

Математическое моделирование
Mathematical modeling

УДК 536.2
<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2023-11-5-106-117>



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Новый энергетический эффект в областях нецилиндрического типа с термоизолированной движущейся границей

Э.М. Карташов @

МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, 119454 Россия
@ Автор для переписки, e-mail: professor.kartashov@gmail.com

Резюме

Цели. Разработка математически модельных представлений энергетического эффекта в областях нецилиндрического типа с термоизолированной движущейся границей. Введение в аналитическую теплофизику и прикладную термомеханику нового граничного условия теплоизоляции движущейся границы как для локально равновесных процессов теплопереноса в рамках классической феноменологии Фурье, так и для более сложных локально-неравновесных процессов в рамках феноменологии Максвелла – Каттанео – Лыкова – Вернотта, учитывающих конечную скорость распространения теплоты. Рассмотрение прикладной задачи аналитической теплофизику и теории теплового удара для области с движущейся термоизолированной границей, свободной от внешних и внутренних воздействий. Получение точного аналитического решения сформулированных математических моделей для уравнений гиперболического типа. Исследование полученных решений с помощью вычислительного эксперимента при различных значениях, входящих в него параметров. Описание волнового характера кинетики рассматриваемых процессов.

Методы. Используются методы и теоремы операционного исчисления, контурные интегралы Римана – Меллина при вычислении оригиналов сложных изображений с двумя точками ветвления. С учетом вычислительных трудностей при нахождении аналитических решений краевых задач для уравнений гиперболического типа в области с движущейся границей, развит новый математический аппарат эквивалентности функциональных конструкций для оригиналов полученных операционных решений.

Результаты. Представлено развитие новых математических моделей локально-неравновесного теплопереноса и теории теплового удара для уравнений гиперболического типа в области с движущейся термоизолированной границей. Показано, что, несмотря на отсутствие внешних и внутренних источников теплоты, наличие термоизолированной движущейся границы приводит к появлению в области градиента температуры и, следовательно, к появлению в области температурного поля и соответствующих ему термоупругих напряжений, имеющих волновой характер. Стохастический анализ указанного энергетического эффекта позволил высказать предположение о переходе кинетической энергии движущейся термоизолированной границы в тепловую энергию области. Приведенные модельные представления указанного эффекта подтвердили высказанное предположение.

Выводы. Развита и исследована математические модели для локально-неравновесных процессов теплопереноса и теории термических напряжений на основе определяющих соотношений теории теплового удара для уравнений гиперболического типа в области с термоизолированной движущейся границей. Проведен численный эксперимент и показана возможность перехода от одной формы аналитического решения теплофизической задачи к другой эквивалентной форме нового типа. Описанный энергетический эффект проявляется как для уравнений параболического типа на основе классической феноменологии Фурье, так и для уравнений гиперболического типа на основе обобщенной феноменологии Максвелла – Каттанео – Лыкова – Вернотта.

Ключевые слова: движущаяся теплоизолированная граница, температурное поле, температурные напряжения, уравнения гиперболического типа

• Поступила: 30.11.2022 • Доработана: 21.04.2023 • Принята к опубликованию: 21.07.2023

Для цитирования: Карташов Э.М. Новый энергетический эффект в областях нецилиндрического типа с термоизолированной движущейся границей. *Russ. Technol. J.* 2023;11(5):106–117. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2023-11-5-106-117>

Прозрачность финансовой деятельности: Автор не имеет финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

RESEARCH ARTICLE

New energy effect in non-cylindrical domains with a thermally insulated moving boundary

Eduard M. Kartashov [®]

MIREA – Russian Technological University, Moscow, 119454 Russia

[®] Corresponding author, e-mail: professor.kartashov@gmail.com

Abstract

Objectives. To develop mathematical model representations of the energy effect in non-cylindrical domains having a thermally insulated moving boundary; to introduce a new boundary condition for thermal insulation of a moving boundary both for locally equilibrium heat transfer processes in the framework of classical Fourier phenomenology, as well as for more complex locally non-equilibrium processes in the framework of Maxwell–Cattaneo–Lykov–Vernott phenomenology, taking into account the finite rate of heat propagation into analytical thermophysics and applied thermomechanics; to consider an applied problem of analytical thermophysics according to the theory of thermal shock for a domain with a moving thermally insulated boundary free from external and internal influences; to obtain an exact analytical solution of the formulated mathematical models for hyperbolic type equations; to investigate the solutions obtained using a computational experiment at various values of the parameters included in it; to describe the wave nature of the kinetics of the processes under consideration.

Methods. Methods and theorems of operational calculus, Riemann–Mellin contour integrals are used in calculating the originals of complex images with two branch points. A new mathematical apparatus for the equivalence of functional constructions for the originals of the obtained operational solutions, which considers the computational difficulties in finding analytical solutions to boundary value problems for equations of hyperbolic type in the domain with a moving boundary, is developed.

Results. Developed mathematical models of locally nonequilibrium heat transfer and the theory of thermal shock for equations of hyperbolic type in a domain with a moving thermally insulated boundary are presented. It is shown that, despite the absence of external and internal sources of heat, the presence of a thermally insulated moving boundary leads to the appearance of a temperature gradient in the domain and, consequently, to the appearance of a temperature field and corresponding thermoelastic stresses in the domain, which have a wave character. A stochastic analysis of this energy effect forms the basis for a proposed transition of the kinetic energy of a moving thermally insulated boundary into the thermal energy of the domain. The presented model representations of the indicated effect confirmed the stated assumption.

Conclusions. Mathematical models for locally nonequilibrium heat transfer processes and the theory of thermal stresses are developed and investigated on the basis of constitutive relations of the theory of thermal shock for equations of hyperbolic type in a domain with a thermally isolated moving boundary. A numerical experiment is presented to demonstrate the possibility of transiting from one form of analytical solution of a thermophysical problem to another equivalent form of a new type. The described energy effect manifests itself both for parabolic type equations based on the classical Fourier phenomenology, as well as for hyperbolic type equations based on the generalized Maxwell–Cattaneo–Lykov–Vernott phenomenology.

Keywords: moving thermally insulated boundary, temperature field, temperature stresses, equations of hyperbolic type

• Submitted: 30.11.2022 • Revised: 21.04.2023 • Accepted: 21.07.2023

For citation: Kartashov E.M. New energy effect in non-cylindrical domains with a thermally insulated moving boundary. *Russ. Technol. J.* 2023;11(5):106–117. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2023-11-5-106-117>

Financial disclosure: The author has no a financial or property interest in any material or method mentioned.

The author declares no conflicts of interest.

ВВЕДЕНИЕ

Автор впервые столкнулся с излагаемым ниже эффектом возникновения градиента концентрации в области с движущейся во времени непроницаемой границей при изучении явления адсорбционно-го понижения прочности и долговечности хрупких полимеров в поверхностно-активных средах [1]. Изучение литературы показало, что указанное явление затрагивает многие области науки и техники и, по существу, до настоящего времени практически не описано в научных публикациях. Применительно к тепловым процессам будет показано, что в области с движущейся термоизолированной границей, несмотря на отсутствие внутренних и внешних источников теплоты, тем не менее, возникает градиент температуры, поскольку кинетическая энергия движения границы переходит в тепловую энергию области. Стохастический анализ указанного энергетического эффекта для среднего значения температуры на основе анализа соответствующей дисперсии показал подобие поведения дисперсии поведению, возникшему в области среднего значения температурных напряжений, создающих риски возникновения трещин и возможного начала разрушения материала [2].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Остановимся кратко на теплофизических задачах в областях с движущимися во времени границами (области нецилиндрического типа).

Круг вопросов, при рассмотрении которых приходится сталкиваться с краевыми задачами нестационарной теплопроводности в нецилиндрических областях типа $[0, y(t)]$, $t > 0$ или $[y(t), \infty)$, $t > 0$, где $y(t)$ – непрерывная функция, весьма широк. Подобные проблемы возникают при теоретическом изучении процессов переноса энергии, связанных с изменением

агрегатного состояния вещества, в теории прочности, теории плотин, механике почв, термике нефтяных пластов, электродинамических задачах, задачах фильтрации, теории зонной очистки материалов, кинетической теории роста кристаллов, термомеханике при изучении теплового удара и т.д. [3].

С математической точки зрения краевые задачи переноса в области с движущимися границами принципиально отличны от классических. Вследствие зависимости границы области от времени к этому типу задач неприменимы классические методы уравнений математической физики, т.к., оставаясь в рамках этих методов, не удастся согласовать решение уравнения теплопроводности с движением границы области. Этим объясняется тот факт, что в аналитической теплофизике к настоящему времени рассмотрены лишь простейшие случаи с равномерно движущейся границей или частично с корневой зависимостью.

Пусть $\bar{\Omega}_t$ – нецилиндрическая область, сечение которой плоскостью-характеристикой $t = \text{const} \geq t_0 > 0$ есть выпуклая область D_t изменения $M(x, y, z)$ с границей S_t , зависящей от времени $t \geq 0$, $\bar{n}$ – внешняя нормаль к S_t – вектор, непрерывный в точках S_t , так что $\bar{\Omega}_t = \{M \in \bar{D}_t = D_t + S_t, t \geq 0\}$.

Пусть $T(M, t)$ – температурная функция, удовлетворяющая условиям задачи, a – температуропроводность, f – функция источника; Φ_0 – начальная температура; β_1, β_2 – коэффициенты; C^0, C^1, C^2 – классы функций.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \Delta T(M, t) + f(M, t), M \in D_t, t > 0, \quad (1)$$

$$T(M, t)|_{t=0} = \Phi_0(M), M \in \bar{D}_{t=0}, \quad (2)$$

$$\beta_1 \frac{\partial T(M, t)}{\partial n} + \beta_2 T(M, t) = \varphi(M, t), M \in S_t, t \geq 0. \quad (3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} f(M, t) \in C^0(\overline{\Omega_t}); \Phi_0(M) \in C^1(\overline{\Omega_t}); \\ \varphi(M, t) \in C^0(S_t \times t \geq 0); \beta_1^2 + \beta_2^2 > 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Искомое решение: $T(M, t) \in C^2(\Omega_t) \cap C^0(\overline{\Omega_t})$, $\text{grad}_M T(M, t) \in C^0(\overline{\Omega_t})$.

Граничное условие (3) включает случаи температурного нагрева, теплового нагрева, нагрева средой (или охлаждения во всех трех случаях). Если $\overline{D}$ – каноническая (цилиндрическая) область с неподвижной границей S (упругое полупространство, бесконечная пластина, цилиндр, шар и т.д.), то условие теплоизоляции границы S области D записывается в виде

$$\left. \frac{\partial T(M, t)}{\partial n} \right|_{M \in S} = 0, \quad t > 0 \quad (5)$$

и является классическим граничным условием в аналитической теплофизике при постановке соответствующих задач для уравнений параболического типа. Однако наличие движущейся границы принципиально меняет вид граничного условия ее теплоизоляции, и это обстоятельство не учитывается в литературе в различного рода приложениях, связанных с теплоизоляцией движущейся границы.

Для вывода указанного условия рассмотрим область $\Omega_t = (0 < z < y(t), t > 0)$, где $y(t)$ – непрерывно-дифференцируемая функция; $v(t) = dy(t)/dt$ – скорость перемещения границы; $T(z, t)$ – температурное поле в Ω_t ; $F(z, t)$ – непрерывно распределенный в Ω_t нестационарный источник теплоты ($F(z, t)/c\rho = f(z, t)$), где c – теплоемкость, ρ – плотность. Имеем для Ω_t :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + f(z, t), \quad (z, t) \in \Omega_t. \quad (6)$$

Запишем уравнение теплового баланса в момент времени $(t + \Delta t)$, считая границу $z = y(t)$ теплоизолированной:

$$\begin{aligned} -\lambda \frac{\partial T(0, t)}{\partial z} \Delta t + c\rho \Delta t \int_0^{y(t)+\Delta y} f(z, t) dz = \\ = c\rho \int_0^{y(t)} [T(z, t + \Delta t) - T(z, t)] dz + c\rho \int_{y(t)}^{y(t)+\Delta y} T(z, t + \Delta t) dz, \end{aligned}$$

где λ – теплопроводность.

Ко второму из интегралов справа применим теорему о среднем

$$\begin{aligned} -a \frac{\partial T(0, t)}{\partial z} \Delta t + \Delta t \int_0^{y(t)+\Delta y} f(z, t) dz = \\ = \int_0^{y(t)} [T(z, t + \Delta t) - T(z, t)] dz + T(z, t + \Delta t) \Big|_{z=y+\theta \Delta y} \Delta y, \end{aligned}$$

где $0 < \theta < 1$. Разделив обе части равенства на Δt и перейдя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим

$$-a \frac{\partial T(0, t)}{\partial z} + \int_0^{y(t)} f(z, t) dz = \int_0^{y(t)} \frac{\partial T}{\partial t} dz + v(t) T(z, t) \Big|_{z=y(t)}.$$

Подставим под знак интеграла вместо $\partial T/\partial t$ правую часть уравнения теплопроводности (6), проведем интегрирование и приведем подобные члены. В результате окончательно получим условие

$$\left. \frac{\partial T(z, t)}{\partial z} \right|_{z=y(t)} + \frac{v(t)}{a} T(z, t) \Big|_{z=y(t)} = 0, \quad t > 0, \quad (7)$$

которое и представляет собой условие тепловой изоляции для подвижной границы. Если скорость движения границы $v(t) = 0$, то приходим к условию $(\partial T/\partial n)|_S = 0$, означающему теплоизоляцию неподвижной граничной поверхности.

С конца 60-х годов прошлого столетия появляются систематические публикации по гиперболическим моделям переноса с учетом конечной скорости распространения теплоты^{1,2} [4–16]. Сейчас популярно выделять большой класс моделей, основанных на уравнении

$$\frac{\partial T(M, t)}{\partial t} = a \Delta T(M, t) - \tau_r \frac{\partial^2 T(M, t)}{\partial t^2}, \quad (M, t) \in \Omega_t, \quad (8)$$

где τ_r – время релаксации теплового потока, связанное со скоростью распространения теплоты соотношением $v_T = \sqrt{a/\tau_r}$. Краевыми задачами для уравнения (8) описываются высокоинтенсивный теплообмен в устройствах импульсной и лазерной техники; лазерная обработка металлов; процессы плазменного напыления; процессы, происходящие в энергетических каналах ядерных реакторов и в псевдооживленном слое, дисперсных системах и зернистых материалах, слоистых полупроводниковых структурах; при описании электронной

¹ Еремин А.В. *Методология моделирования тепломассопереноса, упругих колебаний и электромагнитных волн с учетом пространственно-временной нелокальности*: автореф. дис. ... докт. техн. наук. Самара; 2021. 30 с. [Eremin A.V. *Modeling methodology of heat and mass transfer, elastic vibrations and electromagnetic waves with allowance for spatial and temporal nonlocality*. Abstract. Cand. Sci. Thesis (Eng.). Samara; 2021. 30 p. (in Russ.).]

² Жуков В.В. *Исследование внутренних механизмов переноса тепла, массы, импульса с учетом релаксационных явлений*: автореф. дис. ... канд. техн. наук. Самара; 2021. 18 с. [Zhukov V.V. *Investigation of internal mechanisms of heat, mass, and momentum transfer with allowance for relaxation phenomena*. Abstract. Cand. Sci. Thesis (Eng.). Samara; 2021. 18 p. (in Russ.).]

теплопроводности и в высокотемпературной плазме; при математическом моделировании фронтовых процессов терморазложения; в кристаллах катализаторов и при выращивании гомоэпитаксиальных пленок германия, возникающих в ходе экзотермических химических реакций и др. В [3] изучены вопросы корректной постановки краевых задач для уравнений (8), показано, что запись граничных условий второго и третьего рода существенно отличается от (3) для уравнений параболического типа. Однако вопрос о теплоизоляции движущейся границы для уравнения (8) до сих пор остается открытым. С этой целью рассмотрим феноменологическое соотношение Максвелла – Каттанео – Лыкова – Вернотта [4, 6–7]:

$$\bar{q}(M, t) = -\lambda \operatorname{grad} T(M, t) - \tau_r \frac{\partial \bar{q}(M, t)}{\partial t},$$

$\bar{q}$ – вектор плотности теплового потока, лежащее в основе аналитической теории локально-неравновесных процессов переноса теплоты в нецилиндрической области. Запишем это равенство в виде:

$$\left(1 + \tau_r \frac{\partial}{\partial t}\right) \bar{q}(M, t) = -\lambda \operatorname{grad} T(M, t), \quad M \in D_t, \quad t > 0, \quad (9)$$

или

$$\bar{q}(M, t + \tau_r) = -\lambda \operatorname{grad} T(M, t), \quad M \in D_t, \quad t > 0, \quad (10)$$

используя разложение в ряд Маклорена (9) функции $\bar{q}(M, t + \tau_r)$ в окрестности точки $\tau_r = 0$.

Соотношение (10) можно переписать в виде:

$$\bar{q}(M, t) = -\lambda \operatorname{grad} T(M, t - \tau_r), \quad M \in D_{t-\tau_r}, \quad t > \tau_r. \quad (11)$$

Используя уравнение энергии $\operatorname{div} \partial T(M, t) / \partial t = -\operatorname{div} [\bar{q}(M, t)]$ и соотношение (11), уравнение (8) можно записать в виде:

$$\frac{\partial T(M, t)}{\partial t} = a \Delta T(M, t - \tau_r), \quad M \in D_{t-\tau_r}, \quad t > \tau_r. \quad (12)$$

Рассмотрим теперь интересующую нас область $z > y(t)$, $t > 0$, в которой (12) будет

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T(z, t - \tau_r)}{\partial z^2}, \quad z > y(t - \tau_r), \quad t > \tau_r. \quad (13)$$

При постоянных начальных условиях, отсутствии внутренних источников теплоты и внешних условий нагрева при теплоизоляции движущейся границы справедливо условие

$$\operatorname{cp} \int_{y(t-\tau_r)}^{\infty} T(z, t) dz = \operatorname{const}, \quad t > \tau_r. \quad (14)$$

Дифференцируя обе части (14) по t и используя уравнение (13), приходим к соотношению

$$\left[\frac{\partial T(z, t - \tau_r)}{\partial z} + \frac{1}{a} \cdot \frac{dy(t - \tau_r)}{dt} T(z, t) \right]_{z=y(t-\tau_r)} = 0, \quad t > \tau_r, \quad (15)$$

которое можно переписать в виде:

$$\left[\frac{\partial T(z, t)}{\partial z} + \frac{v(t)}{a} T(z, t + \tau_r) \right]_{z=y(t)} = 0, \quad t > 0, \quad (16)$$

где $v(t) = dy/dt$. Выражение (16) является условием теплоизоляции движущейся границы для локально-неравновесных процессов переноса теплоты, описываемых уравнениями гиперболического типа. В частных случаях (локально-равновесные процессы, $\tau_r = 0$) или области цилиндрического типа ($v(t) = 0$) приходим к условиям теплоизоляции, рассмотренным выше.

ЭФФЕКТ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ГРАДИЕНТА ТЕМПЕРАТУРЫ В ОБЛАСТИ С ТЕПЛОИЗОЛИРОВАННОЙ ДВИЖУЩЕЙСЯ ГРАНИЦЕЙ

Граничные условия (7), (16) в соответствующих модельных представлениях нестационарной теплопроводности создают эффект возникновения градиента температуры в области и, как следствие, несмотря на отсутствие внешнего и внутреннего теплового воздействия, появляются соответствующие термоупругие напряжения. Формально возникает представление о невозможности проявления указанного эффекта, однако аналитические решения модельных задач показывают обратное. В [2] высказано предположение, что кинетическая энергия движущейся теплоизолированной границы переходит в тепловую энергию области, что и вызывает тепловые и термические эффекты. В связи с этим рассмотрим упругое полупространство $z > l + vt$, $t > 0$ с равномерно движущейся теплоизолированной границей при отсутствии внешних и внутренних тепловых нагрузок в постановке тепловой задачи для уравнения гиперболического типа:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \tau_r \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}, \quad z > l + vt, \quad t > 0, \quad (17)$$

$$T(z, t)|_{t=0} = T_0, \quad \frac{\partial T(z, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad z \geq l, \quad (18)$$

$$\left[\frac{\partial T(z, t)}{\partial z} + \frac{v}{a} T(z, t + \tau_r) \right]_{z=l+vt} = 0, \quad t > 0, \quad (19)$$

$$|T(z, t)| < \infty, z \geq l + vt, t \geq 0. \quad (20)$$

Граничное условие (19) можно записать в виде:

$$\left[\frac{\partial T(z, t)}{\partial z} + \frac{v}{a} T(z, t) + \frac{v\tau_r}{a} \cdot \frac{\partial T(z, t)}{\partial t} \right]_{z=l+vt} = 0, t > 0. \quad (21)$$

Введем безразмерные переменные

$$z' = (z - l)/l; \quad \tau = at/l^2; \quad v_0 = vl/a; \quad \tau_0 = a\tau_r/l^2;$$

$$T^*(z', \tau) = [T(z, t) - T_0]/T_0$$

и далее подвижную систему координат $\xi = z' - v_0\tau$, $\tau > 0$, полагая $T^*(z', \tau) = W(\xi, \tau)$.

Соотношения (17)–(21) теперь будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \tau} &= (1 - \tau_0 v_0^2) \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + v_0 \frac{\partial W}{\partial \xi} + \\ &+ 2v_0 \tau_0 \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \tau} - \tau_0 \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} = 0, \xi > 0, \tau > 0, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} W(\xi, \tau)|_{\tau=0} &= 0, \quad \frac{\partial W(\xi, \tau)}{\partial \tau}|_{\tau=0} = \\ &= v_0 \frac{\partial W(\xi, \tau)}{\partial \xi}|_{\tau=0} = 0, \xi \geq 0, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} (1 - \tau_0 v_0^2) \frac{\partial W(\xi, \tau)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} &= \\ &= -v_0 \left[W(\xi, \tau) + \tau_0 \frac{\partial W(\xi, \tau)}{\partial \tau} + 1 \right] \Big|_{\xi=0}, \tau > 0, \end{aligned} \quad (24)$$

$$|W(\xi, \tau)| < \infty, \xi \geq 0, \tau \geq 0. \quad (25)$$

В пространстве изображений по Лапласу:

$$\bar{W}(\xi, p) = \int_0^\infty W(\xi, \tau) \exp(-p\tau) d\tau$$

операционное решение преобразованной задачи (22)–(25)

$$\begin{aligned} (1 - \tau_0 v_0^2) \frac{d^2 \bar{W}}{d\xi^2} + v_0 (1 + 2\tau_0 p) \frac{d\bar{W}}{d\xi} - \\ - p(1 + \tau_0 p) \bar{W} = 0, \xi > 0, \end{aligned}$$

$$(1 - \tau_0 v_0^2) \frac{d\bar{W}}{d\xi} \Big|_{\xi=0} = -v_0 \left[(1 + \tau_0 p) \bar{W} + \frac{1}{p} \right] \Big|_{\xi=0},$$

$$|\bar{W}(\xi, p)| < \infty, \xi \geq 0$$

запишем в виде:

$$\bar{W}(\xi, p) = \bar{\Psi}_1(\xi, p) \bar{\Psi}_2(\xi, p), \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_1(\xi, p) &= \frac{v_0}{\left[(-v_0/2) + \sqrt{\tau_0} \sqrt{(p+2\alpha)(p+2\beta)} \right]} \times \\ &\times \exp \left[-\frac{(v_0/2)\xi}{1 - \tau_0 v_0^2} \right], \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_2(\xi, p) &= \\ &= \frac{1}{p} \exp \left\{ -\left[\frac{\xi \sqrt{\tau_0}}{1 - \tau_0 v_0^2} \sqrt{(p+2\alpha)(p+2\beta)} + \frac{\tau_0 v_0 \xi}{1 - \tau_0 v_0^2} p \right] \right\}, \quad (28) \\ \alpha &= \frac{1 + \sqrt{1 - \tau_0 v_0^2}}{4\tau_0}; \quad \beta = \frac{1 - \sqrt{1 - \tau_0 v_0^2}}{4\tau_0}. \end{aligned}$$

Для нахождения оригиналов изображений (27)–(28) рассмотрим предварительно новые преобразования операционного исчисления, представляющие интерес для гиперболических моделей переноса. В [3] приведен оригинал изображения

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \exp \left[-\xi \sqrt{(p+2\alpha)(p+2\beta)} \right] \leftarrow \\ \leftarrow \left[\exp(-\rho\xi) + \sigma\xi \int_{\xi}^t \exp(-\rho\tau) \frac{I_1(\sigma\sqrt{\tau^2 - \xi^2})}{\sqrt{\tau^2 - \xi^2}} d\tau \right] \times \quad (29) \\ \times \eta(t - \xi) = W_1(\xi, t) \eta(t - \xi). \end{aligned}$$

Здесь $\sigma = \alpha - \beta$, $\rho = \alpha + \beta$, $I_1(z)$ – модифицированная функция Бесселя, $\eta(z)$ – функция Хевисайда. С другой стороны, вычисляя оригинал изображения слева в (29) с помощью контурного интеграла Римана – Меллина с двумя точками ветвления по методике, развитой в [3], находим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \exp \left[-\xi \sqrt{(p+2\alpha)(p+2\beta)} \right] \leftarrow \left\{ \exp(-2\xi\sqrt{\alpha\beta}) - \right. \\ \left. - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\sigma} \frac{\sin \xi \sqrt{y(2\sigma - y)}}{y + 2\beta} \exp[-(y + 2\beta)t] dy \right\} \eta(t - \xi) = \quad (30) \\ = W_2(\xi, t) \eta(t - \xi). \end{aligned}$$

Покажем, что $W_1(\xi, t) = W_2(\xi, t)$.

Имеем:

$$\begin{aligned} W_1(\xi, t) &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left[- \int_{\xi}^t \exp(-\rho \tau) I_0(\sigma \sqrt{\tau^2 - \xi^2}) d\tau \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left[- \int_{\xi}^t \exp(-\rho \tau) J_0(\sigma \sqrt{\xi^2 - \tau^2}) d\tau \right]. \end{aligned} \quad (31)$$

Продифференцируем обе части (31) по t :

$$\begin{aligned} [W_1(\xi, t)]'_t &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left[- \exp(-\rho t) J_0(\sigma \sqrt{\xi^2 - t^2}) \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left[- \exp(-2\beta t) \exp(-\sigma t) J_0(\sigma \sqrt{\xi^2 - t^2}) \right]. \end{aligned}$$

Воспользуемся далее достаточно редким интегралом [3]:

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{\exp(-px)}{\sqrt{ax - x^2}} \cos c \sqrt{ax - x^2} dx &= \\ &= \pi \exp(-ap/2) J_0 \left(\frac{a}{2} \sqrt{c^2 - p^2} \right). \end{aligned}$$

Отсюда:

$$\begin{aligned} [W_1(\xi, t)]'_t &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\sigma} \sin \xi \sqrt{y(2\sigma - y)} \times \\ &\times \exp[-(y + 2\sigma)t] dy. \end{aligned} \quad (32)$$

Интегрируя обе части (32) по t и используя для нахождения постоянной интегрирования теорему о конечном значении $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \bar{f}(p)$, дающую в (30) $C = \exp(-2\xi\sqrt{\alpha\beta})$, получаем окончательно:

$$\begin{aligned} W_1(\xi, t) &= \exp(-2\xi\sqrt{\alpha\beta}) - \\ &- \frac{1}{\pi} \int_0^{2\sigma} \frac{\sin \xi \sqrt{y(2\sigma - y)}}{y + 2\beta} \exp[-(y + 2\beta)t] dy = W_2(\xi, t). \end{aligned}$$

Таким образом, находим оригинал:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \exp \left[- \frac{\xi \sqrt{\tau_0}}{1 - \tau_0 v_0^2} \sqrt{(p + 2\alpha)(p + 2\beta)} \right] \leftarrow \\ \leftarrow \left\{ \exp \left[- \frac{(v_0/2)\xi}{1 - \tau_0 v_0^2} \right] - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\sigma} \frac{1}{y + 2\beta} \sin \frac{\xi \sqrt{\tau_0} \sqrt{y(2\sigma - y)}}{1 - \tau_0 v_0^2} \times \right. \\ \left. \times \exp[-(y + 2\beta)\tau] dy \right\} \eta \left(\tau - \frac{\xi \sqrt{\tau_0}}{1 - \tau_0 v_0^2} \right). \end{aligned} \quad (33)$$

Теперь, используя (33), находим оригинал изображения $\bar{\Psi}_2(\xi, p)$ (28):

$$\begin{aligned} \Psi_2(\xi, \tau) &= \\ &= \left\{ \exp \left[- \frac{(v_0/2)\xi}{1 - \tau_0 v_0^2} \right] - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\sigma} \frac{1}{y + 2\beta} \sin \frac{\xi \sqrt{\tau_0} \sqrt{y(2\sigma - y)}}{1 - \tau_0 v_0^2} \times \right. \\ &\times \exp \left[-(y + 2\beta) \left(\tau - \frac{\tau_0 v_0 \xi}{1 - \tau_0 v_0^2} \right) \right] dy \left. \right\} \eta \left(\tau - \frac{\xi \sqrt{\tau_0}}{1 - v_0 \sqrt{\tau_0}} \right). \end{aligned} \quad (34)$$

Оригинал изображения $\bar{\Psi}_1(\xi, p)$ (27) имеет вид:

$$\begin{aligned} \Psi_1(\xi, \tau) &= \exp \left(- \frac{(v_0/2)\xi}{1 - \tau_0 v_0^2} \right) \times \\ &\times \left[\frac{v_0 \sqrt{\tau_0}}{\sqrt{\pi}} \int_{2\beta}^{2\alpha} \frac{\sqrt{(2\alpha - y)(y - 2\beta)} \exp(-y\tau)}{(v_0^2/4) + \tau_0(2\alpha - y)(y - 2\beta)} dy \right]. \end{aligned} \quad (35)$$

Искомый оригинал изображения $\bar{W}(\xi, p)$ (26) теперь будет иметь вид:

$$\begin{aligned} W(\xi, \tau) &= \left[\int_{\frac{\xi \sqrt{\tau_0}}{1 - v_0 \sqrt{\tau_0}}}^{\tau} \Psi_1(\xi, \tau - \tau') \Psi_2(\xi, \tau') d\tau' \right] \times \\ &\times \eta \left(\tau - \frac{\xi \sqrt{\tau_0}}{1 - v_0 \sqrt{\tau_0}} \right). \end{aligned} \quad (36)$$

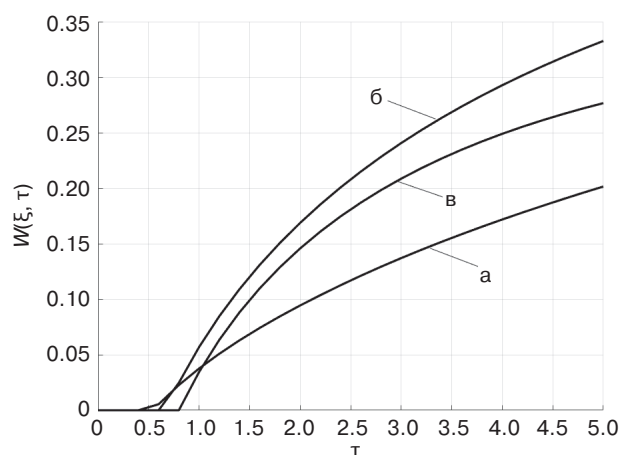


Рис. 1. Зависимость температурной функции $W(\xi, \tau)$ (36) от τ в сечении $\xi = 1$ для различных v_0 : $v_0 = 0.16$ (а); $v_0 = 0.5$ (б); $v_0 = 0.75$ (в) при $\tau_0 = 0.25$

На рис. 1 приведены кривые зависимости температурной функции (36) от τ в сечении $\xi = 1$ для различных v_0 при $\tau_0 = 0.25$. Кривые на рис. 1 наглядно показывают особенности тепловой реакции области

для локально-неравновесных процессов (в аналитическом решении (36) присутствует функция Хевисайда, объясняющая задержку начала распространения теплоты в фиксированном сечении).

ТЕРМИЧЕСКАЯ РЕАКЦИЯ ОБЛАСТИ НА ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ $W(\xi, \tau)$

Следующий шаг – исследование термической реакции области $\bar{\Omega}_t = \{z \geq l + vt, t \geq 0\}$ с движущейся термоизолированной границей в рамках модельной задачи (17)–(20). Рассматривается, как и выше, упругое полупространство, что представляет практический интерес для многих направлений науки и техники, описанных в [3]. Запишем определяющие соотношения динамической термоупругости для области $\bar{\Omega}_t = \{M(x, y, z) \in \bar{D}_t = D_t + S_t, t \geq 0\}$ с температурной функцией $T(M, t)$. Пусть T_0 – начальная температура, при которой область находится в недеформированном и ненапряженном состоянии; $\sigma_{ij}(M, t)$, $\varepsilon_{ij}(M, t)$, $U_i(M, t)$ ($i = x, y, z$) – соответственно компоненты тензоров напряжения, деформации и вектора перемещения, удовлетворяющие основным уравнениям (несвязанной) термоупругости (в индексных обозначениях) [19, 20]:

$$\sigma_{ij,j}(M, t) = \rho \ddot{U}_i(M, t), \quad (37)$$

$$\varepsilon_{ij}(M, t) = (1/2) [U_{i,j}(M, t) + U_{j,i}(M, t)], \quad (38)$$

$$\sigma_{ij}(M, t) = 2\mu \varepsilon_{ij}(M, t) + [\lambda \varepsilon_{ii}(M, t) - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T(T(M, t) - T_0)]\delta_{ij}, \quad (39)$$

где ρ – плотность; $\mu = G$, G – модуль сдвига; $\lambda = 2G\nu/(1 - 2\nu)$ – изотермические коэффициенты Ламе; ν – коэффициент Пуассона, при этом $2G(1 + \nu) = E$, E – модуль Юнга; α_T – коэффициент линейного теплового расширения; δ_{ij} – символ Кронекера; $\varepsilon_{ii}(M, t) = \bar{\varepsilon}(M, t) = U_{i,i}(M, t)$ – объемная деформация, связанная с суммой нормальных напряжений $\bar{\sigma}(M, t) = \sigma_{nn}(M, t)$, $n = x, y, z$ соотношением

$$\bar{\varepsilon}(M, t) = \frac{1 - 2\nu}{E} \bar{\sigma}(M, t) + 3\alpha_T [T(M, t) - T_0]. \quad (40)$$

Для случая одномерного движения $M = M(z, t)$, $z > l + vt$, $t > 0$ имеем из (37)–(40):

$$\begin{aligned} U_x = U_y = 0, \quad U_z = U_z(z, t), \quad \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = 0, \\ \varepsilon_{zz}(z, t) = \partial U_z(z, t) / \partial z = [1/(1 - \nu)] \times \\ \times \{[(1 - 2\nu)/(2G)] \sigma_{zz}(z, t) + (1 + \nu)\alpha_T T(z, t) - T_0\}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}(z, t)}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 U_z(z, t)}{\partial t^2}.$$

Дифференцируя это соотношение по z и подставляя значение $\partial U_z(z, t) / \partial z$, приходим к уравнению вида:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial z^2} - \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial t^2} = \\ = \frac{(1 + \nu)}{(1 - \nu)} \alpha_T \rho \frac{\partial^2 [T(z, t) - T_0]}{\partial t^2}, \quad z > l + vt, t > 0 \end{aligned} \quad (41)$$

с краевыми условиями:

$$\sigma_{zz}(z, t)|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{zz}(z, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad z \geq l, \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}(z, t)|_{z=l+vt} = 0, \quad t > 0, \\ |\sigma_{zz}(z, t)| < \infty, \quad z \geq l + vt, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (43)$$

В (41) $v_p = \sqrt{2G(1 - \nu) / [\rho(1 - 2\nu)]} = \sqrt{(\lambda + 2\mu) / \rho}$ – скорость распространения волны расширения в упругой среде, близкая к скорости звука. Остальные компоненты тензора напряжения, отличные от нуля, согласно (37)–(39), имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(z, t) = \sigma_{yy}(z, t) = \\ = \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_{zz}(z, t) - \frac{E\alpha_T [T(z, t) - T_0]}{1 - \nu}. \end{aligned}$$

При этом

$$\varepsilon_{zz}(z, t) = \frac{1 - 2\nu}{2G(1 - \nu)} \sigma_{zz}(z, t) + \frac{(1 + \nu)}{(1 - \nu)} \alpha_T [T(z, t) - T_0].$$

Функция $T(z, t)$ в (41)–(43) удовлетворяет условиям (17)–(20). Для решения задачи (41)–(43) перейдем в систему координат (z', τ) по приведенным выше соотношениям, полагая при этом

$$\alpha_0 = v_p l / a, \quad S_T = \alpha_T (3\lambda + 2\mu) = \frac{\alpha_T E}{(1 - 2\nu)},$$

$$\sigma_{z'z'}(z', \tau) = \frac{\sigma_{zz}(z, t)}{S_T T_0}.$$

Опуская промежуточные выкладки перехода, введем далее подвижную систему координат: $\xi = z' - v_0 \tau$, полагая $\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) = \sigma_{z'z'}(z', \tau)$, $T^*(z', \tau) = W(\xi, \tau)$. Соотношения (41)–(43) теперь примут вид:

$$(\alpha_0^2 - v_0^2) \frac{\partial^2 \sigma_{\xi\xi}}{\partial \xi^2} + 2v_0 \frac{\partial^2 \sigma_{\xi\xi}}{\partial \xi \partial \tau} - \frac{\partial^2 \sigma_{\xi\xi}}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} - 2v_0 \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \tau} + v_0^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2}, \quad \xi > 0, \tau > 0, \quad (44)$$

$$\left. \sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) \right|_{\tau=0} = \frac{\partial \sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0, \quad \xi \geq 0, \quad \left. \sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) \right|_{\xi=0} = 0, \quad \tau > 0, \quad \left| \sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) \right| < \infty, \quad \xi \geq 0, \tau \geq 0 \quad (45)$$

В пространстве изображений по Лапласу соотношения (44)–(45) записываются в виде:

$$(\alpha_0^2 - v_0^2) \frac{d^2 \bar{\sigma}_{\xi\xi}}{d\xi^2} + 2v_0 p \frac{d \bar{\sigma}_{\xi\xi}}{d\xi} - p^2 \bar{\sigma}_{\xi\xi} = \frac{p(p + v_0^2)}{1 - \tau_0 v_0^2} \bar{W} - \frac{v_0(v_0^2 + 2p)}{1 - \tau_0 v_0^2} \frac{d \bar{W}}{d\xi}, \quad \xi > 0, \quad (46)$$

$$\bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi, p) \Big|_{\xi=0} = 0, \quad \left| \bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi, p) \right| < \infty, \quad \xi \geq 0. \quad (47)$$

Здесь было использовано соотношение:

$$\frac{d^2 \bar{W}}{d\xi^2} = \frac{p(1 + \tau_0 p)}{1 - \tau_0 v_0^2} \bar{W} - \frac{v_0(1 + 2\tau_0 p)}{1 - \tau_0 v_0^2} \frac{d \bar{W}}{d\xi},$$

вытекающее из операционной формы уравнения (22). Для уменьшения громоздкости при решении задачи (46)–(47) примем во внимание тот факт, что инерционные эффекты в (41) действуют времена микросекундной длительности. Тогда входящее в общее решение (26) выражение $\sqrt{\tau_0 p^2 + p + v_0^2/4}$ можно записать в виде:

$$\sqrt{\tau_0 p^2 + p + v_0^2/4} \simeq p\sqrt{\tau_0} (1 + 1/(2\tau_0 p))$$

и решение (26) принимает вид:

$$\bar{W}(\xi, p) = \frac{v_0/\sqrt{\tau_0}}{p \left[p + (1 - v_0\sqrt{\tau_0})/(2\tau_0) \right]} \times \exp \left[-\frac{(2\tau_0 p + 1)\xi}{2\sqrt{\tau_0}(1 - v_0\sqrt{\tau_0})} \right].$$

Искомое напряжение в пространстве изображений теперь будет:

$$\bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi, p) = \bar{F}(p) \left\{ \exp[-\bar{\gamma}(p)\xi] - \exp \left[-\frac{\xi}{\alpha_0 - v_0} p \right] \right\}, \quad (48)$$

$$\bar{F}(p) = \left[\frac{A_{11}}{(p + \gamma_{11})(p + \gamma_{12})} + \frac{A_{12}}{p(p + \gamma_{11})(p + \gamma_{12})} + \frac{A_{13}}{p^2(p + \gamma_{11})(p + \gamma_{12})} \right] - \left[\frac{A_{21}}{(p + \gamma_{11})(p + \gamma_{13})} + \frac{A_{31}}{p(p + \gamma_{11})(p + \gamma_{13})} + \frac{A_{32}}{p^2(p + \gamma_{11})(p + \gamma_{13})} \right];$$

$$A_{11} = \frac{v_0(\alpha_0 - v_0)(1 + 2\tau_0 - v_0\sqrt{\tau_0})}{2\alpha_0\sqrt{\tau_0}(\alpha_0\sqrt{\tau_0} - 1)(1 - \tau_0 v_0^2)};$$

$$A_{12} = A_{11} \left[v_0^2 + (1 + \tau_0 v_0^2) / (2\tau_0) \right],$$

$$A_{13} = \frac{v_0^3(\alpha_0 - v_0)}{4\alpha_0\sqrt{\tau_0}(1 - \tau_0 v_0^2)(\alpha_0\sqrt{\tau_0} - 1)},$$

$$A_{21} = \frac{v_0(\alpha_0 + v_0)(1 + 2\tau_0 - v_0\sqrt{\tau_0})}{2\alpha_0\sqrt{\tau_0}(\alpha_0\sqrt{\tau_0} + 1)(1 - \tau_0 v_0^2)},$$

$$A_{31} = A_{21} \left[v_0^2 + (1 + \tau_0 v_0^2) / (2\tau_0) \right],$$

$$A_{32} = \frac{v_0^3(\alpha_0 + v_0)}{4\alpha_0\sqrt{\tau_0}(1 - \tau_0 v_0^2)(\alpha_0\sqrt{\tau_0} + 1)},$$

$$\gamma_{11} = \frac{1 - v_0\sqrt{\tau_0}}{2\tau_0}, \quad \gamma_{12} = \frac{\alpha_0 - v_0}{2\sqrt{\tau_0}(\alpha_0\sqrt{\tau_0} - 1)},$$

$$\gamma_{13} = \frac{\alpha_0 + v_0}{2\sqrt{\tau_0}(\alpha_0\sqrt{\tau_0} + 1)}, \quad \bar{\gamma}(p) = \frac{2\tau_0 p + 1}{2\sqrt{\tau_0}(1 - v_0)\sqrt{\tau_0}}.$$

Теперь из (48) находим для искомого напряжения:

- при $\alpha_0\sqrt{\tau_0} = v_p/v_T > 1$

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) = \begin{cases} 0 & \tau < \frac{\xi}{\alpha_0 - v_0}, \\ \sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau) & \frac{\xi}{\alpha_0 - v_0} < \tau < \frac{\xi\sqrt{\tau_0}}{1 - v_0\sqrt{\tau_0}}, \\ \sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) + \sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau) & \tau > \frac{\xi\sqrt{\tau_0}}{1 - v_0\sqrt{\tau_0}}; \end{cases} \quad (49)$$

- при $\alpha_0 \sqrt{\tau_0} = v_p / v_T < 1$

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) = \begin{cases} 0, & \tau < \frac{\xi \sqrt{\tau_0}}{1 - v_0 \sqrt{\tau_0}}, \\ \sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau), & \frac{\xi \sqrt{\tau_0}}{1 - v_0 \sqrt{\tau_0}} < \tau < \frac{\xi}{\alpha_0 - v_0}, \\ \sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) + \sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau), & \tau > \frac{\xi}{\alpha_0 - v_0}. \end{cases} \quad (50)$$

Здесь:

$$\sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) = F\left(\tau - \frac{\xi \sqrt{\tau_0}}{1 - v_0 \sqrt{\tau_0}}\right) \exp\left[-\frac{\xi}{2\sqrt{\tau_0}(1 - v_0 \sqrt{\tau_0})}\right],$$

$$\sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau) = -F\left(\tau - \frac{\xi}{\alpha_0 - v_0}\right),$$

$$F(\tau) = \left[B_{11} \exp(-\gamma_{11}\tau) + B_{12} \exp(-\gamma_{12}\tau) + \frac{A_{13}\tau}{\gamma_{11}\gamma_{12}} + B_{13} \right] - \left[B_{21} \exp(-\gamma_{11}\tau) + B_{31} \exp(-\gamma_{13}\tau) + \frac{A_{32}\tau}{\gamma_{11}\gamma_{13}} + B_{32} \right],$$

$$B_{11} = \frac{\gamma_{11}^2 A_{11} - \gamma_{11} A_{12} + A_{13}}{\gamma_{11}^2 (\gamma_{12} - \gamma_{11})},$$

$$B_{12} = \frac{A_{12}\gamma_{12} - A_{11}\gamma_{12}^2 - A_{13}}{\gamma_{12}^2 (\gamma_{12} - \gamma_{11})},$$

$$B_{13} = \frac{A_{12}}{\gamma_{11}\gamma_{12}} - \frac{(\gamma_{11} + \gamma_{12})A_{13}}{\gamma_{11}^2 \gamma_{12}^2},$$

$$B_{21} = \frac{\gamma_{11}^2 A_{21} - \gamma_{11} A_{13} + A_{32}}{\gamma_{11}^2 (\gamma_{13} - \gamma_{11})},$$

$$B_{31} = \frac{\gamma_{13} A_{31} - \gamma_{13}^2 A_{21} - A_{32}}{\gamma_{13}^2 (\gamma_{13} - \gamma_{11})},$$

$$B_{32} = \frac{A_{31}}{\gamma_{11}\gamma_{13}} - \frac{(\gamma_{11} + \gamma_{13})A_{32}}{\gamma_{11}^2 \gamma_{13}^2}.$$

На рис. 2 приведен график зависимости динамического температурного напряжения (49) от безразмерного времени в сечении $\xi = 1$ при $\tau_0 = 0.25$, $\alpha_0 = 3$ ($\alpha_0 \sqrt{\tau_0} = v_p / v_T = 1.5 > 1$; для металлов $v_p / v_T > 1$,

для полимерных стекол $v_p / v_T < 1$) для значений $v_0 = 0.16$ и 0.65 . Как показывают кривые, для локально-неравновесных процессов учет конечной скорости распространения теплоты приводит к существенному изменению картины напряжений по сравнению с соответствующими кривыми в рамках классической феноменологии Фурье [21]. Возьмем произвольную точку (сечение $\xi = \text{const}$). Вначале напряжения в ней равны нулю. В момент времени $\tau = \xi / (\alpha_0 - v_0) (t = (z - l) / v_p)$ к этой точке подходит продольная упругая волна напряжения, фронт которой движется со скоростью v_p . Напряжение сжатия меняется скачком и далее убывает (возрастает по абсолютной величине). В момент времени $\tau = \xi \sqrt{\tau_0} / (1 - v_0 \sqrt{\tau_0})$ к этой точке (сечению) подходит тепловая волна, фронт которой движется со скоростью v_T ; напряжение меняется скачком и далее приближается к значению, близкому квазистатическому.

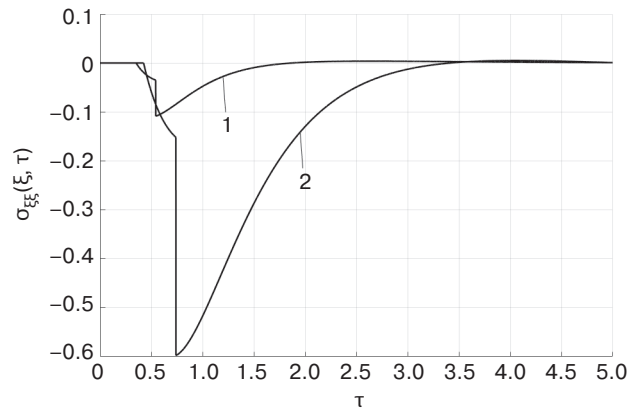


Рис. 2. Зависимость напряжения $\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)$ (49) от τ в сечении $\xi = 1$ при $\tau_0 = 0.25$, $v_0 = 0.16$ (1), $v_0 = 0.65$ (2), $\alpha_0 = 3$

Таким образом, в массивном твердом теле (упругое полупространство с движущейся термоизолированной границей) распространяются две волны: тепловая и упругая, причем фронт упругой волны предшествует фронту тепловой волны. Проведенные автором исследования влияния теплоотдачи на движущейся границе области показали, что с уменьшением теплоотдачи с поверхности полупространства динамические температурные напряжения уменьшаются. Если в классическом случае [3] наличие конечной теплоотдачи с поверхности границы полупространства приводит к исчезновению разрывов температурных напряжений, то в случае обобщенной динамической задачи термоупругости [20] характер напряжений остается таким же, как и при бесконечно большом значении коэффициента теплоотдачи (граничное условие первого рода). Эту часть исследований, весьма объемную по своему содержанию, автор предполагает опубликовать в дальнейшем.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенные модельные представления дают основание для следующего утверждения. Описан новый эффект аналитической теплофизики и прикладной термомеханики: в области с движущейся термоизолированной границей, несмотря на отсутствие внешних и внутренних источников теплоты, возникает градиент температуры, приводящий

к появлению температурного поля и соответствующих ему температурных напряжений, поскольку кинетическая энергия движущейся границы переходит в тепловую энергию области. Указанный эффект проявляется как в классической феноменологии Фурье (уравнения параболического типа), так и в обобщенной феноменологии для локально-неравновесных процессов (уравнения гиперболического типа).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карташов Э.М. Тепловое разрушение полимерных волокон в теории временной зависимости прочности. *Тонкие химические технологии*. 2021;16(6):526–540. <https://doi.org/10.32362/2410-6593-2021-16-6-526-540>
2. Карташов Э.М., Соловьев И.А. Стохастический анализ эффекта возникновения градиента температуры при теплоизолированной движущейся границе. *Известия РАН. Энергетика*. 2017;1:119–128.
3. Карташов Э.М., Кудинов В.А. *Аналитические методы теории теплопроводности и ее приложений*. М.: URSS; 2017. 1080 с. ISBN 978-5-9710-4994-4
4. Vernotte P. Les paradoxes de la theorie continue de l'equation de la chaleur. *Comptes Rendus. Acad. Sci. Paris*. 1958;246(22):3154–3155.
5. Лыков А.В. *Теория теплопроводности*. М.: Высшая школа; 1967. 600 с.
6. Cattaneo C. Sur une forme de l'equation de la chaleur eliminant le paradoxe d'une propagation instantanee. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*. 1958;247(4):431–433.
7. Лыков А.В. Применение методов термодинамики необратимых процессов к исследованию тепло- и массообмена. *Инженерно-физический журнал*. 1965;9(3):287–304.
8. Баумейстер К., Хамилл Т. Гиперболическое уравнение теплопроводности. Решение задачи о полубесконечном теле. *Теплопередача*. 1969;4:112–119.
9. Соболев С.Л. Локально-неравновесные модели процессов переноса. *Успехи физ. наук*. 1997;167(10):1095–1106. <https://doi.org/10.3367/UFNr.0167.199710f.1095>
10. Жоу Д., Касас-Баскес Х., Лебон Дж. *Расширенная необратимая термодинамика*: пер. с англ. М.- Ижевск: Институт компьютерных исследований; 2006. 528 с.
11. Кудинов В.А., Кудинов И.В. Получение и анализ точного аналитического решения гиперболического уравнения теплопроводности для плоской стенки. *Теплофизика высоких температур*. 2012;50(1):118–126.
12. Кудинов В.А., Кудинов И.В. Исследование теплопроводности с учетом конечной скорости распространения теплоты. *Теплофизика высоких температур*. 2013;51(2):301–310.
13. Кирсанов Ю.А. *Моделирование теплофизических процессов*. СПб.: Изд-во Политехника; 2022. 230 с.

REFERENCES

1. Kartashov E.M. Thermal destruction of polymer fibers in the theory of temporary dependence of strength. *Tonk. Khim. Technol. = Fine Chem. Technol.* 2021;16(6):526–540 (in Russ.). <https://doi.org/10.32362/2410-6593-2021-16-6-526-540>
2. Kartashov E.M., Soloviev I.A. Stochastic interpretation of effect of emergence of the gradient of temperature at the heatisolated moving border. *Izvestiya RAN. Energetika*. 2017;1:119–128 (in Russ.).
3. Kartashov E.M., Kudinov V.A. *Analiticheskie metody teorii teploprovodnosti i ee prilozhenii (Analytical Methods of the Theory of Heat Conduction and its Applications)*. Moscow: URSS; 2012. 1080 p. (in Russ.). ISBN 978-5-9710-4994-4
4. Vernotte P. Les paradoxes de la theorie continue de l'equation de la chaleur. *Comptes Rendus. Acad. Sci. Paris*. 1958;246(22):3154–3155.
5. Lykov A.V. *Teoriya teploprovodnosti (Theory of Heat Conduction)*. Moscow: Vysshaya shkola; 1967. 600 p. (in Russ.).
6. Cattaneo C. Sur une forme de l'equation de la chaleur eliminant le paradoxe d'une propagation instantanee. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*. 1958;247(4):431–433.
7. Luikov A.V. Application of methods of thermodynamics of irreversible processes to the investigation of heat and mass transfer. *J. Eng. Phys.* 1965;9(3):189–202. <https://doi.org/10.1007/BF00828333>
[Original Russian Text: Lykov A.V. Application of methods of thermodynamics of irreversible processes to the investigation of heat and mass transfer. *Inzhenerno-Fizicheskii Zhurnal*. 1965;9(3):287–304 (in Russ.).]
8. Baumeister K., Hamill T. Hyperbolic heat equation. Solving the problem of a semi-infinite body. *Teploperedacha = J. Heat Transfer*. 1969;4:112–119 (in Russ.).
9. Sobolev S.L. Local Non-Equilibrium Transport Models. *Phys. Usp.* 1997;40(10):1043. <https://doi.org/10.1070/PU1997v040n10ABEH000292>
[Original Russian Text: Sobolev S.L. Local Non-Equilibrium Transport Models. *Uspekhi Fizicheskikh Nauk*. 1997;167(10):1095–1106 (in Russ.). <https://doi.org/10.3367/UFNr.0167.199710f.1095>]
10. Zhou D., Casas-Basquez H., Lebon J. *Rasshirennaya neobratimaya termodinamika (Extended Irreversible Thermodynamics)*: transl. from Engl. Moscow–Izhevsk: Institut Komp'yuternykh Issledovaniy; 2006. 528 p. (in Russ.).

14. Еремин А.В. Исследование быстрорелаксирующих температурных возбуждений, вызываемых сверхкороткими импульсами лазерного излучения. *Современная наука: Актуальные проблемы теории и практики. Серия: Естественные и технические науки*. 2019;8:47–52.
15. Еремин А.В. Об одном методе математического моделирования процесса переноса теплоты в твердых телах. *Перспективы науки*. 2019;7(118):117–119.
16. Формалев В.Ф. *Уравнения математической физики*. М.: URSS; 2021. 648 с. ISBN 978-5-9710-8380-1
11. Kudinov V.A., Kudinov I.V. One method of reception of the exact analytical decision of the hyperbolic equation of heat conductivity on the basis of use of orthogonal methods. *High Temp.* 2012;50(1):112–119. <https://doi.org/10.1134/S0018151X12010105> [Original Russian Text: Kudinov V.A., Kudinov I.V. One method of reception of the exact analytical decision of the hyperbolic equation of heat conductivity on the basis of use of orthogonal methods. *Teplofizika Vysokikh Temperatur*. 2012;50(1):118–126 (in Russ.).]
12. Kudinov V.A., Kudinov I.V. Studying heat conduction taking into account the finite rate of heat propagation. *High Temp.* 2013;51(2):268–276. <https://doi.org/10.1134/S0018151X1204013X> [Original Russian Text: Kudinov V.A., Kudinov I.V. Studying heat conduction taking into account the finite rate of heat propagation. *Teplofizika Vysokikh Temperatur*. 2013;51(2):301–310 (in Russ.).]
13. Kirsanov Yu.A. *Modelirovanie teplofizicheskikh protsessov (Modeling of Thermophysical Processes)*. St. Petersburg: Politekhnik; 2022. 230 p. (in Russ.).
14. Eremin A.V. Research on fast relaxing temperature excitations caused by ultrashort laser pulses. *Sovremennaya nauka: Aktual'nye problemy teorii i praktiki. Seriya: Estestvennye i tekhnicheskie nauki = Modern Science: Actual Problems of Theory & Practice. Ser.: Natural & Technical Sciences*. 2019;8:47–52 (in Russ.).
15. Eremin A.V. About one method of heat transfer process in solid bodies mathematical modeling. *Perspektivy nauki = Science Prospects*. 2019;7(118):117–119 (in Russ.).
16. Formalev V.F. *Uravneniya matematicheskoi fiziki (Equations of Mathematical Physics)*. Moscow: URSS; 2021. 648 p. (in Russ.). ISBN 978-5-9710-8380-1

Об авторе

Карташов Эдуард Михайлович, д.ф.-м.н., Заслуженный деятель науки РФ, Почетный работник высшего профессионального образования РФ, Почетный работник науки и техники РФ, Почетный профессор МИТХТ им. М.В. Ломоносова, Лауреат Золотой медали АН Беларуси по теплофизике, профессор, кафедра высшей и прикладной математики Института тонких химических технологий им. М.В. Ломоносова ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119571, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 86). E-mail: professor.kartashov@gmail.com. Scopus Author ID 7004134344, ResearcherID Q-9572-2016, <https://orcid.org/0000-0002-7808-4246>

About the author

Eduard M. Kartashov, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Honored Scientist of the Russian Federation, Honorary Worker of Higher Professional Education of the Russian Federation, Honorary Worker of Science and Technology of the Russian Federation, Honorary Professor of the Lomonosov Moscow State University of Fine Chemical Technology, Laureate of the Golden Medal of the Academy of Sciences of Belarus in Thermophysics, Professor, Department of Higher and Applied Mathematics, M.V. Lomonosov Institute of Fine Chemical Technologies, MIREA – Russian Technological University (86, Vernadskogo pr., Moscow, 119571 Russia). E-mail: professor.kartashov@gmail.com. Scopus Author ID 7004134344, ResearcherID Q-9572-2016, <https://orcid.org/0000-0002-7808-4246>