Russian Technological Journal.
2023;11(6):68–75

ISSN 2782-3210 (Print)
ISSN 2500-316X (Online)

Математическое моделирование
Mathematical modeling

УДК 517.926
https://doi.org/10.32362/2500-316X-2023-11-6-68-75

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Свойства определителя Вронского системы решений линейного однородного уравнения: случай, когда число решений меньше порядка уравнения

Д.А. Хрычев @

МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, 119454 Россия
@ Автор для переписки, e-mail: dakford@yandex.ru

Резюме
Цели. Целью работы является изучение свойств определителя Вронского системы решений линейного однородного дифференциального уравнения в случае, когда число решений меньше порядка уравнения, и сравнение их с известными свойствами такого же определителя, но в случае равенства числа решений порядку уравнения.
Методы. В работе использованы методы линейной алгебры и теории обыкновенных дифференциальных уравнений, а также математического и комплексного анализа.
Результаты. Показано, что обращение в нуль рассматриваемого определителя на сколь угодно малом интервале влечет за собой обращение его в нуль на всей области определения, а решения при этом оказываются линейно зависимыми. В трех случаях: 1) если коэффициенты уравнения являются аналитическими функциями, 2) если число решений равно единице и 3) если число решений на единицу меньше порядка уравнения – получен более сильный результат. Именно, если множество нулей рассматриваемого определителя Вронского имеет предельную точку, принадлежащую области определения решений, то определитель тождественно равен нулю и решения линейно зависимы.
Выводы. Полученные результаты означают, что определитель Вронского системы решений линейного однородного уравнения в ситуации, когда число решений меньше порядка уравнения, служит индикатором линейной зависимости или независимости этой системы: решения линейно зависимы тогда и только тогда, когда их определитель Вронского тождественно равен нулю. При этом нет необходимости проверять обращение определителя в нуль на всей области определения, достаточно сделать это на произвольно выбранном интервале или даже (в перечисленных выше частных случаях) на произвольно выбранном множестве, имеющем предельную точку.

Ключевые слова: линейное однородное дифференциальное уравнение, определитель Вронского, нули определителя Вронского, линейная зависимость, линейная независимость

• **Поступила:** 21.06.2023 • **Доработана:** 03.07.2023 • **Принята к опубликованию:** 04.09.2023

Для цитирования: Хрычев Д.А. Свойства определителя Вронского системы решений линейного однородного уравнения: случай, когда число решений меньше порядка уравнения. *Russ. Technol. J.* 2023;11(6):68–75. https://doi.org/10.32362/2500-316X-2023-11-6-68-75

Прозрачность финансовой деятельности: Автор не имеет финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

RESEARCH ARTICLE

Properties of the Wrońskian determinant of a system of solutions to a linear homogeneous equation: The case when the number of solutions is less than the order of the equation

Dmitry A. Khrychev @

MIREA – Russian Technological University, Moscow, 119454 Russia
@ *Corresponding author, e-mail: dakford@yandex.ru*

Abstract

Objectives. The work sets out to study the properties of the Wrońskian determinant of the system of solutions to a linear homogeneous equation in cases when the number of solutions is less than the order of the equation, comparing them with the known properties of the same determinant when the number of solutions is equal to the order of the equation.

Methods. The work uses the methods of linear algebra according to the theory of ordinary differential equations, as well as mathematical and complex analysis.

Results. It is shown that the vanishing of a considered determinant on an arbitrarily small interval implies its vanishing on the entire domain of definition; the solutions turn out to be linearly dependent. A stronger result is obtained in three cases: (1) if the coefficients of the equation are analytic functions; (2) if the number of solutions is equal to one; (3) if the number of solutions is one less than the order of the equation. Namely, if the set of zeros of the considered Wrońskian has a limit point belonging to the domain of definition of solutions, then the determinant is identically equal to zero and the solutions are linearly dependent.

Conclusions. According to the obtained results, the Wrońskian of a system of solutions of a linear homogeneous equation can serve as an indicator of the linear dependence or independence of this system in cases where the number of solutions is lower than the order of the equation; here, the solutions are linearly dependent if and only if their Wrońskian is identically equal to zero. In this case, there is no need to check whether the determinant vanishes over the entire domain of definition, since it is sufficient to do this on an arbitrarily chosen interval or even (in the special cases listed above) on an arbitrarily chosen set having a limit point.

Keywords: linear homogeneous differential equation, Wrońskian, zeros of the Wrońskian, linear dependence, linear independence

• **Submitted:** 21.06.2023 • **Revised:** 03.07.2023 • **Accepted:** 04.09.2023

For citation: Khrychev D.A. Properties of the Wrońskian determinant of a system of solutions to a linear homogeneous equation: The case when the number of solutions is less than the order of the equation. *Russ. Technol. J.* 2023;11(6):68–75. https://doi.org/10.32362/2500-316X-2023-11-6-68-75

Financial disclosure: The author has no a financial or property interest in any material or method mentioned.

The author declares no conflicts of interest.

ВВЕДЕНИЕ

Одним из основных инструментов математического моделирования являются обыкновенные дифференциальные уравнения, которые служат моделями для описания самых разнообразных явлений и процессов [1–5]. В свою очередь, важным инструментом исследования дифференциальных уравнений, прежде всего в плане проверки линейной зависимости или независимости их решений, является определитель Вронского.

Напомним, что определителем Вронского системы функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_k(x)$, $x \in (a, b)$, называется функция

$$W(x) = W_{y_1, y_2, \ldots, y_k}(x) = \\ = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_k(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_k'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(k-1)}(x) & y_2^{(k-1)}(x) & \ldots & y_k^{(k-1)}(x) \end{vmatrix}. \quad (1)$$

Теория определителей Вронского излагается практически в каждом учебнике по обыкновенным дифференциальным уравнениям [6–12], при этом речь в них идет, за малым исключением, об определителях, составленных по n решениям линейного однородного уравнения порядка n. Такие определители обладают замечательными свойствами, позволяющими использовать их как индикаторы линейной зависимости или независимости рассматриваемой системы решений. Именно, система n решений линейного однородного уравнения порядка n линейно зависима тогда и только тогда, когда определитель Вронского этой системы тождественно равен нулю, и линейно независима тогда и только тогда, когда ее определитель Вронского не равен нулю ни в одной точке области определения рассматриваемых решений. При этом хорошо известно (см. соответствующие примеры в [6, 9, 12]), что для определителя Вронского системы функций, не являющихся решениями линейного однородного уравнения, ситуация совершенно иная: определитель может обращаться в нуль, причем даже тождественно, при том, что функции являются линейно независимыми. Т.е. если определитель Вронского некоторой системы функций окажется тождественно равным нулю, мы не получим с его помощью ответа на вопрос о линейной зависимости или независимости этой системы.

Возникает естественный вопрос: сохранятся ли «хорошие» свойства определителя Вронского системы решений линейного однородного уравнения порядка n, если вместо n мы возьмем $k < n$ решений? Можно ли определитель Вронского такой системы столь же эффективно использовать для выяснения ее линейной зависимости или независимости? Вопрос этот сформулирован, например, в [9], при этом изучение его ограничилось приведением примера, показывающего, что определитель Вронского линейно независимой системы из $k < n$ решений (в примере $k = 2$ и $n = 3$), в отличие от линейно независимой системы из n решений, может обращаться в нуль в каких-то точках его области определения.

Несложно привести пример, причем для произвольных n и $k < n$, когда определитель Вронского линейно независимой системы решений обращается в нуль даже в бесконечном множестве точек. Рассмотрим уравнение $y^{(n)} + y^{(n-2)} = 0$, фундаментальную систему решений которого составляют функции $1, x, x^2, \ldots, x^{n-3}, \sin x, \cos x$. Для произвольного $k \le n - 1$ возьмем набор из k решений $1, x, x^2, \ldots, x^{k-2}, \sin x$ (для $k = 1$ берем одно решение $\sin x$), определитель Вронского которого с точностью до числового множителя совпадает либо с $\sin x$, либо с $\cos x$ и, значит, имеет бесконечное множество нулей на числовой оси.

Определитель Вронского системы из $(n - 1)$-го решения линейного однородного уравнения порядка n изучался в работе [13], где, в частности, было показано, что в случае линейной независимости такой системы ее определитель Вронского не может иметь бесконечное число нулей ни на одном конечном отрезке.

В настоящей работе рассматривается случай произвольного числа решений, меньшего порядка уравнения n. Основной результат содержится в теореме 1, утверждающей, что равенство нулю определителя Вронского такой системы решений на каком-нибудь интервале влечет ее линейную зависимость. Таким образом, в случае линейной независимости решений определитель Вронского не может обращаться в нуль ни на одном, даже сколь угодно малом, интервале.

В теореме 2 показано, что в ряде частных случаев, в т.ч. и в упомянутом выше случае $k = n - 1$, этот результат может быть усилен. Именно, множество нулей определителя Вронского линейно независимой системы решений не может иметь предельных точек на его области определения, и, значит, не может иметь бесконечного числа нулей ни на одном конечном отрезке. Для случая $k = n - 1$ приводится доказательство, отличное от содержащегося в [13] и позволяющее ослабить условия на коэффициенты уравнения.

Таким образом, можно сказать, что определитель Вронского системы из $k < n$ решений линейного однородного уравнения порядка n по своим свойствам занимает промежуточное положение между определителем Вронского произвольной системы функций и определителем Вронского системы из n решений, причем эти свойства позволяют использовать такой определитель для выяснения линейной зависимости или независимости рассматриваемой системы решений.

ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Рассмотрим линейное однородное уравнение n-го порядка:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x)y = 0, \quad (2)$$

коэффициенты которого $a_{n-1}(x), \ldots, a_0(x) \in C(a, b)$, $-\infty \le a < b \le +\infty$. Как известно, любое решение такого уравнения продолжается на весь интервал (a, b). Далее будем рассматривать только решения, заданные на (a, b).

Пусть $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_k(x)$ – решения уравнения (2), $k \le n - 1$, $W_{y_1,y_2,\ldots,y_k}(x)$ – их определитель Вронского (1). Мы будем рассматривать также определители вида

$$W^{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k}_{y_1,y_2,\ldots,y_k}(x)=\begin{vmatrix} y_1^{(\alpha_1)}(x) & y_2^{(\alpha_1)}(x) & \ldots & y_k^{(\alpha_1)}(x) \\ y_1^{(\alpha_2)}(x) & y_2^{(\alpha_2)}(x) & \ldots & y_k^{(\alpha_2)}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(\alpha_k)}(x) & y_2^{(\alpha_k)}(x) & \ldots & y_k^{(\alpha_k)}(x) \end{vmatrix},$$

где $0 \le \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \le n$. Понятно, что если среди чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ есть совпадающие, то $W^{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k}_{y_1,y_2,\ldots,y_k}(x) \equiv 0$. Определители $W^{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k}_{y_1,y_2,\ldots,y_k}$, у которых $0 \le \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_k \le n - 1$, будем называть *обобщенными определителями Вронского*. Очевидно, имеется ровно C_n^k различных обобщенных определителей Вронского системы из k решений, включая сам определитель Вронского $W_{y_1,y_2,\ldots,y_k} = W^{0,1,\ldots,k-1}_{y_1,y_2,\ldots,y_k}$. Заметим, что в случае линейной зависимости системы решений $y_1, y_2, \ldots, y_k$ на некотором интервале $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ (а значит, в силу теоремы единственности решения задачи Коши, и на всем интервале (a, b)) все ее обобщенные определители Вронского тождественно равны нулю на (a, b).

ЛЕММА 1. Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_k$, $k \le n - 1$ – решения уравнения (2), и пусть определитель $W_{y_1,y_2,\ldots,y_k}(x)$ тождественно равен нулю на некотором интервале $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$. Тогда для произвольного решения y_{k+1} все обобщенные определители Вронского системы решений $y_1, y_2, \ldots, y_{k+1}$ тождественно равны нулю на (a, b).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по k. Для $k = 1$ утверждение справедливо в силу теоремы единственности решения задачи Коши. Предположим, что оно верно для некоторого $k \le n - 2$, и докажем справедливость его для $k + 1$.

Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_{k+1}$ – решения (2) и

$$W_{y_1,\ldots,y_{k+1}}(x)=0 \quad \forall x\in(\alpha,\beta)\subset(a,b). \qquad (3)$$

Возьмем определитель на единицу меньшего порядка $W_{y_1,\ldots,y_k}(x)$. Возможны два варианта: либо $W_{y_1,\ldots,y_k}(x) \equiv 0$ на интервале (α, β), либо в некоторой точке $x_0 \in (\alpha, \beta)$ $W_{y_1,\ldots,y_k}(x_0) \ne 0$. Рассмотрим эти случаи.

1. Пусть $W_{y_1,\ldots,y_k}(x)=0 \ \forall x\in(\alpha,\beta)$. Тогда по индуктивному предположению все обобщенные определители Вронского решений $y_1, y_2, \ldots, y_{k+1}$ тождественно равны нулю на (a, b). Возьмем произвольное решение y_{k+2} и рассмотрим обобщенный определитель Вронского $W^{\alpha_1,\ldots,\alpha_{k+2}}_{y_1,\ldots,y_{k+2}}$. Разлагая его по последнему столбцу, получим:

$$W^{\alpha_1,\ldots,\alpha_{k+2}}_{y_1,\ldots,y_{k+2}}(x)=$$

$$=\begin{vmatrix} y_1^{(\alpha_1)}(x) & y_2^{(\alpha_1)}(x) & \ldots & y_{k+2}^{(\alpha_1)}(x) \\ y_1^{(\alpha_2)}(x) & y_2^{(\alpha_2)}(x) & \ldots & y_{k+2}^{(\alpha_2)}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(\alpha_{k+2})}(x) & y_2^{(\alpha_{k+2})}(x) & \ldots & y_{k+2}^{(\alpha_{k+2})}(x) \end{vmatrix}=$$

$$=(-1)^{k+3}\, y_{k+2}^{(\alpha_1)}(x) W^{\alpha_2,\ldots,\alpha_{k+2}}_{y_1,\ldots,y_{k+1}}(x)+$$

$$+(-1)^{k+4}\, y_{k+2}^{(\alpha_2)}(x) W^{\alpha_1,\alpha_3,\ldots,\alpha_{k+2}}_{y_1,\ldots,y_{k+1}}(x)+\ldots+$$

$$+\ y_{k+2}^{(\alpha_{k+2})}(x) W^{\alpha_1,\ldots,\alpha_{k+1}}_{y_1,\ldots,y_{k+1}}(x)=0\ \forall x\in(a,b),$$

и тем самым утверждение леммы доказано.

2. Пусть теперь $W_{y_1,\ldots,y_k}(x_0)\ne 0$ в точке $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Тогда в силу непрерывности $W_{y_1,\ldots,y_k}(x)\ne 0$ на некотором содержащем точку x_0 интервале (α_1, β_1). Покажем, что на этом интервале функции $y_1, y_2, \ldots, y_{k+1}$ линейно зависимы.

В силу (3) в каждой точке $x \in (\alpha, \beta)$ столбцы определителя $W_{y_1,\ldots,y_{k+1}}(x)$ линейно зависимы, т.е. существует набор не равных одновременно нулю чисел $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots, \lambda_{k+1}(x)$ (вообще говоря, свой для каждой точки x), такой что

$$\begin{cases} \lambda_1(x)y_1(x)+\ldots+\lambda_{k+1}(x)y_{k+1}(x)=0, \\ \ldots \\ \lambda_1(x)y_1^{(k)}(x)+\ldots+\lambda_{k+1}(x)y_{k+1}^{(k)}(x)=0. \end{cases} \qquad (4)$$

Заметим, что при $x \in (\alpha_1, \beta_1)$ $\lambda_{k+1}(x) \ne 0$. Действительно, в противном случае из первых k равенств (4) получим

$$\begin{cases} \lambda_1(x)y_1(x)+\ldots+\lambda_k(x)y_k(x)=0, \\ \ldots \\ \lambda_1(x)y_1^{(k-1)}(x)+\ldots+\lambda_k(x)y_k^{(k-1)}(x)=0, \end{cases} \qquad (5)$$

откуда $\lambda_1(x) = \lambda_2(x) = \ldots = \lambda_k(x) = 0$, поскольку определителем системы (5) является не равный нулю на интервале (α_1, β_1) определитель $W_{y_1,\ldots,y_k}(x)$.

Для каждого $x \in (\alpha_1, \beta_1)$ разрешим уравнения системы (4) относительно функции y_{k+1} и ее производных:

$$\begin{cases} y_{k+1}(x) = \mu_1(x)y_1(x) + \ldots + \mu_k(x)y_k(x), \\ y'_{k+1}(x) = \mu_1(x)y'_1(x) + \ldots + \mu_k(x)y'_k(x), \\ \ldots \\ y^{(k)}_{k+1}(x) = \mu_1(x)y^{(k)}_1(x) + \ldots + \mu_k(x)y^{(k)}_k(x), \end{cases} \quad (6)$$

где $\mu_i(x) = -\lambda_i(x)/\lambda_{k+1}(x), i = \overline{1,k}$. Рассматривая первые k равенств в (6) как систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\mu_1(x), \ldots, \mu_k(x)$, причем все с тем же ненулевым определителем $W_{y_1,\ldots,y_k}(x)$, получим

$$\mu_i(x) = \frac{W_{y_1,\ldots,y_{i-1},y_{k+1},y_{i+1},\ldots,y_k}(x)}{W_{y_1,\ldots,y_k}(x)}, \; i = \overline{1,k},$$

откуда, в частности, следует, что $\mu_i(x) \in C^1(\alpha_1, \beta_1)$.

Далее поступим следующим образом. Продифференцируем обе части первого уравнения из (6) и из полученного равенства вычтем второе уравнение: $0 = \mu'_1(x)y_1(x) + \ldots + \mu'_k(x)y_k(x)$, $x \in (\alpha_1, \beta_1)$. То же самое сделаем со вторым и третьим уравнением, третьим и четвертым и т.д. В итоге получим однородную систему уравнений относительно производных $\mu'_1(x), \ldots, \mu'_k(x)$:

$$\begin{cases} 0 = \mu'_1(x)y_1(x) + \ldots + \mu'_k(x)y_k(x), \\ 0 = \mu'_1(x)y'_1(x) + \ldots + \mu'_k(x)y'_k(x), \\ \ldots \\ 0 = \mu'_1(x)y^{(k-1)}_1(x) + \ldots + \mu'_k(x)y^{(k-1)}_k(x), \end{cases}$$

определителем которой снова является $W_{y_1,\ldots,y_k}(x) \neq 0$. Отсюда заключаем, что $\mu'_1(x) = \ldots = \mu'_k(x) = 0 \quad \forall x \in (\alpha_1, \beta_1)$, а значит $\mu_1(x), \ldots, \mu_k(x)$ суть константы. Поэтому в силу первого равенства из (6) решения $y_1, y_2, \ldots, y_{k+1}$ оказываются линейно зависимыми на интервале (α_1, β_1) и, следовательно, на (a, b). Если теперь взять произвольное решение y_{k+2}, то все обобщенные определители Вронского линейно зависимой системы $y_1, \ldots, y_{k+1}, y_{k+2}$ будут тождественно равняться нулю на (a, b). Лемма доказана.

Теперь несложно установить основной результат работы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_k(x)$, $k \leq n-1$ – решения уравнения (2), и пусть $W_{y_1,\ldots,y_k}(x) = 0 \;\; \forall x \in (\alpha, \beta) \subset (a, b)$. Тогда функции $y_1, y_2, \ldots, y_k$ линейно зависимы на интервале (a, b).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что решения $y_1, y_2, \ldots, y_k$ линейно независимы. Дополним систему $y_1, y_2, \ldots, y_k$ до фундаментальной системы решений $y_1, y_2, \ldots, y_k, y_{k+1}, \ldots, y_n$ уравнения (2). Применяя последовательно лемму 1, заключаем, что $W_{y_1,\ldots,y_{k+1}}(x) \equiv 0$, $W_{y_1,\ldots,y_{k+2}}(x) \equiv 0$, $\ldots$, $W_{y_1,\ldots,y_n}(x) \equiv 0$ на (a, b). Но равенство нулю определителя Вронского системы n решений даже в одной точке означает их линейную зависимость. Полученное противоречие доказывает теорему.

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

Следующий результат показывает, что в ряде случаев для линейной зависимости решений $y_1, y_2, \ldots, y_k$ достаточно обращения в нуль определителя Вронского $W_{y_1,\ldots,y_k}(x)$ на множестве, имеющем предельную точку.

ТЕОРЕМА 2. Пусть множество нулей определителя Вронского $W_{y_1,\ldots,y_k}(x)$ решений $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_k(x)$, $k \leq n-1$, уравнения (2) имеет предельную точку $x_0 \in (a, b)$. Пусть, далее, выполнено одно из следующих условий: (а) коэффициенты уравнения (2) – аналитические функции (в частности, коэффициенты постоянны) на интервале (a, b); (б) $k = 1$; (в) $k = n-1$, а коэффициенты уравнения (2) удовлетворяют следующим условиям гладкости:

$$a_0(x) \in C(a,b), \;\; a_l(x) \in C^{l-1}(a,b),$$
$$l = 1, 2, \ldots, n-2, \;\; a_{n-1}(x) \in C^{n-3}(a,b).$$

Тогда решения $y_1, y_2, \ldots, y_k$ линейно зависимы на (a, b).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае выполнения условия (а) все решения уравнения (2) являются аналитическими на интервале (a, b) функциями ([14], гл. 1, § 6), а потому и определитель Вронского $W_{y_1,\ldots,y_k}(x)$ аналитичен на (a, b). По теореме единственности для аналитических функций ([15], гл. I, § 5, п. 20) $W_{y_1,\ldots,y_k}(x) \equiv 0$ на интервале (a, b), и остается сослаться на теорему 1.

Пусть выполнено условие (б), т.е. $k = 1$. Определитель Вронского одного решения суть само это решение, поэтому наше утверждение является очевидным следствием теоремы единственности решения задачи Коши.

Рассмотрим, наконец, случай (в). Заметим, что результатом дифференцирования любого обобщенного определителя Вронского $W^{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}_{y_1,\ldots,y_k}$ является линейная комбинация некоторого набора обобщенных определителей Вронского тех же решений $y_1, y_2, \ldots, y_k$. Действительно, если в нашем определителе $\alpha_k < n-1$, то

$$\frac{d}{dx} W^{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k}_{y_1,y_2,\ldots,y_k} = W^{\alpha_1+1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k}_{y_1,y_2,\ldots,y_k} + W^{\alpha_1,\alpha_2+1,\ldots,\alpha_k}_{y_1,y_2,\ldots,y_k} + \ldots + W^{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k+1}_{y_1,y_2,\ldots,y_k}, \quad (7)$$

причем какие-то из полученных определителей могут оказаться равными нулю ввиду наличия в них совпадающих строк. Если же $\alpha_k = n - 1$, то в последней строке последнего определителя в (7) будут стоять уже n-е производные функций $y_1, y_2, \ldots, y_k$. Заменяя n-ю производную каждого решения линейной комбинацией производных меньшего порядка в силу уравнения (2), получим

$$W^{\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1},n}_{y_1,y_2,\ldots,y_k} = -a_{n-1}W^{\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1},n-1}_{y_1,y_2,\ldots,y_k} - - a_{n-2}W^{\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1},n-2}_{y_1,y_2,\ldots,y_k} - \ldots - a_0 W^{\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1},0}_{y_1,y_2,\ldots,y_k}. \quad (8)$$

Каждый из стоящих в правой части (8) определителей либо равен нулю, либо с точностью до знака совпадает с одним из обобщенных определителей Вронского решений $y_1, \ldots, y_k$.

Применим сделанные наблюдения к случаю $k = n - 1$. Заметим, что существует ровно n различных обобщенных определителей Вронского решений $y_1, \ldots, y_{n-1}$ уравнения (2): сам определитель Вронского $W_{y_1,\ldots,y_{n-1}} = W^{0,1,\ldots,n-2}_{y_1,\ldots,y_{n-1}}$, определители вида $W^{0,1,\ldots,l-1,l+1,\ldots,n-1}_{y_1,\ldots,y_{n-1}}$, $l = \overline{1, n-2}$, и, наконец, $W^{1,2,\ldots,n-1}_{y_1,\ldots,y_{n-1}}$. Упростим обозначения, положив $W_{y_1,\ldots,y_{n-1}} = W$, $W^{0,1,\ldots,l-1,l+1,\ldots,n-1}_{y_1,\ldots,y_{n-1}} = W_l$ и $W^{1,2,\ldots,n-1}_{y_1,\ldots,y_{n-1}} = W_0$. Дифференцируя определители W и W_l согласно формулам (7) и (8) и отбрасывая возникающие при этом равные нулю определители, получим:

$$W' = W_{n-2}, \quad (9)$$

$$W_l' = W_{l-1} - a_{n-1}W_l - (-1)^{n-l} a_l W, \quad l = \overline{n-2, 1}. \quad (10)$$

Покажем теперь, что производные определителя Вронского W порядка от 2 до $n-1$ выражаются через обобщенные определители Вронского с помощью формул:

$$W^{(j)} = W_{n-j-1} + \sum_{l=n-j}^{n-2} \alpha_{jl}(x) W_l + \beta_j(x) W, \quad j = \overline{2, n-1}, \quad (11)$$

где функции $\alpha_{jl}(x), \beta_j(x) \in C^{n-j-1}(a,b)$ (выражение для первой производной у нас уже есть – формула (9)).

Действительно, формулу для W'' получим, дифференцируя (9) и заменяя W'_{n-2} согласно (10): $W'' = W_{n-3} - a_{n-1}W_{n-2} - a_{n-2}W$, что соответствует (11), причем коэффициенты при определителях в правой части являются функциями класса $C^{n-3}(a,b)$ в силу условия теоремы. Далее, если предположить, что формула (11) верна для некоторого j, $2 \le j \le n-2$, то, дифференцируя обе ее части и пользуясь (10), получим:

$$W^{(j+1)} = W_{n-j-2} - a_{n-1}W_{n-j-1} - (-1)^{j+1} a_{n-j-1} W + + \sum_{l=n-j}^{n-2} [\alpha'_{jl} W_l + \alpha_{jl}(W_{l-1} - a_{n-1}W_l - (-1)^{n-l} a_l W)] + + \beta'_j W + \beta_j W_{n-2} = W_{n-j-2} + \sum_{l=n-j-1}^{n-2} \alpha_{j+1,l} W_l + \beta_{j+1} W,$$

где $\alpha_{j+1,n-j-1} = -a_{n-1} + \alpha_{j,n-j}$, $\alpha_{j+1,l} = \alpha'_{jl} - \alpha_{jl}a_{n-1} + + \alpha_{j,l+1}$, $l = n-j, n-j+1, \ldots, n-3$ (для $j \ge 3$), $\alpha_{j+1,n-2} = \alpha'_{j,n-2} - \alpha_{j,n-2}a_{n-1} + \beta_j$,

$$\beta_{j+1} = (-1)^j a_{n-j-1} - \sum_{l=n-j}^{n-2} (-1)^{n-l} \alpha_{jl} a_l + \beta'_j.$$

Легко видеть, что в силу индуктивного предположения и условий теоремы относительно гладкости коэффициентовуравнения $\alpha_{j+1,l}, \beta_{j+1} \in C^{n-j-2}(a,b)$, и тем самым (11) доказано.

Положим теперь в (9) и (11) $x = x_0$. Точка x_0, являясь предельной для нулей функции $W(x)$, является таковой, в силу теоремы Ролля, и для нулей ее производных $W'(x), \ldots, W^{(n-1)}(x)$. Отсюда в силу непрерывности $W(x_0) = W'(x_0) = \ldots = W^{(n-1)}(x_0) = 0$. Получаем линейную однородную систему алгебраических уравнений относительно неизвестных $W_{n-2}(x_0), W_{n-3}(x_0), \ldots, W_0(x_0)$ с отличным от нуля треугольным определителем:

$$0 = W_{n-2}(x_0),$$

$$0 = W_{n-j-1}(x_0) + \sum_{l=n-j}^{n-2} \alpha_{jl}(x_0) W_l(x_0), \quad j = \overline{2, n-1},$$

откуда $W_{n-2}(x_0) = W_{n-3}(x_0) = \ldots = W_0(x_0) = 0$.

Далее пользуемся уже знакомым нам приемом: предположив, что решения $y_1, \ldots, y_{n-1}$ линейно независимы, добавляем к ним еще одно решение для получения фундаментальной системы решений $y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n$ и, разлагая определитель $W_{y_1,\ldots,y_n}$ по последнему столбцу, получаем $W_{y_1,\ldots,y_n}(x_0) = 0$, что означает линейную зависимость $y_1, \ldots, y_n$. Полученное противоречие доказывает линейную зависимость решений $y_1, \ldots, y_{n-1}$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_k(x)$, $x \in (a, b)$ – линейно независимые решения уравнения (2). Тогда их определитель Вронского $W(x) = W_{y_1, y_2, \ldots, y_k}(x)$ не может тождественно обращаться в нуль ни на одном интервале $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$. Если же выполнено одно из условий (а), (б) или (в) теоремы 2, то множество нулей определителя $W(x)$ не может иметь предельных точек на интервале (a, b), или, что эквивалентно, $W(x)$ не может иметь бесконечного числа нулей ни на одном отрезке $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из изложенных выше результатов следует, что определитель Вронского системы решений линейного однородного уравнения в ситуации, когда число решений меньше порядка уравнения, может использоваться для проверки линейной зависимости или независимости этой системы: решения линейно зависимы тогда и только тогда, когда их определитель Вронского тождественно равен нулю, и независимы, если определитель отличен от нуля хотя бы в одной точке. При этом, как показывают теоремы 1 и 2, проверка тождественного равенства нулю определителя Вронского на всей области определения может быть заменена проверкой равенства его нулю на существенно меньшем множестве, что облегчает практическое применение полученных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский А.А., Михайлов А.П. *Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры.* М.: Физматлит; 2005. 320 с.
2. Амелькин В.В. *Дифференциальные уравнения в приложениях.* М.: URSS; 2021. 206 с.
3. Эндрюс Дж., Мак-Лоун Р. (ред.). *Математическое моделирование*; пер. с англ. М.: Мир; 1979. 278 с.
4. Saaty T.L., Alexander J.M. *Thinking with Models: Mathematical Models in the Physical, Biological and Social Sciences.* N.Y.: Pergamon Press; 1981. 187 p.
5. Gershenfeld N.A. *The Nature of Mathematical Modeling*. Cambridge University Press; 1998. 356 p.
6. Петровский И.Г. *Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.* М.: URSS; 2022. 240 с.
7. Камке Э. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.* СПб.: Лань; 2003. 576 с.
8. Романко В.К. *Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления.* М.: Лаборатория знаний; 2022. 344 с.
9. Филиппов А.Ф. *Введение в теорию дифференциальных уравнений.* М.: URSS; 2022. 248 с.
10. Понтрягин Л.С. *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. М.: URSS; 2023. 336 с.
11. Арнольд В.И. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* М.: Наука; 1984. 272 с.
12. Эльсгольц Л.Э. *Дифференциальные уравнения*. М.: URSS; 2023. 312 с.
13. Марченко Е.П. Свойства определителя Вронского системы функций, состоящей из (n–1)-го решения линейного однородного уравнения порядка n. *Научный альманах.* 2017;10–2(36):155–167. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=30675761
14. Голубев В.В. *Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений.* М.: URSS; 2021. 440 с.
15. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. *Методы теории функций комплексного переменного*. М.: Лань; 2002. 688 с.

REFERENCES

1. Samarskii A.A., Mikhailov A.P. *Principles of Mathematical Modeling: Ideas, Methods, Examples.* London, New York: Taylor & Francis; 2012. 349 p.
[Original Russian Text: Samarskii A.A., Mikhailov A.P. *Matematicheskoe modelirovanie: Idei. Metody. Primery* (*Principles of Mathematical Modeling: Ideas, Methods, Examples*). Moscow: Fizmatlit; 2005. 320 p. (in Russ.).]
2. Amel’kin V.V. *Differentsial’nye uravneniya v prilozheniyakh* (*Differential Equations in Applications*). Moscow: URSS; 2021. 206 p. (in Russ.).
3. Andrews J.G., McLone R.R. (Eds.). *Matematicheskoe modelirovanie* (*Mathematical Modeling*). Transl. from Engl. Moscow; Mir; 1979. 278 p. (in Russ.).
[Andrews J.G., McLone R.R. (Eds.). *Mathematical Modeling.* London, Boston: Butterworths; 1976. 260 p.]
4. Saaty T.L., Alexander J.M. *Thinking with Models: Mathematical Models in the Physical, Biological and Social Sciences.* N.Y.: Pergamon Press; 1981. 187 p.
5. Gershenfeld N.A. *The Nature of Mathematical Modeling*. Cambridge University Press; 1998. 356 p.
6. Petrovskii I.G. *Lektsii po teorii obyknovennykh differentsial’nykh uravnenii* (*Lectures on the Theory of Ordinary Differential Equations*). Moscow: URSS; 2022. 240 p. (in Russ.).
7. Kamke E. *Spravochnik po obyknovennym differentsial’nym uravneniyam* (*Handbook of Ordinary Differential Equations*). St. Petersburg: Lan; 2003. 576 p. (in Russ.).
8. Romanko V.K. *Kurs differentsial’nykh uravnenii i variatsionnogo ischisleniya* (*Course of Differential Equations and Calculus of Variations*). Moscow: Laboratoriya znanii; 2022. 344 p. (in Russ.).
9. Filippov A.F. *Vvedenie v teoriyu differentsial’nykh uravnenii* (*Introduction to the Theory of Differential Equations*). M.: URSS; 2022. 248 p. (in Russ.).
10. Pontryagin L.S. *Obyknovennye differentsial’nye uravneniya* (*Ordinary Differential Equations*). Moscow: URSS; 2023. 336 p. (in Russ.).

11. Arnold V.I. *Ordinary Differential Equations*. Verlag, Berlin, Heidelberg: Springer; 1992. 338 p.
[Original Russian Text: Arnold V.I. *Obyknovennye differentsial'nye uravneniya* (*Ordinary Differential Equations*). Moscow: Nauka; 1984. 272 p. (in Russ.)]
12. Elsgolts L.E. *Differentsial'nye uravneniya* (*Differential equations*). M.: URSS; 2023. 312 p. (in Russ.).
13. Marchenko E.P. Properties of the Wronskian system functions consisting of the (*n*–1)th solution of a linear homogeneous equation of order *n*. *Nauchnyi almanakh = Science Almanac*. 2017;10–2(36):155–167 (in Russ.). Available from URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=30675761
14. Golubev V.V. *Lektsii po analiticheskoi teorii differentsial'nykh uravnenii* (*Lectures on the Analytical Theory of Differential Equations*). M.: URSS; 2021. 440 p. (in Russ.).
15. Lavrentiev M.A., Shabat B.V. *Metody teorii funktsii kompleksnogo peremennogo* (*Methods of the Theory of Functions of a Complex Variable*). M.: Lan; 2002. 688 p. (in Russ.).

Об авторе

Хрычев Дмитрий Аркадьевич, к.ф.-м.н., доцент, кафедра высшей математики Института искусственного интеллекта ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: dakford@yandex.ru. Scopus Author ID 6507535823, https://orcid.org/0009-0006-0472-9845

About the author

Dmitry A. Khrychev, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor, Higher Mathematics Department, Institute of Artificial Intelligence, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: dakford@yandex.ru. Scopus Author ID 6507535823, https://orcid.org/0009-0006-0472-9845