fm_3\rho dx}{|\boldsymbol{\zeta}(\mathbf{r},t) - \overline{OP}|},$$

где f – универсальная гравитационная постоянная.

Вязкоупругие свойства планеты описываются следующими параметрами: модулем Юнга E, коэффициентом Пуассона ν и коэффициентом вязкого трения χ ($\chi > 0$). Потенциальную энергию упругих деформаций $\mathcal{E}$ и диссипативный функционал D зададим согласно линейной модели [7, 18]:

$$\mathcal{E} = \int_V \mathcal{E}[\mathbf{u}]dx, \ \mathcal{E}[\mathbf{u}] = \alpha_1\left(\mathrm{I}_E^2 - \alpha_2\mathrm{II}_E\right),$$
$$\alpha_1 = \frac{E(1-\nu)}{2(1+\nu)(1-2\nu)}, \ \alpha_2 = \frac{2(1-2\nu)}{1-\nu},$$
$$\alpha_1 > 0, \ 0 < \alpha_2 < 3,$$
$$\mathrm{I}_E = \sum_{i=1}^{3} e_{ii}, \ \mathrm{II}_E = \sum\nolimits_{i<j}\left(e_{ii}e_{jj} - e_{ij}^2\right), \tag{1.5}$$
$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right),$$
$$D = \int_V D[\dot{\mathbf{u}}]dx, \ D[\dot{\mathbf{u}}] = \chi\mathcal{E}[\dot{\mathbf{u}}].$$

Будем считать, что точки D, C, F, P движутся в плоскости OXY, а $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$, $\mathbf{R}_3$ – заданные вектор-функции времени. Кроме того, предполагаем, что вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ системы координат $Dx_1x_2x_3$ относительно $DX''Y''Z''$ постоянен. Этот вектор определяется равенством

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a} = \boldsymbol{\Gamma}^{-1}\dot{\boldsymbol{\Gamma}}\mathbf{a},$$

где $\mathbf{a}$ – произвольный вектор.

2. ВЕКТОР УПРУГОГО СМЕЩЕНИЯ

Согласно вариационному принципу Даламбера – Лагранжа имеет место равенство [18, 21]:

$$\int_V \left(\ddot{\boldsymbol{\zeta}}, \delta\boldsymbol{\zeta}\right)\rho dx + \delta\Pi + \int_V \left(\nabla\mathcal{E}[\mathbf{u}] + \nabla D[\dot{\mathbf{u}}] + \boldsymbol{\lambda}_1, \delta\mathbf{u}\right)dx +$$
$$+ \boldsymbol{\lambda}_2\int_V \operatorname{rot}\delta\mathbf{u}\, dx = 0 \qquad \forall\delta\mathbf{u} \in \left(W_2^1(V)\right)^3. \tag{2.1}$$

Множители Лагранжа $\boldsymbol{\lambda}_1$, $\boldsymbol{\lambda}_2$ в (2.1) соответствуют условиям (1.3), $\left(W_2^1(V)\right)^3$ – пространство Соболева.

Согласно (1.2) и (1.4)

$$\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{R}_1 - \frac{m_2}{m+m_2}\mathbf{R}_2 + \boldsymbol{\Gamma}\left(\mathbf{r} + \mathbf{u}\right).$$

Тогда

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \dot{\mathbf{R}}_1 - \frac{m_2}{m+m_2}\dot{\mathbf{R}}_2 + \boldsymbol{\Gamma}\left[\boldsymbol{\omega} \times \left(\mathbf{r} + \mathbf{u}\right) + \dot{\mathbf{u}}\right],$$

$$\ddot{\boldsymbol{\zeta}} = \ddot{\mathbf{R}}_1 - \frac{m_2}{m+m_2}\ddot{\mathbf{R}}_2 + \\ + \boldsymbol{\Gamma}\left\{\boldsymbol{\omega}\times\left[\boldsymbol{\omega}\times\left(\mathbf{r}+\mathbf{u}\right)\right] + \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\left(\mathbf{r}+\mathbf{u}\right) + 2\boldsymbol{\omega}\times\dot{\mathbf{u}} + \ddot{\mathbf{u}}\right\},$$

$$\delta\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\Gamma}\delta\mathbf{u}. \qquad (2.2)$$

В равенстве (2.2) учтено, что орбитальное и вращательное движения механической системы заданы, поэтому вариации $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$, $\boldsymbol{\Gamma}$ равны нулю.

Далее:

$$\delta\Pi = \int_V \left(\frac{fm_1\boldsymbol{\zeta}}{|\boldsymbol{\zeta}|^3}, \delta\boldsymbol{\zeta}\right)\rho\,dx + \int_V \left(\frac{fm_2\left(\boldsymbol{\zeta}-\overline{OF}\right)}{\left|\boldsymbol{\zeta}-\overline{OF}\right|^3}, \delta\boldsymbol{\zeta}\right)\rho\,dx + \\ + \int_V \left(\frac{fm_3\left(\boldsymbol{\zeta}-\overline{OP}\right)}{\left|\boldsymbol{\zeta}-\overline{OP}\right|^3}, \delta\boldsymbol{\zeta}\right)\rho\,dx. \qquad (2.3)$$

Здесь

$$\boldsymbol{\zeta} - \overline{OF} = -\mathbf{R}_2 + \boldsymbol{\Gamma}\left(\mathbf{r}+\mathbf{u}\right),$$

$$\boldsymbol{\zeta} - \overline{OP} = \mathbf{R}_1 - \frac{m_2}{m+m_2}\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_3 + \boldsymbol{\Gamma}\left(\mathbf{r}+\mathbf{u}\right).$$

Пояснение к нахождению вариации (2.3) функционала П: пусть $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, тогда

$$\delta\frac{1}{|\mathbf{a}|} = \delta\frac{1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}} = \\ = -\frac{1}{2}\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)^{-3/2}\cdot\delta\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right) = \\ = -\frac{\delta\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)}{2\left(\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\right)^3} = -\frac{2a_1\delta a_1 + 2a_2\delta a_2 + 2a_3\delta a_3}{2|\mathbf{a}|^3} = \\ = -\frac{\left(\mathbf{a},\delta\mathbf{a}\right)}{|\mathbf{a}|^3}.$$

С учетом (2.2):

$$\delta\Pi = \int_V \left(\frac{\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\boldsymbol{\zeta}}{|\boldsymbol{\zeta}|^3}, \delta\mathbf{u}\right) fm_1\rho\,dx + \\ + \int_V \left(\frac{\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\left(\boldsymbol{\zeta}-\overline{OF}\right)}{\left|\boldsymbol{\zeta}-\overline{OF}\right|^3}, \delta\mathbf{u}\right) fm_2\rho\,dx + \\ + \int_V \left(\frac{\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\left(\boldsymbol{\zeta}-\overline{OP}\right)}{\left|\boldsymbol{\zeta}-\overline{OP}\right|^3}, \delta\mathbf{u}\right) fm_3\rho\,dx, \qquad (2.4)$$

$$\int_V \left(\ddot{\boldsymbol{\xi}}, \delta\boldsymbol{\zeta}\right)\rho\,dx = \int_V \left(\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\ddot{\boldsymbol{\xi}}, \delta\mathbf{u}\right)\rho\,dx. \qquad (2.5)$$

Считаем, что жесткость материала деформируемой планеты является большой, т.е. $\hat{\varepsilon} = |\boldsymbol{\omega}|^2\rho r_0^2 E^{-1} << 1$. Векторы $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, $\boldsymbol{\lambda}_1$ и $\boldsymbol{\lambda}_2$ можно искать в виде разложений по степеням $\varepsilon = E^{-1}$ [18]:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon\mathbf{u}_1(\mathbf{r}, t) + \varepsilon^2\mathbf{u}_2(\mathbf{r}, t) + \dots,$$

$$\boldsymbol{\lambda}_1(t) = \boldsymbol{\lambda}_{10}(t) + \varepsilon\boldsymbol{\lambda}_{11}(t) + \dots,\ \boldsymbol{\lambda}_2(t) = \boldsymbol{\lambda}_{20}(t) + \varepsilon\boldsymbol{\lambda}_{21}(t) + \dots.$$

Из уравнения (2.1) с учетом (2.4), (2.5) для вектор-функции $\mathbf{u}_1$ получим равенство:

$$\int_V \left(\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\left(\ddot{\mathbf{R}}_1 - \frac{m_2}{m+m_2}\ddot{\mathbf{R}}_2\right) + \boldsymbol{\omega}\times\left[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}\right] + \right. \\ + \frac{\left(\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\overline{OD}+\mathbf{r}\right)}{\left|\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\overline{OD}+\mathbf{r}\right|^3}fm_1 + \frac{\left(\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\overline{FD}+\mathbf{r}\right)}{\left|\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\overline{FD}+\mathbf{r}\right|^3}fm_2 + \\ \left. + \frac{\left(\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\overline{PD}+\mathbf{r}\right)}{\left|\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\overline{PD}+\mathbf{r}\right|^3}fm_3, \delta\mathbf{u}\right)\rho\,dx + \\ + \int_V \varepsilon\left(\nabla\mathcal{E}\left[\mathbf{u}_1\right] + \nabla D\left[\dot{\mathbf{u}}_1\right] + \boldsymbol{\lambda}_{10}, \delta\mathbf{u}\right)dx + \\ + \int_{\partial V}\left(\boldsymbol{\lambda}_{20}\times\mathbf{n}\right)\delta\mathbf{u}\,d\sigma = 0. \qquad (2.6)$$

Последнее слагаемое в (2.6) следует из формулы Остроградского – Гаусса, представленной в виде:

$$\int_V \left(\boldsymbol{\lambda}_{20}, \mathrm{rot}\delta\mathbf{u}\right)dx = \int_{\partial V}\left(\delta\mathbf{u}\times\boldsymbol{\lambda}_{20}\right)\mathbf{n}\,d\sigma,$$

где ∂V – граница области V, а $\mathbf{n}$ – нормаль к ∂V.

Следуя [7, 18], подставим в (2.6) последовательно $\delta\mathbf{u} = \delta\boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{r}$ и $\delta\mathbf{u} = \boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{E}^3$. В результате получим:

$$\int_{\partial V}\left(\left(\lambda_{20}\times\mathbf{n}\right), \left(\delta\boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{r}\right)\right)d\sigma = \frac{8}{3}\pi r_0^3\left(\boldsymbol{\lambda}_{20}, \delta\boldsymbol{\alpha}\right) = 0$$

$$\forall\delta\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{E}^3 \Rightarrow \boldsymbol{\lambda}_{20} = 0,$$

$$\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\left\{m\ddot{\mathbf{R}}_1 - \frac{mm_2}{m+m_2}\ddot{\mathbf{R}}_2 + \frac{fmm_1\overline{OD}}{\left|\overline{OD}\right|^3} + \right. \\ \left. + \frac{fmm_2\overline{FD}}{\left|\overline{FD}\right|^3} + \frac{fmm_3\overline{PD}}{\left|\overline{PD}\right|^3}\right\} + \frac{4}{3}\pi r_0^3\boldsymbol{\lambda}_{10} = 0. \qquad (2.7)$$

Также при выводе соотношения (2.7) было учтено равенство

$$\int_V \frac{\mathbf{a}+\mathbf{r}}{|\mathbf{a}+\mathbf{r}|^3}\rho dx = \frac{m\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^3},$$

здесь вектор $\mathbf{a}$ не зависит от $\mathbf{r}$.

Так как размеры деформируемой планеты много меньше расстояний между взаимно тяготеющими телами, то

$$|\mathbf{r}| \ll |\overline{OD}|, \quad |\mathbf{r}| \ll |\overline{FD}|, \quad |\mathbf{r}| \ll |\overline{PD}|.$$

Если $|\mathbf{r}| << |\mathbf{a}|$, то

$$\frac{\mathbf{a}+\mathbf{r}}{|\mathbf{a}+\mathbf{r}|^3} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{r}}{(\mathbf{a}+\mathbf{r},\mathbf{a}+\mathbf{r})^{3/2}} =$$

$$= \frac{\mathbf{a}+\mathbf{r}}{\big((\mathbf{a},\mathbf{a})+2(\mathbf{a},\mathbf{r})+(\mathbf{r},\mathbf{r})\big)^{3/2}} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{r}}{|\mathbf{a}|^3}\left\{1+\frac{2(\mathbf{a},\mathbf{r})}{|\mathbf{a}|^2}+\frac{(\mathbf{r},\mathbf{r})}{|\mathbf{a}|^2}\right\}^{-3/2} \approx$$

$$\approx \frac{\mathbf{a}+\mathbf{r}}{|\mathbf{a}|^3}\left\{1-\frac{3}{2}\cdot 2\frac{(\mathbf{a},\mathbf{r})}{|\mathbf{a}|^2}\right\} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^3} - \frac{3\mathbf{a}(\mathbf{a},\mathbf{r})}{|\mathbf{a}|^5} + \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{a}|^3}.$$

Тогда уравнение (2.6) примет вид:

$$\int_V \left(\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\left(\ddot{\mathbf{R}}_1 - \frac{m_2}{m+m_2}\ddot{\mathbf{R}}_2 \right) + \boldsymbol{\omega}\times[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}] + \right.$$

$$+ \sum_{j=1}^{3}\left\{ \frac{fm_j\mathbf{q}_j}{|\mathbf{q}_j|^3} + \frac{fm_j}{|\mathbf{q}_j|^3}\cdot\left[\mathbf{r} - 3(\boldsymbol{\xi}_j,\mathbf{r})\boldsymbol{\xi}_j\right]\right\} + \qquad (2.8)$$

$$\left. + \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\lambda}_{10}(t), \delta\mathbf{u} \right)\rho dx + \int_V \varepsilon\left(\nabla\mathcal{E}\left[\mathbf{u}_1 + \chi\dot{\mathbf{u}}_1\right], \delta\mathbf{u}\right) dx = 0.$$

Здесь

$$\mathbf{q}_1 = \boldsymbol{\Gamma}^{-1}\overline{OD} = \boldsymbol{\Gamma}^{-1}\left(\mathbf{R}_1 - \frac{m_2}{m+m_2}\mathbf{R}_2\right),$$

$$\mathbf{q}_2 = \boldsymbol{\Gamma}^{-1}\overline{FD} = -\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\mathbf{R}_2,$$

$$\mathbf{q}_3 = \boldsymbol{\Gamma}^{-1}\overline{PD} = \boldsymbol{\Gamma}^{-1}\left(\mathbf{R}_1 - \frac{m_2}{m+m_2}\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_3\right), \qquad (2.9)$$

$$\boldsymbol{\xi}_i = \frac{\mathbf{q}_i}{|\mathbf{q}_i|}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Так как $m = \frac{4}{3}\pi r_0^3\rho$, то из (2.7) следует

$$\boldsymbol{\lambda}_{10} = -\rho\left\{\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\left(\ddot{\mathbf{R}}_1 - \frac{m_2}{m+m_2}\ddot{\mathbf{R}}_2\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{fm_1\mathbf{q}_1}{|\mathbf{q}_1|^3} + \frac{fm_2\mathbf{q}_2}{|\mathbf{q}_2|^3} + \frac{fm_3\mathbf{q}_3}{|\mathbf{q}_3|^3}\right\}. \qquad (2.10)$$

С учетом (2.10) получим из (2.8) следующую задачу для определения $\mathbf{u}_1(\mathbf{r}, t)$:

$$\rho\left\{\boldsymbol{\omega}\times[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}] + \sum_{j=1}^{3}\frac{fm_j}{|\mathbf{q}_j|^3}\cdot\left[\mathbf{r} - 3(\boldsymbol{\xi}_j,\mathbf{r})\boldsymbol{\xi}_j\right]\right\} + \qquad (2.11)$$

$$+ \varepsilon\nabla\mathcal{E}\left[\mathbf{u}_1 + \chi\dot{\mathbf{u}}_1\right] = 0,$$

$$\boldsymbol{\sigma}_n\big|_{r=r_0} = 0. \qquad (2.12)$$

Здесь

$$\varepsilon\nabla\mathcal{E} = -\frac{1}{2(1+\nu)}\left(\frac{1}{1-2\nu}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}\right),$$

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3), \ \mathbf{n} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3), \ \boldsymbol{\sigma}_n = (\sigma_{n1}, \sigma_{n2}, \sigma_{n3}),$$

$$\sigma_{ni} = \frac{E\nu\gamma_i}{(1+\nu)(1-2\nu)}\mathrm{div}\mathbf{u} + \frac{E}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_i} + \mathrm{grad}\,u_i, \mathbf{n}\right).$$

Решение задачи (2.11)–(2.12) имеет вид [7, 22]:

$$\mathbf{u}_1(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}_{10}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{u}_{11}(\mathbf{r}, t) +$$

$$+ \mathbf{u}_{12}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{u}_{13}(\mathbf{r}, t), \qquad (2.13)$$

где

$$\mathbf{u}_{10}(\mathbf{r},t) = \rho\left\{\frac{2}{3}\omega^2\left[d_1 r^2 + d_2 r_0^2\right]\mathbf{r} + \right.$$

$$+ b_1\left[\frac{1}{6}\omega^2 r^2 - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega},\mathbf{r})^2\right]\mathbf{r} + \qquad (2.14)$$

$$\left. + \left[b_2 r^2 + b_3 r_0^2\right]\cdot\left[\frac{1}{3}\omega^2\mathbf{r} - (\boldsymbol{\omega},\mathbf{r})\boldsymbol{\omega}\right]\right\},$$

$$\omega = |\boldsymbol{\omega}|,$$

$$\mathbf{u}_{1k}(\mathbf{r},t) = -\frac{3\rho fm_k}{q_k^3}\left(1 + \frac{3\chi\dot{q}_k}{q_k}\right)\left\{b_1\left[\frac{1}{6}r^2 - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\xi}_k,\mathbf{r})^2\right]\mathbf{r} + \right.$$

$$\left. + \left[b_2 r^2 + b_3 r_0^2\right]\cdot\left[\frac{1}{3}\mathbf{r} - (\boldsymbol{\xi}_k,\mathbf{r})\boldsymbol{\xi}_k\right]\right\} -$$

$$- \frac{3\chi\rho fm_k}{q_k^3}\{b_1(\dot{\boldsymbol{\xi}}_k,\mathbf{r})(\boldsymbol{\xi}_k,\mathbf{r})\mathbf{r} + \qquad (2.15)$$

$$+ [b_2 r^2 + b_3 r_0^2][(\dot{\boldsymbol{\xi}}_k,\mathbf{r})\boldsymbol{\xi}_k + (\boldsymbol{\xi}_k,\mathbf{r})\dot{\boldsymbol{\xi}}_k]\},$$

$$q_k = |\mathbf{q}_k|, \ k = 1, 2, 3,$$

$$d_1 = -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{10(1-\nu)}, \ d_2 = \frac{(1-2\nu)(3-\nu)}{10(1-\nu)},$$

$$b_1 = \frac{2(1+\nu)}{5\nu+7}, \ b_2 = -\frac{(1+\nu)(2+\nu)}{5\nu+7}, \qquad (2.16)$$

$$b_3 = \frac{(1+\nu)(2\nu+3)}{5\nu+7}.$$

Вектор упругого смещения $\mathbf{u}$ связан с вектор-функцией $\mathbf{u}_1$ равенством:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r},t)=\frac{1}{E}\mathbf{u}_1(\mathbf{r},t). \tag{2.17}$$

В формуле (2.13) слагаемое $\mathbf{u}_{10}$ отвечает за сплюснутость планеты вдоль оси вращения, а функции $\mathbf{u}_{1k}$ (k = 1, 2, 3) описывают приливные деформации планеты, вызванные гравитационными полями небесных тел O, F и P.

3. ГРАВИТАЦИОННЫЙ ПОТЕНЦИАЛ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПЛАНЕТЫ ВО ВНЕШНЕЙ ТОЧКЕ

Используя вектор упругого смещения (2.17), гравитационный потенциал планеты можно вычислить по формуле:

$$\Pi(\mathbf{R},t)=-f\int_V\frac{\rho dx}{\left|\boldsymbol{\Gamma}\left(\mathbf{r}+\mathbf{u}(\mathbf{r},t)\right)-\mathbf{R}\right|}. \tag{3.1}$$

Здесь $\mathbf{R}=\overline{DK}$ – радиус-вектор точки K, в которой определяется потенциал, $\mathbf{r}$ – радиус-вектор элемента объема dx с плотностью ρ. Вектор $\mathbf{R}$ в формуле (3.1) задан в системе координат $DX''Y''Z''$. Интеграл вычисляется по шару V радиуса r_0.

Предполагается, что

$$|\mathbf{R}|>r_0,\ |\mathbf{u}(\mathbf{r},t)|\ll|\mathbf{r}-\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\mathbf{R}|. \tag{3.2}$$

Согласно построенной модели, движение точек C, F, D, P происходит в плоскости OXY. Координаты векторов $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$, $\mathbf{R}_3$ в инерциальной системе $OXYZ$ представляются в виде:

$$\mathbf{R}_i=R_i(\cos\psi_i,\sin\psi_i,0),$$
$$R_i=\frac{a_i(1-e_i^2)}{(1+e_i\cos\vartheta_i)},\ \psi_i=\mathrm{g}_i+\vartheta_i,\ i=1,\ 2,\ 3,$$

a_i – большая полуось, e_i – эксцентриситет, g_i – долгота перицентра, ϑ_i – истинная аномалия орбиты конца вектора $\mathbf{R}_i$. Величины a_i, e_i, g_i являются постоянными параметрами задачи, а истинные аномалии – зависящими от времени функциями:

$$\dot\vartheta_i=\frac{(1+e_i\cos\vartheta_i)^2}{(1-e_i^2)^{3/2}}n_i,\ n_i=\frac{2\pi}{T_i},\ i=1,\ 2,\ 3. \tag{3.3}$$

Величины T_i в формуле (3.3) – соответствующие периоды обращения.

Матрицу перехода от подвижной системы координат $Dx_1x_2x_3$ к системе $DX''Y''Z''$ можно представить в виде произведения:

$$\boldsymbol{\Gamma}=\boldsymbol{\Gamma}_3(\psi)\boldsymbol{\Gamma}_1(\theta)\boldsymbol{\Gamma}_3(\varphi),$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_3(\alpha)=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_1(\theta)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}.$$

Здесь ψ, θ, φ – углы Эйлера [21]. Связь между координатами вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ планеты p, q, s в системе координат $Dx_1x_2x_3$ и углами Эйлера выражается посредством кинематических уравнений Эйлера:

$$\begin{cases}p=\dot\psi\sin\theta\sin\varphi+\dot\theta\cos\varphi,\\ q=\dot\psi\sin\theta\cos\varphi-\dot\theta\sin\varphi,\\ s=\dot\psi\cos\theta+\dot\varphi.\end{cases} \tag{3.4}$$

Направляя ось Dx_3 по вектору $\boldsymbol{\omega}$, получим $\boldsymbol{\omega}$ = (0, 0, ω). Поэтому из системы (3.4) следует: $\dot\psi=0$, $\dot\theta=0$, $\dot\varphi=\omega$, т.е. углы ψ, θ постоянны, а φ является линейной функцией времени. Без ограничения общности можно считать, что $\psi_0=0$. Поэтому матрицы $\boldsymbol{\Gamma}$ и $\boldsymbol{\Gamma}^{-1}$ представляются равенствами:

$$\boldsymbol{\Gamma}=\boldsymbol{\Gamma}_1(\theta_0)\boldsymbol{\Gamma}_3(\varphi),\ \boldsymbol{\Gamma}^{-1}=\boldsymbol{\Gamma}_3(-\varphi)\boldsymbol{\Gamma}_1(-\theta_0),$$

$$\psi=\psi_0(\psi_0=0),\ \theta=\theta_0,\ \varphi=\omega t+\varphi(0).$$

Зададим радиус-вектор внешней точки K в подвижной системе координат $Dx_1x_2x_3$ с помощью сферических координат R, λ, μ ($R=|\overline{DK}|$, λ – долгота, μ – широта):

$$\mathbf{r}_K=\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\mathbf{R}=R\mathbf{e}_R, \tag{3.5}$$

$\mathbf{e}_R$ = (cosλcosμ; sinλcosμ; sinμ), $R=r_0+h$, $h>0$.

С учетом условий (3.2) гравитационный потенциал (3.1), линеаризованный по компонентам вектора $\mathbf{u}$, имеет вид:

$$\Pi(\mathbf{R},t)=-\int_V\frac{f\rho dx}{|\mathbf{r}-\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\mathbf{R}|}+$$
$$+\int_V\frac{(\mathbf{r}-\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\mathbf{R},\mathbf{u})}{|\mathbf{r}-\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\mathbf{R}|^3}f\rho dx. \tag{3.6}$$

Подставим в (3.6)

$$\mathbf{u}(\mathbf{r},t)=\frac{1}{E}\sum_{k=0}^{3}\mathbf{u}_{1k}(\mathbf{r},t),$$

где вектор-функции $\mathbf{u}_{1k}$ определяется формулами (2.14)–(2.16). Вычислим тройные интегралы в (3.6), используя значения вспомогательных интегралов:

$$\int_V\frac{dx}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|}=\frac{V_0}{|\mathbf{a}|},\ \int_V\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{a},\mathbf{r})dx}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|^3}=0,\ \int_V\frac{\mathbf{r}^2(\mathbf{r}-\mathbf{a},\mathbf{r})dx}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|^3}=0,$$

$$\int_V\frac{(\boldsymbol{\omega},\mathbf{r})(\mathbf{r}-\mathbf{a},\boldsymbol{\omega})dx}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|^3}=\frac{r_0^2V_0}{5}\left\{\frac{(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\omega})}{|\mathbf{a}|^3}-\frac{3(\boldsymbol{\omega},\mathbf{a})^2}{|\mathbf{a}|^5}\right\},$$

$$\int_V\frac{(\boldsymbol{\omega},\mathbf{r})^2(\mathbf{r}-\mathbf{a},\mathbf{r})dx}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|^3}=\frac{2r_0^4V_0}{35}\left\{\frac{(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\omega})}{|\mathbf{a}|^3}-\frac{3(\boldsymbol{\omega},\mathbf{a})^2}{|\mathbf{a}|^5}\right\},$$

$$\int_V\frac{\mathbf{r}^2(\boldsymbol{\omega},\mathbf{r})(\mathbf{r}-\mathbf{a},\boldsymbol{\omega})dx}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|^3}=\frac{r_0^4V_0}{7}\left\{\frac{(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\omega})}{|\mathbf{a}|^3}-\frac{3(\boldsymbol{\omega},\mathbf{a})^2}{|\mathbf{a}|^5}\right\},$$

где $V_0=4\pi r_0^3/3$. После вычисления тройных интегралов по шаровой области V получим следующее выражение для гравитационного потенциала:

$$\Pi=-\frac{fm}{R}-\frac{3fm^2r_0\Phi(\nu)}{140\pi ER^3}\left\{\omega^2-3\left(\omega,\mathbf{e}_R\right)^2\right\}+$$
$$+\sum_{k=1}^{3}\frac{9f^2m^2m_kr_0\Phi(\nu)}{140\pi Eq_k^3R^3}\left\{1-3\left(\xi_k,\mathbf{e}_R\right)^2\right\}\left(1+\frac{3\chi\dot{q}_k}{q_k}\right)+(3.7)$$
$$+\sum_{k=1}^{3}\frac{27\chi f^2m^2m_kr_0\Phi(\nu)}{70\pi Eq_k^3R^3}\left(\dot{\xi}_k,\mathbf{e}_R\right)\left(\xi_k,\mathbf{e}_R\right).$$

Здесь

$$R=|\mathbf{R}|,\ \mathbf{e}_R=\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\frac{\mathbf{R}}{R},\ \Phi(\nu)=\frac{(1+\nu)(9\nu+13)}{(5\nu+7)},$$
$$q_k=|\mathbf{q}_k|,\ k=1,\ 2,\ 3.$$

Единичный вектор $\mathbf{e}_R$ в подвижной системе координат $Dx_1x_2x_3$ задан с помощью сферических координат λ и μ согласно (3.5).

Выразим q_k через элементы орбит. Согласно (2.9)

$$\mathbf{q}_1=\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\left(\mathbf{R}_1-\frac{m_2}{m+m_2}\mathbf{R}_2\right),$$
$$q_1=|\mathbf{q}_1|= \quad (3.8)$$
$$=R_1\sqrt{1-\frac{2m_2}{m+m_2}\frac{R_2}{R_1}\cos\gamma_{12}+\left(\frac{m_2}{m+m_2}\right)^2\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2},$$

где $\gamma_{12}=g_1+\vartheta_1-g_2-\vartheta_2$ – угол между векторами $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$, $R_1=|\mathbf{R}_1|$, $R_2=|\mathbf{R}_2|$.

В силу условия (1.1)

$$\frac{m_2}{m+m_2}\cdot\frac{R_2}{R_1}\ll 1.$$

Формулу (3.8) перепишем в виде:

$$q_1=\frac{a_1\left(1-e_1^2\right)}{\left(1+e_1\cos\vartheta_1\right)}F_{21},$$
$$F_{21}=\sqrt{1-2k_{21}h_{21}\cos\gamma_{21}+k_{21}^2h_{21}^2},$$
$$k_{21}=\frac{m_2}{m+m_2}\frac{a_2\left(1-e_2^2\right)}{a_1\left(1-e_1^2\right)},\ h_{21}=\frac{1+e_1\cos\vartheta_1}{1+e_2\cos\vartheta_2}. \quad (3.9)$$

Далее:

$$q_2=\frac{a_2\left(1-e_2^2\right)}{\left(1+e_2\cos\vartheta_2\right)}, \quad (3.10)$$

$$q_3=\sqrt{R_1^2-2\left(\mathbf{R}_1,\mathbf{R}_3\right)+R_3^2}=\frac{a_3\left(1-e_3^2\right)}{1+e_3\cos\vartheta_3}F_{13},$$

$$F_{13}=\sqrt{1-2k_{13}h_{13}\cos\gamma_{13}+k_{13}^2h_{13}^2},$$
$$k_{13}=\frac{a_1\left(1-e_1^2\right)}{a_3\left(1-e_3^2\right)},\ h_{13}=\frac{1+e_3\cos\vartheta_3}{1+e_1\cos\vartheta_1}. \quad (3.11)$$

Найдем координаты векторов $\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\mathbf{R}_k$, $k=1,\ 2,\ 3$:

$$\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\mathbf{R}_k=\boldsymbol{\Gamma}_3(-\varphi)\boldsymbol{\Gamma}_1(-\theta_0)\mathbf{R}_k=$$
$$=R_k\boldsymbol{\eta}_k=\frac{a_k\left(1-e_k^2\right)}{\left(1+e_k\cos\vartheta_k\right)}\boldsymbol{\eta}_k, \quad (3.12)$$

$$\boldsymbol{\eta}_k=\left(\eta_{k1},\eta_{k2},\eta_{k3}\right), \quad (3.13)$$

$$\eta_{k1}=\cos\varphi\cos\left(g_k+\vartheta_k\right)+\sin\varphi\cos\theta_0\sin\left(g_k+\vartheta_k\right),$$

$$\eta_{k2}=-\sin\varphi\cos\left(g_k+\vartheta_k\right)+\cos\varphi\cos\theta_0\sin\left(g_k+\vartheta_k\right),$$

$$\eta_{k3}=-\sin\theta_0\sin\left(g_k+\vartheta_k\right).$$

Используя (2.9) и (3.12), найдем координаты векторов ξ_k:

$$\xi_1=\frac{1}{F_{21}}\left(\boldsymbol{\eta}_1-k_{21}h_{21}\boldsymbol{\eta}_2\right),$$
$$\xi_2=-\boldsymbol{\eta}_2,\ \xi_3=\frac{1}{F_{13}}\left(k_{13}h_{13}\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_3\right). \quad (3.14)$$

Таким образом, вычисление скалярных произведений (ξ_k, $\mathbf{e}_R$) сводится к вычислению скалярных произведений ($\boldsymbol{\eta}_k$, $\mathbf{e}_R$). Используя (3.5), (3.13), (3.14), получим:

$$\begin{aligned}\left(\boldsymbol{\eta}_k,\mathbf{e}_R\right)=&\left[\cos\left(\varphi+\lambda\right)\cos\left(\mathrm{g}_k+\vartheta_k\right)+\right.\\&\left.+\sin\left(\varphi+\lambda\right)\cos\theta_0\sin\left(\mathrm{g}_k+\vartheta_k\right)\right]\cdot\cos\mu-\\&-\sin\theta_0\sin\left(\mathrm{g}_k+\vartheta_k\right)\sin\mu.\end{aligned}\qquad(3.15)$$

Из (3.14) и (3.15) следует

$$\begin{aligned}\left(\xi_1,\mathbf{e}_R\right)&=\frac{1}{F_{21}}\left[\left(\boldsymbol{\eta}_1,\mathbf{e}_R\right)-k_{21}h_{21}\boldsymbol{\eta}_2\right],\\\left(\xi_2,\mathbf{e}_R\right)&=-\left(\boldsymbol{\eta}_2,\mathbf{e}_R\right),\\\left(\xi_3,\mathbf{e}_R\right)&=\frac{1}{F_{13}}\left(k_{13}h_{13}\left(\boldsymbol{\eta}_1,\mathbf{e}_R\right)-\left(\boldsymbol{\eta}_3,\mathbf{e}_R\right)\right).\end{aligned}\qquad(3.16)$$

Так как $\boldsymbol{\omega}=(0, 0, \omega)$, то

$$\left(\boldsymbol{\omega},\mathbf{e}_R\right)=\omega\sin\mu.\qquad(3.17)$$

Учитывая, что влияние диссипативных сил на промежутках времени, соизмеримых с периодом обращения планеты вокруг собственной оси, мало́, преобразуем формулу (3.7), положив $\chi = 0$:

$$\begin{aligned}\Pi=&-\frac{fm}{R}-\frac{3fm^2r_0\Phi(\nu)}{140\pi ER^3}\left\{\omega^2-3\left(\boldsymbol{\omega},\mathbf{e}_R\right)^2\right\}+\\&+\sum_{k=1}^{3}\frac{9f^2m^2m_kr_0\Phi(\nu)}{140\pi Eq_k^3R^3}\left\{1-3\left(\xi_k,\mathbf{e}_R\right)^2\right\}.\end{aligned}\qquad(3.18)$$

Согласно формуле (3.18) для оценки вклада в гравитационный потенциал Земли от Солнца, Луны и других планет Солнечной системы необходимо оценить величину $\frac{m_k}{q_k^3}$. Индекс $k = 1$ соответствует влиянию Солнца, индекс $k = 2$ – влиянию Луны, а $k = 3$ – влиянию планеты. Считая все орбиты круговыми, получим:

$$\begin{aligned}&\frac{m_1}{q_1^3}\approx\frac{m_1}{R_1^3},\ \frac{m_2}{q_2^3}=\frac{m_2}{R_2^3},\\&\frac{m_3}{\left(R_1+R_2\right)^3}\le\frac{m_3}{q_3^3}\le\frac{m_3}{\left(R_1-R_2\right)^3}.\end{aligned}$$

Для Солнца и Луны значения указанной величины, выраженные в 10^{24} кг/(а.е.)^3, таковы:

$$m_1/q_1^3=1.989\cdot10^6,\ m_2/q_2^3=4.332\cdot10^6.$$

Таблица. Влияние гравитационных полей планет Солнечной системы на гравитационный потенциал Земли (единица измерения 10^{24} кг/(а.е.)^3)

Планеты	$\frac{m_3}{\left(R_1+R_2\right)^3}$	$\frac{m_3}{\left(R_1-R_2\right)^3}$
Меркурий	0.124	1.434
Венера	0.951	229.889
Марс	0.04	4.47
Юпитер	7.953	25.565
Сатурн	0.486	0.914
Уран	0.011	0.014
Нептун	$3.415\cdot10^{-3}$	$4.17\cdot10^{-3}$

Результаты вычислений минимального и максимального значений величины m_3/q_3^3, соответствующие планетам Солнечной системы, представлены в таблице. Численные значения выражены в 10^{24} кг/(а.е.)^3 (1 а.е. = $1.495978707\cdot10^{11}$ м). Из полученных результатов следует, что основной вклад в гравитационный потенциал Земли вносят Луна и Солнце. Влияние других планет Солнечной системы мало́. Максимальное значение величины m_k/q_k^3 достигается Венерой в момент ее максимального сближения с Землей. Но даже это значение имеет порядок 10^{-4} по сравнению со значениями соответствующих числовых коэффициентов для Луны и Солнца.

Преобразуем выражение (3.18), выделив безразмерные коэффициенты и учитывая (3.16)–(3.17), таким образом получим следующую формулу для гравитационного потенциала вязкоупругой планеты с учетом приливных эффектов:

$$\begin{aligned}\Pi=&-\frac{fm}{R}\left\{1+k_0\left(1-3\sin^2\mu\right)+\frac{k_1\left(1+e_1\cos\vartheta_1\right)^3}{F_{21}^3}+\right.\\&+\left(\frac{3}{F_{21}^2}\left[\left(\boldsymbol{\eta}_1,\mathbf{e}_R\right)-k_{21}h_{21}\left(\boldsymbol{\eta}_2,\mathbf{e}_R\right)\right]^2-1\right)+\\&+k_2\left(1+e_2\cos\vartheta_2\right)^3\left(3\left(\boldsymbol{\eta}_2,\mathbf{e}_R\right)^2-1\right)+\\&+\frac{k_3\left(1+e_3\cos\vartheta_3\right)^3}{F_{13}^3}\times\\&\left.\times\left(\frac{3}{F_{13}^2}\left[k_{13}h_{13}\left(\boldsymbol{\eta}_1,\mathbf{e}_R\right)-\left(\boldsymbol{\eta}_3,\mathbf{e}_R\right)\right]^2-1\right)\right\},\end{aligned}\qquad(3.19)$$

где

$$\begin{aligned}k_0&=\frac{3mr_0\omega^2\Phi(\nu)}{140\pi ER^2},\\k_j&=\frac{9fmm_jr_0\Phi(\nu)}{140\pi ER^2a_j^3\left(1-e_j^2\right)^3},\ j=1,\,2,\,3.\end{aligned}\qquad(3.20)$$

Применим полученный результат для вычисления гравитационного потенциала Земли, движущейся в гравитационном поле Солнца, Луны и Венеры. Возьмем следующие значения параметров, входящих в формулы (3.3), (3.9)–(3.11), (3.20) [23]:

$$r_0 = 6.378 \cdot 10^6 \text{ м}, h = 3 \cdot 10^5 \text{ м}, E = 1.2 \cdot 10^{11} \text{ кг/(м} \cdot \text{с}^2), \nu = 0.2, \omega = 7.2922 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1},$$

$$f = 6.672 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2), m = 5.9736 \cdot 10^{24} \text{ кг}, m_1 = 1.98911 \cdot 10^{30} \text{ кг}, m_2 = 7.349 \cdot 10^{22} \text{ кг}, m_3 = 4.8685 \cdot 10^{24} \text{ кг},$$

$$a_1 = 1.4959787 \cdot 10^{11} \text{ м}, a_2 = 3.844 \cdot 10^8 \text{ м}, a_3 = 108208627813 \text{ м},$$

$$e_1 = 0.01671022, e_2 = 0.0549, e_3 = 0.00676, \theta_0 = 23.45° = 0.409280 \text{ рад},$$

$$T_1 = 365.26 \text{ сут}, T_2 = 27.321661 \text{ сут}, T_3 = 224.7 \text{ сут},$$

$$g_1 = 1.7967674 \text{ рад}, g_2 = 0 \text{ рад}, g_3 = 2.2956836 \text{ рад}.$$

Безразмерные коэффициенты, входящие в (3.19), имеют следующие значения:

$$k_0 = 5.73271 \cdot 10^{-4}, k_1 = 1.283118 \cdot 10^{-8},$$

$$k_2 = 2.817287 \cdot 10^{-8}, k_3 = 8.2926 \cdot 10^{-14},$$

$$k_{21} = 3.114226 \cdot 10^{-5}, k_{13} = 1.382169.$$

В качестве безразмерного времени возьмем число оборотов Земли вокруг собственной оси:

$$\tau = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\omega t + \varphi(0)}{2\pi}.$$

Обозначая штрихом производную по τ, получим из (3.3):

$$\vartheta_i' = N_i \left(1 + e_i \cos \vartheta_i\right)^2, \; N_i = \frac{2\pi T_{\text{rot}}}{\left(1 - e_i^2\right)^{3/2} T_i}, \; i = 1, 2, 3,$$

где $T_{\text{rot}} = 23.93419$ ч – период обращения Земли вокруг собственной оси. Значения безразмерных коэффициентов N_i:

$$N_1 = 0.017162, N_2 = 0.230381, N_3 = 0.027888.$$

Введем в рассмотрение безразмерную функцию – относительный гравитационный потенциал Π_1:

$$\Pi_1 = \frac{\Pi - \Pi_0}{\Pi_0}, \; \Pi_0 = -\frac{fm}{R}.$$

Согласно (3.19)

$$\Pi_1 = \Pi_{10} + \Pi_{11}, \; \Pi_{10} = k_0(1 - 3\sin^2\mu) = \text{const},$$

$$\Pi_{11} = \frac{k_1 \left(1 + e_1 \cos \vartheta_1\right)^3}{F_{21}^3} \times \left(\frac{3}{F_{21}^2} \left[\left(\boldsymbol{\eta}_1, \mathbf{e}_R\right) - k_{21} h_{21} \left(\boldsymbol{\eta}_2, \mathbf{e}_R\right) \right]^2 - 1 \right) + k_2 \left(1 + e_2 \cos \vartheta_2\right)^3 \left(3 \left(\boldsymbol{\eta}_2, \mathbf{e}_R\right)^2 - 1 \right) + \frac{k_3 \left(1 + e_3 \cos \vartheta_3\right)^3}{F_{13}^3} \times \left(\frac{3}{F_{13}^2} \left[k_{13} h_{13} \left(\boldsymbol{\eta}_1, \mathbf{e}_R\right) - \left(\boldsymbol{\eta}_3, \mathbf{e}_R\right) \right]^2 - 1 \right). \quad (3.21)$$

Слагаемое Π_{10} отвечает за возмущающую часть гравитационного потенциала, вызванную сжатием Земли вдоль оси вращения, которая не изменяется со временем. А функция Π_{11}, задаваемая формулой (3.21), – зависящая от времени часть гравитационного потенциала, вызванная приливными эффектами.

На рис. 2–4 изображены построенные с помощью математического пакета *Octave*[2] графики функции $\Pi_{11} = \Pi_{11}(\tau)$, описывающие гравитационный потенциал Земли во внешней точке в течение 30 дней на высоте h = 300 км от поверхности Земли на разных широтах (0°, 30°, 60°). В начальный момент времени заданы следующие параметры:

$$\vartheta_1(0) = -0.0433335, \; \vartheta_2(0) = 0, \; \vartheta_3(0) = 0.8804619,$$
$$g_1 = 1.7967674, \; g_2 = 0, \; g_3 = 2.2956836, \; \lambda = 0.$$

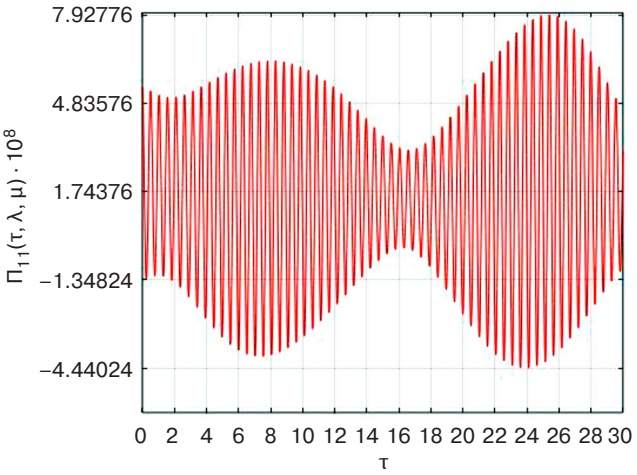

Рис. 2. Изменение гравитационного потенциала Земли во внешней точке со сферическими координатами $R = 6.678 \cdot 10^6$ м, λ = 0, μ = 0 за 30 суток

[2] https://octave.org/. Дата обращения 16.05.2023. / Accessed May 16, 2023.

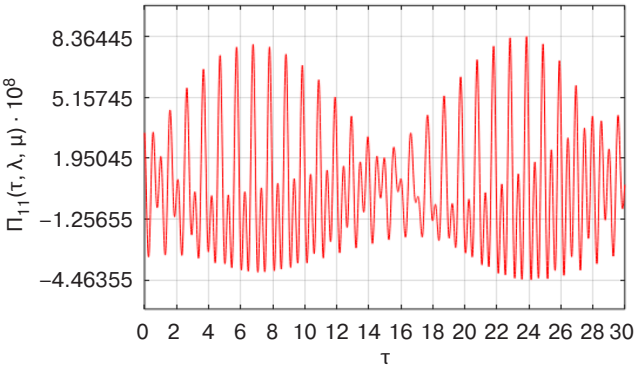

Рис. 3. Изменение гравитационного потенциала Земли во внешней точке со сферическими координатами $R = 6.678 \cdot 10^6$ м, $\lambda = 0$, $\mu = \pi/6$ за 30 суток

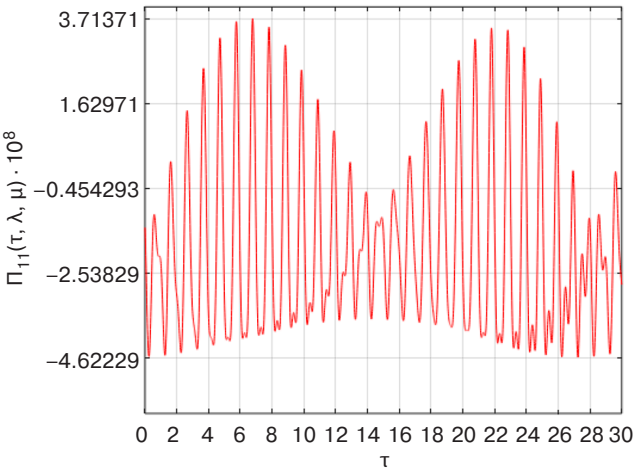

Рис. 4. Изменение гравитационного потенциала Земли во внешней точке со сферическими координатами $R = 6.678 \cdot 10^6$ м, $\lambda = 0$, $\mu = \pi/3$ за 30 суток

Одно деление по оси абсцисс соответствует двум суткам.

Как видно из полученных графиков, зависимость гравитационного потенциала от времени имеет сложный колебательный характер и существенно зависит от географической широты точки, над которой он измеряется.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получена формула для гравитационного потенциала планеты, моделируемой вязкоупругим шаром, учитывающая приливные эффекты, вызванные гравитационными полями ее естественного спутника, притягивающего центра (звезды) и другой планеты. На основе построенной модели показано, что основной вклад в приливную компоненту гравитационного потенциала Земли вносят Луна и Солнце. Выполнены оценки влияния гравитационных полей остальных планет Солнечной на гравитационный потенциал Земли, которая моделируется вязкоупругим телом. Построены графики зависимости от времени приливной компоненты гравитационного потенциала в трех различных точках в связанной с Землей системе координат, расположенных на разных широтах на высоте 300 км от поверхности Земли.

Вклад авторов. Все авторы в равной степени внесли свой вклад в исследовательскую работу.

Authors' contribution. All authors equally contributed to the research work.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Молоденский М.С. *Избранные труды. Гравитационное поле. Фигура и внутреннее строение Земли.* М.: Наука; 2001. 569 с. ISBN 5-02-002331-0
2. Молоденский С.М. *Приливы, нутация и внутреннее строение Земли.* М.: Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта; 1984. 215 с.
3. Efroimsky M., Williams J.G. Tidal torques. A critical review of some techniques. *Celest. Mech. Dyn. Astr.* 2009;104(3):257–289. https://doi.org/10.1007/s10569-009-9204-7
4. Дарвин Дж.Г. *Приливы и родственные им явления в Солнечной системе:* пер. с англ. М.: Наука; 1965. 252 с.
5. *Приливы и резонансы в Солнечной системе:* сборник статей*:* пер. с англ. под ред. В.Н. Жаркова. М.: Мир; 1975. 288 с.
6. Petit G., Luzum B. (Eds.). *IERS Conventions* (2010). *IERS Technical Note 36.* Frankfurt am Main: Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie; 2010. 179 p. ISBN 3-89888-989-6
7. Вильке В.Г. Движение вязкоупругого шара в центральном ньютоновском поле сил. *Прикладная математика и механика.* 1980;44(3):395–402.
8. Makarov V.V., Berghea C., Efroimsky M. Dynamical evolution and spin-orbit resonances of potentially habitable exoplanets. The case of GJ 581d. *Astrophys. J.* 2012;761(2):83–96. https://doi.org/10.1088/0004-637X/761/2/83
9. Сидоренков Н.С. *Физика нестабильностей вращения Земли.* М.: Физматлит; 2002. 384 с. ISBN 5-9221-0244-3
10. Баранова Е.Ю., Вильке В.Г. Вращение упругого шара вокруг центра масс в гравитационном поле двух притягивающих центров. *Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика.* 2014;3:33–40.
11. Марков Ю.Г., Перепелкин В.В., Рыхлова Л.В., Филиппова А.С. Численно-аналитический подход к моделированию осевого вращения Земли. *Астрономический журнал.* 2018;95(4):317–326. https://doi.org/10.7868/S0004629918040047

12. Сидоренков Н.С. Небесно-механические причины изменений погоды и климата. *Геофизические процессы и биосфера.* 2015;14(3):5–26.
13. Sottili G., Martino S., Palladino D.M., Paciello A., Bozzano F. Effects of tidal stresses on volcanic activity at Mount Etna, Italy. *Geophys. Res. Lett.* 2007;34(1):L01311. https://doi.org/10.1029/2006GL028190
14. Аксенов Е.П. *Теория движения искусственных спутников Земли.* М.: Наука; 1977. 360 с.
15. Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г. *Основы механики космического полета.* М.: Наука; 1990. 448 с. ISBN 5-02-014090-2
16. Бордовицына Т.В., Авдюшев В.А. *Теория движения искусственных спутников Земли. Аналитические и численные методы.* Томск: Изд. дом Томского гос. ун-та; 2016. 254 с. ISBN 978-5-9462-1607-4
17. Гусев И.В. Оценка влияния приливных эффектов на низкоорбитальные ИСЗ. *Известия высших учебных заведений. Геодезия и аэрофотосъемка.* 2013;57(2):18–24.
18. Вильке В.Г. *Аналитические и качественные методы механики систем с бесконечным числом степеней свободы.* М.: URSS; 2023. 200 с. ISBN 978-5-9710-3847-4
19. Borets A.S., Shatina A.V. Gravitational potential of a planet modeled by a visco-elastic sphere. *J. Phys.: Conf. Ser.* 2020;1705:012001. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1705/1/012001
20. Борец А.С., Шатина А.В. Математическая модель гравитационного потенциала планеты с учетом диссипации. *Фундаментальные, поисковые, прикладные исследования и инновационные проекты: сборник трудов Национальной научно-практической конференции.* М.: РТУ МИРЭА; 2022. С. 132–136.
21. Вильке В.Г. *Теоретическая механика:* учебник и практикум для вузов. М.: Юрайт; 2023. 311 с. ISBN 978-5-5340-3481-3
22. Вильке В.Г., Шатина А.В. О поступательно-вращательном движении вязкоупругого шара в гравитационном поле притягивающего центра и спутника. *Космические исследования.* 2004;42(1):95–106.
23. Мюррей К., Дермотт С. *Динамика Солнечной системы:* пер. с англ. М.: Физматлит; 2010. 588 с. ISBN 978-5-9221-1121-8

REFERENCES

1. Molodenskii M.S *Izbrannye trudy. Gravitatsionnoe pole. Figura i vnutrennee stroenie Zemli* (*Selected Works. Gravitational Field. The Figure and Internal Structure of the Earth*). Moscow: Nauka; 2001. 569 p. (in Russ.). ISBN 5-02-002331-0
2. Molodenskii S.M. *Prilivy, nutatsiya i vnutrennee stroenie Zemli* (*Tides, Nutation and the Internal Structure of the Earth*). Moscow: Institut fiziki Zemli im. O.Yu. Shmidta; 1984. 215 p. (in Russ.).
3. Efroimsky M., Williams J.G. Tidal torques. A critical review of some techniques. *Celest. Mech. Dyn. Astr.* 2009;104(3): 257–289. https://doi.org/10.1007/s10569-009-9204-7
4. Darwin G.H. *Prilivy i rodstvennye im yavleniya v Solnechnoi sisteme (Tides and Kindred Phenomena in the Solar System)*: transl. from Engl. Moscow: Nauka; 1965. 252 p. (in Russ.).
[Darwin G.H. *The Tides and Kindred Phenomena in the Solar System*. Boston: Houghton; 1899. 378 p.]
5. Zharkov V.N. (Ed.). *Prilivy i rezonansy v Solnechnoi sisteme:* sbornik statei (*Tides and Resonances in the Solar System:* a collection of articles). Moscow: Mir; 1975. 288 p. (in Russ.).
6. Petit G., Luzum B. (Eds.). *IERS Conventions* (2010). *IERS Technical Note 36.* Frankfurt am Main: Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie; 2010. 179 p. ISBN 3-89888-989-6
7. Vil'ke V.G. Motion of a visco-elastic sphere in a central Newtonian force field. *J. Appl. Math. Mech.* 1981;44:280–284.
[Original Russian Text: Vil'ke V.G. Motion of a visco-elastic sphere in a central Newtonian force field. *Prikladnaya Matematika i Mekhanika.* 1980;44(3):395–402 (in Russ.).]
8. Makarov V.V., Berghea C., Efroimsky M. Dynamical evolution and spin-orbit resonances of potentially habitable exoplanets. The case of GJ 581d. *Astrophys. J.* 2012;761(2):83–96. https://doi.org/10.1088/0004-637X/761/2/83
9. Sidorenkov N.S. *Fizika nestabil'nostei vrashcheniya Zemli* (*Physics of Earth Rotation Instabilities*). Moscow: Fizmatlit; 2002. 384 p. (in Russ.). ISBN 5-9221-0244-3
10. Baranova E.Yu., Vil'ke V.G. Rotation of elastic sphere around its center of mass in the gravitational field of two attractive centers. *Moscow Univ. Mech. Bulletin.* 2014;69(3):57–64. https://doi.org/10.3103/S0027133014030017
[Original Russian Text: Baranova E.Yu., Vil'ke V.G. Rotation of elastic sphere around its center of mass in the gravitational field of two attractive centers. *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika.* 2014;3:33–40 (in Russ.).]
11. Markov Yu.G., Perepelkin V.V., Rykhlova L.V., Filippova A.S. A Numerical-analytical approach to modeling the axial rotation of the Earth. *Astron. Rep.* 2018;62(4):299–308. https://doi.org/10.1134/S1063772918040042
[Original Russian Text: Markov Yu.G., Perepelkin V.V., Rykhlova L.V., Filippova A.S. Numerical-analytical approach to modeling the axial rotation of the Earth. *Astronomicheskii Zhurnal.* 2018;95(4):317–326 (in Russ.). https://doi.org/10.7868/S0004629918040047]
12. Sidorenkov N.S. Celestial-mechanical factors of the weather and climate change. *Geofizicheskie protsessy i biosfera = Geophysical Processes and Biosphere.* 2015;14(3):5–26 (in Russ.).
13. Sottili G., Martino S., Palladino D.M., Paciello A., Bozzano F. Effects of tidal stresses on volcanic activity at Mount Etna, Italy. *Geophys. Res. Lett.* 2007;34(1):L01311. https://doi.org/10.1029/2006GL028190
14. Aksenov E.P. *Teoriya dvizheniya iskusstvennykh sputnikov Zemli* (*Theory of Motion of Artificial Earth Satellites*). Moscow: Nauka; 1977. 360 p. (in Russ.).

15. Okhotsimskii D.E., Sikharulidze Yu.G. *Osnovy mekhaniki kosmicheskogo poleta* (*Fundamentals of Space Flight Mechanics*). Moscow: Nauka; 1990. 448 p. (in Russ.). ISBN 5-02-014090-2
16. Bordovitsyna T.V., Avdyushev V.A. *Teoriya dvizheniya iskusstvennykh sputnikov Zemli. Analiticheskie i chislennye metody* (*Theory of Motion of Artificial Earth Satellites. Analytical and Numerical Methods*). Tomsk: TSU; 2016. 254 p. (in Russ.). ISBN 978-5-9462-1607-4
17. Gusev I.V. Assessment of tidal effects on low Earth orbit satellites. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Geodeziya i aehrofotosemka = Izvestia VUZOV. Geodesy and Aerophotography.* 2013;57(2):18–24 (in Russ.).
18. Vil'ke V.G. *Analiticheskie i kachestvennye metody mekhaniki sistem s beskonechnym chislom stepenei svobody* (*Analytical and Qualitative Methods of Mechanics of Systems with an Infinite Number of Degrees of Freedom*). Moscow: URSS; 2023. 200 p. (in Russ.). ISBN 978-5-9710-3847-4
19. Borets A.S., Shatina A.V. Gravitational potential of a planet modeled by a visco-elastic sphere. *J. Phys.: Conf. Ser.* 2020;1705:012001. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1705/1/012001
20. Borets A.S., Shatina A.V. Mathematical model of the gravitational potential of the planet taking into account dissipation. In: *Fundamental'nye, poiskovye, prikladnye issledovaniya i innovatsionnye proekty sbornik trudov Natsionalnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii = Fundamental, Exploratory, Applied Research and Innovative Projects: Proceedings of the National Scientific and Practical Conference.* Moscow: MIREA; 2022. P. 132–136 (in Russ.).
21. Vil'ke V.G. *Teoreticheskaya mekhanika:* uchebnik i praktikum dlya vuzov (*Theoretical Mechanics:* Textbook and Workshop for Universities). Moscow: Yurait; 2023. 311 p. (in Russ.). ISBN 978-5-5340-3481-3
22. Vil'ke V.G., Shatina A.V. Translational–Rotational Motion of a Viscoelastic Sphere in Gravitational Field of an Attracting Center and a Satellite. *Cosmic Research.* 2004;42(1):91–102. https://doi.org/10.1023/B:COSM.0000017567.89445.aa
[Original Russian Text: Vil'ke V.G., Shatina A.V. Translational–Rotational Motion of a Viscoelastic Sphere in Gravitational Field of an Attracting Center and a Satellite. *Kosmicheskie Issledovaniya.* 2004;42(1):95–106 (in Russ.).]
23. Murray C.D., Dermott S.F. *Dinamika Solnechnoi sistemy* (*Solar System Dynamics*). Moscow: Fizmatlit; 2010. 588 p. (in Russ.). ISBN 978-5-9221-1121-8
[Murray C.D., Dermott S.F. *Solar System Dynamics.* Cambridge University Press; 2000. 592 p. ISBN 9781139174817. http://doi.org/10.1017/cbo9781139174817]

Об авторах

Шатина Альбина Викторовна, д.ф.-м.н., доцент, профессор кафедры высшей математики, Институт искусственного интеллекта ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: shatina_av@mail.ru. Scopus Author ID 6506958326, SPIN-код РИНЦ 8714-6450, https://orcid.org/0000-0001-5016-5899

Борец Александра Сергеевна, аспирант, кафедра высшей математики, Институт искусственного интеллекта ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: borec@mirea.ru. Scopus Author ID 57221232991, SPIN-код РИНЦ 9669-2076, https://orcid.org/0000-0002-6878-0184

About the authors

Albina V. Shatina, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Department of Higher Mathematics, Institute of Artificial Intelligence, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: shatina_av@mail.ru. Scopus Author ID 6506958326, RSCI SPIN-code 8714-6450, https://orcid.org/0000-0001-5016-5899

Alexandra S. Borets, Postgraduate Student, Department of Higher Mathematics, Institute of Artificial Intelligence, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: borec@mirea.ru. Scopus Author ID 57221232991, RSCI SPIN-code 9669-2076, https://orcid.org/0000-0002-6878-0184