

Математическое моделирование
Mathematical modeling

УДК 629.78
<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2023-11-6-47-56>



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Математическое моделирование полей скоростей и ускорений движения изображения в оптической аппаратуре спутника дистанционного зондирования Земли

С.Ю. Горчаков[@]

МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, 119454 Россия

[@] Автор для переписки, e-mail: sygorchakov@yandex.ru

Резюме

Цели. В статье рассматривается спутник с оптико-электронной аппаратурой, предназначенной для съемки поверхности Земли. Цель статьи – разработка математической модели для определения зависимостей между вектором состояния спутника, вектором состояния снимаемой точки на земной поверхности и полями распределений векторов скоростей и ускорений движения изображения по фокальной плоскости оптико-электронной аппаратуры.

Методы. Используемый метод основан на двойном дифференцировании уравнения фотограмметрии при применении его к съемке поверхности Земли из космоса. Для построения модели орбитального и углового движений спутника применяются дифференциальные уравнения с численным интегрированием. Параметры вращения Земли и движения земной поверхности вычисляются на основе библиотеки программ Standards of Fundamental Astronomy.

Результаты. Получены дифференциальные уравнения движения изображения. Проведена верификация разработанной математической модели. Проведено моделирование движения спутника в режиме орбитальной ориентации и в режиме компенсации скорости движения изображения. Построены поля распределения векторов скоростей и ускорений движения изображения поверхности Земли. Исследовано остаточное поле движения изображения после компенсации.

Выводы. Предложенная математическая модель может найти применение как на этапе проектирования спутника с оптико-электронной аппаратурой при моделировании режимов съемки и оценках смещений изображения, так и на этапе эксплуатации спутника при применении представленной модели в бортовом программном обеспечении спутника. Представленные зависимости также можно использовать для построения матрицы сдвига изображения в задачах восстановления изображения и получения сверхразрешения.

Ключевые слова: дистанционное зондирование Земли, спутник, изображения ландшафтов Земли, математическая модель, поле скоростей движения изображения, поле ускорений движения изображения, сверхразрешение

• Поступила: 25.07.2022 • Доработана: 04.05.2023 • Принята к опубликованию: 07.09.2023

Для цитирования: Горчаков С.Ю. Математическое моделирование полей скоростей и ускорений движения изображения в оптической аппаратуре спутника дистанционного зондирования Земли. *Russ. Technol. J.* 2023;11(6):47–56. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2023-11-6-47-56>

Прозрачность финансовой деятельности: Автор не имеет финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

RESEARCH ARTICLE

Mathematical modeling of velocity and accelerations fields of image motion in the optical equipment of the Earth remote sensing satellite

Sergei Yu. Gorchakov[@]

MIREA – Russian Technological University, Moscow, 119454 Russia

[@] Corresponding author, e-mail: sygorchakov@yandex.ru

Abstract

Objectives. The paper considers a satellite with an optoelectronic payload designed to take pictures of the Earth's surface. The work sets out to develop a mathematical model for determining the dependencies between the state vector of the satellite, the state vector of the point being imaged on the Earth's surface, and the distribution fields of the velocity vectors and accelerations of the motion of the image along the focal plane of the optoelectronic payload.

Methods. The method is based on double differentiation of the photogrammetry equation when applied to a survey of the Earth's surface from space. For modeling the orbital and angular motion of the satellite, differential equations with numerical integration were used. The motion parameters of the Earth's surface were calculated based on the Standards of Fundamental Astronomy software library.

Results. Differential equations of motion of the image were obtained. Verification of the developed mathematical model was carried out. The motion of the considered satellite was simulated in orbital orientation mode using an image velocity compensation model. The distribution fields of velocity vectors and accelerations of motion of the image of the Earth's surface were constructed. The residual motion of the field of image following compensation was investigated.

Conclusions. The proposed mathematical model can be used both with an optoelectronic payload when modeling shooting modes and estimating image displacements at the design stage of a satellite, as well as at the satellite operation stage when incorporating the presented model in the onboard satellite software. The presented dependencies can also be used to construct an image transformation matrix, both when restoring an image and when obtaining a super-resolution.

Keywords: remote sensing of the Earth, satellite, images of Earth's landscapes, mathematical model, image velocity field, image acceleration field, super-resolution

• Submitted: 25.07.2022 • Revised: 04.05.2023 • Accepted: 07.09.2023

For citation: Gorchakov S.Yu. Mathematical modeling of velocity and accelerations fields of image motion in the optical equipment of the Earth remote sensing satellite. *Russ. Technol. J.* 2023;11(6):47–56. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2023-11-6-47-56>

Financial disclosure: The author has no a financial or property interest in any material or method mentioned.

The author declares no conflicts of interest.

ВВЕДЕНИЕ

В статье рассматривается спутник со съемочной оптико-электронной аппаратурой (ОЭА) высокого разрешения с фоточувствительными приборами с зарядовой связью (ФПЗС), работающими в режиме временной задержки и накопления (ВЗН) заряда (time delay and integration). Технология ВЗН основана на многократной экспозиции одного и того же объекта, что существенно повышает соотношение сигнал/шум и может находить применение при сканировании сцен с низкой освещенностью, но накладывает ограничения на ее применение: необходимо обеспечить движение проецируемого изображения объекта в соответствии с движением зарядовых пакетов на фотоприемниках¹.

Точность, с которой известна скорость движения изображения (СДИ), резко ограничивает использование технологии ВЗН. Необходимо обеспечить такие поля векторов СДИ на ФПЗС, чтобы накопленный сдвиг за время экспозиции не превышал $\sim 1/3$ пиксела [1].

Из основных составляющих суперпозиции движения зарядовых пакетов по ФПЗС за время экспозиции выделяют орбитальное и угловое движения спутника, кривизну поверхности Земли и ее вращение, погрешности функционирования системы управления ориентацией и стабилизацией (СУОС) спутника.

Вопросами вычисления СДИ занимались многие авторы. Вычисление полей СДИ рассмотрено в [2–4]. Так, в работах [2, 3, 5] рассмотрены задачи вычисления поля СДИ, когда спутник движется в центральном гравитационном поле.

Компенсация полей СДИ рассмотрена в [6–9]. В этих работах обсуждается способ обеспечения требуемой (опорной) СДИ при помощи вращательного движения спутника в соответствии с специальным программным законом управления ориентацией и стабилизацией².

¹ Hang Y. *Time-Delay-Integration CMOS Image Sensor Design for Space Applications*: Ph.D. Thesis. Nanyang Technological University; 2016.

² Галкина А.С. *Синтез программ управления угловым движением космического аппарата для съемки криволинейных маршрутов*: дис. ... канд. техн. наук. Самара; 2011. 143 с. [Galkina A.S. *Synthesis of the Spacecraft Angular Motion Control Programs for Surveying Curvilinear Routes*. Diss. ... Cand. Sci. (Eng.). Samara; 2011. 143 p. (in Russ.).]

Автор делает допущение, что при наличии компенсации могут возникать отклонения фактической СДИ от требуемой, например, по причине несанкционированных разворотов спутника за счет погрешностей при функционировании СУОС, возможных вибраций конструкции спутника, а также при сканировании без учета рельефа местности.

Настоящая статья направлена на разработку общей математической модели вычисления полей векторов скоростей и ускорений движения изображения (СДИ и УДИ) с учетом основных динамических и кинематических факторов процесса съемки, а также на оценку остаточных полей СДИ и УДИ при наличии компенсации. В представленной математической модели вычисления СДИ, в отличие от [2, 3, 5], могут быть учтены основные динамические воздействия внешних и внутренних сил и крутящих моментов, которые действуют на тело спутника.

Полученные результаты могут быть использованы при составлении матрицы сдвига поля изображения для решения задачи получения сверхразрешения.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Составим математическую модель сканирования поверхности Земли из космоса со следующими допущениями:

1. Модель спутника – абсолютно твердое тело, которое движется по орбите вокруг Земли с моделью гравитационного поля EGM2008 [10].
2. Модель бортовой ОЭА спутника – абсолютно твердое тело с фокусным расстоянием f и фокальной плоскостью (ФП) с размерами a и b .
3. Модель Земли – эллипсоид с параметрами WGS84³.
4. Используемые системы координат: небесная геоцентрическая инерциальная система координат [11] (GCRS – geocentric celestial reference system); земная геоцентрическая система координат [11] (ITRS – international terrestrial reference system); локально вертикальная – локально горизонтальная (или орбитальная)

³ https://gssc.esa.int/navipedia/index.php/Reference_Frames_in_GNSS. Дата обращения 23.08.2023. / Accessed August 23, 2023.

система координат [12] LVLH – local-vertical, local-horizontal; OF – orbital frame); связанная (или строительная) система координат спутника (BF – body frame); система координат ФП ОЭА (FPF – focal plane frame). Для записи уравнений движения спутника будем использовать инерциальную квазинеподевижную систему координат GCRS. При записи дифференциальных уравнений движения спутника во вращающейся системе координат ITRS потребуется учет прецессии и нутации Земли в уравнениях движения. Учет прецессии, нутации и движения полюсов Земли, а также параметров перехода между шкалами времени TAI и UTC (TAI – International Atomic Time, UTC – Coordinated Universal Time) будет включен в соответствующие матрицы в модели вращения Земли при помощи пакета программ, представленного SOFA (Standards of Fundamental Astronomy) [13, 14].

- Используемые шкалы времени: международное атомное время (TAI) и универсальное координированное время (UTC) [11].

Необходимо определить следующие функциональные зависимости:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{x,y} &= \dot{\mathbf{x}}_{x,y} = f(\mathbf{r}_{\text{sat}}, \mathbf{v}_{\text{sat}}, \mathbf{q}_{\text{sat}}, \mathbf{w}_{\text{sat}}, \mathbf{r}_e, \mathbf{v}_e, \mathbf{a}_e); \\ \mathbf{a}_{x,y} &= \ddot{\mathbf{x}}_{x,y} = f(\mathbf{r}_{\text{sat}}, \mathbf{v}_{\text{sat}}, \dot{\mathbf{v}}_{\text{sat}}, \mathbf{q}_{\text{sat}}, \mathbf{w}_{\text{sat}}, \dot{\mathbf{w}}_{\text{sat}}, \mathbf{r}_e, \mathbf{v}_e, \mathbf{a}_e), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\mathbf{v}_{x,y}$ – вектор СДИ в точке с координатами x и y на ФП; $\mathbf{a}_{x,y}$ – вектор УДИ; $\mathbf{r}_{\text{sat}}, \mathbf{v}_{\text{sat}}, \dot{\mathbf{v}}_{\text{sat}}$ – положение, скорость и ускорение спутника в GCRS; $\mathbf{q}_{\text{sat}}, \mathbf{w}_{\text{sat}}, \dot{\mathbf{w}}_{\text{sat}}$ – кватернион ориентации, угловая скорость и угловое ускорение спутника в BF; $\mathbf{r}_e, \mathbf{v}_e, \mathbf{a}_e$ – положение, скорость и ускорение сканируемой точки на поверхности Земли.

На рис. 1 представлена схема, поясняющая постановку задачи.

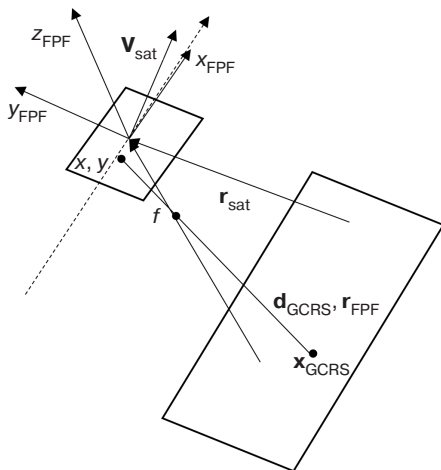


Рис. 1. К постановке задачи

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СЪЕМКИ

Согласно фундаментальному уравнению космической фотограмметрии, связь между FPF и GCRS с учетом масштаба (в пространстве изображения) определяется с использованием системы уравнений коллинеарности [15], выраженных в проекциях на оси FPF:

$$x = fXZ^{-1}; y = fYZ^{-1}, \quad (2)$$

где x, y – координаты точки изображения в FPF (в пространстве изображений).

Определим вектор дальности \mathbf{r}_{FPF} , выраженный в системе координат FPF (в пространстве предметов), с использованием следующей зависимости:

$$\mathbf{r}_{\text{FPF}} = \mathbf{M}_{\text{GCRS}}^{\text{FPF}} \mathbf{d}_{\text{GCRS}}, \quad (3)$$

где \mathbf{d}_{GCRS} – вектор дальности сканирования в GCRS, соединяющий точку на ФП и снимаемую точку на поверхности Земли; $\mathbf{M}_{\text{GCRS}}^{\text{FPF}} = \mathbf{M}_{\text{BF}}^{\text{FPF}} \mathbf{M}_{\text{GCRS}}^{\text{BF}}$ – матрица преобразования из GCRS в FPF; $\mathbf{M}_{\text{BF}}^{\text{FPF}}$ – матрица преобразования из BF в FPF; $\mathbf{M}_{\text{GCRS}}^{\text{BF}}$ – матрица преобразования из GCRS в BF (матрица ориентации спутника).

Уравнения (2) и (3) и описывают процесс, когда объект съемки и ФП неподвижны: координаты x, y , вектор \mathbf{d}_{GCRS} и матрица $\mathbf{M}_{\text{GCRS}}^{\text{FPF}}$ – неизменны. Так как сканирование поверхности Земли из космоса происходит во времени, то все составляющие в указанных уравнениях являются функциями времени.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СКОРОСТИ ДВИЖЕНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЯ

С целью отыскания вектора СДИ в точке ФП продифференцируем выражение (2) по времени:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{d}{dt} fXZ^{-1} + f \frac{d}{dt} (XZ^{-1}); \\ \dot{y} &= \frac{d}{dt} fYZ^{-1} + f \frac{d}{dt} (YZ^{-1}). \end{aligned}$$

Первое слагаемое $\frac{d}{dt} fXZ^{-1} = 0$, т.к. в рамках решаемой задачи фокусное расстояние является постоянной величиной. Тогда:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f \frac{d}{dt} (XZ^{-1}) = f \frac{V_x Z - X V_z}{Z^2} = (f V_x - x V_z) Z^{-1}; \\ \dot{y} &= f \frac{d}{dt} (YZ^{-1}) = f \frac{V_y Z - Y V_z}{Z^2} = (f V_y - y V_z) Z^{-1}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $V_x = \frac{d}{dt} X$ и $V_y = \frac{d}{dt} Y$.

Для определения вектора $\mathbf{v}_{\text{FPF}} = \{O_{\text{FPF}}, V_x, V_y, V_z\}$ продифференцируем выражение (3):

$$\mathbf{v}_{\text{FPF}} = \frac{d}{dt} \mathbf{r}_{\text{FPF}} = \frac{d}{dt} \mathbf{M}_{\text{GCRS}}^{\text{FPF}} \mathbf{d}_{\text{GCRS}} + \mathbf{M}_{\text{GCRS}}^{\text{FPF}} \frac{d}{dt} \mathbf{d}_{\text{GCRS}}. \quad (5)$$

Определим производную от матрицы преобразования $\mathbf{M}_{\text{GCRS}}^{\text{FPF}}$:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{M}_{\text{GCRS}}^{\text{FPF}} = \frac{d}{dt} \mathbf{M}_{\text{BF}}^{\text{FPF}} \mathbf{M}_{\text{GCRS}}^{\text{BF}} + \mathbf{M}_{\text{BF}}^{\text{FPF}} \frac{d}{dt} \mathbf{M}_{\text{GCRS}}^{\text{BF}}.$$

В полученном уравнении первое слагаемое обращается в ноль, т.к. по условиям постановки задачи отсутствует вращение между FPF и BF (ФП и конструкцией спутника).

Тогда после подстановки уравнения Пуассона [5]

$$\frac{d}{dt} \mathbf{M}_{\text{GCRS}}^{\text{FPF}} = -\mathbf{W}_x \mathbf{M}_{\text{GCRS}}^{\text{FPF}} \text{ из (5) получаем:}$$

$$\mathbf{v}_{\text{FPF}} = \mathbf{M}_{\text{GCRS}}^{\text{FPF}} \frac{d}{dt} \mathbf{d}_{\text{GCRS}} - \mathbf{M}_{\text{BF}}^{\text{FPF}} \mathbf{W}_x \mathbf{M}_{\text{GCRS}}^{\text{BF}} \mathbf{d}_{\text{GCRS}}, \quad (6)$$

$$\text{где } \mathbf{W}_x = [\boldsymbol{\omega} \times] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} - \text{матрица угло-}$$

вой скорости спутника в BF.

Уравнение (6) показывает, что суммарная СДИ складывается из поступательного и углового движений ОЗА и объекта съемки.

Перейдем к отысканию функциональных зависимостей для УДИ.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УСКОРЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЯ

Для определения УДИ продифференцируем уравнение (4) второй раз:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{d}{dt} \left(f(V_x Z - X V_z) Z^{-2} \right) = \\ &= f \left[(A_x Z - X A_z) Z^{-2} - 2 V_z (V_x Z - X V_z) Z^{-3} \right]; \\ \ddot{y} &= \frac{d}{dt} \left(f(V_y Z - Y V_z) Z^{-2} \right) = \\ &= f \left[(A_y Z - Y A_z) Z^{-2} - 2 V_z (V_y Z - Y V_z) Z^{-3} \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Для определения вектора ускорения $\mathbf{a}_{\text{FPF}} = \{O_{\text{FPF}}, A_x, A_y, A_z\}$ в FPF продифференцируем выражение (5) второй раз:

$$\mathbf{a}_{\text{FPF}} = \frac{d}{dt} \left[\frac{d}{dt} \mathbf{M}_{\text{GCRS}}^{\text{FPF}} \mathbf{d}_{\text{GCRS}} + \mathbf{M}_{\text{GCRS}}^{\text{FPF}} \frac{d}{dt} \mathbf{d}_{\text{GCRS}} \right] = \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{M}_{\text{GCRS}}^{\text{FPF}} \mathbf{d}_{\text{GCRS}} + 2 \frac{d}{dt} \mathbf{M}_{\text{GCRS}}^{\text{FPF}} \frac{d}{dt} \mathbf{d}_{\text{GCRS}} + \mathbf{M}_{\text{GCRS}}^{\text{FPF}} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{d}_{\text{GCRS}}. \quad (8)$$

Перепишем уравнение (8) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{\text{FPF}} &= -\frac{d}{dt} \left[\mathbf{M}_{\text{BF}}^{\text{FPF}} \mathbf{W}_x \mathbf{M}_{\text{GCRS}}^{\text{BF}} \right] \mathbf{d}_{\text{GCRS}} - \\ &- 2 \mathbf{M}_{\text{BF}}^{\text{FPF}} \mathbf{W}_x \mathbf{M}_{\text{GCRS}}^{\text{BF}} \frac{d}{dt} \mathbf{d}_{\text{GCRS}} + \\ &+ \mathbf{M}_{\text{BF}}^{\text{FPF}} \mathbf{M}_{\text{GCRS}}^{\text{BF}} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{d}_{\text{GCRS}}; \\ \mathbf{a}_{\text{FPF}} &= - \left\{ \frac{d}{dt} \mathbf{M}_{\text{BF}}^{\text{FPF}} \mathbf{W}_x \mathbf{M}_{\text{GCRS}}^{\text{BF}} + \right. \\ &+ \mathbf{M}_{\text{BF}}^{\text{FPF}} \frac{d}{dt} \mathbf{W}_x \mathbf{M}_{\text{GCRS}}^{\text{BF}} + \\ &+ \mathbf{M}_{\text{BF}}^{\text{FPF}} \mathbf{W}_x \frac{d}{dt} \mathbf{M}_{\text{GCRS}}^{\text{BF}} \left. \right\} \mathbf{d}_{\text{GCRS}} - \\ &- 2 \mathbf{M}_{\text{BF}}^{\text{FPF}} \mathbf{W}_x \mathbf{M}_{\text{GCRS}}^{\text{BF}} \frac{d}{dt} \mathbf{d}_{\text{GCRS}} + \\ &+ \mathbf{M}_{\text{BF}}^{\text{FPF}} \mathbf{M}_{\text{GCRS}}^{\text{BF}} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{d}_{\text{GCRS}}; \\ \mathbf{a}_{\text{FPF}} &= \mathbf{M}_{\text{BF}}^{\text{FPF}} \left[-\mathbf{E}_x \mathbf{M}_{\text{GCRS}}^{\text{BF}} \mathbf{d}_{\text{GCRS}} - \right. \\ &- \mathbf{W}_x \mathbf{W}_x \mathbf{M}_{\text{GCRS}}^{\text{BF}} \mathbf{d}_{\text{GCRS}} - \\ &- 2 \mathbf{W}_x \mathbf{M}_{\text{GCRS}}^{\text{BF}} \frac{d}{dt} \mathbf{d}_{\text{GCRS}} + \\ &+ \mathbf{M}_{\text{GCRS}}^{\text{BF}} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{d}_{\text{GCRS}} \left. \right], \end{aligned} \quad (9)$$

$$\text{где } \mathbf{E}_x = [\mathbf{e} \times] = \begin{bmatrix} 0 & -e_z & e_y \\ e_z & 0 & -e_x \\ -e_y & e_x & 0 \end{bmatrix} - \text{матрица углового}$$

ускорения спутника в BF.

В полученном уравнении первое слагаемое называют ускорением Эйлера, второе слагаемое – центробежным ускорением, третье слагаемое – ускорением Кориолиса. Далее определим вектор дальности \mathbf{d}_{GCRS} и его производные.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ НА ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМЛИ

Уравнения движения точки на земной поверхности записываются как:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\text{GCRS}} &= \mathbf{M}_{\text{ITRS}}^{\text{GCRS}} \mathbf{x}_{\text{ITRS}}; \\ \dot{\mathbf{x}}_{\text{GCRS}} &= \mathbf{M}_{\text{ITRS}}^{\text{GCRS}} \dot{\mathbf{x}}_{\text{ITRS}} + \boldsymbol{\omega}_{\text{GCRS}} \times \mathbf{x}_{\text{GCRS}}; \\ \ddot{\mathbf{x}}_{\text{GCRS}} &= \mathbf{M}_{\text{ITRS}}^{\text{GCRS}} \ddot{\mathbf{x}}_{\text{ITRS}} - \boldsymbol{\omega}_{\text{GCRS}} \times \\ &\quad \times (\boldsymbol{\omega}_{\text{GCRS}} \times \mathbf{x}_{\text{GCRS}}) + 2\boldsymbol{\omega}_{\text{GCRS}} \times \\ &\quad \times \dot{\mathbf{x}}_{\text{GCRS}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\text{GCRS}} \times \mathbf{x}_{\text{GCRS}}, \end{aligned} \quad (10)$$

где \mathbf{x}_{ITRS} , $\dot{\mathbf{x}}_{\text{ITRS}}$, $\ddot{\mathbf{x}}_{\text{ITRS}}$ – положение, скорость и ускорение точки на земной поверхности (в ITRS); $\mathbf{M}_{\text{ITRS}}^{\text{GCRS}}$ – матрица вращения между системами координат ITRS и GCRS; $\boldsymbol{\omega}_{\text{GCRS}}$ – вектор угловой скорости вращения Земли в GCRS.

Вектором углового ускорения вращения Земли можно пренебречь ($\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\text{GCRS}} \approx 0$).

Тогда векторы дальности, относительной скорости и относительного ускорения можно определить следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{\text{GCRS}} &= \mathbf{x}_{\text{GCRS}} - \mathbf{x}_{\text{sat}} = \mathbf{M}_{\text{ITRS}}^{\text{GCRS}} \mathbf{x}_{\text{ITRS}} - \mathbf{x}_{\text{sat}}; \\ \dot{\mathbf{d}}_{\text{GCRS}} &= \dot{\mathbf{x}}_{\text{GCRS}} - \dot{\mathbf{x}}_{\text{sat}} = \mathbf{M}_{\text{ITRS}}^{\text{GCRS}} \dot{\mathbf{x}}_{\text{ITRS}} + \\ &\quad + \boldsymbol{\omega}_{\text{GCRS}} \mathbf{x}_{\text{GCRS}} - \dot{\mathbf{x}}_{\text{sat}}; \\ \ddot{\mathbf{d}}_{\text{GCRS}} &= \ddot{\mathbf{x}}_{\text{GCRS}} - \ddot{\mathbf{x}}_{\text{sat}} = \\ &= \mathbf{M}_{\text{ITRS}}^{\text{GCRS}} \ddot{\mathbf{x}}_{\text{ITRS}} - \boldsymbol{\omega}_{\text{GCRS}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\text{GCRS}} \times \mathbf{x}_{\text{GCRS}}) + \\ &\quad + 2\boldsymbol{\omega}_{\text{GCRS}} \times \dot{\mathbf{x}}_{\text{GCRS}} - \ddot{\mathbf{x}}_{\text{sat}}. \end{aligned} \quad (11)$$

Векторное поле скоростей и ускорений по ФП получим методом подстановки полученных выражений (11) в (9) и (6), вычисляя векторы СДИ и УДИ в соответствии с уравнениями (4) и (7) в каждой точке ФП.

ВЕРИФИКАЦИЯ

Сравним результаты, полученные в представленной математической модели и полученные в работе [2] для одних и тех же исходных данных.

На основании вычислений по предложенной математической модели в точке с координатами (0, 0) получены следующие значения СДИ: 46.951 мм/с по оси x и 2.592 мм/с по оси y . В [2] были получены значения 46.921 мм/с по оси x и 2.591 мм/с по оси y . Таким образом относительная погрешность вычислений составляет не более 0.1%, что говорит о достоверности предложенной модели вычисления СДИ.

Таблица 1. Исходные данные для проведения моделирования

Наименование параметра	Размерность	Численное значение
Наклонение орбиты спутника	градусы	60.000
Эксцентриситет орбиты	–	0.01
Большая полуось орбиты	км	6678.000
Фокусное расстояние ОЭА, f	м	1.500
Размеры ФП	мм	120 × 80

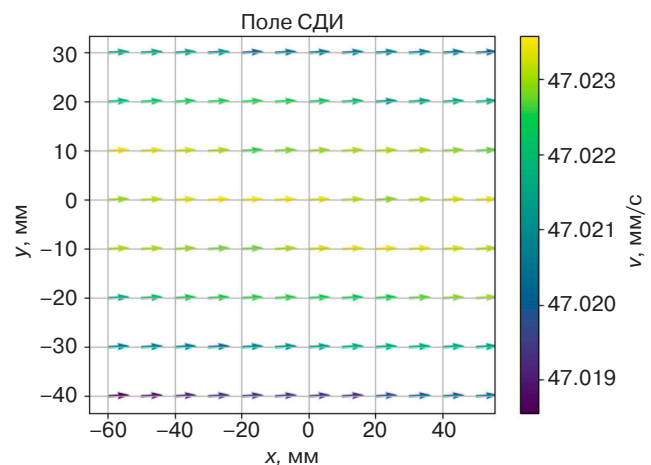


Рис. 2. Верификация модели

МОДЕЛИРОВАНИЕ

На основании математической модели разработана программа. Динамика спутника описывается дифференциальными уравнениями движения твердого тела [7, 12]. Вектор состояния спутника интегрируется с использованием метода Рунге – Кутты 4-го порядка [12] в шкале времени TAI [11]. В части линейного возмущения в движении спутника учтено только ускорение от воздействия гравитационного поля Земли с разложением 20×20 в соответствии с моделью EGM2008 [10], а в части углового возмущения – только управляющие крутящие моменты, определяемые с помощью PD-регулятора⁴ на основании рассогласования между фактическим угловым движением и опорным. При вычислении матрицы перехода из GCRS в ITRS и вычислении перехода между шкалами времени TAI и UTC используется библиотека программ, представленная SOFA [14].

Было рассмотрено два случая. В первом спутник находится в орбитальной ориентации (оси BF были сонаправлены осям LVLH), а во втором – параметры вращения спутника соответствуют опорному

⁴ PD-регулятор – пропорционально дифференцирующий регулятор. / PD-controller – proportional derivative controller.

угловому движению, при котором обеспечивается компенсация СДИ [7].

Моделирование проводилось для трех наборов исходных данных, представленных в табл. 2–4.

Таблица 2. Исходные данные для проведения моделирования

Наименование параметра	Размерность	Численное значение
Время начала моделирования	UTC	2020-01-01 00:00:00.000000
Время окончания моделирования	UTC	2020-01-01 00:30:00.000000
Наклонение орбиты спутника	градусы	97.000
Эксцентриситет орбиты	–	0.001
Большая полуось орбиты	км	6900.000
Фокусное расстояние ОЭА, f	м	2.000
Размеры ФП	мм	160 × 20
Опорная СДИ в центре ФП	мм/с	20.000
Опорная СДИ в правом крае ФП	мм/с	20.000

Результаты моделирования полей без компенсации представлены на рис. 3 и 4.

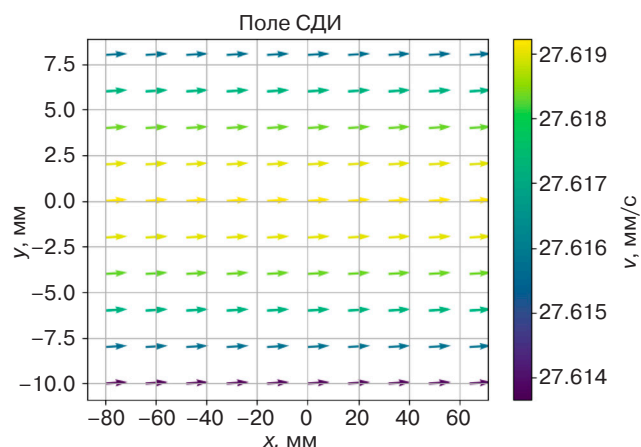


Рис. 3. Поле векторов СДИ без компенсации

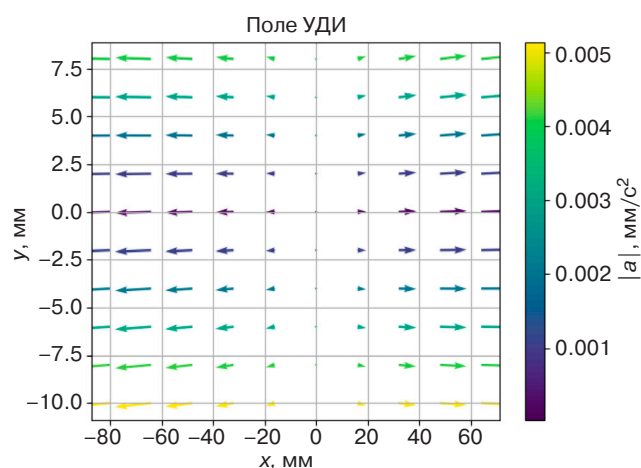


Рис. 4. Поле векторов УДИ без компенсации

Результаты моделирования остаточных полей СДИ и УДИ с компенсацией (опорная СДИ по $x = 20$ мм/с, по $y = 0$ мм/с) представлены на рис. 5 и 6.

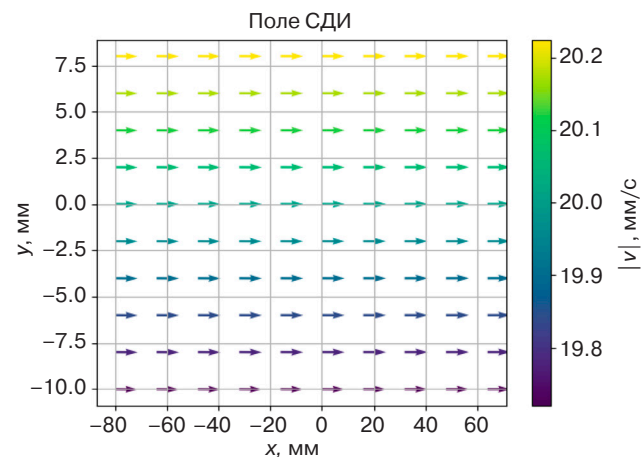


Рис. 5. Поле векторов СДИ с компенсацией

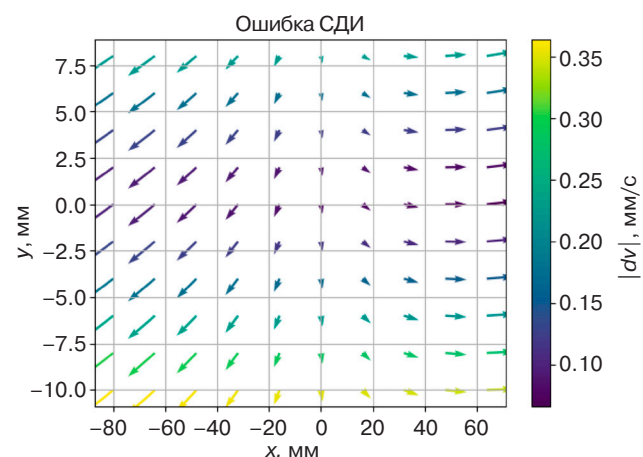


Рис. 6. Разница между опорным и фактическим полями СДИ после компенсации

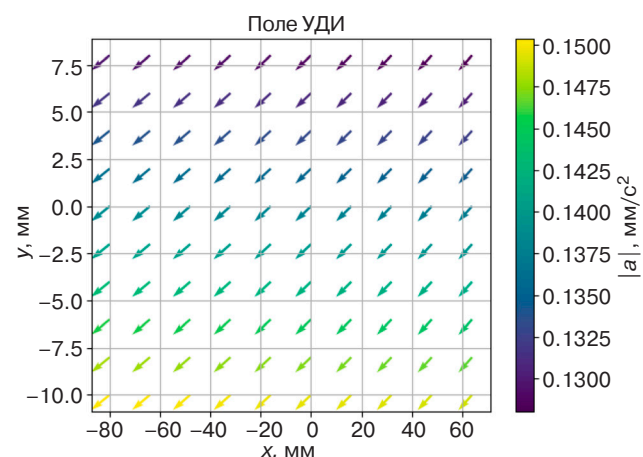


Рис. 7. Поле векторов УДИ с компенсацией

На рис. 6 можно увидеть остаточное поперечное поле СДИ (по оси y). Это можно объяснить тем, что при расчете опорной угловой скорости по алгоритму, описанному в [7], за опорные берутся две точки: в центре ФП и с правого края ФП (в рассматриваемом случае соответствует координатам $[0, 10]$). Именно в этих точках фактическая СДИ равна опорной СДИ.

Таким образом, моделирование показывает, что остаточное поле существует даже при использовании алгоритма компенсации, что позволяет выбирать такие координаты ФП, в которых требуется обеспечить опорный вектор СДИ.

На рис. 8 и 9 представлены графики углов ориентации спутника и угловых скоростей спутника в режиме компенсации СДИ.

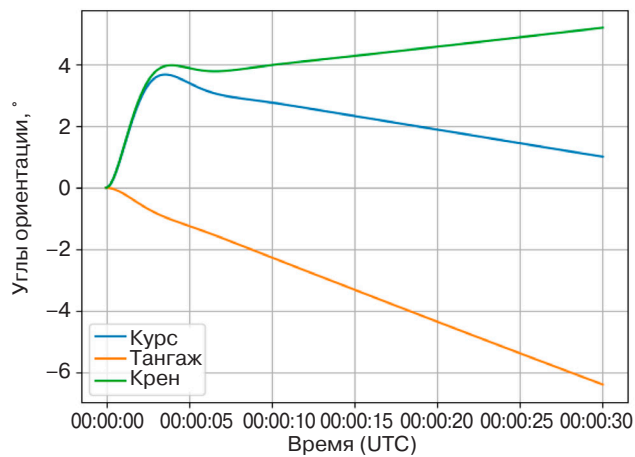


Рис. 8. Углы ориентации спутника в LVLH

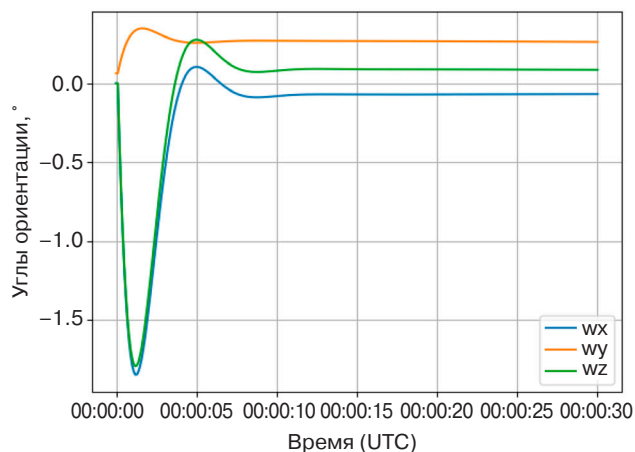


Рис. 9. Угловые скорости спутника относительно BF

Результаты моделирования поля векторов СДИ и поля векторов УДИ без компенсации представлены на рис. 10 и 11.

Результаты моделирования поля векторов СДИ с компенсацией и разница между опорным и фактическим полями СДИ после компенсации представлены на рис. 12, 13.

Таблица 3. Исходные данные для проведения моделирования

Наименование параметра	Размерность	Численное значение
Время начала моделирования	UTC	2020-01-01 00:00:00.000000
Время окончания моделирования	UTC	2020-01-01 00:30:00.000000
Наклонение орбиты спутника	градусы	97.000
Эксцентриситет орбиты	—	0.001
Большая полуось орбиты	км	7000.000
Фокусное расстояние ОЭА, f	м	2.000
Размеры ФП	мм	160×20

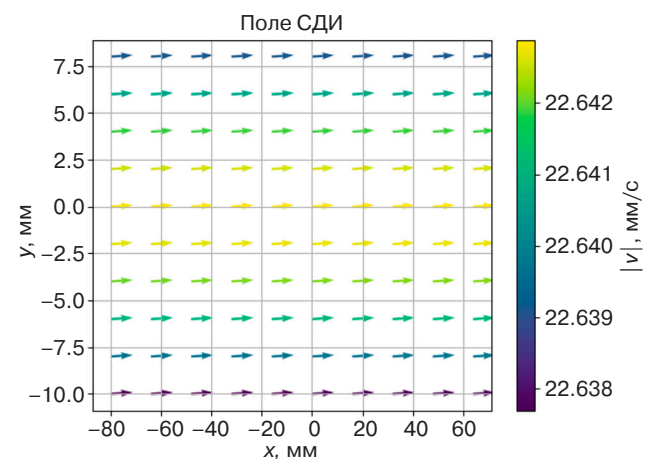


Рис. 10. Поле векторов СДИ без компенсации

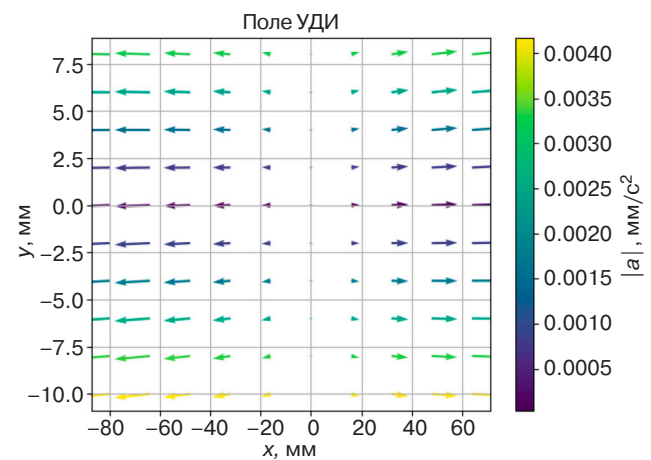


Рис. 11. Поле векторов УДИ без компенсации

Таблица 4. Исходные данные для проведения моделирования

Наименование параметра	Размерность	Численное значение
Время начала моделирования	UTC	2020-01-01 00:00:00.000000
Время окончания моделирования	UTC	2020-01-01 00:30:00.000000
Наклонение орбиты спутника	градусы	97.000
Эксцентриситет орбиты	—	0.001
Большая полуось орбиты	км	7000.000
Фокусное расстояние ОЭА, f	м	2.000
Размеры ФП	мм	160 × 20
Опорная СДИ в центре ФП	мм/с	30.000
Опорная СДИ в правом крае ФП	мм/с	30.000

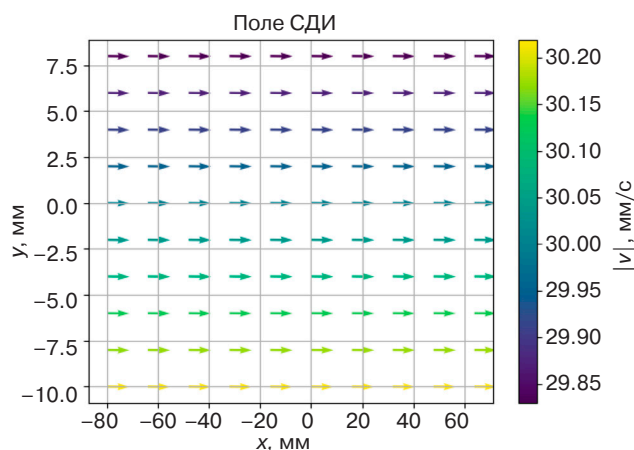


Рис. 12. Поле векторов СДИ с компенсацией

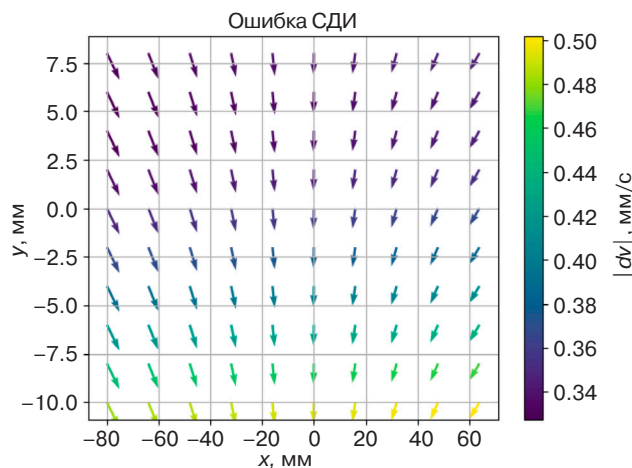


Рис. 13. Разница между опорным и фактическим полями СДИ после компенсации

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье получены математические зависимости, позволяющие вычислять поля векторов скоростей и ускорений движения изображения на фотоприемниках оптико-электронной аппаратуры, установленной на спутнике.

С использованием полученных зависимостей можно на наземном этапе оценить накопленное смещение изображения за время экспозиции, а во время эксплуатации спутника не допустить съемок с неподходящими скоростями движения изображения, т.е. предотвратить направленные «смазы» изображения.

Полученные зависимости могут найти применение при вычислении матрицы сдвига изображения для получения сверхразрешения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Геча В.Я., Жиленев М.Ю., Горчаков С.Ю., Новоселов С.А. Формулы расчета кинематических параметров орбитальной съемки планеты бортовой оптико-электронной аппаратурой космического аппарата. *Вопросы электромеханики. Труды ВНИИЭМ*. 2019;173(6): 23–32. URL: <https://jurnal.vniiem.ru/text/173/23-32.pdf>
- Геча В.Я., Жиленев М.Ю., Федоров В.Б., Хрычев Д.А., Худак Ю.И., Шатина А.В. Скорость движения изображения при оптико-электронной съемке поверхности планеты. *Russian Technological Journal*. 2018;6(4): 65–77. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2018-6-4-65-77>
- Жиленев М.Ю., Винтаев В.Н. Формула расчета движения изображения при орбитальной съемке планет оптико-электронной аппаратурой. *Телекоммуникации*. 2011;7:2–7.

REFERENCES

- Gecha V.Ya., Zhilenev M.Yu., Gorchakov S.Yu., Novoselov S.A. Formulas for calculating the kinematic parameters of the planet's orbital survey by the spacecraft's on-board optic imager when taking into account the required the velocity of the image motion on its photodetector. *Voprosy elektromekhaniki. Trudy VNIIEEM = Electromechanical Matters. VNIIEEM Studies*. 2019;173(6):23–32 (in Russ.). Available from URL: <https://jurnal.vniiem.ru/text/173/23-32.pdf>
- Gecha V.Y., Zhilenev M.Yu., Fyodorov V.B., Khrychev D.A., Khudak Yu.I., Shatina A.V. The image speed during the optical-electronic surfacing the planet. *Russ. Technol. J.* 2018;6(4):65–77 (in Russ.). <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2018-6-4-65-77>

4. Brown E.B. V/H Image Motion in Aerial Cameras. *Photogramm. Eng.* 1965;31(2):308–323.
5. Геча В.Я., Жиленив М.Ю., Федоров В.Б., Хрычев Д.А., Худак Ю.И., Шатина А.В. Поле скоростей движения точек изображения при орбитальной съемке поверхности планеты. *Russian Technological Journal.* 2020;8(1):97–109. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2020-8-1-97-109>
6. Kawachi D.A. Image Motion and Its Compensation for the Oblique Frame Camera. *Photogramm. Eng.* 1965;31(1):154–165.
7. Горчаков С.Ю. Синтез программных угловых движений космического аппарата дистанционного зондирования Земли с высоким пространственным разрешением. *Russian Technological Journal.* 2021;9(3):78–87. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2021-9-3-78-87>
8. Бутырин С.А. Кинематический синтез программного углового движения космического аппарата при оптико-электронной съемке Земли. *Известия Самарского научного центра РАН.* 2007;9(3):664–670. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/kinematicheskii-sintez-programmnogo-uglovogo-dvizheniya-kosmicheskogo-apparata-pri-optiko-elektronnoy-semke-zemli/viewer>
9. Маштаков Я.В., Ткачев С.С. Построение углового движения спутника ДЗЗ при отслеживании маршрутов на поверхности Земли. *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша.* 2014;20. 31 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-20>
10. Pavlis N.K., Holmes S.A., Kenyon S.C., Factor J.K. An Earth Gravitational Model to Degree 2160: EGM2008. *Geophysic. Res. Abstracts.* 10, EGU2008-A-01891, 2008, SRef ID: 1607-7962/gra/EGU2008-A-01891, EGU General Assembly.
11. Petit G., Luzum B. *IERS Conventions.* Frankfurt am Main, Germany: International Earth Rotation and Reference Systems Service; 2010. 179 p.
12. Canuto E., Massotti L., Montenegro C.P., Novara C., Carlucci D. *Spacecraft Dynamics and Control: The Embedded Model Control Approach.* Elsevier; 2018. 779 p. <https://doi.org/10.1016/C2016-0-00420-5>
13. Bangert J., Bell S., Capitaine N. *SOFA Tools for Earth Attitude.* International Astronomical Union; 2021. 157 p.
14. Bangert J., Bell S., Capitaine N. *SOFA Time Scale and Calendar Tools.* International Astronomical Union; 2021. 67 p.
15. Урмаев М. *Космическая фотограмметрия.* М.: Недра; 1989. 278 с. ISBN 5-247-01273-9
3. Zhilenev M.Yu., Vintaev V.N. The formula for calculating the image motion during planet optoelectronic acquisition. *Telekommunikatsii = Telecommunications.* 2011;7:2–7 (in Russ.).
4. Brown E.B. V/H Image Motion in Aerial Cameras. *Photogramm. Eng.* 1965;31(2):308–323.
5. Gecha V.Y., Zhilenev M.Yu., Fedorov V.B., Khrychev D.A., Khudak Yu.I., Shatina A.V. Velocity field of image points in satellite imagery of planet's surface. *Russ. Technol. J.* 2020;8(1):97–109 (in Russ.). <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2020-8-1-97-109>
6. Kawachi D.A. Image Motion and Its Compensation for the Oblique Frame Camera. *Photogramm. Eng.* 1965;31(1):154–165.
7. Gorchakov S.Yu. Synthesis of program angular motions of the Earth remote sensing spacecraft with high spatial resolution. *Russ. Technol. J.* 2021;9(3):78–87 (in Russ.). <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2021-9-3-78-87>
8. Butyrin S.A. Kinematic synthesis of the spacecraft programmed attitude motion at the earth optic-electronic survey. *Izvestiya Samarskogo nauchnogo tsentra RAN = Izvestia of Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences.* 2007;9(3):664–670 (in Russ.). Available from URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/kinematicheskii-sintez-programmnogo-uglovogo-dvizheniya-kosmicheskogo-apparata-pri-optiko-elektronnoy-semke-zemli/viewer>
9. Mashtakov Ya., Tkachev S. Synthesis and constructing the angular motion of the remote sensing satellite for tracking the trajectory on the Earth surface. *Preprinty IPM im. M.V. Keldysha = Keldysh Institute Preprints.* 2014;20. 31 p. (in Russ.). Available from URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-20>
10. Pavlis N.K., Holmes S.A., Kenyon S.C., Factor J.K. An Earth Gravitational Model to Degree 2160: EGM2008. *Geophysic. Res. Abstracts.* 10, EGU2008-A-01891, 2008, SRef ID: 1607-7962/gra/EGU2008-A-01891, EGU General Assembly.
11. Petit G., Luzum B. *IERS Conventions.* Frankfurt am Main, Germany: International Earth Rotation and Reference Systems Service; 2010. 179 p.
12. Canuto E., Massotti L., Montenegro C.P., Novara C., Carlucci D. *Spacecraft Dynamics and Control: The Embedded Model Control Approach.* Elsevier Ltd.; 2018. 779 p. <https://doi.org/10.1016/C2016-0-00420-5>
13. Bangert J., Bell S., Capitaine N. *SOFA Tools for Earth Attitude.* International Astronomical Union; 2021. 157 p.
14. Bangert J., Bell S., Capitaine N. *SOFA Time Scale and Calendar Tools.* International Astronomical Union; 2021. 67 p.
15. Uрмаев М. *Kosmicheskaya fotogrammetriya (Space photogrammetry).* Moscow: Nedra; 1989. 278 p. (in Russ.). ISBN 5-247-01273-9

Об авторе

Горчаков Сергей Юрьевич, аспирант, кафедра высшей математики Института искусственного интеллекта ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: sygorchakov@yandex.ru. SPIN-код РИНЦ 2275-8579, <http://orcid.org/0000-0003-2266-5284>

About the author

Sergei Yu. Gorchakov, Postgraduate Student, Higher Mathematics Department, Institute of Artificial Intelligence, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: sygorchakov@yandex.ru. RSCI SPIN-code 2275-8579, <http://orcid.org/0000-0003-2266-5284>