УДК 517.956.8

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ В ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СРЕДЕ НА БОЛЬШИХ ВРЕМЕНАХ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К ОЦЕНКАМ УСРЕДНЕНИЯ

С.Е. Пастухова[@],
О.А. Евсеева

Московский технологический университет, Москва 119454, Россия
[@]Автор для переписки, e-mail: pas-se@yandex.ru

В R_x^d рассматривается задача Коши для линейного параболического уравнения второго порядка: $\dfrac{\partial u}{\partial t} - div\big(a(x)\nabla u\big) = 0,\ u\big|_{t=0} = f(x)$. Матрица коэффициентов $a(x)$ измерима, симметрична и 1-периодична по каждой переменной $x_1,...,x_d$. Задача моделирует диффузию в неоднородной среде, имеющей периодическую структуру. Решение $u(x, t)$ можно интерпретировать, например, как плотность распределения некоторой случайной величины в момент времени t и тогда подразумевается, что начальное распределение $f(x)$ – неотрицательная функция, интеграл от которой по R^d равен 1. Известно, что при большом значении времени t решение $u(x,t)$ близко к решению $u^0(x,t)$ задачи Коши: $\dfrac{\partial u^0}{\partial t} - div\big(a^0\nabla u^0\big) = 0,\ u^0\big|_{t=0} = f(x)$ с постоянной матрицей диффузии a^0. Иными словами, при больших t диффузия в периодической среде описывается эффективно через диффузию в однородной среде, которой соответствует постоянная матрица диффузии a^0, называемая матрицей эффективной диффузии. Недавно была доказана оценка погрешности приближения функции $u(x,t)$ решением в норме лебегова L^p-пространства по сечению $t=const$ для любого $p \in [1,\infty]$. Эта оценка порядка $O(t^{-1/2})$ при $t \to +\infty$ и имеет операторный тип. В настоящей работе найдено приближение для решения исходной задачи с оценкой погрешности того же типа, но порядка $O(t^{-1})$ при $t \to +\infty$. Это приближение оказывается суммой нулевого приближения $u^0(x,t)$ и некоторого корректора. Обоснование проведено при дополнительном условии липшицевости матрицы диффузии $a(x)$. Описанный выше результат используется для построения аппроксимации решения уравнения диффузии с быстро осциллирующими ε-периодическими коэффициентами в норме L^p – пространства на сечении t = 1. Погрешность аппроксимации имеет оценку порядка $O(\varepsilon^2)$ при $\varepsilon \to 0$. Результаты работы можно использовать в разных областях, например, при расчете теплового потока в композиционной среде с мелкоячеистой периодической структурой или расчете плотности популяции бактерий в периодической питательной среде.

Ключевые слова: уравнение диффузии, эффективная диффузия, усредненный оператор, фундаментальное решение, задачи на ячейке, асимптотика на больших временах, оценка усреднения в лебеговых нормах.

LARGE-TIME ASYMPTOTIC OF THE SOLUTION TO THE DIFFUSION EQUATION AND ITS APPLICATION TO HOMOGENIZATION ESTIMATES

S.E. Pastukhova[@],
O.A. Evseeva

Moscow Technological University, Moscow 119454, Russia
[@]Corresponding author e-mail: pas-se@yandex.ru

The Cauchy problem for a linear second order parabolic equation $\frac{\partial u}{\partial t} - div(a(x)\nabla u) = 0$ with 1-periodic measurable coefficients is considered R^d, $d \geq 2$. The problem models diffusion in a nonhomogeneous periodic medium. The appropriate diffusion operator A is self-adjoint in L^2 (R^d). The large-time behaviour of the solution of the Cauchy problem is of main interest for us. To this end, we study first of all the fundamental solution, in other words, the kernel of the exponential exp(-*t*A), more exactly, its large-time asymptotics. Its approximation is found with integral error estimate of order $O(t^{-1})$, as time *t* tends to $+\infty$.

To construct this approximation and carry out its justification we use

(i) the known fundamental solution to the homogenized diffusion equation (having constant coefficients);

(ii) solutions of so-called auxiliary problems on a periodicity cell, which are formulated in a recurrent way. We substantiate this approximation under additional regularity condition on the diffusion matrix $a(x)$: it should be Lipschitz continuous.

The results of asymptotic behaviour of the fundamental solution are applied to obtain an approximation of order $O(t^{-1})$ for the exponential exp(-*t*A) in operator L^p-norms, on the section *t=const* as *t* tends to $+\infty$.

There are also some corollaries of these results to operator estimates for a similar exponential exp($-t\mathrm{A}_\varepsilon$), A_ε being a diffusion operator with quickly oscillating ε-periodic coefficients, as tends to zero. This exponential corresponds to the Cauchy problem: $\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} - div(a(\varepsilon^{-1}x)\nabla u^\varepsilon) = 0$, $u^\varepsilon\big|_{t=0} = f(x)$ modelling diffusion in a strongly nonhomogeneous ε-periodic medium. Here ε is a small parameter. We construct approximations of order $O(\varepsilon^2)$ for the exponential exp($-t\mathrm{A}_\varepsilon$) in operator L^p – norm on the section *t=const* for arbitrary finite fixed *t* (say, *t*=1). This approximation is a sum of the exponential exp($-t\mathrm{A}_0$) with a homogenized operator A_0 and some correcting operator.

The results have a broad range of applications, e.g., for computing heat flow in a periodic composite medium with a small periodicity cell or for bacterial density estimation in a periodic culture medium.

Keywords: diffusion equation, effective diffusion, homogenized operator, fundamental solution, cell problems, large-time asymptotic, homogenization estimates in Lebesgue norms.

Введение

В настоящей работе изучается задача Коши для функции $u = u(x,t)$, $x \in R^d$, $t \geq 0$,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - div\left(a(x)\nabla u\right) = 0, t > 0, \\ \quad u\big|_{t=0} = f \in C_0^\infty\left(R^d\right) \end{cases} \tag{1}$$

с измеримой вещественной симметрической матрицей $a(x)$ такой, что

$$\nu\xi^2 \le a(x)\xi\cdot\xi \le \nu^{-1}\xi^2, \forall\xi\in R^d,\ \nu>0. \tag{2}$$

Задача (1) моделирует диффузию в неоднородной среде, $a(x)$ называют матрицей диффузии. Решение $u(x,t)$ можно интерпретировать, например, как плотность распределения некоторой случайной величины в момент времени t. При этом подразумевается, что начальное распределение $f(x) >= 0$, $\int_{R^d} f(x)dx = 1$.

На первый взгляд, рассматриваемое уравнение не содержит малого параметра. Малый параметр появляется естественным образом, если изучить поведение решения $u(x,t)$ при больших значениях времени t, т.е. при $t \to +\infty$.

Задача (1) допускает операторную запись

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + Au = 0, t > 0, \\ u\big|_{t=0} = f, \end{cases}$$

где A – оператор в $L^2(R^d)$, заданный квадратичной формой

$$\int_{R^d} a\nabla u\cdot\nabla u dx,$$

область определения которой есть соболевское пространство $H^1(R^d)$. Квадратичная форма является замкнутой, а сам оператор A – неотрицательным и самосопряженным. Решение задачи Коши (1) запишется через экспоненту (или полугруппу) оператора A, а именно,

$$u(\cdot,t) = e^{-tA}f.$$

Пусть матрица периодична по каждому переменном $x_1,...,x_d$ с периодом 1, единичный куб $\square = \left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)^a$ есть ячейка периодичности. Тогда известно асимптотическое поведение решения $u(x,t)$ при $t \to +\infty$, и это поведение можно сколь угодно точно описать. Иными словами, известно асимптотическое поведение полугруппы e^{-tA} при большом значении времени.

На больших временах за поведение полугруппы прежде всего отвечает постоянная усредненная матрица диффузии a^0 (формулы для ее отыскания по исходной матрице $a(x)$ ниже, см. (10), (11)), и надо рассматривать усредненную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u^0}{\partial t} + A_0u^0 = 0, t > 0, \\ u^0\big|_{t=0} = f \in C_0^\infty(R^d) \end{cases} \tag{3}$$

с оператором диффузии

$$A_0 = -div\left(a^0\nabla\right),$$

где матрица диффузии a^0 постоянна.

Оператор A^0 существенно более прост, чем исходный, хотя имеет ту же структуру. В [1] было доказано предельное соотношение

$$\lim_{t\to\infty}\sup_{\|f\|_{L^\infty(R^d)}\le 1}\left\|u(x,t)-u^0(x,t)\right\|_{L^\infty(R^d)}=0,$$

означающее сходимость полугруппы по операторной норме в $L^\infty(R^d)$, т.е.

$$\lim_{t\to\infty}\left\|e^{-tA}-e^{-tA_0}\right\|_{L^\infty(R^d)\to L^\infty(R^d)}=0.$$

Позже в [2] удалось установить оценку скорости этой сходимости по времени

$$\left\|e^{-tA}-e^{-tA_0}\right\|_{L^\infty(R^d)\to L^\infty(R^d)}\le\frac{c}{\sqrt{t}} \tag{4}$$

с константой, зависящей только от размерности d и постоянной эллиптичности ν.

Кроме того, была доказана оценка

$$\left\|e^{-tA}-e^{-tA_0}\right\|_{L^2(R^d)\to L^2(R^d)}\le\frac{c}{\sqrt{t}} \tag{5}$$

с константой такого же типа, что в (4) [3, 4].

Наконец, недавно в работе [5] предложена оценка

$$\left\|e^{-tA}f-e^{-tA_0}f\right\|_{L^p(R^d)}\le\frac{c}{\sqrt{t}}\|f\|_{L^p(R^d)}\quad\forall p\in[1,\infty] \tag{6}$$

с единой константой для всех p. Предыдущие оценки (4) и (5) вытекают отсюда при $p=\infty$ и $p=2$, для вероятностной интерпретации уравнения диффузии особенно важен случай $p=1$.

Операторные оценки можно вывести из оценок поточечного характера. Примеры операторных оценок приведены выше (4 –6). Примером поточечной является оценка

$$\left|K(x,y,t)-K_0(x,y,t)\right|\le\frac{c}{t^{\frac{d+1}{2}}},\ \ x,y\in R^d,c=const(d,\nu). \tag{7}$$

Здесь $K(x,y,t)$ – фундаментальное решение для параболического уравнения $\frac{\partial u}{\partial t}+Au=0$, то есть решение задачи (1), если в качестве начальной функции взять дельта-функцию $\delta(x–y)$, сосредоточенную в точке y (иными словами, K – ядро интегрального оператора e^{-tA}); $K_0(x,y,t)$ – аналогичный объект для усредненного уравнения.

Ввиду постоянства коэффициентов усредненного уравнения можно точно найти K_0 с помощью преобразования Фурье, а именно,

$$K_0(x,y,t)=(4\pi t)^{-\frac{d}{2}}(\det a^0)^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{(a^0)^{-1}(x-y)\cdot(x-y)}{4t}}. \tag{8}$$

Из поточечных оценок типа (7) с помощью общих соображений (к ним относится, в частности, экспоненциальная оценка Нэша-Аронсона ([6], гл. II) получается интегральная оценка

$$\int_{R^d} \left| K(x,y,t) - K_0(x,y,t) \right| dy \le \frac{c}{\sqrt{t}}, \ \forall x \in R^d \tag{9}$$

которая имеет ключевое значение для эффективного описания диффузии в рассматриваемой среде. Из нее на основе леммы Шура об оценке интегрального оператора [7] получается L^p – оценка (6). Интегральная оценка (9) доказана в работе В.В. Жикова [2] 1989 года (см. так же более подробное доказательство её в недавней работе [5]). Естественно поставить вопрос о более точных интегральных оценках, которые отвечают не нулевому, а следующим приближениям для фундаментального решения K.

Цель настоящей работы – построить и обосновать приближение $K_1(x,y,t)$ для фундаментального решения $K(x,y,t)$ с погрешностью в интегральной норме порядка $O(t^{-1})$ при $t \to +\infty$ и на его основе найти приближение для полугруппы e^{-tA} в операторной L^p – норме ($1 \le p \le \infty$) того же порядка точности при большом значении времени. Основные результаты сформулированы в теоремах 1 и 2.

Для доказательства наших результатов используем предложенную в [2] версию *спектрального метода*, в основе которой лежит блоховское разложение функций и блоховское представление операторной экспоненты, точнее, ядра операторной экспоненты, рассматриваемой как интегральный оператор. Этот метод подробно изложен в [5].

Раздел 1

Приведём формулы для определения усредненной (или эффективной) матрицы диффузии:

$$a^0 = \left\langle a(\cdot)(I + \nabla N(\cdot)) \right\rangle, \tag{10}$$

где I – единичная матрица;
вектор $N(x) = (N_1(x),..., N_d(x))$ составлен из решений задач на ячейке

$$N_j \in H^1_{per}(\square),\ div(a(x)(\nabla N_j + e_j)) = 0, \left\langle N_j \right\rangle = 0,\ j = 1,...,d. \tag{11}$$

где $e_1,...,e_d$ – канонический базис в R^d; $N_j \in H^1_{per}(\square)$ - пространство Соболева 1-периодических функций, а угловыми скобками обозначено среднее периодической функции по ячейке $\square$.

В теории усреднения хорошо известно, что матрица (10) симметрична и удовлетворяет оценке

$$a^0 \xi \cdot \xi \ge \nu |\xi|^2 \quad \forall \xi \in R^d$$

с той же константой, что в (2) [6, 8].

Важной особенностью задачи на ячейке (11) является ограниченность решения: $N_j \in L^\infty(\square)$ в силу обобщенного принципа максимума ([9], Приложение В к гл. II).

Раздел 2

До сих пор выписывалось только нулевое приближение для K. Спектральный метод позволяет дать полное асимптотическое разложение K. Ограничимся здесь лишь первым приближением. Используя решения задачи на ячейке (11), определим первое приближение равенством

$$K_1(x,y,t) = K_0(x,y,t) + (N_j(x) - N_j(y))\frac{\partial}{\partial x_j}K_0(x,y,t)\,, \tag{12}$$

где по повторяющимся индексам подразумевается суммирование от 1 до d.

Приближение (12) как функция переменной y принадлежит $L^\infty(R^d)$ и $L^1(R^d)$ для всех $x \in R^d$ и $t > 0$ ввиду ограниченности множителей N_j и экспоненциального убывания на бесконечности функции K_0 и ее производных $\frac{\partial}{\partial x_j}K_0$ по пространственным переменным.

Справедлива оценка (её доказательство дано в [5])

$$\left|K(x,y,t) - K_1(x,y,t)\right| \le \frac{c}{t^{\frac{d+2}{2}}}, \quad c = const(d,\nu)\,, \tag{13}$$

показывающая, что $K_1(x, y, t)$ доставляет более точное приближение для $K(x, y, t)$ в поточечной норме, чем $K_0(x, y, t)$ (7). Дополнительное улучшение точности происходит на порядок $t^{-0.5}$. В интегральной норме $K_1(x, y, t)$ дает такой же выигрыш в приближении по сравнению с $K_0(x, y, t)$.

Теорема 1. *Пусть матрица a(y) липшицева, т.е.* $\left|a(y) - a'(y)\right| \le c_L\left|y - y'\right|$ *для всех* $y, y' \in \square$. *Тогда верна интегральная оценка*

$$\int_{R^d}\left|K(x,y,t) - K_1(x,y,t)\right|dy \le \frac{c}{t} \quad (14)$$

с константой, зависящей только от ν, c_L, d *.*

Для доказательства оценки (14) используется второе приближение $K_2(x, y, t)$, в построении которого участвуют решения вспомогательных задач на ячейке, не только первого порядка, т.е. задачи (11), но и выше (см. эти задачи, например, в [9], где они выписываются рекуррентно). Липшицевость коэффициентов матрицы $a(y)$ обеспечивает принадлежность решений всех вспомогательных задач на ячейке пространству L^∞ .

Как следствие из оценки (14), по лемме Шура вытекает

Теорема 2. *В предположениях теоремы 1 имеет место оценка для первого приближения операторной экспоненты* e^{-tA} :

$$\left\|e^{-tA} - (e^{-tA_0} + N(\cdot)\cdot\nabla e^{-tA_0} - e^{-tA_0}\nabla^*\cdot N(\cdot))\right\|_{L^p(R^d)\to L^p(R^d)} \le \frac{c}{t} \quad \forall p \in [1,\infty] \tag{15}$$

с единой константой $c = const(d,\nu,c_L)$, *где* ∇ *– градиент по пространственным переменным,* $\nabla^* = div$.

Раздел 3

Рассмотрим задачу Коши для функций $u^\varepsilon = u^\varepsilon(x,t), x \in R^d, t \geq 0$,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} + A_\varepsilon u^\varepsilon = 0, t > 0, \\ u^0\big|_{t=0} = f, \end{cases}$$

с малым параметром $\varepsilon > 0$, где

$$A_\varepsilon = -div(a_\varepsilon \nabla),\ a_\varepsilon(x) = \left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

и $a(y)$ – 1-периодическая измеримая симметрическая матрица, удовлетворяющая условию (2). Имеем здесь оператор диффузии с быстро осциллирующими ε-периодическими коэффициентами. Оператор A_ε сильно неоднородный. Встает задача об его усреднении, то есть о его замене на оператор с постоянными коэффициентами, который в определенном смысле близок к нему.

Автомодельная замена

$$y = \frac{x}{\varepsilon},\ \tau = \frac{t}{\varepsilon^2}$$

сводит задачу с ε-периодической матрицей $a\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$ к задаче с 1-периодической матрицей $a(y)$. Именно, функция

$$z^\varepsilon(y,\tau) = u^\varepsilon(\varepsilon y, \varepsilon^2 \tau)$$

есть решение задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z^\varepsilon}{\partial \tau} + A z^\varepsilon = 0, \tau > 0, \\ z^\varepsilon\big|_{\tau=0} = f_\varepsilon, f_\varepsilon(y) = f(\varepsilon y). \end{cases}$$

Тогда $z^\varepsilon(y,\tau) = e^{-\tau A} f_\varepsilon$, или в обозначениях раздела *введение*.

$$z^\varepsilon(y,\tau) = \int_{R^d} K(y,y',\tau) f(\varepsilon y') dy'. \tag{16}$$

Обозначим через $K_\varepsilon(x,x',t)$ фундаментальное решение для оператора $\dfrac{\partial}{\partial t} + A_\varepsilon$, т.е. ядро интегрального оператора e^{-tA_ε}. Тогда

$$u^\varepsilon(x,t) = \int_{R^d} K_\varepsilon(x,x',t) f(x') dx'.$$

С другой стороны,

$$u^\varepsilon(x,t) = z^\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^2}\right) \overset{(16)}{=} \int_{R^d} K\left(\frac{x}{\varepsilon}, y', \frac{t}{\varepsilon^2}\right) f(\varepsilon y') dy' = \int_{R^d} K\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{x'}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon^2}\right) f(x') \varepsilon^{-d} dx',$$

следовательно,

$$K_\varepsilon(x,x',t)=\varepsilon^{-d}K\left(\frac{x}{\varepsilon},\frac{x'}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\right). \tag{17}$$

Непосредственно из формулы (8) видно, что

$$\varepsilon^{-d}K_0\left(\frac{x}{\varepsilon},\frac{x'}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\right)=K_0(x,x',t). \tag{18}$$

Поэтому из оценки (7) выводим

$$\left|K\left(\frac{x}{\varepsilon},\frac{x'}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\right)-K_0\left(\frac{x}{\varepsilon},\frac{x'}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\right)\right|\le c\frac{\varepsilon^{d+1}}{t^{\frac{d+1}{2}}},\quad \left|\varepsilon^{-d}K\left(\frac{x}{\varepsilon},\frac{x'}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\right)-\varepsilon^{-d}K_0\left(\frac{x}{\varepsilon},\frac{x'}{\varepsilon},\frac{t}{\varepsilon^2}\right)\right|\le\varepsilon\frac{c}{t^{\frac{d+1}{2}}},$$

откуда в силу (17) и (18),

$$\left|K_\varepsilon(x,x',t)-K_0(x,x',t)\right|\le\varepsilon\frac{c}{t^{\frac{d+1}{2}}}.$$

Аналогично из (9) вытекает интегральная оценка

$$\int_{R^d}\left|K_\varepsilon(x,x',t)-K_0(x,x',t)\right|dx'\le\varepsilon\frac{c}{\sqrt{t}},$$

из которой по лемме Шура уже можно вывести операторную оценку погрешности усреднения

$$\left\|e^{-tA_\varepsilon}-e^{-tA_0}\right\|_{L^p(R^d)\to L^p(R^d)}\le\varepsilon\frac{c}{\sqrt{t}}\quad \forall p\in[1,\infty] \tag{19}$$

с единой константой для всех p.

Справедливы также аналоги оценок (15) и (14) для близости экспоненты e^{-tA_ε} и ее ядра $K_\varepsilon(x,x',t)$ к соответствующим аппроксимациям.

Выводы

При дополнительном предположении о липшицевости исходной матрицы диффузии $a(x)$ установлены:

(i) интегральная оценка (14) для разности фундаментального решения $K(x, y, t)$ исходной задачи (1) и его первого приближения $K_1(x, y, t)$, заданного в (12);

(ii) оценка разности решения задачи (1) и его первого приближения в L^p – нормах по сечениям $t=const$, а именно,

$$\left\|e^{-tA}f-(e^{-tA_0}f+N\cdot\nabla e^{-tA_0}f-e^{-tA_0}div(Nf))\right\|_{L^p(R^d)}\le\frac{c}{t}\|f\|_{L^p(R^d)},\ 1\le p\le\infty,$$

с единой константой для всех p.

Полученные результаты можно использовать в различных прикладных областях, например, при расчете теплового потока в композите с мелкоячеистой периодической структурой или расчете плотности популяции бактерий в периодической питательной среде.

Литература:

1. Жиков В.В. Асимптотическое поведение и стабилизация решений параболического уравнения второго порядка с младшими членами // Труды Московского математического общества. 1983. Т. 46. С. 69–98.

2. Жиков В.В. Спектральный подход к асимптотическим задачам диффузии // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25. № 1. С. 44–50.

3. Суслина Т.А. Об усреднении периодических параболических систем // Функциональный анализ и его приложения. 2004. Т. 38. Вып. 4. С. 86–90.

4. Zhikov V.V., Pastukhova S.E. Estimates of homogenization of parabolic equation with periodic coefficients // Russian Journal of Math. Physics. 2006. V. 13. Iss. 2. P. 224–237.

5. Жиков В.В., Пастухова С.Е. Об операторных оценках в теории усреднения // Успехи мат. наук. 2016. Т. 71. Вып. 3. С. 27–122.

6. Жиков В.В., Козлов С.М., Олейник О.А. Усреднение дифференциальных операторов. М.: Физматлит. 1993. 464 с.

7. Коротков В.Б. Интегральные операторы. Новосибирск: Наука, 1983. 224 с.

8. Bensoussan A., Lions J.L., Papanicolaou G. Asymptotic Analysis for Periodic Structure. Amsterdam: North-Holland, 1978. 699 p. 9. Киндерлерер Д., Стампаккья Г. Введение в вариационные неравенства и их приложения. М.: Мир, 1983. 256 с.

10. Pastukhova S.E. Approximations of the exponential of an operator with periodic coefficients // Journal of Mathematical Sciences. 2012. V. 181. № 5. P. 668–700.

References:

1. Zhikov V.V. Asymptotic behavior and stabilization of solutions of a second-order parabolic equation with lowest terms // Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obshchestva (Proceedings of Moscow Mathematical Society). 1983. V. 46. P. 69–98. (in Russ.).

2. Zhikov V.V. Spectral approach to asymptotic diffusion problems // Differ. Uravn. (Partial Differential Equations). 1989. V. 25. № 1. P. 44–50. (in Russ.).

3. Suslina T.A. On Homogenization of Periodic Parabolic Systems // Funktsional. Anal. i Prilozhen. (Functional Analysis and Its Applications). 2004. V. 38. Iss.4. P. 86–90. (in Russ.).

4. Zhikov V.V., Pastukhova S.E. Estimates of homogenization of parabolic equation with periodic coefficients // Russian Journal of Math. Physics. 2006. V. 13. Iss. 2. P. 224–237.

5. Zhikov V.V., Pastukhova S.E. Operator estimates in homogenization theory // Uspekhi Mat. Nauk (Russian Mathematical Surveys). 2016. V. 71. Iss. 3. P. 27–122. (in Russ.).

6. Zhikov V.V., Kozlov S.M., Oleinik O.A. Averaging of differential operators. Moscow: Fizmatlit. 1993. 464 p. (in Russ.).

7. Korotkov V.B. Integral operators. Novosibirsk: Nauka, 1983. 224 p. (in Russ.).

8. Bensoussan A., Lions J.L., Papanicolaou G. Asymptotic Analysis for Periodic Structure. Amsterdam: North-Holland, 1978. 699 p.

9. Kinderlehrer D.,Stampacchia J. An intraduction to variational inequalities and their applications. Moscow: Mir, 1983. 256 p. (in Russ.).

10. Pastukhova S.E. Approximations of the exponential of an operator with periodic coefficients // Journal of Mathematical Sciences. 2012. V. 181. № 5. P. 668–700.

Об авторах:

Пастухова Светлана Евгеньевна, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики 2 Физико-технологического института ФГБОУ ВО «Московский технологический университет» (119454, Россия, Москва, проспект Вернадского, д. 78).

Евсеева Ольга Алексеевна, старший преподаватель кафедры высшей математики 2 Физико-технологического института ФГБОУ ВО «Московский технологический университет» (119454, Россия, Москва, проспект Вернадского, д. 78).

About authors:

Svetlana E. Pastukhova, D.Sc. (Physics and Mathematics), Professor of Higher Mathematics 2, Physico-Technological Institute, Moscow Technological University (78, Vernadskogo Pr., Moscow, 119454, Russia).

Olga A. Evseeva, Senior Teacher of of the Chair of Higher Mathematics 2, Physico-Technological Institute, Moscow Technological University (78, Vernadskogo Pr., Moscow, 119454, Russia).