

Математическое моделирование
Mathematical modeling

УДК 519.857
<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-1-111-122>



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Использование сплайнов сложной структуры в проектировании дорожных трасс

В.И. Струченков[@],
Д.А. Карпов

МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, 119454 Россия
[@] Автор для переписки, e-mail: str1942@mail.ru

Резюме

Цели. Цель работы состоит в развитии теории сплайн-аппроксимации последовательности точек на плоскости на случай использования составных сплайнов сложной структуры. В отличие от простого, например, полиномиального сплайна, составной сплайн содержит повторяющиеся связи нескольких элементов. Такая задача возникает в проектировании трасс железных и автомобильных дорог. План (проекция на горизонтальную плоскость) такой трассы – это кривая, состоящая из повторяющейся связи элементов «прямая + + клотоида + окружность + клотоида ...», что обеспечивает непрерывность не только кривой и касательной, но и кривизны. Число элементов сплайна неизвестно и должно определяться в процессе решения проектной задачи. Алгоритм решения задачи применительно к сплайну, состоящему из дуг окружностей, сопрягаемых прямыми, реализован и опубликован ранее. Аппроксимирующий сплайн в общем случае – многозначная функция. На координаты точек ее графика могут накладываться ограничения. Еще одним существенным фактором, усложняющим задачу, является наличие клотоид, которые не выражаются аналитически (формулой). Алгоритм определения числа элементов сплайна с клотоидами и построения начального приближения опубликован ранее. В настоящей статье рассматривается следующий этап решения задачи – оптимизация с применением нелинейного программирования сплайна, полученного на первом этапе по методу динамического программирования.

Методы. Для оптимизации параметров сплайна используется новая математическая модель в виде модифицированной функции Лагранжа и специальный алгоритм нелинейного программирования. При этом удается вычислять аналитически производные целевой функции по параметрам сплайна при отсутствии ее аналитического выражения через эти параметры.

Результаты. Разработаны математическая модель и алгоритм оптимизации параметров составного сплайна, состоящего из дуг окружностей, сопрягаемых клотоидами и прямыми.

Выводы. Предложенная ранее двухэтапная схема проектирования плана трасс линейных сооружений пригодна и при использовании составных сплайнов с клотоидами.

Ключевые слова: план трассы, сплайн, нелинейное программирование, клотоида, целевая функция, ограничения

• Поступила: 18.05.2023 • Доработана: 29.07.2023 • Принята к опубликованию: 08.12.2023

Для цитирования: Струченков В.И., Карпов Д.А. Использование сплайнов сложной структуры в проектировании дорожных трасс. *Russ. Technol. J.* 2024;12(1):111–122. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-1-111-122>

Прозрачность финансовой деятельности: Авторы не имеют финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

RESEARCH ARTICLE

The use of complex structure splines in roadway design

Valery I. Struchenkov[@],
Dmitry A. Karpov

MIREA – Russian Technological University, Moscow, 119454 Russia
[@] Corresponding author, e-mail: str1942@mail.ru

Abstract

Objectives. The aim of the work is to develop the theory of spline-approximation of a sequence of points on a plane for using compound splines with a complex structure. In contrast to a simple spline (e.g., polynomial), a compound spline contains repeating bundles of several elements. Such problems typically arise in the design of traces for railroads and highways. The plan (projection on the horizontal plane) of such a trace is a curve consisting of a repeating bundle of elements “line + clothoid + circle + clothoid ...,” which ensures continuity not only of curve and tangent but also of curvature. The number of spline elements, which is unknown, should be determined in the process of solving the design problem. An algorithm for solving the problem with respect to the spline, which consists of arcs conjugated by straight lines, was implemented and published in an earlier work. The approximating spline in the general case is a multivalued function, whose ordinates may be limited. Another significant factor that complicates the problem is the presence of clothoids that are not expressed analytically (in a formula). The algorithm for determining the number of elements of a spline with clothoids and constructing an initial approximation was also published earlier. The present work considers the next stage of solving the spline approximation problem: optimization using a nonlinear programming spline obtained at the first stage by means of the dynamic programming method.

Methods. A new mathematical model in the form of a modified Lagrange function is used together with a special nonlinear programming algorithm to optimize spline parameters. In this case, it is possible to calculate the derivatives of the objective function by the spline parameters in the absence of its analytical expression through these parameters.

Results. A mathematical model and algorithm for optimization of compound spline parameters comprising arcs of circles conjugated by clothoids and lines have been developed.

Conclusions. The previously proposed two-step scheme for designing paths of linear structures is also suitable for the utilization of compound splines with clothoids.

Keywords: trace plan, spline, nonlinear programming, clothoid, objective function, constraints

• Submitted: 18.05.2023 • Revised: 29.07.2023 • Accepted: 08.12.2023

For citation: Struchenkov V.I., Karpov D.A. The use of complex structure splines in roadway design. *Russ. Technol. J.* 2024;12(1):111–122. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-1-111-122>

Financial disclosure: The authors have no a financial or property interest in any material or method mentioned.

The authors declare no conflicts of interest.

ВВЕДЕНИЕ

Метод аппроксимации заданной последовательности точек на плоскости сплайном специального вида предполагает двухэтапную схему решения задачи [1]. Первый этап состоит в поиске числа элементов сплайна и приближенных значений его параметров по методу динамического программирования. На втором этапе с использованием полученного сплайна, как начального приближения, выполняется оптимизация его параметров с помощью нелинейного программирования. Первый этап рассматривался в [1]. В настоящей статье, которая является завершением серии статей [1–3], посвященных методам сплайн-аппроксимации, рассматривается второй этап применительно к использованию сплайна с клотоидами, сопрягающими прямые с окружностями. Решение этой задачи применительно к сплайну, состоящему из дуг окружностей, сопрягаемых прямыми, рассматривалось в [3]. Изложенные в [3] результаты будут использованы в данной статье, которая фактически является развитием модели и алгоритма [3] на более сложный случай сплайна с клотоидами.

Сплайн состоит из повторяющейся связки «отрезок прямой + дуга клотоиды + дуга окружности + дуга клотоиды...». В дальнейшем изложении слово «дуга» для краткости будет опущено, если при этом не возникает двусмысленности. На данном этапе известны начальная точка и направление касательной в ней, длины всех кривых и сопрягающих их прямых, что позволяет применить методы непрерывной оптимизации, в частности, методы нелинейного программирования градиентного типа, несмотря на то что искомым сплайн в общем случае является многозначной функцией.

Задача рассматривается применительно к проектированию плана трасс железных и автомобильных дорог, где в отличие от других линейных сооружений, например, трубопроводов, клотоиды обязательны

для обеспечения непрерывности кривизны и соответственно комфорта и безопасности движения^{1, 2}.

Необходимо отметить, что принятый подход существенно отличается от метода подбора элементов в интерактивном режиме, принятого в практике проектирования, и от различных полуавтоматических методов поиска границ кривых на основе графиков кривизны и угловых диаграмм, и от нового эвристического метода поиска границ кривых [4] с последующим применением генетических алгоритмов оптимизации [5–14].

Использование адекватных математических моделей и математически корректных алгоритмов представляется более перспективным.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ЕЕ ФОРМАЛИЗАЦИЯ

Постановка задачи и ее формализация мало чем отличаются от изложенного в [3] при решении задачи без клотоид. Однако наличие клотоид создает существенные трудности в реализации идей по вычислению градиента для применения нелинейного программирования.

Клотоида – это плоская кривая (рис. 1), кривизна которой σ линейно зависит от длины l . Следовательно, для куска клотоиды с произвольной начальной точкой А, кривизной в ней σ_A и конечной точкой В с кривизной σ_B имеем формулу:

$$\sigma_B = \sigma_A + kL, \quad (1)$$

где L – длина куска клотоиды, а k – ее параметр.

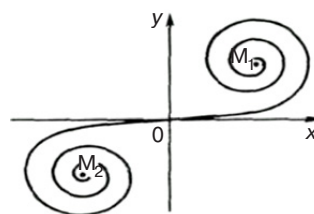


Рис. 1. Клотоида

¹ СП 34.13330.2012 *Автомобильные дороги*. Актуализированная редакция СНиП 2.05.02-85* (с Изменениями № 1, 2). Свод правил. 30 июня 2012 г. <https://docs.cntd.ru/document/1200095524>. Дата обращения 20.12.2023. [SP 34.13330.2012. *Automobile roads*. Updated edition of SNiP 2.05.02-85* (with Amendments No. 1, 2). Code of Regulations. June 30, 2012 (in Russ.). <https://docs.cntd.ru/document/1200095524>. Accessed December, 20, 2023.]

² СП 119.13330.2017 *Железные дороги колеи 1520 мм*. Актуализированная редакция СНиП 32-01-95 (с Изменением № 1). <https://docs.cntd.ru/document/550965737>. Дата обращения 20.12.2023. [SP 119.13330.2017. *Railway with 1520 mm track*. Updated edition of SNiP 32-01-95 (with Amendment No. 1). <https://docs.cntd.ru/document/550965737>. Accessed December, 20, 2023.]

Эта линейная зависимость является основой для всех последующих действий при вычислении производных с целью применить математическое программирование.

Задача состоит в следующем: найти сплайн заданного вида, который удовлетворяет всем ограничениям и наилучшим образом аппроксимирует заданную последовательность точек на плоскости (рис. 2).

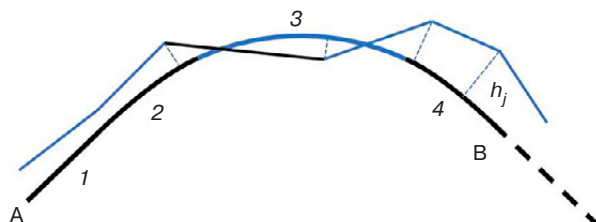


Рис. 2. Одна связка сплайна:
1 – прямая, 2 и 4 – клотоиды, 3 – окружность

Начальная точка A и направление касательной к искомому сплайну в этой точке заданы и не меняются в процессе оптимизации.

Качество аппроксимации оценивается суммой квадратов отклонений h_j (рис. 2) заданных точек от сплайна. Другими словами, h_j – это смещение заданной точки в ее проектное положение; h_j вычисляются по нормали к исходной ломаной [3], т.е. по направлению к центру окружности, соединяющей три смежных точки. Если три точки лежат на одной прямой, то h_j вычисляются по нормали к этой прямой.

Смещения исходных точек в проектное положение считаются положительными, если они осуществляются в направлении внешней нормали.

Итак, требуется найти

$$\min F(\mathbf{h}) = 1/2 \sum_{j=1}^n h_j^2. \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{h}(h_1, h_2, \dots, h_n)$ – вектор неизвестных, n – их количество. Вместо простой суммы квадратов может быть задана взвешенная.

Система ограничений на основные переменные содержит простые неравенства, т.к. каждая переменная ограничена отдельно. Эта система практически та же, что и в [3]. Добавляется только ограничение на длину клотоиды, и вместо переменного радиуса рассматривается переменная кривизна. Ограничения на отдельные смещения h_m – те же, что и в [3].

Через переменные h_j не удастся выразить условия наличия и положение прямых, клотоид и окружностей. Эти переменные считаем промежуточными, а основными переменными считаем длины прямых, клотоид и окружностей, а также кривизны окружностей.

Формально это та же задача математического программирования, что и в [3]. Однако наличие клотоид существенно осложняет задачу и требует отдельного рассмотрения.

2. ОСОБЕННОСТИ ЗАДАЧИ

Сплайн полностью определяется основными переменными с учетом начальной точки и направления касательной в ней. Однако мы не имеем аналитических выражений зависимостей (формул) промежуточных переменных от основных. Ограничения на основные переменные не выражаются через промежуточные переменные. Нет аналитической зависимости целевой функции (2) от основных переменных.

Клотоиду вообще не удастся представить в декартовой системе координат функцией $y(x)$.

Если начало системы координат совпадает с точкой нулевой кривизны клотоиды, а ось OX направлена по касательной в этой точке (рис. 1), то в этом случае используется параметрическое представление координат x и y как функций длины l , отсчитываемой от точки нулевой кривизны в виде степенных рядов:

$$\begin{aligned} x(l) &\approx l \left(1 - \frac{l^4 k^2}{40} + \frac{l^8 k^4}{3456} - \dots \right), \\ y(l) &\approx \frac{l^3 k}{6} \left(1 - \frac{l^4 k^2}{56} + \frac{l^8 k^4}{7040} - \dots \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Для клотоиды в произвольной системе координат получены формулы разложения в ряды с учетом координат начальной точки, угла касательной в ней с осью OX и кривизны [15].

В силу отмеченных особенностей задачи идея решить ее как задачу нелинейного программирования градиентными методами [16–18] кажется неосуществимой. Но задача сплайн-аппроксимации окружностями, сопрягаемыми прямыми, была решена именно так [3], несмотря на отсутствие аналитических выражений дифференцируемых функций. Удалось получить формулы производных промежуточных переменных h_j по основным переменным и далее легко вычислить производные целевой функции по основным переменным [3].

3. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КЛОТОИДЫ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ

Поскольку для любой гладкой кривой $\sigma = d\varphi/dl$, где σ – кривизна, φ и l – текущие значения угла касательной с осью OX и длины соответственно, то из (1) получаем:

$$\varphi_B = \varphi_A + \sigma_A L + kL^2 / 2 = \varphi_A + L(\sigma_A + \sigma_B) / 2. \quad (4)$$

Между приращением длины дуги любой гладкой кривой и приращением координат существуют соотношения $dx = \cos\varphi dl$ и $dy = \sin\varphi dl$, из которых с использованием (4), обозначая переменную интегрирования через t , получаем представление клотоиды в параметрическом виде:

$$\begin{aligned} x(l) &= x_A + \int_0^l \cos(\varphi_A + \sigma_A t + kt^2/2) dt, \\ y(l) &= y_A + \int_0^l \sin(\varphi_A + \sigma_A t + kt^2/2) dt. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь x_A, y_A – координаты начальной точки, а l – длина куса клотоиды от начальной точки А до текущей с координатами $x(l), y(l)$.

Далее будем основываться на параметрическом представлении клотоиды (5).

Рассмотрим какие трансформации происходят со сплайном при изменении одной и только одной основной переменной. Понимание этих трансформаций поможет получить формулы для вычисления частных производных промежуточных переменных (h_j) по длинам элементов и кривизнам, т.е. по основным переменным.

При изменении длины прямой на ΔL происходит сдвиг правой части сплайна по направлению этой прямой. При изменении длины дуги окружности – сдвиг в направлении касательной в конечной точке дуги плюс поворот с центром в этой точке на $\Delta\varphi = \sigma\Delta L$. При изменении длины клотоиды происходит следующее:

1. Параметр клотоиды изменяется так, чтобы не изменялась кривизна в конечной точке при изменении длины, т.к. мы вычисляем частные производные.
2. Изменяются координаты правого конца (точка В) клотоиды и угол касательной в ней с осью OX . В соответствии с (5)

$$\begin{aligned} x_B &= x_A + \int_0^L \cos(\varphi_A + \sigma_A t + kt^2/2) dt, \\ y_B &= y_A + \int_0^L \sin(\varphi_A + \sigma_A t + kt^2/2) dt, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\frac{\partial x_B}{\partial L} = \cos\varphi_B + \frac{\partial x_B}{\partial k} \cdot \frac{\partial k}{\partial L} = \cos\varphi_B - \frac{\partial x_B}{\partial k} \cdot \frac{(\sigma_B - \sigma_A)}{L^2}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial y_B}{\partial L} = \sin\varphi_B + \frac{\partial y_B}{\partial k} \cdot \frac{\partial k}{\partial L} = \sin\varphi_B - \frac{\partial y_B}{\partial k} \cdot \frac{(\sigma_B - \sigma_A)}{L^2}. \quad (8)$$

Здесь использовано полученное из (1) соотношение: $\partial k / \partial L = -(\sigma_B - \sigma_A) / L^2$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_B}{\partial L} &= \sigma_A + kL + \frac{\partial k}{\partial L} \cdot \frac{L^2}{2} = \\ &= \sigma_A + kL - \frac{(\sigma_B - \sigma_A)}{2} = \frac{(\sigma_A + \sigma_B)}{2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Итак, справа от клотоиды происходит сдвиг и поворот с центром в точке В, а внутри клотоиды нужно учесть только влияние изменения параметра k .

При изменении кривизны окружности изменяются параметры смежных клотоид слева и справа, изменяются координаты конечной точки дуги окружности и угол касательной в ней с осью OX . Все это приводит к сдвигам и поворотам части сплайна, следующей за конечной точкой правой клотоиды. Кроме того, изменяются и координаты внутренних точек дуги окружности, левой и правой клотоид.

Переходим к выводу формул, которые позволят учесть изменение параметра клотоиды.

Нам понадобятся 4 интеграла:

$$I_1 = \int_0^L \sin\left(\varphi_A + \sigma_A t + k \frac{t^2}{2}\right) t dt,$$

$$I_2 = \int_0^L \cos\left(\varphi_A + \sigma_A t + k \frac{t^2}{2}\right) t dt,$$

$$I_3 = \int_0^L \sin\left(\varphi_A + \sigma_A t + k \frac{t^2}{2}\right) t^2 dt,$$

$$I_4 = \int_0^L \cos\left(\varphi_A + \sigma_A t + k \frac{t^2}{2}\right) t^2 dt,$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{k} \int_0^L \sin\left(\varphi_A + \sigma_A t + k \frac{t^2}{2}\right) (kt + \sigma_A - \sigma_A) dt = \\ &= \frac{1}{k} \int_0^L \sin\left(\varphi_A + \sigma_A t + k \frac{t^2}{2}\right) d\left(\varphi_A + \sigma_A t + k \frac{t^2}{2}\right) - \\ &\quad - \frac{\sigma_A}{k} \int_0^L \sin\left(\varphi_A + \sigma_A t + k \frac{t^2}{2}\right) dt = \\ &= -\frac{1}{k} (\cos\varphi_B - \cos\varphi_A) - \frac{\sigma_A}{k} (y_B - y_A), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{k} \int_0^L \cos\left(\varphi_A + \sigma_A t + k \frac{t^2}{2}\right) (kt + \sigma_A - \sigma_A) dt = \\ &= \frac{1}{k} \int_0^L \cos\left(\varphi_A + \sigma_A t + k \frac{t^2}{2}\right) d\left(\varphi_A + \sigma_A t + k \frac{t^2}{2}\right) - \\ &\quad - \frac{\sigma_A}{k} \int_0^L \cos\left(\varphi_A + \sigma_A t + k \frac{t^2}{2}\right) dt = \\ &= \frac{1}{k} (\sin\varphi_B - \sin\varphi_A) - \frac{\sigma_A}{k} (x_B - x_A), \end{aligned} \quad (11)$$

$$I_3 = \frac{1}{k} \int_0^L \sin \left(\varphi_A + \sigma_A t + k \frac{t^2}{2} \right) t (kt + \sigma_A - \sigma_A) dt =$$

$$= -\frac{1}{k} \int_0^L t d \cos \left(\varphi_A + \sigma_A t + k \frac{t^2}{2} \right) - \frac{\sigma_A}{k} I_1 =$$

$$= -\frac{1}{k} (L \cos \varphi_B - (x_B - x_A)) +$$

$$+ \frac{\sigma_A}{k^2} ((\cos \varphi_B - \cos \varphi_A) + \sigma_A (y_B - y_A)),$$

$$I_4 = \frac{1}{k} \int_0^L \cos \left(\varphi_A + \sigma_A t + k \frac{t^2}{2} \right) t (kt + \sigma_A - \sigma_A) dt =$$

$$= \frac{1}{k} \int_0^L t d \sin \left(\varphi_A + \sigma_A t + k \frac{t^2}{2} \right) - \frac{\sigma_A}{k} I_2 =$$

$$= \frac{1}{k} (L \sin \varphi_B - (y_B - y_A)) -$$

$$- \frac{\sigma_A}{k^2} ((\sin \varphi_B - \sin \varphi_A) - \sigma_A (x_B - x_A)).$$

Из (5) следует:

$$\frac{\partial x_B}{\partial k} = -\frac{1}{2} I_3 = \frac{1}{2k} (L \cos \varphi_B - (x_B - x_A)) -$$

$$- \frac{\sigma_A}{2k^2} ((\cos \varphi_B - \cos \varphi_A) + \sigma_A (y_B - y_A)),$$

$$\frac{\partial y_B}{\partial k} = \frac{1}{2} I_4 = \frac{1}{2k} (L \sin \varphi_B - (y_B - y_A)) -$$

$$- \frac{\sigma_A}{2k^2} ((\sin \varphi_B - \sin \varphi_A) + \sigma_A (x_B - x_A)).$$

Для левой клотоиды кривизна в начальной точке и длина не изменяются при изменении кривизны окружности. Обозначая, как и ранее, кривизну окружности через σ , с учетом (1) и (5) и фиксации σ_A получаем:

$$\frac{\partial x_B}{\partial \sigma} = \frac{\partial x_B}{\partial k} \cdot \frac{1}{L},$$

$$\frac{\partial y_B}{\partial \sigma} = \frac{\partial y_B}{\partial k} \cdot \frac{1}{L}.$$

Рассмотрим влияние изменения кривизны окружности σ на правую клотоиду. Для ее начальной и конечной точек и длины сохраним обозначения А, В и L.

$$x_B = \int_0^L \cos \left(\varphi_A + \sigma t + \frac{\sigma_B - \sigma}{L} \cdot \frac{t^2}{2} \right) dt,$$

$$\frac{\partial x_B}{\partial \sigma} = - \int_0^L \sin \left(\varphi_A + \sigma t + \frac{\sigma_B - \sigma}{L} \cdot \frac{t^2}{2} \right) \times$$

$$\times \left(t - \frac{t^2}{2L} \right) dt = -I_1 + \frac{1}{2L} I_3,$$

$$y_B = \int_0^L \sin \left(\varphi_A + \sigma t + \frac{\sigma_B - \sigma}{L} \cdot \frac{t^2}{2} \right) dt,$$

$$\frac{\partial y_B}{\partial \sigma} = \int_0^L \cos \left(\varphi_A + \sigma t + \frac{\sigma_B - \sigma}{L} \cdot \frac{t^2}{2} \right) \times$$

$$\times \left(t - \frac{t^2}{2L} \right) dt = I_2 - \frac{1}{2L} I_4.$$

При подстановке в (18), (19) вместо I_1, I_2, I_3, I_4 их значений из (10)–(13) для правой клотоиды следует учесть, что $\sigma_A = \sigma$ и $k = (\sigma_B - \sigma)/L$.

Формулы (18), (19) можно использовать при вычислении производных координат любой внутренней точки С правой клотоиды по кривизне окружности, подставляя в (10)–(13) x_C, y_C вместо x_B, y_B , φ_C вместо φ_B и вместо L – длину клотоиды от начальной точки А до этой точки С. Однако в формулах (18) и (19) L – длина всей правой клотоиды от точки А до точки В.

Далее из (1) и (2) следует:

$$\frac{\partial \varphi_B}{\partial \sigma} = \frac{L}{2}.$$

Здесь σ – кривизна окружности, φ_B – угол с осью ОХ касательной в конечной точке клотоиды, а L – ее длина.

Формула (20) применима как к левой, так и к правой клотоиде.

Теперь у нас есть все для перехода к вычислению частных производных смещений по нормальям (промежуточных переменных) по основным переменным.

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ СМЕЩЕНИЙ ПО НОРМАЛЯМ

Итак, установлено, что и при наличии клотоид при изменении одной основной переменной все трансформации сплайна сводятся к сдвигам и поворотам. Рассмотрим последовательно, как вычислить производные смещений по нормальям по основным переменным, не имея соответствующих аналитических зависимостей.

4.1. Производные по длине прямой

При изменении длины прямой на δl происходит сдвиг последующей части сплайна в направлении

изменяемой прямой. Это направление определяется углом α прямой с осью OX (рис. 3). Для смещения по j -й нормали справедлива формула

$$\frac{\partial h_j}{\partial l} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\gamma_j - \beta)}, \quad (21)$$

где β – угол с осью OX касательной (прямая AB на рис. 3) к элементу сплайна, (в частном случае это прямая) в точке пересечения с j -й нормалью), γ_j – угол нормали (C_0C_1 на рис. 3) с осью OX . На рис. 3 точка C – исходное положение точки пересечения нормали и сплайна, ему соответствует значение промежуточной переменной h_j . При сдвиге в направлении, определяемом углом α на δl , AB переходит в A_1B_1 , точка C – в C_2 , а точкой пересечения нормали со сплайном станет C_1 . Смещение h_j получает приращение $\delta h_j = CC_1$.

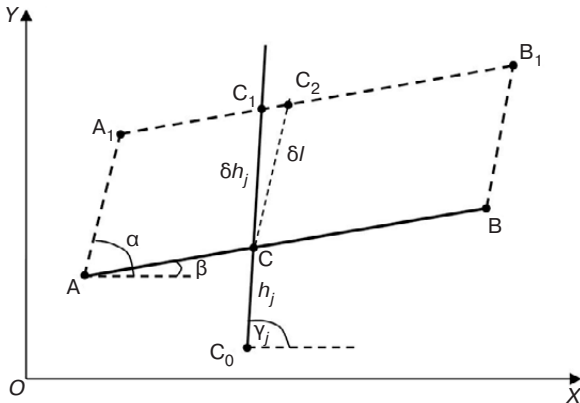


Рис. 3. К вычислению частных производных при сдвиге

Формула (21) следует из теоремы синусов, если ее применить к треугольнику C_1CC_2 . Она справедлива для всех нормалей, пересекающих сплайн правее конца варьируемой прямой.

4.2. Производные по длине дуги окружности

При изменении длины дуги окружности на δL происходит сдвиг всей последующей части сплайна (начиная с конечной точки дуги B) на δL в направлении касательной к окружности в точке B . Это направление определяется углом α касательной с осью OX . Дополнительно правая часть сплайна поворачивается на угол $\delta\alpha = \sigma\delta L$ вокруг точки B , где σ – кривизна окружности. Сдвиг учитывается также, как и при изменении длины прямой. В [3] приведена и обоснована формула (13) вычисления производной по длине окружности смещения по j -й нормали, которая в принятых нами обозначениях примет вид:

$$\frac{\partial h_j}{\partial L} = \frac{\sin(\alpha - \beta) + [(x_C - x_B)\cos\beta + (y_C - y_B)\sin\beta]\sigma}{\sin(\gamma_j - \beta)}. \quad (22)$$

Здесь L – длина дуги окружности, α – угол касательной к ней в конечной точке B , x_C, y_C – координаты точки пересечения сплайна с j -й нормалью, β – угол касательной к сплайну в этой точке C с осью OX , γ_j – угол нормали с осью OX . В этой формуле учтен и сдвиг, и поворот. Она справедлива для любой нормали, пересекающей сплайн правее конечной точки дуги окружности.

4.3. Производные по длине дуги клотоиды

При изменении длины клотоиды происходит сдвиг последующей части сплайна и ее поворот с центром в конечной точке дуги клотоиды B .

Соответственно приращения смещений по j -й нормали правее клотоиды представим в виде:

$$\partial h_j = \partial h_j^s + \partial h_j^r, \quad (23)$$

где ∂h_j^s – приращение смещения по j -й нормали при сдвиге; ∂h_j^r – приращение смещения по j -й нормали при повороте.

Изменение координат конечной точки B происходит из-за сдвига по касательной на ∂L и изменения параметра k клотоиды, которое дополнительно приводит к изменению координат точек пересечения нормалей с клотоидой.

Для вычисления ∂h_j^s используем формулы (7) и (8), которые дают приращения координат ∂x_B и ∂y_B конечной точки дуги клотоиды, вызванные приращением ∂L . Такие же приращения получают при сдвиге координаты всех последующих точек. Характерно, что первые слагаемые в этих формулах соответствуют сдвигу по касательной в точке B на ∂L , а вторые – сдвигу из-за изменения параметра клотоиды при сохранении кривизны в ее начальной и конечной точках. Если обозначить приращение h_j^s , вызванное сдвигом по оси OX на ∂x_B через ∂h_{jx} , а по оси OY на ∂y_B через ∂h_{jy} , то $\partial h_j^s = \partial h_{jx} + \partial h_{jy}$.

Для вычисления ∂h_{jx} в формуле (21) ∂l заменим на ∂x_B и α на 0. Получим $\frac{\partial h_{jx}}{\partial x_B} = -\frac{\sin\beta}{\sin(\gamma_j - \beta)}$. Аналогично для ∂h_{jy} при $\alpha = \pi/2$: $\frac{\partial h_{jy}}{\partial y_B} = \frac{\cos\beta}{\sin(\gamma_j - \beta)}$.

Отсюда следует:

$$\partial h_j^s = -\frac{\sin\beta}{\sin(\gamma_j - \beta)}\partial x_B + \frac{\cos\beta}{\sin(\gamma_j - \beta)}\partial y_B. \quad (24)$$

Далее:

$$\frac{\partial h_j^s}{\partial L} = -\frac{\sin \beta}{\sin(\gamma_j - \beta)} \cdot \frac{\partial x_B}{\partial L} + \frac{\cos \beta}{\sin(\gamma_j - \beta)} \cdot \frac{\partial y_B}{\partial L}. \quad (25)$$

Производные $\frac{\partial x_B}{\partial L}$ и $\frac{\partial y_B}{\partial L}$ вычисляются по формулам (7) и (8), в которые вместо $\frac{\partial x_B}{\partial k}$ и $\frac{\partial y_B}{\partial k}$ надо подставить их выражения из (14) и (15) соответственно.

Для пересечений с нормальными внутри клотоиды в (22) вместо (6) и (7) надо использовать выражения $\frac{\partial x_C}{\partial L} = -\frac{\partial x_C}{\partial k} \cdot \frac{(\sigma_B - \sigma_A)}{L^2}$ и $\frac{\partial y_C}{\partial L} = -\frac{\partial y_C}{\partial k} \cdot \frac{(\sigma_B - \sigma_A)}{L^2}$, а производные $\frac{\partial x_C}{\partial k}$ и $\frac{\partial y_C}{\partial k}$ вычислять по формулам (13) и (14), подставляя x_C, y_C вместо x_B, y_B ; φ_C вместо φ_B и вместо L – длину клотоиды от начальной точки А до конечной точки В.

Для вычисления ∂h_j^r нужно учесть поворот последующей части сплайна вокруг конечной точки клотоиды В на угол $\partial \varphi_B$. В [3] получена формула для вычисления производных смещений по j -й нормали по углу поворота, которая в наших обозначениях примет вид:

$$\frac{\partial h_j^r}{\partial \varphi_B} = \frac{(x_C - x_B) \cos \beta + (y_C - y_B) \sin \beta}{\sin(\gamma_j - \beta)}.$$

Учитывая, что по формуле (9) $\partial \varphi_B / \partial L = (\sigma_A + \sigma_B) / 2$, получаем:

$$\frac{\partial h_j^r}{\partial L} = \frac{(x_C - x_B) \cos \beta + (y_C - y_B) \sin \beta}{\sin(\gamma_j - \beta)} (\sigma_A + \sigma_B) / 2. \quad (26)$$

Здесь x_C, y_C – координаты точки пересечения сплайна с j -й нормалью, β – угол касательной к сплайну в этой точке С с осью OX , γ_j – угол нормали с осью OX , σ_A и σ_B – кривизна в начальной и конечной точках клотоиды. В соответствии с (23) сумма правых частей (25) и (26) дает производную $\frac{\partial h_j}{\partial L}$ для последующей части сплайна.

4.4. Производные по кривизне

Как уже отмечалось, при изменении кривизны σ одной окружности и сохранении значений всех остальных основных переменных происходит наиболее сложная трансформация сплайна: меняется параметр левой клотоиды, что дает сдвиги внутри нее, сдвиг и поворот правой части сплайна вплоть

до его конца, внутри дуги окружности происходят смещения по пересекающим ее нормальям, дополнительно происходит сдвиг и поворот части сплайна за конечной точкой дуги окружности и, наконец, меняется параметр правой клотоиды, что дает сдвиг и поворот части сплайна за конечной точкой этой клотоиды и сдвиги внутри нее.

Будем вычислять производные смещений по нормальям по кривизне последовательно по участкам.

В пределах левой клотоиды и до конца сплайна

Для точки С пересечения j -й нормали с клотоидой обозначим ее координаты через x_C, y_C ; длину от начала дуги клотоиды (точка А) до точки С через L_C ; угол касательной в точке С через φ_C ; параметр левой клотоиды через k_1 . Воспользуемся формулами (14) и (15):

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_C}{\partial k_1} = & \frac{1}{2k_1} (L_C \cos \varphi_C - (x_C - x_A)) - \\ & - \frac{\sigma_A}{2k_1^2} ((\cos \varphi_C - \cos \varphi_A) + \sigma_A (y_C - y_A)), \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_C}{\partial k_1} = & \frac{1}{2k_1} (L_C \sin \varphi_C - (y_C - y_A)) - \\ & - \frac{\sigma_A}{2k_1^2} ((\sin \varphi_C - \sin \varphi_A) + \sigma_A (x_C - x_A)). \end{aligned} \quad (28)$$

В соответствии с (16), (17) $\frac{\partial x_C}{\partial \sigma} = \frac{\partial x_C}{\partial k_1} \cdot \frac{1}{L}$ и

$$\frac{\partial y_C}{\partial \sigma} = \frac{\partial y_C}{\partial k_1} \cdot \frac{1}{L}, \text{ где } L - \text{длина дуги клотоиды АВ.}$$

Приращение координат в соответствии с (24) дает приращение смещения по нормали на $\partial h_j^s = -\frac{\sin \beta}{\sin(\gamma_j - \beta)} \frac{\partial x_C}{\partial k_1} + \frac{\cos \beta}{\sin(\gamma_j - \beta)} \frac{\partial y_C}{\partial k_1}$. Для соответствующей производной по кривизне окружности смещения по j -й нормали в пределах левой клотоиды получаем:

$$\frac{\partial h_j^s}{\partial \sigma} = \left(-\frac{\sin \beta}{\sin(\gamma_j - \beta)} \cdot \frac{\partial x_C}{\partial k_1} + \frac{\cos \beta}{\sin(\gamma_j - \beta)} \cdot \frac{\partial y_C}{\partial k_1} \right) / L. \quad (29)$$

Здесь, как и ранее, β – угол с осью OX касательной к сплайну в точке С пересечения с нормалью, а γ_j – угол нормали с осью OX . В (29) нужно подставить $\frac{\partial x_C}{\partial k_1}$ и $\frac{\partial y_C}{\partial k_1}$ из (27) и (28).

Для нормалей, пересекающих сплайн правее левой клотоиды, нужно применить формулы (27) и (28)

к конечной точке В и подставить результат в формулу (29), в которой углы β и γ_j относятся к соответствующей нормали. Для этих же нормалей производ-

дная $\frac{\partial h_j^r}{\partial \sigma}$ из-за поворота касательной в точке В клотоиды вычисляется с использованием (26) и $\frac{\partial \varphi_B}{\partial \sigma} = \frac{L}{2}$, что следует из (4). В итоге для произвольной точки С пересечения нормали со сплайном правее левой клотоиды получаем:

$$\frac{\partial h_j^r}{\partial \sigma} = \frac{(x_C - x_B) \cos \beta + (y_C - y_B) \sin \beta}{\sin(\gamma_j - \beta)} \cdot \frac{L}{2}. \quad (30)$$

Суммарно (29) и (30) дают

$$\frac{\partial h_j}{\partial \sigma} = \frac{\partial h_j^s}{\partial \sigma} + \frac{\partial h_j^r}{\partial \sigma}. \quad (31)$$

В пределах окружности и до конца сплайна

Дополнительно происходят изменения координат точек пересечения с нормалью в пределах дуги окружности из-за изменения ее кривизны.

Полученная в [1] формула (17) для расчета частных производных по радиусу R смещений h_j по нормальям в пределах окружности, имеет вид $\frac{\partial h_j}{\partial R} = \frac{\cos(\beta - \alpha) - 1}{\sin(\gamma - \beta)}$. В ней углы с осью OX : α и β – углы касательных к дуге окружности в ее начальной и конечной точках, γ_j – угол j -й нормали. В наших обозначениях для производной по кривизне смещений по нормальям внутри окружности получаем:

$$\frac{\partial h_j^{sl}}{\partial \sigma} = \frac{1 - \cos(\beta - \varphi_B)}{\sin(\gamma_j - \beta) \sigma^2}. \quad (32)$$

В итоге для производных смещений по нормальям, пересекающим дугу окружности, получаем:

$$\frac{\partial h_j}{\partial \sigma} = \frac{\partial h_j^s}{\partial \sigma} + \frac{\partial h_j^r}{\partial \sigma} + \frac{\partial h_j^{sl}}{\partial \sigma}. \quad (33)$$

Дополнительно возникает сдвиг всей последующей части сплайна от конца дуги окружности (точка В) и ее поворот с центром в этой точке из-за изменения кривизны σ .

В соответствии с формулами (14), (15) из [1], переходя от радиуса к кривизне, получим:

$$\frac{\partial x_B}{\partial \sigma} = -\frac{\sin \beta - \sin \alpha - (\beta - \alpha) \cos \beta}{\sigma^2}, \quad (34)$$

$$\frac{\partial y_B}{\partial \sigma} = -\frac{\cos \alpha - \cos \beta - (\beta - \alpha) \sin \beta}{\sigma^2}. \quad (35)$$

Здесь α и β – углы с осью OX касательных к дуге окружности в ее начальной и конечной точках соответственно.

Используя формулу (24), которая позволяет от смещений по координатам x и y перейти к смещению по нормали, для производных смещений h_j^{s2} по нормальям, возникших из-за сдвига в конечной точке окружности, получим:

$$\frac{\partial h_j^{s2}}{\partial \sigma} = -\frac{\sin \beta_1}{\sin(\gamma_j - \beta_1)} \cdot \frac{\partial x_B}{\partial \sigma} + \frac{\cos \beta_1}{\sin(\gamma_j - \beta_1)} \cdot \frac{\partial y_B}{\partial \sigma}. \quad (36)$$

Здесь β_1 – угол с осью OX касательной к сплайну в точке его пересечения j -й нормалью, γ_j – угол этой нормали с осью OX .

После подстановки $\frac{\partial x_B}{\partial \sigma}$ и $\frac{\partial y_B}{\partial \sigma}$ из (34) и (35) в (36) и упрощений получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_j^{s2}}{\partial \sigma} = \\ = -\frac{\cos(\beta_1 - \alpha) - \cos(\beta_1 - \beta) + (\beta - \alpha) \sin(\beta_1 - \beta)}{\sin(\gamma_j - \beta_1) \sigma^2}. \end{aligned} \quad (37)$$

Последствия поворота касательной в конечной точке окружности при изменении ее кривизны будем учитывать точно также, как это сделано выше при повороте касательной в конце левой клотоиды. В соответствии с (26)

$$\frac{\partial h_j^{r2}}{\partial \varphi_B} = \frac{(x_C - x_B) \cos \beta + (y_C - y_B) \sin \beta}{\sin(\gamma_j - \beta)}.$$

Здесь x_C, y_C – координаты точки пересечения сплайна с j -й нормалью, β – угол касательной к сплайну в этой точке С с осью OX , γ_j – угол нормали с осью OX , φ_B – угол касательной к дуге окружности в ее конечной точке. Учитывая, что для окружности $\frac{\partial \varphi_B}{\partial \sigma} = L$, где L – длина дуги окружности, получаем:

$$\frac{\partial h_j^{r2}}{\partial \sigma} = \frac{(x_C - x_B) \cos \beta + (y_C - y_B) \sin \beta}{\sin(\gamma_j - \beta)} L. \quad (38)$$

Формулы (37) и (38) верны для всех точек пересечения нормалей со сплайном не только в пределах правой клотоиды, но и до конца сплайна. Влияние изменения кривизны окружности на правую клотоиду учитывается аналогично.

5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ГРАДИЕНТА ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ

Начальное приближение для алгоритма оптимизации – это сплайн, полученный по отдельной программе, реализующей метод динамического программирования [1]. По этому сплайну определяются смещения заданных точек съемки по нормальным в проектное положение (рис. 2). Это текущие значения промежуточных переменных h_j . Для их определения последовательно рассматриваются элементы сплайна, начиная с начальной прямой. Для каждого элемента (прямая, клотоида, окружность) запоминается номер первой нормали, пересекающей его.

Для определения точек пересечения нормалей с окружностью используется формула (9) из [1]. Для поиска пересечений с клотоидой используется итерационный алгоритм [19]. Далее для каждой основной переменной x_i (длины элементов и кривизны окружностей) последовательно определяется номер первой нормали j_i , на смещение по которой влияет изменение соответствующей основной переменной. Для длин прямых и окружностей это номер первой нормали, пересекающей следующий элемент. Для длины клотоиды – это номер первой нормали ее пересекающей, для кривизны окружности – это номер первой нормали, пересекающей левую клотоиду. Номер конечной нормали для всех элементов – это номер последней нормали n .

Производные исходной целевой функции (2) по основным переменным вычисляются по формуле:

$$\frac{\partial F(\mathbf{h}(\mathbf{x}))}{\partial x_i} = \sum_{j=j_i}^n h_j \frac{\partial h_j}{\partial x_j}. \quad (39)$$

Здесь \mathbf{x} и \mathbf{h} – векторы основных и промежуточных переменных соответственно.

Для оптимизации параметров сплайна используется та же модифицированная функция Лагранжа [20–22] и тот же алгоритм [23, 24], что и для сплайна, состоящего из отрезков прямых и дуг окружностей [3]. Для этого при вычислении градиента в правой части (39) добавляется производная от штрафной функции [3].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основной результат выполненных исследований – это математические модели и алгоритмы аппроксимации функций, заданных дискретной последовательностью точек, составными сплайнами сложной структуры, включая сплайны с клотоидами. Удачный выбор переменных позволил решить задачу и при аппроксимации многозначных функций. Такие задачи возникают при проектировании трасс железных и автомобильных дорог.

Уникальный прием получения формул для вычисления частных производных при отсутствии аналитических выражений дифференцируемых функций может найти применение и при решении других задач.

Расчеты по экспериментальным программам показали, что наличие клотоид существенно увеличивает время вычислений, но оно не становится критическим при использовании общедоступных современных персональных компьютеров.

Практическое применение разработанных алгоритмов и программ пока представляется невозможным из-за отсутствия потребителей, заинтересованных в повышении качества проектных решений и снижении затрат в строительстве и реконструкции дорог.

Вклад авторов. Все авторы в равной степени внесли свой вклад в исследовательскую работу.

Authors' contribution. All authors equally contributed to the research work.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карпов Д.А., Струченков В.И. Двухэтапная сплайн-аппроксимация в компьютерном проектировании трасс линейных сооружений. *Russ. Technol. J.* 2021;9(5):45–56. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2021-9-5-45-56>
2. Карпов Д.А., Струченков В.И. Сплайн-аппроксимация многозначных функций в проектировании трасс линейных сооружений. *Russ. Technol. J.* 2022;10(4):65–74. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2022-10-4-65-74>
3. Карпов Д.А., Струченков В.И. Оптимизация параметров сплайна при аппроксимации многозначных функций. *Russ. Technol. J.* 2023;11(2):72–83. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2023-11-2-72-83>
4. Li W., Pu H., Schonfeld P., et al. A Method for Automatically Recreating the Horizontal Alignment Geometry of Existing Railways. *Comput. Aided Civ. Infrastruct. Eng.* 2019;34(1):71–94. <https://doi.org/10.1111/mice.12392>
5. Jha M.K., McCall C., Schonfeld P. Using GIS, genetic algorithms, and visualization in highway development. *Comput. Aided Civ. Infrastruct. Eng.* 2001;16(6):399–414. <https://doi.org/10.1111/0885-9507.00242>
6. Jha M.K., Schonfeld P. A highway alignment optimization model using geographic information systems. *Transp. Res. Part A. Policy Pract.* 2004;8(6):455–481. <https://doi.org/10.1016/j.tra.2004.04.001>
7. Jong J.C., Jha M.K., Schonfeld P. Preliminary highway design with genetic algorithms and geographic information systems. *Comput. Aided Civ. Infrastruct. Eng.* 2000;15(4):261–271. <https://doi.org/10.1111/0885-9507.00190>

8. Kang M.W., Schonfeld P., Yang N. Prescreening and repairing in a genetic algorithm for highway alignment optimization. *Comput. Aided Civ. Infrastruct. Eng.* 2009;24(2):109–119. <https://doi.org/10.1111/j.1467-8667.2008.00574.x>
9. Pushak Y., Hare W., Lucet Y. Multiple-path selection for new highway alignments using discrete algorithms. *Eur. J. Oper. Res.* 2016;248(2):415–427. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2015.07.039>
10. Sarma K.C., Adeli H. Bilevel parallel genetic algorithms for optimization of large steel structures. *Comput. Aided Civ. Infrastruct. Eng.* 2001;16(5):295–304. <https://doi.org/10.1111/0885-9507.00234>
11. Shafahi Y., Bagherian M. A customized particle swarm method to solve highway alignment optimization problem. *Comput. Aided Civ. Infrastruct. Eng.* 2013;28(1):52–67. <https://doi.org/10.1111/j.1467-8667.2012.00769.x>
12. Bosurgi G., D'Andrea A. A polynomial parametric curve (PPC-curve) for the design of horizontal geometry of highways. *Comput. Aided Civ. Infrastruct. Eng.* 2012;27(4):303–312. <https://doi.org/10.1111/j.1467-8667.2011.00750.x>
13. Cerf R. The quasispecies regime for the simple genetic algorithm with roulette wheel Selection. Cornell University. *Adv. Appl. Probability.* 2017;49(3):903–926. <https://doi.org/10.1017/apr.2017.26>
14. Oudshoorn M., Koppenberg T., Yorke-Smith N. Optimization of annual planned rail maintenance. *Comput. Aided Civ. Infrastruct. Eng.* 2021;37(6):669–687. <https://doi.org/10.1111/mice.12764>
15. Струченков В.И. Новый алгоритм поэлементного расчета трасс в САПР линейных сооружений. *Информационные технологии.* 2015;21(4):271–276.
16. Бородакий Ю.В., Загребав А.М., Крицына Н.А., Кулябичев Ю.П., Шумилов Ю.Ю. *Нелинейное программирование в современных задачах оптимизации.* М.: НИЯУ МИФИ; 2011. 244 с. ISBN 987-5-7262-1451-1
17. Поляков В.М., Агаларов З.С. *Методы оптимизации.* М.: Дашков и К; 2022. 86 с. ISBN 978-5-3940-5003-9
18. Гасников А.В. *Современные численные методы оптимизации. Метод универсального градиентного спуска.* М.: МЦНМО; 2021. 272 с. ISBN 978-5-4439-1614-9
19. Струченков В.И. *Методы оптимизации трасс в САПР линейных сооружений.* М.: СОЛОН-Пресс; 2020. 272 с. ISBN 978-5-9135-9139-5
20. Кохендерфер М. Д., Уилер Т.А. *Алгоритмы оптимизации.* М.: Вильямс; 2020. 528 с.
21. Audet C., Hare W. *Derivative-Free and Blackbox Optimization.* Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Springer; 2017. 302 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-68913-5>
22. Чернорутский И.Г. *Методы оптимизации. Компьютерные технологии.* СПб.: БХВ-Петербург; 2011. 329 с.
23. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. *Практическая оптимизация:* пер. с англ. М.: Мир; 1985. 509 с.
24. Ларичев О.И., Горвиц Г.Г. *Методы поиска локальных экстремумов овражных функций.* М.: Наука; 1990. 96 с.

REFERENCES

1. Karpov D.A., Struchenkov V.I. Two-stage spline-approximation in linear structure routing. *Russ. Technol. J.* 2021;9(5):45–56 (in Russ.). <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2021-9-5-45-56>
2. Karpov D.A., Struchenkov V.I. Spline approximation of multivalued function in leaner structures routing. *Russ. Technol. J.* 2022;10(4):65–74 (in Russ.). <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2022-10-4-65-74>
3. Karpov D.A., Struchenkov V.I. Optimization of spline parameters in approximation of multi-valued function *Russ. Technol. J.* 2023;11(2):72–83 (in Russ.). <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2023-11-2-72-83>
4. Li W., Pu H., Schonfeld P., et al. A Method for Automatically Recreating the Horizontal Alignment Geometry of Existing Railways. *Comput. Aided Civ. Infrastruct. Eng.* 2019;34(1):71–94. <https://doi.org/10.1111/mice.12392>
5. Jha M.K., McCall C., Schonfeld P. Using GIS, genetic algorithms, and visualization in highway development. *Comput. Aided Civ. Infrastruct. Eng.* 2001;16(6):399–414. <https://doi.org/10.1111/0885-9507.00242>
6. Jha M.K., Schonfeld P. A highway alignment optimization model using geographic information systems. *Transp. Res. Part A. Policy Pract.* 2004;8(6):455–481. <https://doi.org/10.1016/j.tra.2004.04.001>
7. Jong J.C., Jha M.K., Schonfeld P. Preliminary highway design with genetic algorithms and geographic information systems. *Comput. Aided Civ. Infrastruct. Eng.* 2000;15(4):261–271. <https://doi.org/10.1111/0885-9507.00190>
8. Kang M.W., Schonfeld P., Yang N. Prescreening and repairing in a genetic algorithm for highway alignment optimization. *Comput. Aided Civ. Infrastruct. Eng.* 2009;24(2):109–119. <https://doi.org/10.1111/j.1467-8667.2008.00574.x>
9. Pushak Y., Hare W., Lucet Y. Multiple-path selection for new highway alignments using discrete algorithms. *Eur. J. Oper. Res.* 2016;248(2):415–427. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2015.07.039>
10. Sarma K.C., Adeli H. Bilevel parallel genetic algorithms for optimization of large steel structures. *Comput. Aided Civ. Infrastruct. Eng.* 2001;16(5):295–304. <https://doi.org/10.1111/0885-9507.00234>
11. Shafahi Y., Bagherian M. A customized particle swarm method to solve highway alignment optimization problem. *Comput. Aided Civ. Infrastruct. Eng.* 2013;28(1):52–67. <https://doi.org/10.1111/j.1467-8667.2012.00769.x>
12. Bosurgi G., D'Andrea A. A polynomial parametric curve (PPC-curve) for the design of horizontal geometry of highways. *Comput. Aided Civ. Infrastruct. Eng.* 2012;27(4):303–312. <https://doi.org/10.1111/j.1467-8667.2011.00750.x>
13. Cerf R. The quasispecies regime for the simple genetic algorithm with roulette wheel Selection. Cornell University. *Adv. Appl. Probability.* 2017;49(3):903–926. <https://doi.org/10.1017/apr.2017.26>
14. Oudshoorn M., Koppenberg T., Yorke-Smith N. Optimization of annual planned rail maintenance. *Comput. Aided Civ. Infrastruct. Eng.* 2021;37(6):669–687. <https://doi.org/10.1111/mice.12764>

15. Struchenkov V.I. New algorithm for perelement calculation of line structures routes. *Informacionnye tekhnologii = Information Technologies*. 2015;21(4):271–276 (in Russ.).
16. Borodakii Yu.V., Zagrebaev A.M., Kritsyna N.A., Kulyabichev Yu.P., Shumilov Yu.Yu. *Nelineinoe programmirovaniye v sovremennykh zadachakh optimizatsii (Nonlinear Programming in Modern Optimization Problem)*. Moscow: NIYAU MEPhI; 2008. 244 p. (in Russ.).
17. Polyakov V.M., Agalarov Z.S. *Metody optimizatsii (Optimization Methods)*. Moscow: Dashkov i K; 2022. 86 p. (in Russ.). ISBN 978-5-3940-5003-9
18. Gasnikov A.V. *Sovremennye chislennyye metody optimizatsii. Metod universal'nogo gradientnogo spuska (Modern Numerical Optimization Methods. Universal Gradient Method Descent)*. Moscow: MTsNMO; 2021. 272 p. (in Russ.). ISBN 978-5-4439-1614-9
19. Struchenkov V.I. *Metody optimizatsii trass v SAPR lineinykh sooruzhenii (Methods for Route Optimization in CAD of Linear Structures)*. Moscow: SOLON-Press; 2020. 272 p. (in Russ.). ISBN 978-5-9135-9139-5
20. Kochenderfer M.D., Wheeler T.A. *Algoritmy optimizatsii (Algorithms for Optimization)*. Moscow: Vil'yams; 2020. 528 p. (in Russ.).
[Kochenderfer M.D., Wheeler T.A. *Algorithms for Optimization*. London: The MIT Press; 2019. 520 p.]
21. Audet C., Hare W. *Derivative-Free and Blackbox Optimization*. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Springer; 2017. 302 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-68913-5>
22. Chernorutskii I.G. *Metody optimizatsii. Komp'yuternyye tekhnologii (Methods of Optimization. Computer Technologies)*. St. Petersburg: BHV-Petersburg; 2011. 329 p. (in Russ.).
23. Gill Ph.E., Murray W., Wright M.H. *Prakticheskaya optimizatsiya (Practical Optimization)*: transl. from Engl. Moscow: Mir; 1985. 509 p. (in Russ.).
[Gill Ph.E., Murray W., Wright M.H. *Practical Optimization*. London: Academic Press; 1981. 402 p.]
24. Larichev O.I., Gorbunov G.G. *Metody poiska lokal'nykh ekstremumov ovrazhnykh funktsii (Methods for Finding Local Extrema of Ravine Functions)*. Moscow: Nauka; 1990. 96 p. (in Russ.).

Об авторах

Струченков Валерий Иванович, д.т.н., профессор, кафедра геоинформационных систем Института радиоэлектроники и информатики ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: str1942@mail.ru. Scopus Author ID 36451166800, SPIN-код РИНЦ 4581-4698, <https://orcid.org/0000-0002-9801-7454>

Карпов Дмитрий Анатольевич, к.т.н., заведующий кафедрой геоинформационных систем Института радиоэлектроники и информатики ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: karpov@mirea.ru. Scopus Author ID 57211584863, SPIN-код РИНЦ 2619-7100, <https://orcid.org/0000-0003-3734-7182>

About the authors

Valery I. Struchenkov, Dr. Sci. (Eng.), Professor, Department of Geographic Information Systems, Institute of Radio Electronics and Informatics, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: str1942@mail.ru. Scopus Author ID 36451166800, RSCI SPIN-code 4581-4698, <https://orcid.org/0000-0002-9801-7454>

Dmitry A. Karpov, Cand. Sci. (Eng.), Head of the Department of Geographic Information Systems, Institute of Radio Electronics and Informatics, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: karpov@mirea.ru. Scopus Author ID 57211584863, RSCI SPIN-code 2619-7100, <https://orcid.org/0000-0003-3734-7182>