

УДК 004.032.26  
<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2023-11-5-19-33>



## НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

# Геометрические свойства квантовой запутанности и машинное обучение

С.В. Зуев<sup>®</sup>

Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского, Симферополь, 295007 Россия  
<sup>®</sup> Автор для переписки, e-mail: [zuevsv@cfuv.ru](mailto:zuevsv@cfuv.ru)

### Резюме

**Цели.** Быстрая классификация данных на основе имеющихся в них закономерностей является одним из главных вопросов для построения систем адаптивного искусственного интеллекта. Цель работы – предложить и верифицировать метод такой классификации на основе представления данных в виде квантового состояния или (альтернативно) в виде геометрического объекта в пространстве, свойства которого позволяют производить машинное обучение «на лету» (онлайн-обучение).

**Методы.** В работе используется фейнмановский формализм для представления квантовых состояний и операций над ними, представление квантовых вычислений в виде квантовых схем, геометрические преобразования, топологическая классификация, а также методы классического и квантового машинного обучения. В качестве инструмента разработки использовался язык программирования Python, средства оптимизации для машинного обучения взяты из модуля SciPy. Размеченные данные для анализа взяты из открытых источников. Препроцессинг данных произведен методом отображения признаков в числовые векторы, затем применен метод приведения данных к нужной размерности и далее – отображение данных в квантовое состояние. Используется собственный эмулятор квантовых вычислений (находится в открытом доступе).

**Результаты.** Результаты вычислительных экспериментов выявили способность очень простых квантовых схем к классификации данных без оптимизации. Получены сравнительные показатели качества классификации без использования оптимизации, а также с ее использованием. Эксперименты проведены с различными датасетами и для различных значений размерности пространств признаков. Работоспособность предложенных в работе моделей и методов машинного обучения, а также методов их объединения в сетевые структуры, подтверждена практически.

**Выводы.** Предложенный метод машинного обучения и построения квантовых нейронных сетей может быть применен для создания систем адаптивного искусственного интеллекта в составе модуля онлайн-обучения. Отсутствие оптимизации в процессе онлайн-обучения позволяет применять его в потоке данных, т.е., адаптироваться к изменениям среды. Разработанное алгоритмическое обеспечение не требует наличия квантовых компьютеров и может быть применено при разработке программного обеспечения систем искусственного интеллекта на языке Python в качестве импортируемых модулей.

**Ключевые слова:** онлайн-обучение, адаптивный искусственный интеллект, квантовое машинное обучение, квантовая запутанность

• Поступила: 13.02.2023 • Доработана: 14.06.2023 • Принята к опубликованию: 13.08.2023

**Для цитирования:** Зуев С.В. Геометрические свойства квантовой запутанности и машинное обучение. *Russ. Technol. J.* 2023;11(5):19–33. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2023-11-5-19-33>

**Прозрачность финансовой деятельности:** Автор не имеет финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Кроме отмеченной аффилиации, автор является сотрудником БГТУ им. В.Г. Шухова (Белгород, Россия), но настоящая работа выполнена независимо от этой организации, хотя у автора имеется обязанность указать свою принадлежность к ней.

## RESEARCH ARTICLE

# Geometric properties of quantum entanglement and machine learning

Sergei V. Zuev <sup>@</sup>

*V.I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, 295007 Russia*

<sup>@</sup> Corresponding author, e-mail: [zuevsv@cfuv.ru](mailto:zuevsv@cfuv.ru)

### Abstract

**Objectives.** Fast data analysis based on hidden patterns is one of the main issues for adaptive artificial intelligence systems development. This paper aims to propose and verify a method of such analysis based on the representation of data in the form of a quantum state, or, alternatively, in the form of a geometric object in a space allowing online machine learning.

**Methods.** This paper uses Feynman formalism to represent quantum states and operations on them, the representation of quantum computing in the form of quantum circuits, geometric transformations, topological classification, as well as methods of classical and quantum machine learning. The Python programming language is used as a development tool. Optimization tools for machine learning are taken from the SciPy module. The datasets for analysis are taken from open sources. Data preprocessing was performed by the method of mapping features into numerical vectors, then the method of bringing the data to the desired dimension was applied. The data was then displayed in a quantum state. A proprietary quantum computing emulator is used (it is in the public domain).

**Results.** The results of computational experiments revealed the ability of very simple quantum circuits to classify data without optimization. Comparative indicators of classification quality are obtained without the use of optimization, as well as with its use. Experiments were carried out with different datasets and for different values of the dimension of feature spaces. The efficiency of the models and methods of machine learning proposed in the work, as well as methods of combining them into network structures, is practically confirmed.

**Conclusions.** The proposed method of machine learning and the model of quantum neural networks can be used to create adaptive artificial intelligence systems as part of an online learning module. Free online optimization learning process allows it to be applied in data streaming, that is, adapting to changes in the environment. The developed software does not require quantum computers and can be used in the development of artificial intelligence systems in Python as imported modules.

**Keywords:** online learning, adaptive artificial intelligence, quantum machine learning, quantum entanglement

• Submitted: 13.02.2023 • Revised: 14.06.2023 • Accepted: 13.08.2023

**For citation:** Zuev S.V. Geometric properties of quantum entanglement and machine learning. *Russ. Technol. J.* 2023;11(5):19–33. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2023-11-5-19-33>

**Financial disclosure:** The author has no a financial or property interest in any material or method mentioned.

In addition to the noted affiliation, the author is an employee of the V.G. Shukhov Belgorod State Technological University (Belgorod, Russia). However, although this study is carried out independently of this organization, the author has an obligation to indicate his affiliation with it.

## ВВЕДЕНИЕ

Квантовые алгоритмы привлекают все большее внимание, поскольку ожидается, что квантовые компьютеры скоро можно будет полноценно использовать. С другой стороны, квантовые алгоритмы поиска и факторизации являются одной из основных причин развития квантовых компьютеров. В настоящее время по всему миру доступно несколько таких компьютеров. Однако их мощность сравнительно невелика (самый большой – китайский Jiuzhang с 76 кубитами<sup>1</sup>), и они пока используются в демонстрационных и исследовательских целях.

Другой полюс прогресса в информационных технологиях – искусственный интеллект. Как и большинство человеческих знаний, искусственный интеллект основан на естественном явлении, известном как познание, у которого до сих пор нет общепризнанной количественной теории. Квантовые версии таких теорий, среди прочих, не имеют пока доказанных явных преимуществ, хотя результаты этого исследования могут рассматриваться как указание на определенные преимущества квантовых методов в машинном обучении.

Преимуществам квантовых вычислений и квантовых компьютеров в решении задач в области искусственного интеллекта посвящен обзор [1], в котором обоснована актуальность работ в этой области и указаны магистральные направления, в одном из которых написана эта работа. Имеется также обзор 2023 г. [2], который содержит ссылки на все современные продвижения в этой области.

Главным возможным преимуществом квантовой версии искусственного интеллекта является экспоненциальный рост вычислительных возможностей. В то время как классический искусственный нейрон может обрабатывать входные данные  $N$  измерений, квантовый нейрон может обрабатывать  $2^N$ -мерные данные. Применение квантовой версии может значительно ускорить выполнение как алгоритмов обучения, так и алгоритмов классификации [3]. В то же время, одна из технических проблем,

возникающих при построении крупномасштабного квантового компьютера, – необходимость обеспечить наличие «кубитов, которые могут быть инициализированы произвольными значениями» [4]. Это проблема актуальна и является значительным препятствием на пути к достижению квантового превосходства.

В работах [5–9] предложены прототипы квантовых нейронных сетей на основе квантовых схем с настраиваемыми параметрами. В настоящей работе показано, как этот подход может быть реализован в связи с предложенной архитектурой нейронной сети и как можно обойтись без такой настройки параметров.

Квантовые варианты наиболее популярных алгоритмов машинного обучения уже разработаны. Упомянутые квантовые нейронные сети работают наравне с традиционными. Квантовые машины опорных векторов (Quantum Support Vector Machine) были предложены в [10] и использовали алгоритм ННЛ [11] для инверсии матрицы с целью генерации гиперплоскости. В 2018 г. была представлена модель классификации изображений [12], основанная на квантовых  $k$ -соседях. В статье [13] была предложена квантовая линейная регрессия, использующая квантовые данные. Квантовый аналог дерева решений, разработанный в [14], использует измерение квантовой точности и квантовой энтропии, т.е. разбивает классический алгоритм ID3.

Для кластеризации разработано несколько методов квантового машинного обучения в работе [15]. В частности, квантовая версия алгоритма  $k$ -средних в различных вариантах представлена в [16] и [17]. Еще один квантовый алгоритм кластеризации предложен в [18], он использует алгоритм Гровера для определения медианы кластера.

Разработан также квантовый аналог метода главных компонент (Quantum Principal Component Analysis) [19], который идентифицирует собственные векторы, относящиеся к собственным значениям неизвестного состояния, экспоненциально быстрее, чем любое другое решение.

Областью, близкой к теме данной работы, является обучение с подкреплением, т.е. онлайн-обучение с учетом реакции среды. Существует несколько

<sup>1</sup> [https://en.wikipedia.org/wiki/Jiuzhang\\_\(quantum\\_computer\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Jiuzhang_(quantum_computer)). Дата обращения 01.01.2023. / Accessed January 01, 2023.

квантовых вариантов обучения с подкреплением, например, [20], в котором используется суперпозиция квантовых состояний – за счет этого достигается параллелизм и растет скорость обучения.

Особое место в машинном обучении занимает глубокое обучение. Методы глубокого обучения требуют значительных ресурсов памяти и времени, что делает их развитие в квантовую область привлекательным. Из последних продвижений в этой области можно указать серию работ о квантовых генеративных состязательных сетях (Quantum GAN) [21–23] с реализацией в [24], где используется сверхпроводящий квантовый процессор для генерации и изучения рукописных цифровых изображений квантовыми генеративными состязательными сетями Вассерштейна (Quantum WGAN) [25]. Было показано также, что масштабируемость и стабильность обучения квантовой генеративной состязательной модели улучшается на квантовых машинах Больцмана [26, 27], квантовых автокодерах [28, 29] и квантовых сверточных нейронных сетях [7–9]. Из российских работ в этой области можно указать исследование [6].

Улучшение алгоритмов оптимизации также находится в фокусе исследований квантовых алгоритмов. Имеется квантово-улучшенная оптимизация (Quantum Enhanced Optimization) [30], а также квантовый градиентный спуск [31, 32], которые используются в квантовых нейронных сетях, например, в квантовых машинах Больцмана [27].

Среди последних работ можно отметить экспериментальное исследование [33], в котором показано, что квантовые машины опорных векторов превосходят свои классические аналоги в среднем на 3–4%, квантовые нейронные сети, выполненные на квантовом компьютере, превосходят квантовые машины опорных векторов в среднем на 5%, а классические нейронные сети – на 7%.

Квантовая запутанность в связи с моделью познания была предложена в 2005 г. Это модель для семантики комбинаций понятий, выполненных недекомпозиционным способом. В нем рассматриваются возникающие свойства/ассоциации/умозаключения в связи с комбинациями понятий<sup>2</sup>. В настоящей работе эта идея используется для других целей: чтобы обеспечить способ разделения помеченных данных. Это напрямую не связано с познанием, но эти идеи могут помочь найти лучший способ решения следующих актуальных проблем анализа данных и искусственного интеллекта.

Первая проблема – это онлайн-обучение. Она возникает, когда меняется среда данных и нет

времени и ресурсов для нового обучения в системе. Всеобъемлющая теория онлайн-обучения представлена в курсе Массачусетского технологического института, доступном онлайн<sup>3</sup>. Основная задача в этой проблеме состоит в том, чтобы найти компромисс между качеством и оперативностью: обучение, основанное на качестве, часто требует больших временных затрат, а обучение, основанное на оперативности, может привести к бесполезным результатам. Лучший выбор – создать систему, которая настраивает себя с учетом содержания получаемого ею потока данных. В этой работе предлагается такая система, основанная на запутанных квантовых состояниях. Обобщая эту идею, можно приблизить системы искусственного интеллекта к живому разуму в смысле адаптации к окружающей среде.

Вторая проблема – быстрое распознавание, особенно для движущихся изображений. Эта проблема была хорошо описана в различных блогах и статьях. Например, Шао и Витарсия в работе [34] представили один из современных подходов к этому вопросу. Это исследование было посвящено применению нейронной сети ВР, т.е. искусственной нейронной сети прямого распространения. Применение квантовых алгоритмов для решения этой проблемы не было обнаружено в литературе, но есть разработанный программный инструмент<sup>4</sup>, предназначенный для сравнения потоковых видеоданных, который уже работает в виде веб-сервиса<sup>5</sup>.

Любой прогресс в решении вышеупомянутых проблем может привести к технологическим решениям в таких отраслях, как самоуправляемые автомобили, беспилотные летательные и подводные аппараты, а также видеонаблюдение и другие области, которые в значительной степени связаны с обнаружением аномалий в изменяющейся среде. Чтобы применить результаты этого исследования, не обязательно применять квантовый компьютер: предлагаемые алгоритмы могут быть выполнены на эмуляторах или переформулированы в классической форме. Конечно, это разрушит квантовое превосходство, но эффективность на данных небольшой размерности может оказаться вполне достаточной.

<sup>3</sup> Rakhlin A. Online Methods in Machine Learning. Theory and Applications. TA: Arthur Flajolet. <https://www.mit.edu/~rakhlin/6.883/>. Дата обращения 01.01.2023. / Accessed January 01, 2023.

<sup>4</sup> Билоушенко И.И., Зуев С.В. *Определение степени схожести видеофрагментов*. 2022. Сертификат 2022685057 выдан Федеральной службой по интеллектуальной собственности 20.12.2022. [Biloushenko I.I., Zuev S.V. *Determining the degree of similarity of video fragments*, 2022; Certificate 2022685057 of 20.12.2022 issued by the Federal Service for Intellectual Property (in Russ.).]

<sup>5</sup> <https://ais.bstu.ru/services/1>. Дата обращения 05.07.2023. / Accessed July 05, 2023.

<sup>2</sup> Bruza P.D., Cole R.J. *Quantum Logic of Semantic Space: An Exploratory Investigation of Context Effects in Practical Reasoning*, 2006. <https://arxiv.org/abs/quant-ph/0612178>. Дата обращения 01.01.2023. / Accessed January 01, 2023.

## МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

В работе будут использованы квантовые и классические данные, описанные далее. Множество  $\{x^j\}$  наборов из  $n$  действительных чисел  $\mathbf{x}^j = \{x_0^j, \dots, x_{n-1}^j\}$  с меткой  $l^j$ , определенной для каждого набора, представляет собой *классические* данные. Множество квантовых состояний

$$|q^j\rangle \equiv \sum_{k=0}^{2^n-1} a_k^j |k\rangle$$

рассматривается как *квантовые* данные. Компоненты  $a_k^j$  вектора квантового состояния рассматриваются заданными в определенном вычислительном базисе  $|0\rangle, \dots, |2^n-1\rangle$ . Эти обозначения являются общепринятыми – они используются в таких книгах как, например, [35]. Прежде чем будет установлена взаимосвязь между этими данными, сделаем несколько предварительных замечаний.

Не является очевидным то, какие данные используются для доставки информации из системы в систему в природе. Но для человеческих операций требуется классическая информация. Легко видеть, что  $2^n$ -мерная квантовая система может выдать только  $n$ -мерные классические данные, хотя во время вычислений квантовая система работает в  $2^n$ -мерном пространстве состояний. Проблема генерации начального квантового состояния связана как раз с тем, что источник квантовых данных, вообще говоря, неизвестен, а сформировать эти данные из классических, конечно, невозможно. Таким образом, единственное, что можно предполагать определенно, это то, что система уже имела данные в квантовой форме до начала вычислений. Но это означает, что все зависимости уже содержатся в квантовых данных, и квантовая интеллектуальная система должна их использовать. На этом основано дальнейшее рассмотрение.

Опишем сначала структуру пространства состояний системы из  $n$  кубитов. Исходя из того, как представлены квантовые данные, это пространство вложено в  $\mathbb{C}^N$ , где  $N = 2^n$  и  $\mathbb{C}$  есть пространство комплексных чисел. Кроме того, известно, что квантовые состояния описываются векторами с абсолютным значением, равным 1, и векторы, отличающиеся только фазовым коэффициентом  $e^{i\varphi}$ , описывают одно и то же состояние. Это говорит о том, что можно рассмотреть отношение эквивалентности

$$\frac{z^1}{z^0} \equiv w^1, \dots, \frac{z^{N-1}}{z^0} \equiv w^{N-1}. \quad (1)$$

Пространство таких векторов  $\mathbf{w}$  называется (*комплексным*) *проективным пространством*  $\mathbb{CP}^{N-1}$ ,

которое представляет собой набор векторов с  $N$  комплексными координатами  $(z^1, \dots, z^{N-1})$ , связанных соотношением эквивалентности (1). Другим условием, которое может быть выведено из (1), является следующее:

$$|z^0|^2 + \dots + |z^{N-1}|^2 = 1. \quad (2)$$

Фазы координат  $w^k$  определяются с точностью до общего множителя  $e^{-i\phi_0}$ , где  $\phi_0$  есть произвольная фаза координаты  $z^0$ . Таким образом, пространство  $\mathbb{CP}^{N-1}$  может быть отождествлено с пространством состояний системы из  $n$  кубитов, а координаты могут быть представлены в виде:

$$w^k = \frac{|z^k|}{|z^0|} e^{i(\phi_k - \phi_0)}.$$

Без каких-либо ограничений мы можем положить  $\phi_0 = 0$ . Пространство  $\mathbb{CP}^{N-1}$ , согласно приведенной выше процедуре, гомеоморфно поверхности (2) размерности  $2N - 2$ , поскольку  $z_{\text{im}}^0 = 0$  и, следовательно,

$$|z^0|^2 + \dots + |z^{N-1}|^2 = (z_{\text{re}}^0)^2 + (z_{\text{re}}^1)^2 + \dots + (z_{\text{im}}^1)^2 + \dots + (z_{\text{re}}^{N-1})^2 + (z_{\text{im}}^{N-1})^2 = 1.$$

Это сфера  $S^{N-2}$ , и можно параметризовать каждую ее точку  $z_j$ , используя следующие обобщенные сферические координаты:

$$\begin{aligned} z_j^0 &= \cos \delta_j^0 \cos \delta_j^1 \dots \cos \delta_j^{2^n-2}, \\ z_j^1 &= \sin \delta_j^0 \cos \delta_j^1 \dots \cos \delta_j^{2^n-2} e^{i\gamma_j^0}, \\ z_j^2 &= \sin \delta_j^1 \cos \delta_j^2 \dots \cos \delta_j^{2^n-2} e^{i\gamma_j^1}, \\ &\dots \\ z_j^{2^n-2} &= \sin \delta_j^{2^n-3} \cos \delta_j^{2^n-2} e^{i\gamma_j^{2^n-3}}, \\ z_j^{2^n-1} &= \sin \delta_j^{2^n-2} e^{i\gamma_j^{2^n-2}}, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \delta_j^0 &= \frac{\pi}{2} d_j^0, \delta_j^1 = \frac{\pi}{2} d_j^1, \dots, \delta_j^{2^n-2} = \frac{\pi}{2} d_j^{2^n-2}, \\ \gamma_j^0 &= 2\pi d_j^{2^n-1}, \dots, \gamma_j^{2^n-2} = 2\pi d_j^{2^n+1-3} \end{aligned}$$

и  $d_j^i$  есть значение  $i$ -го признака в  $j$ -й выборке данных в масштабированных данных ( $d_j^i \in [0,1)$ ).



Таким образом, можно закодировать любой обучающий набор данных в квантовое состояние, используя следующую формулу:

$$|q_j\rangle = \sum_{k=0}^{2^n-1} z_j^k(d) |k\rangle. \quad (4)$$

Согласно постулатам квантовой механики, если существуют две системы с  $n_1$  и  $n_2$  кубитами соответственно, то состояния объединенной системы имеют следующий вид:

$$|q\rangle = \sum_{k=0}^{2^{n_2}-1} \sum_{m=0}^{2^{n_1}-1} a^m b^k |m\rangle |k\rangle,$$

где  $a$  представляет амплитуды состояния первой системы, а  $b$  – второй системы.

Пространства состояний для каждой системы равны  $S^{2^{n_1}-2}$  и  $S^{2^{n_2}-2}$ . Множество состояний для объединенной системы является их прямым произведением, т.е.  $S^{2^{n_1}-2} \times S^{2^{n_2}-2}$ . Однако в силу топологических причин это определено не  $S^{2^{n_1+n_2}-2}$ .

Часть системы ( $n_1 + n_2$ ) кубитов, которая не может быть выражена как произведение состояний подсистем, образует набор так называемых *запутанных состояний*. Основное свойство запутанного состояния заключается в том, что для вывода системы из запутанного состояния необходимо выполнить унитарное преобразование, которое существенно влияет на все ее подсистемы. Как известно, запутанные состояния образуют базис в пространстве состояний, и далее он будет называться *запутанным базисом*.

Если состояние многокубитной системы запутано, то невозможно выйти из него, не затронув каждый кубит. В то же время каждое состояние системы может быть записано в запутанном базисе. Это означает, что каждый компонент состояния в этом базисе существенно влияет на все кубиты. Если мы измерим амплитуды этих компонентов, то сможем увидеть, как подсистемы взаимодействуют в этой квантовой системе. Если метки состояний заданы, то необходимо определить, какой базисный вектор соответствует интересующей нас метке, что может быть определено из статистики результатов измерений для данной метки. Кроме того, если новые состояния одной и той же системы измеряются одинаковым образом, то с определенной вероятностью можно предсказать их принадлежность к помеченному классу, что соответствует результату измерения, который в наибольшей степени относится к помеченным образцам.

В определенной степени это означает, что классификация может быть выполнена без оптимизации, если зависимости уже есть в данных. Последнее

является важным дополнением, поскольку классификация данных без зависимостей (например, когда данные представляют собой полную суперпозицию чистых состояний) завершится неудачей. Следовательно, для классификации необходимо определить зависимости, которые приводят к данному классу. Это, по сути, квантовое свойство, связанное с запутанностью. Конечно, это можно интерпретировать, не прибегая к квантовым представлениям, но тогда необходимо будет учитывать топологические свойства множества состояний системы и подмножества ее запутанных состояний, чтобы строить на них вероятностные модели. В настоящее время интерпретация в терминах квантовых вычислений выглядит проще.

## РЕЗУЛЬТАТЫ

### Быстрая онлайн-классификация

Рассмотрим размеченный набор данных  $\{d_j^i, l_j\}$ , где  $d_j^i$  есть значение  $i$ -го признака в  $j$ -й выборке, а  $l_j$  – значение метки (класса) для  $j$ -й выборки. Разделим все данные на обучающую и тестовую выборки и обозначим их

$$\{d_{jt}^i, l_{jt}\} \text{ и } \{d_{jc}^i, l_{jc}\},$$

соответственно. Будем считать, что значения для всех признаков шкалированы и метки принимают значения от 0 до  $L-1$ :

$$d_j^i \in [0,1), l_j \in \{0, \dots, L-1\},$$

где  $L = 2^l$ .

### Случай двух кубитов

Положим  $n = 2$ ,  $l = 1$ , т.е., число признаков равно 6 и метки принимают значения 0 и 1. Тогда  $i = 0, \dots, 5$  и

$$\delta_j^0 = \frac{\pi}{2} d_j^0, \quad \delta_j^1 = \frac{\pi}{2} d_j^1, \quad \delta_j^2 = \frac{\pi}{2} d_j^2, \\ \gamma_j^0 = 2\pi d_j^3, \quad \gamma_j^1 = 2\pi d_j^4, \quad \gamma_j^2 = 2\pi d_j^5.$$

Кодирование данных в квантовые состояния, согласно (3) и (4), примет вид

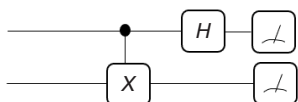
$$z_j^0 = \cos \delta_j^0 \cos \delta_j^1 \cos \delta_j^2, \quad z_j^1 = \sin \delta_j^0 \cos \delta_j^1 \cos \delta_j^2 e^{i\gamma_j^0}, \\ z_j^2 = \sin \delta_j^1 \cos \delta_j^2 e^{i\gamma_j^1}, \quad z_j^3 = \sin \delta_j^2 e^{i\gamma_j^2}, \quad (5)$$

$$|q_j\rangle = \sum_{k=0}^3 z_j^k |k\rangle. \quad (6)$$

**Таблица 1.** Эксперимент с датасетом сердечных болезней. F1 – среднее гармоническое точности и полноты метода

Метод	Точность (Precision), %	Полнота (Recall), %	F1, %	Время обучения, мс	Время работы, мс
Классификация эмулированным квантовым запутанным базисом	76	65	70	20.5	9
Классификация линейным дискриминантным анализом	100	58	73	7.6	4.9
Классификация логистической регрессией	68	65	66	5.2	3.1

Рассмотрим следующую квантовую схему (рис. 1). Это хорошо известная схема для преобразования состояний Белла в векторы вычислительного базиса. С ее помощью получим вероятности того, насколько векторы запутанного базиса (состояния Белла) соответствуют вектору, заданному на входе.



**Рис. 1.** Квантовая схема для преобразования состояний Белла в векторы вычислительного базиса. H – вентиль Адамара, X – вентиль NOT

Схема на рис. 1 может классифицировать данные, содержащие шесть признаков. Это легко проверить на примере датасета о сердечных заболеваниях, взятого с ресурса [kaggle.com](https://www.kaggle.com/datasets/zgheakylz/heart-disease-data)<sup>6</sup>.

Исходный датасет содержит 13 признаков и одну метку. Признаки: возраст, пол, боль в груди, пульс, холестерин, и другие. Метка – наличие сердечной болезни. В датасете 303 экземпляра данных, из которых 165 имеют метку 1, остальные – 0. Приведенные на ресурсе [kaggle.com](https://www.kaggle.com) примеры анализа этого датасета линейными классификаторами дают значения метрики ауссигасы для предсказания заболевания от 64% до 88%.

На этом датасете был проведен следующий эксперимент. Все значения признаков были переведены в диапазоны целых чисел от 0 до предельного значения, зависящего от признака. Затем данные были приведены к шести признакам без потери информации в данных, и осуществлена параметризация в виде квантовых состояний двухчастичной системы (5). Разделение на обучающую и тестовую выборки проведено в пропорции 65/35. Полученный результат подвергнут сравнению с результатом работы LDA-классификатора<sup>7</sup>. Результаты приведены в табл. 1.

<sup>6</sup> Akyildiz Ö. Heart disease data. <https://www.kaggle.com/datasets/zgheakylz/heart-disease-data>. Дата обращения 09.01.2023. / Accessed January 09, 2023.

<sup>7</sup> <https://scikit-learn.ru/1-2-linear-and-quadratic-discriminant-analysis/> (in Russ.). Дата обращения 09.01.2023. / Accessed January 09, 2023.

Подготовленный датасет и программный код представлены в архиве<sup>8</sup> с открытым доступом. Показатели, приведенные в табл. 1, не являются высокими, но они получены без оптимизации, с использованием только пришедших данных, и время работы алгоритма затрачено, в основном, на эмуляцию квантовых состояний и операций. Тем не менее, такая процедура классификации может работать практически на любом устройстве в режиме реального времени, т.к. не требует оптимизации и может работать в параллельных потоках. Указанный выше эксперимент проводился на машине с процессором Intel Core I5 и ОЗУ 8Гб (производитель – Intel, США), в одном потоке.

Возможно усомниться в том, что предлагаемый метод является машинным обучением (из-за отсутствия оптимизации). Однако определение машинного обучения [36], гласит, что алгоритмы машинного обучения строят модель на основе выборочных данных, известных как обучающие данные, для получения прогнозов или решений, не будучи явно запрограммированными на это. Рассмотренный метод использует данные и модель, содержащуюся в них, и позволяет делать прогнозы на основе этой модели, т.е., полностью удовлетворяет определению машинного обучения.

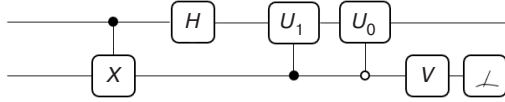
Качество классификации может быть улучшено с помощью известных методов (бэггинг<sup>9</sup> и бустинг<sup>10</sup>). Но можно также улучшить его, используя машинное обучение в традиционном смысле как параметрическое преобразование с оптимизацией. Способ его использования в квантовом случае был показан, например, в [37]. В рассматриваемом случае,

<sup>8</sup> Программные коды и датасеты к статье размещены в архиве по адресу [https://disk.yandex.ru/d/JK4dsbdGLP\\_ZaQ](https://disk.yandex.ru/d/JK4dsbdGLP_ZaQ). [Program codes and datasets for the paper are archived at [https://disk.yandex.ru/d/JK4dsbdGLP\\_ZaQ](https://disk.yandex.ru/d/JK4dsbdGLP_ZaQ)]. Дата обращения 09.01.2023. / Accessed January 09, 2023.

<sup>9</sup> Bootstrap aggregating – технология классификации, использующая композиции алгоритмов, каждый из которых обучается независимо. Результат классификации определяется путем голосования.

<sup>10</sup> Boosting – процедура последовательного построения композиции алгоритмов машинного обучения, когда каждый следующий алгоритм стремится компенсировать недостатки композиции всех предыдущих алгоритмов.

в схеме на рис. 1, нужно поместить два управляемых вентиля ( $U_0$ ,  $U_1$ ) в первый регистр (управляемый по 0 и по 1), затем простой вентиль  $V$  – во второй регистр, и измерить второй регистр. Результат измерения должен быть связан со значением метки, а выходное состояние должно быть установлено в чистое состояние. Параметрами оптимизации являются компоненты вентилях. Схема показана на рис. 2.



**Рис. 2.** Простейший квантовый классификатор с оптимизацией

На вход подается двухчастичное состояние  $|q\rangle = a_0|00\rangle + a_1|01\rangle + a_2|10\rangle + a_3|11\rangle$ , которое далее преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} |q\rangle &\xrightarrow{CX} a_0|00\rangle + a_1|01\rangle + a_2|11\rangle + a_3|10\rangle \xrightarrow{H} \frac{a_0 + a_3}{\sqrt{2}}|00\rangle + \\ &+ \frac{a_1 + a_2}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{a_0 - a_3}{\sqrt{2}}|10\rangle + \frac{a_1 - a_2}{\sqrt{2}}|11\rangle \xrightarrow{CU_1, CU_0} \\ &\xrightarrow{CU_1, CU_0} \frac{a_0 + a_3}{\sqrt{2}}U_0|0\rangle|0\rangle + \frac{a_1 + a_2}{\sqrt{2}}U_1|0\rangle|1\rangle + \\ &+ \frac{a_0 - a_3}{\sqrt{2}}U_0|1\rangle|0\rangle + \frac{a_1 - a_2}{\sqrt{2}}U_1|1\rangle|1\rangle \xrightarrow{V} \\ &\xrightarrow{V} \frac{a_0 + a_3}{\sqrt{2}}U_0|0\rangle V|0\rangle + \frac{a_1 + a_2}{\sqrt{2}}U_1|0\rangle V|1\rangle + \\ &+ \frac{a_0 - a_3}{\sqrt{2}}U_0|1\rangle V|0\rangle + \frac{a_1 - a_2}{\sqrt{2}}U_1|1\rangle V|1\rangle. \end{aligned}$$

Если параметры вентилях  $U_0$ ,  $U_1$  и  $V$  таковы, что

$$\begin{aligned} U_0|0\rangle &= \cos\alpha_0|0\rangle + \sin\alpha_0 e^{i\psi_0}|1\rangle, \\ U_0|1\rangle &= -\sin\alpha_0 e^{i\phi_0}|0\rangle + \cos\alpha_0 e^{i(\phi_0+\psi_0)}|1\rangle, \\ U_1|0\rangle &= \cos\alpha_1|0\rangle + \sin\alpha_1 e^{i\psi_1}|1\rangle, \\ U_1|1\rangle &= -\sin\alpha_1 e^{i\phi_1}|0\rangle + \cos\alpha_1 e^{i(\phi_1+\psi_1)}|1\rangle, \\ V|0\rangle &= \cos\beta|0\rangle + \sin\beta e^{i\nu}|1\rangle, \\ V|1\rangle &= -\sin\beta e^{i\mu}|0\rangle + \cos\beta e^{i(\mu+\nu)}|1\rangle, \end{aligned}$$

то результирующее состояние будет иметь вид:

$$A_{00}|00\rangle + A_{01}|01\rangle + A_{10}|10\rangle + A_{11}|11\rangle,$$

где

$$\begin{aligned} A_{00} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( (a_0 + a_3) \cos\alpha_0 - (a_0 - a_3) \sin\alpha_0 e^{i\phi_0} \right) \cos\beta - \\ &- \frac{1}{\sqrt{2}} \left( (a_1 + a_2) \cos\alpha_1 - (a_1 - a_2) \sin\alpha_1 e^{i\phi_1} \right) \sin\beta e^{i\mu}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{01} &= \frac{e^{i\nu}}{\sqrt{2}} \left( (a_0 + a_3) \cos\alpha_0 - (a_0 - a_3) \sin\alpha_0 \right) \sin\beta + \\ &+ \frac{e^{i\nu}}{\sqrt{2}} \left( (a_1 + a_2) \cos\alpha_1 - (a_1 - a_2) \sin\alpha_1 e^{i\phi_1} \right) \cos\beta e^{i\mu}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{10} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( (a_0 + a_3) \sin\alpha_0 e^{i\psi_0} + (a_0 - a_3) \sin\alpha_0 e^{i\phi_0} \right) \cos\beta - \\ &- \frac{e^{i(\mu+\psi_1)}}{\sqrt{2}} \left( (a_1 + a_2) \sin\alpha_1 + (a_1 - a_2) \cos\alpha_1 e^{i\phi_1} \right) \sin\beta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{e^{i(\nu+\psi_0)}}{\sqrt{2}} \left( (a_0 + a_3) \sin\alpha_0 + (a_0 - a_3) \cos\alpha_0 e^{i\phi_0} \right) \sin\beta + \\ &+ \frac{e^{i(\mu+\nu+\psi_1)}}{\sqrt{2}} \left( (a_1 + a_2) \sin\alpha_1 + (a_1 - a_2) \cos\alpha_1 e^{i\phi_1} \right) \cos\beta. \end{aligned}$$

При метке 0 это состояние должно выдавать при измерении во втором регистре результат «0» с наибольшей вероятностью, что означает:

$$A_{01} \rightarrow 0, A_{11} \rightarrow 0.$$

При метке 1, напротив, должно быть:

$$A_{00} \rightarrow 0, A_{10} \rightarrow 0.$$

Процедура обучения призвана найти наилучший набор параметров гейтов ( $\alpha_0, \phi_0, \psi_0, \alpha_1, \phi_1, \psi_1, \beta, \mu, \nu$ ), который обеспечивает наилучшие устремления. Это задача оптимизации.

Классификатор, показанный на рис. 2, является самым малым возможным классификатором подобного типа. Он представляет собой некоторый аналог искусственного нейрона с двумерным входом: принимает 2-кубитный квантовый сигнал и выдает 1-кубитный квантовый сигнал и 1-битный классический сигнал (в отличие от классического нейрона, где выдается только один сигнал). Наличие квантового сигнала на выходе позволяет использовать квантовую информацию дальше, т.е. создавать сеть. Обучение и эксплуатация такого классификатора проиллюстрированы в архиве<sup>11</sup>. Как показал эксперимент с датасетом по сердечным заболеваниям, оптимизация увеличивает показатели качества классификации, но лишь незначительно. Это означает, что в рассматриваемом случае мы можем использовать квантовое машинное обучение (КМО), основанное на квантовой запутанности, без какой-либо оптимизации. Однако это не общее утверждение: для классификаторов более высокой размерности это может быть не так.

<sup>11</sup> [https://disk.yandex.ru/d/JK4dsbdGLP\\_ZaQ](https://disk.yandex.ru/d/JK4dsbdGLP_ZaQ). Дата обращения 09.01.2023. / Accessed January 09, 2023.



### Обучение квантового классификатора

Квантовая схема на рис. 2 содержит три вентиля ( $U_0$ ,  $U_1$ ,  $V$ ) с параметрами, которые можно настраивать. Например, вентиль  $V$  может быть записан в виде:

$$V = \cos \beta |0\rangle\langle 0| - \sin \beta e^{i\tau} |0\rangle\langle 1| + \sin \beta e^{i(\tau+\theta)} |1\rangle\langle 0| + \cos \beta |1\rangle\langle 1|,$$

и указанными параметрами являются  $\beta$ ,  $\theta$  и  $\tau$ . Но изменение параметра  $\tau$  ведет только к умножению результирующего состояния на фазовый множитель, т.е., не приводит к значимому эффекту. Этот параметр будет играть роль в системах большей размерности, а в случае двух кубитов для оптимизации вентилей  $V$  варьируются всего два параметра:  $\beta$  и  $\theta$ .

То же самое верно для вентилях  $U_0$  и  $U_1$ , которые можно записать так:

$$U_\varepsilon = \cos \alpha_\varepsilon |0\rangle\langle 0| - \sin \alpha_\varepsilon |0\rangle\langle 1| + \sin \alpha_\varepsilon e^{i\rho_\varepsilon} |1\rangle\langle 0| + \cos \alpha_\varepsilon e^{i\rho_\varepsilon} |1\rangle\langle 1|, \quad \varepsilon = 0, 1,$$

где варьируемыми параметрами будут  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\rho_0$ ,  $\rho_1$ . Итого, для двухчастичной квантовой схемы имеем шесть варьируемых параметров.

Построим функцию правдоподобия как сумму модулей следующих скалярных произведений:

$$(|\hat{a}_j|^2, |\hat{b}_j|^2) \text{ и } (1 - l_j, l_j),$$

где  $\hat{a}_j$  и  $\hat{b}_j$  есть амплитуды квантового состояния, выходящего из второго регистра на  $j$ -м пакете, а  $l_j$  есть метка входящего квантового состояния. Приведем вычисления для начального состояния (6). До управляемых вентилях:

$$\begin{aligned} |q_j\rangle &\rightarrow z_j^0 |00\rangle + z_j^1 |01\rangle + z_j^2 |11\rangle + z_j^3 |10\rangle \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(z_j^0 + z_j^3) |00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}(z_j^1 + z_j^2) |01\rangle + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}}(z_j^0 - z_j^3) |10\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}(z_j^1 - z_j^2) |11\rangle \end{aligned}$$

действуют управляемые вентили  $U_1$  и  $U_0$ :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{2}}((z_j^0 + z_j^3) \cos \alpha_0 - (z_j^0 - z_j^3) \sin \alpha_0) |00\rangle + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}}((z_j^1 + z_j^2) \cos \alpha_1 - (z_j^1 - z_j^2) \sin \alpha_1) |01\rangle + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}}((z_j^0 + z_j^3) \sin \alpha_0 e^{i\rho_0} + (z_j^0 - z_j^3) \cos \alpha_0 e^{i\rho_0}) |10\rangle + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}}((z_j^1 + z_j^2) \sin \alpha_1 e^{i\rho_1} + (z_j^1 - z_j^2) \cos \alpha_1 e^{i\rho_1}) |11\rangle. \end{aligned}$$

Наконец, действует вентиль  $V$ :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{2}}((z_j^0 + z_j^3) \cos \alpha_0 - (z_j^0 - z_j^3) \sin \alpha_0) \times \\ &\times (\cos \beta |00\rangle + \sin \beta e^{i\theta} |01\rangle) + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}}((z_j^0 + z_j^3) \sin \alpha_0 e^{i\rho_0} + (z_j^0 - z_j^3) \cos \alpha_0 e^{i\rho_0}) \times \\ &\times (\cos \beta |10\rangle + \sin \beta e^{i\theta} |11\rangle) + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}}((z_j^1 + z_j^2) \cos \alpha_1 - (z_j^1 - z_j^2) \sin \alpha_1) \times \\ &\times (-\sin \beta |00\rangle + \cos \beta e^{i\theta} |01\rangle) + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}}((z_j^1 + z_j^2) \sin \alpha_1 e^{i\rho_1} + (z_j^1 - z_j^2) \cos \alpha_1 e^{i\rho_1}) \times \\ &\times (-\sin \beta |10\rangle + \cos \beta e^{i\theta} |11\rangle). \end{aligned}$$

Это состояние перед измерением и его можно записать в следующем виде

$$B_{00} |00\rangle + B_{01} |01\rangle + B_{10} |10\rangle + B_{11} |11\rangle,$$

где

$$\begin{aligned} B_{00} &= \frac{1}{\sqrt{2}}((z_j^0 + z_j^3) \cos \alpha_0 - (z_j^0 - z_j^3) \sin \alpha_0) \cos \beta - \\ &- \frac{1}{\sqrt{2}}((z_j^1 + z_j^2) \cos \alpha_1 - (z_j^1 - z_j^2) \sin \alpha_1) \sin \beta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{01} &= \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2}}((z_j^0 + z_j^3) \cos \alpha_0 \sin \beta - (z_j^0 - z_j^3) \sin \alpha_0) \sin \beta + \\ &+ \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2}}((z_j^1 + z_j^2) \cos \alpha_1 \cos \beta - (z_j^1 - z_j^2) \sin \alpha_1) \cos \beta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{10} &= \frac{e^{i\rho_0}}{\sqrt{2}}((z_j^0 + z_j^3) \sin \alpha_0 + (z_j^0 - z_j^3) \cos \alpha_0) \cos \beta - \\ &- \frac{e^{i\rho_1}}{\sqrt{2}}((z_j^1 + z_j^2) \sin \alpha_1 + (z_j^1 - z_j^2) \cos \alpha_1) \sin \beta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{11} &= \frac{e^{i(\theta+\rho_0)}}{\sqrt{2}}((z_j^0 + z_j^3) \sin \alpha_0 + (z_j^0 - z_j^3) \cos \alpha_0) \sin \beta + \\ &+ \frac{e^{i(\theta+\rho_1)}}{\sqrt{2}}((z_j^1 + z_j^2) \sin \alpha_1 + (z_j^1 - z_j^2) \cos \alpha_1) \cos \beta. \end{aligned}$$

Измерение второго регистра даст 0 с вероятностью  $|\hat{a}_j|^2$  и 1 с вероятностью  $|\hat{b}_j|^2$ :

$$|\hat{a}_j|^2 = |B_{00}|^2 + |B_{10}|^2,$$

$$|\hat{b}_j|^2 = |B_{01}|^2 + |B_{11}|^2.$$

Легко видеть, что единственный оставшийся фазовый параметр есть  $\rho \equiv \rho_1 - \rho_0$ , и функция правдоподобия имеет вид:

$$\Phi(\alpha_0, \alpha_0, \beta, \rho) = \sum_j |\hat{a}_j|^2 (1 - l_j) + \sum_j |\hat{b}_j|^2 l_j.$$

Она должна быть максимизирована так, чтобы во втором регистре ожидалось состояние  $|1\rangle$ , если  $l_j = 1$ . Это было сделано методом COBYLA<sup>12</sup> в программном коде, доступном в архиве<sup>13</sup>.

Расчет функции правдоподобия приведен для того, чтобы использовать его для вычислений на классическом компьютере. В случае применения квантового компьютера нет необходимости вычислять функцию правдоподобия вручную: значения  $|\hat{a}_j|^2$  и  $|\hat{b}_j|^2$  будут доступны как результаты измерений.

### Произвольное число кубитов

Обобщим построенный классификатор на случай произвольного числа частиц. Начнем с версии без оптимизации. Для этого понадобится построить многочастичный запутанный базис. В случае двух частиц запутанность возникала в форме комбинации вектора вычислительного базиса и его инвертированного вектора. Подобные комбинации для случая трех частиц выглядят так:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle), \frac{1}{\sqrt{2}}(|001\rangle + |110\rangle), \frac{1}{\sqrt{2}}(|010\rangle + |101\rangle), \\ & \frac{1}{\sqrt{2}}(|011\rangle + |100\rangle), \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle - |111\rangle), \frac{1}{\sqrt{2}}(|001\rangle - |110\rangle), \\ & \frac{1}{\sqrt{2}}(|010\rangle - |101\rangle), \frac{1}{\sqrt{2}}(|011\rangle - |100\rangle). \end{aligned}$$

Легко видеть, что ни одно из этих состояний не является результатом тензорного произведения ни трех одночастичных, ни каких-либо двухчастичных и одночастичных состояний. Таким образом, все они являются запутанными состояниями и, что также легко проверить, образуют базис. Это запутанный базис для 3-частичной системы. Аналогично можно построить запутанный базис для произвольной  $n$ -частичной квантовой системы:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0x\rangle + |1\bar{x}\rangle), \frac{1}{\sqrt{2}}(|0x\rangle - |1\bar{x}\rangle),$$

где  $x$  есть двоичная запись числа от 0 до  $2^n - 1$ , а надчеркивание обозначает инверсию.

<sup>12</sup> Constrained optimization by linear approximation – метод ограниченной оптимизации с линейной аппроксимацией.

<sup>13</sup> [https://disk.yandex.ru/d/JK4dsbdGLP\\_ZaQ](https://disk.yandex.ru/d/JK4dsbdGLP_ZaQ). Дата обращения 09.01.2023. / Accessed January 09, 2023.

Квантовая схема многочастичного классификатора без оптимизации представлена на рис. 3.

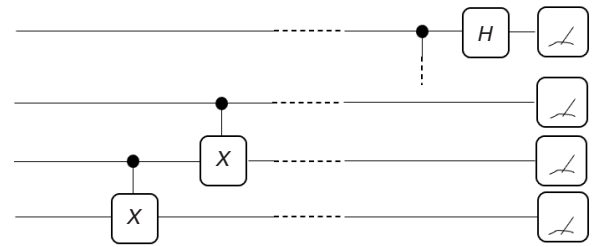


Рис. 3. Классификатор без оптимизации

Обобщение схемы на рис. 2 теперь очевидно: достаточно установить управляемые вентили ( $2n - 2$  штуки – по два на каждый управляющий регистр) на первый регистр и по одному вентилю на регистры, начиная со второго. Это показано на рис. 4.

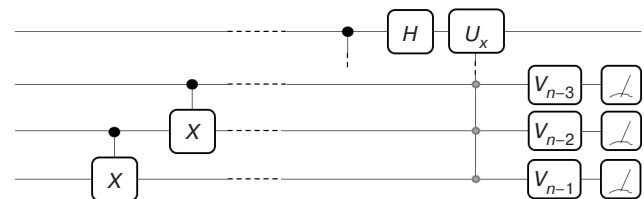


Рис. 4. Оптимизируемый квантовый классификатор

Серые точки на рис. 4 обозначают управление по 0 или по 1 на одном из регистров. Схема на рис. 4 представляет собой квантовый нейрон с произвольным числом входов. Схема на рис. 3 может рассматриваться таким же образом, если не измерять первый регистр – он тогда будет содержать состояние, являющееся суперпозицией двух векторов запутанного базиса. Векторы определяются результатом измерения. Обучение без оптимизации проводится, как и раньше, на статистике и на предположении, что в данных имеются закономерности.

### Детектирование аномалий на потоковых данных

Когда данные поступают в потоке, можно брать в расчет последние  $J$  пришедших пакетов  $d_j^i$ ,  $j = 0, J - 1$ . Эти данные не являются размеченными априори. Задача – детектировать аномалию в потоке, т.е., ситуацию, когда пришедшая серия пакетов данных резко отличается от тех, которые были в потоке до этого. Отличие может быть не только в самих пакетах, но и в порядке их следования.

Предложенные выше классификаторы могут использоваться для детектирования аномалий. Выбранные  $J$  пакетов рассматриваются как базовые для статистики: на них получаются серии измерений из 0 и 1. Например, в 2-частичном случае имеется четыре возможных результата измерения (если

не рассматривать выход квантового состояния). Частоты этих результатов измерения образуют вектор текущего состояния системы. Если этот вектор остается приближенно постоянным или принимает значения только в определенных кластерах всякий раз, когда его вычисляют на  $J$  пакетах, то любой новый вход из  $J$  пакетов, на которых указанный вектор не попадает ни в один из кластеров, будет аномалией.

Естественно, возникают два вопроса. Первый касается ситуации, когда имеется большое число признаков в потоковых данных, например, в случае видеопотока. В соответствии с рассмотрением выше, если имеется  $F$  признаков, то нам необходимо  $\log(F/2 + 1)$  кубитов и  $F/2 + 1$  возможных состояний. Это может быть довольно большое число. Поэтому требуется устанавливать пороговое значение по частоте появления признаков – это настраиваемый параметр. В приведенном ниже эксперименте с датасетом студентов, пороговая частота была установлена в 10%: если признак проявлялся в данном состоянии меньше, чем в 10% случаев, то считалось, что он не проявлялся в этом состоянии вовсе. При увеличении этого порога росло число экземпляров данных, которые сеть не классифицировала. А при уменьшении – ухудшались метрики.

Другой вопрос касается значения  $J$ . Для него есть некоторые рекомендации:  $J$  должно быть меньше, чем число пакетов, появляющихся за максимальное время принятия решения и, в то же время,  $J$  должно быть сравнительно большим для того, чтобы статистика была достаточно богатой, т.е., чтобы обучение давало эффективное предсказание: если аномалия не определяется, то модель недообучена и  $J$  нужно увеличивать. А если много ложных срабатываний, то имеет место переобучение и  $J$  нужно уменьшать.

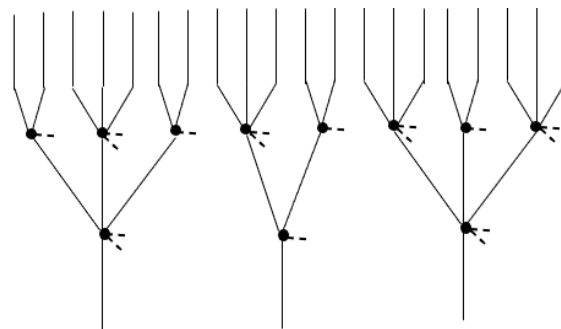
Пример кода детектора аномалий, основанного на классификаторе, построенном на запутанном базисе, приведен в архиве<sup>14</sup>.

### Искусственная нейронная сеть из квантовых аналогов нейронов

Квантовый нейрон, представленный на рис. 4 или 3 (далее  $q$ -нейрон), может быть использован для построения квантовой нейронной сети (далее – КНС). Вообще говоря, такая сеть, принимая на вход  $I$  квантовых состояний (кубитов), возвращает  $Q < I$  квантовых состояний вместе с  $C = I - Q$  классическими битами информации. КНС может быть обучена на основе полученной классической информации. Процедура обучения в случае  $q$ -нейронов с оптимизацией совпадает с таковой в классическом случае, в качестве весов выступают параметры квантовых вентилях.

Копирование квантовых состояний запрещено. Поэтому КНС не содержат разветвлений. Но  $q$ -нейрон может содержать более одного квантового выхода – это можно использовать для создания сетей различной архитектуры.

Пусть в первом слое имеется  $Q_1$   $q$ -нейронов. Ясно, что  $Q_1 \leq \frac{I}{2}$ , поскольку любой  $q$ -нейрон должен иметь, как минимум, два кубита на входе. Соответственно, будет  $C_1 \leq I - Q_1$  классических битов информации на выходе слоя. В следующем слое может быть  $Q_2$   $q$ -нейронов, причем  $Q_2 \leq \frac{I - C_1}{2}$ . Это схематически показано на рис. 5, где у всех  $q$ -нейронов по одному квантовому выходу и  $I = 20$ ,  $Q_1 = 8$ ,  $Q_2 = 3$ . Если не добавлять второй слой, то сеть на рис. 5 выдаст 8 кубитов и 12 битов на выходе. Если же добавить еще один  $q$ -нейрон после второго слоя (третьим слоем), то на выходе будет 1 кубит и 19 битов.



**Рис. 5.** КНС на 11  $q$ -нейронах (черные точки): 20 кубитов (линии) на входе, 3 кубита на выходе, 17 битов (пунктирные линии) классической информации

КНС, показанная на рис. 5, по архитектуре похожа на фрактальную нейронную сеть, рассмотренную в [38]. Хотя в [38] рассматривались классические нейронные сети с обычными нейронами, отмеченные там свойства, такие как быстрая обучаемость и способность работы с большой размерностью входящих векторов, остаются таковыми и у КНС.

### Обучение квантовой нейронной сети

Обучение одного  $q$ -нейрона уже рассмотрено выше. Обобщим эту процедуру на обучение сети. Сосредоточимся для простоты только на случае двух слоев. Возьмем для примера сеть, изображенную на рис. 5 в центре: пять кубитов на входе, два  $q$ -нейрона и 3 бита классической информации на первом слое, а на втором слое – один  $q$ -нейрон и один бит классической информации.

Сделав прямой проход на обучающей выборке, получим статистику соответствия меток и наборов классических битов. Поставим их в соответствие

<sup>14</sup> [https://disk.yandex.ru/d/JK4dsbdGLP\\_ZaQ](https://disk.yandex.ru/d/JK4dsbdGLP_ZaQ). Дата обращения 09.01.2023. / Accessed January 09, 2023.

друг другу. Пусть в рассматриваемом случае метки принимают всего два возможных значения. Один  $q$ -нейрон на выходе позволяет получить 2 классических бита при измерении обоих регистров – нет задачи распространения квантового состояния дальше и поэтому его можно измерить. Поэтому изначально нужно отнести метке 0 наиболее часто выпадающие ей выходы (это может быть или 00, 01, 10, или 11) приблизительно пропорционально доле этой метки в обучающей выборке, а остальные соотносить с меткой 1. Пусть метке  $\varepsilon$  соответствует  $e_0, e_1, e_2, e_3$  из всех  $n_0, n_1, n_2, n_3$  выходов вида 00, 01, 10 и 11, соответственно. И эта метка имеет долю  $f_\varepsilon$  в обучающей выборке. Выберем  $\varepsilon$  с наибольшей долей, отсортируем  $\frac{e_0}{n_0}, \frac{e_1}{n_1}, \frac{e_2}{n_2}, \frac{e_3}{n_3}$  по убыванию и выберем такую сумму первых элементов полученного списка, которая имеет наиболее близкую к  $f_\varepsilon$  долю суммы соответствующих  $n_i$  в общем количестве пакетов. Соответствующие выходы соотнесем с меткой  $\varepsilon$ .

*Пример.* Выборка из 5000 пакетов, разделенных метками на 4000 (0) и 1000 (1). Для метки 0 на выходе сети получилось  $e_0 = 1500, e_1 = 500, e_2 = 1400, e_3 = 600$ , а общие числа выходов равны  $n_0 = 1600, n_1 = 700, n_2 = 2000, n_3 = 700$ . Имеем:

$$\frac{e_0}{n_0}, \frac{e_1}{n_1}, \frac{e_2}{n_2}, \frac{e_3}{n_3} = \frac{1500}{1600}, \frac{500}{700}, \frac{1400}{2000}, \frac{600}{700}.$$

Порядок следования  $n_i$  получается следующим:  $n_0, n_3, n_1, n_2$ . Эта метка имеет долю 0.8, и наиболее близкая подходящая сумма есть  $n_0 + n_3 + n_1 = 3000$ , имеющая долю 0.6. Значит, выходы 00, 01, 11 надо соотносить с меткой 0, а 10 – с меткой 1. Хотя, конечно, с таким количеством пакетов в выборке лучше было бы увеличить количество признаков и, соответственно, кубитов на входе (расширяться квантовая сеть не может из-за запрета копирования).

В отличие от обычной нейронной сети и квантовой нейронной сети с оптимизацией, КНС без оптимизации можно обучать в прямом направлении, а не в обратном, т.е., одновременно с ее работой. Делать это можно по описанному выше сценарию, ведь для вычисления статистики по первому слою можно использовать ту же логику: делить выходы по меткам и продолжать это делать дальше, в следующих слоях. Качество классификации все равно будет улучшаться от слоя к слою.

## ОБСУЖДЕНИЕ

КМО и КНС посвящено множество работ. В русскоязычной литературе можно указать уже упомянутую работу [1], в которой, в частности,

указывается важность «поиска модели КНС, оптимальной с точки зрения использования всех преимуществ, представляемых квантовыми вычислениями и нейронными сетями, а также алгоритмам машинного обучения». Один из последних обзоров в этих областях [39], в разделе Outlook, содержит следующий текст: «Первые преимущества в КМО появятся, скорее всего, в связи с выделением скрытых параметров из квантовых данных. Это может быть сделано для квантового детектирования или для классификации/регрессии квантовых состояний. Фундаментально, из теории оптимальных измерений, известно, что нелокальные квантовые измерения могут извлекать скрытые параметры, используя небольшое количество пакетов. С КМО можно формировать и осуществлять поиск по параметризации гипотез для таких измерений»<sup>15</sup>. Настоящее исследование представляет один из возможных путей для классификации квантовых состояний.

Рассмотренное в работе КМО имеет класс QC или QQ, т.е., использует квантовые данные на классических (эмулирующих) или квантовых устройствах. Предложенный  $q$ -нейрон идейно близок к известным концепциям (описанным в [6] и [39], в частности), но в то же время у него есть новая существенная особенность: он использует квантовую запутанность. В частности,  $q$ -нейрон может работать без обучения в обычном смысле: не нужна оптимизация и обратное распространение ошибки.

В качестве примера можно привести эксперимент с анализом датасета состояний студентов<sup>16</sup>. Для этого эксперимента использовался датасет без предварительной подготовки – весь препроцессинг отражен в скрипте анализа, доступном в архиве<sup>17</sup>. Датасет является размеченным с 34 колонками признаков и 4424 экземплярами данных. В эксперименте была использована двоичная метка: «Dropout» = 1, остальные значения (Enrolled, Graduate) = 0. Задача состоит в предсказании отчисления. Признаки были отображены в целочисленные интервалы, пространство признаков было трансформировано

<sup>15</sup> В оригинале «The first quantum advantages in QML will likely arise from hidden parameter extraction from quantum data. This can be for quantum sensing or quantum state classification/regression. Fundamentally, we know from the theory of optimal measurement that non-local quantum measurements can extract hidden parameters using fewer samples. Using QML, one can form and search over a parameterization of hypotheses for such measurements».

<sup>16</sup> <https://www.kaggle.com/datasets/thedevastator/higher-education-predictors-of-student-retention>. Дата обращения 09.01.2023. / Accessed January 09, 2023.

<sup>17</sup> [https://disk.yandex.ru/d/JK4dsbdGLP\\_ZaQ](https://disk.yandex.ru/d/JK4dsbdGLP_ZaQ). Дата обращения 09.01.2023. / Accessed January 09, 2023.



**Таблица 2.** Эксперимент с датасетом студентов

Метод	Точность (Precision), %	Полнота (Recall), %	F1, %	Неклассифицированные состояния, %	Время обучения, мс	Время работы, мс
Классификация эмулированным квантовым запутанным базисом	39	100	57	40	2968	1901
Классификация линейным дискриминантным анализом	100	29	45	0	138	23

без потери информации к размерности 62. Это было сделано для того, чтобы использовать квантовую нейронную сеть из двух  $q$ -нейронов в первом слое и одного  $q$ -нейрона во втором слое. Обучение было произведено без оптимизации. Конфигурация сети выбрана такая: в первом слое первый  $q$ -нейрон с тремя входами, второй – с двумя входами. Во втором слое – единственный  $q$ -нейрон с двумя входами. Часть экземпляров данных нейронная сеть не смогла классифицировать, поскольку они были в приблизительно равной степени близки и к 1, и к 0 значениям метки. Сравнение результатов работы выполнено с классическим алгоритмом LDA, взятым из пакета scikit-learn языка Python. Результаты отражены в табл. 2.

Из эксперимента видно, что КНС не ставит метку 0 студенту, если он отчислится: false negatives равно 0. В то же время, доля false positives достаточно высока – больше половины меток отчисления (1) ложные. 40% данных квантовая нейронная сеть посчитала негодными для классификации. Конечно, эти результаты весьма отличаются от результатов классификатора LDA, причем не очевидно в какую (лучшую или худшую) сторону. Но, как можно заметить при этом, время обучения LDA превышает время работы в 6 раз, а у КНС – только в 1.5 раза.

Строгое рассмотрение работы КНС разных архитектур запланировано в следующих исследованиях.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложено новое направление развития КМО, существенно использующее квантовую запутанность. Это позволяет строить такие интеллектуальные системы, которые работают на потоковых данных, учатся онлайн с учетом изменений среды данных, но не сводятся к обучению с подкреплением. Предложенный способ обучения является, своего рода, «обучением с подкреплением наоборот»: в обучении с подкреплением агент вычисляет качество классификации, а среда остается внешним фактором, тогда как в предложенном подходе среда является носителем классификационных паттернов, и они восстанавливаются прямо из нее.

Такие системы могут быть применены в системах управления беспилотными транспортными средствами любого вида, а также в охранных системах и интеллектуальных бизнес-ассистентах. При этом применение квантовых вычислителей не является обязательным.

## Благодарности

Работа выполнена с частичной поддержкой Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-29-09056).

## Acknowledgments

This study was supported partially by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 19-29-09056).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

1. Сигов А.С., Андрианова Е.Г., Жуков Д.О., Зыков С.В., Тарасов И.Е. Квантовая информатика: обзор основных достижений. *Russian Technological Journal*. 2019;7(1):5–37. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2019-7-1-5-37>  
[Sigov A.S., Andrianova E.G., Zhukov D.O., Zykov S.V., Tarasov I.E. Quantum informatics: overview of the main achievements. *Russian Technological Journal*. 2019;7(1):5–37 (in Russ.). <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2019-7-1-5-37>]
2. Zeguendry A., Jarir Z., Quafafou M. Quantum Machine Learning: A Review and Case Studies. *Entropy*. 2023;25(2):287. <https://doi.org/10.3390/e25020287>
3. Tacchino F., Macchiavello C., Gerace D., et al. An artificial neuron implemented on an actual quantum processor. *npj Quantum Inf.* 2019;5(1):26. <https://doi.org/10.1038/s41534-019-0140-4>
4. DiVincenzo D.P. The Physical Implementation of Quantum Computation. *Fortschritte der Physik*. 2000;48(9–11):771–783. [https://doi.org/10.1002/1521-3978\(200009\)48:9/11%3C771::AID-PROP771%3E3.0.CO;2-E](https://doi.org/10.1002/1521-3978(200009)48:9/11%3C771::AID-PROP771%3E3.0.CO;2-E)
5. Menneer T., Narayanan A. Quantum-inspired neural networks. In: *Proceedings of the Neural Information Processing Systems 95*. Denver, CO, USA, 27–30 November 1995. URL: [https://www.researchgate.net/publication/2267350\\_Quantum-inspired\\_Neural\\_Networks](https://www.researchgate.net/publication/2267350_Quantum-inspired_Neural_Networks)



6. Гушанский С.М., Буглов В.Е. Квантовое глубокое обучение сверточной нейронной сети с использованием вариационной квантовой схемы. *Известия ЮФУ. Технические науки*. 2021;7(224):167–174. [Gushanskiy S.M., Buglov V.E. Quantum deep learning of convolutional neural network using variational quantum circuit. *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki = Izvestiya SFedU. Engineering Sciences*. 2021;7(224):167–174 (in Russ.).]
7. Cong I., Choi S., Lukin M.D. Quantum convolutional neural networks. *Nat. Phys.* 2019;15(12):1273–1278. <https://doi.org/10.1038/s41567-019-0648-8>
8. Kerenidis I., Landman J., Prakash A. *Quantum algorithms for deep convolutional neural networks*. arXiv:1911.01117. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1911.01117>
9. Henderson M., Shakya S., Pradhan S., Cook T. Quantum convolutional neural networks: Powering image recognition with quantum circuits. *Quantum Mach. Intell.* 2020;2(1):2. <https://doi.org/10.1007/s42484-020-00012-y>
10. Rebentrost P., Mohseni M., Lloyd S. Quantum Support Vector Machine for Big Data Classification. *Phys. Rev. Lett.* 2014;113(13):130503. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.113.130503>
11. Harrow A.W., Hassidim A., Lloyd S. Quantum Algorithm for Linear Systems of Equations. *Phys. Rev. Lett.* 2009;103(15):150502. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.103.150502>
12. Dang Y., Jiang N., Hu H., Ji Z., Zhang W. Image classification based on quantum K-Nearest-Neighbor algorithm. *Quantum Inf. Process.* 2018;17(9):239. <https://doi.org/10.1007/s11128-018-2004-9>
13. Schuld M., Sinayskiy I., Petruccione F. Prediction by linear regression on a quantum computer. *Phys. Rev. A.* 2016;94(2):022342. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.94.022342>
14. Lu S., Braunstein S.L. Quantum decision tree classifier. *Quantum Inf. Process.* 2014;13(3):757–770. <https://doi.org/10.1007/s11128-013-0687-5>
15. Lloyd S., Mohseni M., Rebentrost P. *Quantum algorithms for supervised and unsupervised machine learning*. arXiv:1307.0411. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1307.0411>
16. Lloyd S. Least squares quantization in PCM. *IEEE Trans. Inf. Theory* 1982;28(2):129–137. <https://doi.org/10.1109/TIT.1982.1056489>
17. Kerenidis I., Landman J., Luongo A., Prakash A. *q-means: A quantum algorithm for unsupervised machine learning*. arXiv: 1812.03584. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1812.03584>
18. Aïmeur E., Brassard G., Gambs S. Quantum speed-up for unsupervised learning. *Mach. Learn.* 2013;90(2):261–287. <https://doi.org/10.1007/s10994-012-5316-5>
19. Lloyd S., Mohseni M., Rebentrost P. Quantum principal component analysis. *Nat. Phys.* 2014;10(9):631–633. <https://doi.org/10.1038/nphys3029>
20. Dong D., Chen C., Li H., Tarn T.-J. Quantum Reinforcement Learning. *IEEE Trans. Syst. Man Cybern. Part B (Cybern.)* 2008;38(5):1207–1220. <https://doi.org/10.1109/TSMCB.2008.925743>
21. Lloyd S., Weedbrook C. Quantum Generative Adversarial Learning. *Phys. Rev. Lett.* 2018;121(4):040502. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.121.040502>
22. Dallaire-Demers P.-L., Killoran N. Quantum generative adversarial networks. *Phys. Rev. A.* 2018;98(1):012324. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.98.012324>
23. Situ H., He Z., Wang Y., Li L., Zheng S. Quantum generative adversarial network for generating discrete distribution. *Inf. Sci.* 2020;538:193–208. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2020.05.127>
24. Huang H.-L., Du Y., Gong M., Zhao Y., et al. Experimental Quantum Generative Adversarial Networks for Image Generation. *Phys. Rev. Appl.* 2021;16(2):024051. <https://doi.org/10.1103/PhysRevApplied.16.024051>
25. Chakrabarti S., Yiming H., Li T., Feizi S., Wu X. *Quantum Wasserstein generative adversarial networks*. arXiv:1911.00111. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1911.00111>
26. Kieferová M., Wiebe N. Tomography and generative training with quantum Boltzmann machines. *Phys. Rev. A.* 2017;96(6):062327. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.96.062327>
27. Amin M.H., Andriyash E., Rolfe J., Kulchytskyy B., Melko R. Quantum Boltzmann Machine. *Phys. Rev. X.* 2018;892:021050. <https://doi.org/10.1103/PhysRevX.8.021050>
28. Romero J., Olson J.P., Aspuru-Guzik A. Quantum autoencoders for efficient compression of quantum data. *Quantum Sci. Technol.* 2017;2(4):045001. <https://doi.org/10.1088/2058-9565/aa8072>
29. Khoshaman A., Vinci W., Denis B., Andriyash E., Sadeghi H., Amin M.H. Quantum variational autoencoder. *Quantum Sci. Technol.* 2018;4(1):014001. <https://doi.org/10.1088/2058-9565/aadaf1>
30. Jiang Z., Rieffel E.G., Wang Z. Near-optimal quantum circuit for Grover's unstructured search using a transverse field. *Phys. Rev. A.* 2017;95(6):062317. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.95.062317>
31. Farhi E., Goldstone J., Gutmann S. *A quantum approximate optimization algorithm*. arXiv:1411.4028. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1411.4028>
32. Kerenidis I., Prakash A. Quantum gradient descent for linear systems and least squares. *Phys. Rev. A.* 2020;101(2):022316. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.101.022316>
33. Simões R.D.M., Huber P., Meier N., Smailov N., Fuchsli R.M., Stockinger K. Experimental Evaluation of Quantum Machine Learning Algorithms. *IEEE Access.* 2023;11:6197–6208. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2023.3236409>
34. Shao Yu., Witarasyah D. Fast recognition method of moving video images based on BP neural networks. *Open Physics.* 2018;16(1):1024–1032. <https://doi.org/10.1515/phys-2018-0123>
35. Nielsen M.A., Chuang I.L. *Quantum Computation and Quantum Information*. 2nd ed. Cambridge, UK: Cambridge University Press; 2010. 866 p. ISBN 978-1-107-00217-3
36. Samuel A.L. Some Studies in Machine Learning Using the Game of Checkers. *IBM J. Res. Develop.* 1959;44(1–2):207–226. (Reprinted from *IBM J. Res. Develop.* 1959;3(3):210–229. <https://doi.org/10.1147/rd.33.0210>)
37. Maheshwari D., Sierra-Sosa D., Garcia-Zapirain B., Variational Quantum Classifier for Binary Classification: Real vs Synthetic Dataset. *IEEE Access.* 2022;10:3705–3715. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2021.3139323>

38. Zuev S., Kabalyants P., Polyakov V., Chernikov S. Fractal Neural Networks. In: *2021 International Conference on Electrical, Computer and Energy Technologies (ICECET)*. 2021. <https://doi.org/10.1109/ICECET52533.2021.9698649>
39. Cerezo M., Verdon G., Huang H.Y., et al. Challenges and opportunities in quantum machine learning. *Nat. Comput. Sci.* 2022;2(9):567–576. <https://doi.org/10.1038/s43588-022-00311-3>

#### Об авторе

**Зуев Сергей Валентинович**, к.ф.-м.н., доцент, кафедра компьютерной инженерии и моделирования Физико-технического института ФГАОУ ВО «Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского» (295007, Россия, Республика Крым, Симферополь, пр-т Вернадского, д. 4). E-mail: zuevsv@cfuv.ru. Scopus Author ID 57292501000, ResearcherID U-1055-2017, <https://orcid.org/0000-0003-4237-0491>

#### About the author

**Sergei V. Zuev**, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor, Department of Computer Engineering and Modelling, Institute of Physics and Technologies, V.I. Vernadsky Crimean Federal University (4, Vernadskogo pr., Simferopol, 295007 Republic of Crimea, Russia). E-mail: zuevsv@cfuv.ru. Scopus Author ID 57292501000, ResearcherID U-1055-2017, <https://orcid.org/0000-0003-4237-0491>