

Математическое моделирование  
Mathematical modeling

УДК 621.391:53.08  
<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2023-11-4-94-104>



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

# Восстановление смазанного фотографического изображения движущегося объекта, получаемого на пределе разрешающей способности

В.Б. Федоров<sup>®</sup>,  
С.Г. Харламов,  
А.И. Старицковский

МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, 119454 Россия

<sup>®</sup> Автор для переписки, e-mail: feodorov@mirea.ru

**Резюме**

**Цели.** Задача восстановления смазанного изображения движущегося объекта имеет большое практическое значение, в частности, при обработке изображений поверхности Земли, получаемых со спутников. Целью работы является исследование возможности повышения качества восстановления смазанных изображений, получаемых на пределе разрешающей способности фотоаппарата.

**Методы.** Использованы методы цифровой обработки сигналов, методы теории некорректных и плохо обусловленных задач.

**Результаты.** Предложен метод восстановления «смазанного» фотографического изображения движущегося объекта, отличающийся от традиционных подходов тем, что уравнение дискретной свертки, к решению которого сводится задача восстановления смазанного изображения, получается путем аппроксимации соответствующего интегрального уравнения на основе интерполяционного ряда Котельникова, а не на основе квадратурной формулы, как это делается традиционно. В работе получены формулы для вычисления ядра свертки, получаемой с применением интерполяционного ряда Котельникова. Как известно, задача обращения дискретной свертки относится к классу некорректных задач и требует регуляризации. Дано сравнение результатов восстановления смазанных изображений (с использованием регуляризации по Тихонову), осуществляющегося как традиционным путем, т.е. с применением квадратурной формулы, так и предлагаемым способом, основывающимся на интерполяционном ряде Котельникова. Показано, что качество восстановления смазанного изображения в обоих случаях получается практически одинаковым. Однако использование квадратурной формулы предполагает, что величина «смазы» выражена целым числом пикселей, в то время как в случае использования ряда Котельникова эта величина может задаваться и долями пикселя.

**Выводы.** Показано, что дискретизацию свертки, описывающей искажение изображения типа «смаз», целесообразно осуществлять на основе интерполяционного ряда Котельникова в случае, когда осуществляется обработка смазанного изображения, получаемого на пределе разрешающей способности фотоаппарата. Это обусловлено тем, что в этом случае величина «смазы» может составлять доли пикселя. Такая ситуация характерна, например, для спутниковой фотосъемки поверхности Земли.

**Ключевые слова:** «смаз» изображения движущегося объекта, разрешающая способность, восстановление изображения, тихоновская регуляризация, обратная задача, интерполяционный ряд Котельникова, краевой эффект

• Поступила: 05.12.2022 • Доработана: 09.03.2023 • Принята к опубликованию: 06.06.2023

**Для цитирования:** Федоров В.Б., Харламов С.Г., Старицкий А.И. Восстановление смазанного фотографического изображения движущегося объекта, получаемого на пределе разрешающей способности. *Russ. Technol. J.* 2023;11(4):94–104. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2023-11-4-94-104>

**Прозрачность финансовой деятельности:** Авторы не имеют финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## RESEARCH ARTICLE

# Restoration of a blurred photographic image of a moving object obtained at the resolution limit

**Victor B. Fedorov<sup>®</sup>,**  
**Sergey G. Kharlamov,**  
**Anatoly I. Starikovskiy**

MIREA – Russian Technological University, Moscow, 119454 Russia

<sup>®</sup> Corresponding author, e-mail: [fedorov@mirea.ru](mailto:fedorov@mirea.ru)

### Abstract

**Objectives.** When processing images of the Earth's surface obtained from satellites, the problem of restoring a blurry image of a moving object is of great practical importance. The aim of this work is to study the possibility of improving the quality of restoration of blurry images obtained at the limit of the resolution of the camera.

**Methods.** Digital signal processing methods informed by the theory of incorrect and ill-conditioned problems were used.

**Results.** The proposed method for restoring a blurred photographic image of a moving object differs from traditional approaches in that the discrete convolution equation, to which the problem of restoring a blurred image is reduced, is obtained by approximating the corresponding integral equation based on the Kotelnikov interpolation series rather than on the traditional basis of the quadrature formula. In the work, formulas are obtained for calculating the kernel of the convolution obtained using the Kotelnikov interpolation series. The discrete convolution inversion problem, which belongs to the class of ill-posed problems, requires regularization. Results of traditional approaches to restoring blurred images using the quadrature formula with Tikhonov regularization and the proposed method based on the Kotelnikov interpolation series are compared. Although the quality of the blurred image restoration is almost the same in both cases, in the quadrature formula the blur value is expressed as an integer number of pixels, while, when using the Kotelnikov series, this value can also be specified in fractions of a pixel.

**Conclusions.** The expediency of discretizing the convolution describing the image distortion of the blur type on the basis of the Kotelnikov interpolation series when processing a blurred image obtained at the limit of the resolution of the camera is demonstrated. In this case, the amount of blur can be expressed in fractions of a pixel. This situation typically arises when processing satellite photography of the Earth's surface.

**Keywords:** blurred image of a moving object, resolution, image restoration, Tikhonov regularization, inverse problem, Kotelnikov interpolation series, edge effect

• Submitted: 05.12.2022 • Revised: 09.03.2023 • Accepted: 06.06.2023

**For citation:** Fedorov V.B., Kharlamov S.G., Starikovskiy A.I. Restoration of a blurred photographic image of a moving object obtained at the resolution limit. *Russ. Technol. J.* 2023;11(4):94–104. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2023-11-4-94-104>

**Financial disclosure:** The authors have no a financial or property interest in any material or method mentioned.

The authors declare no conflicts of interest.

## ВВЕДЕНИЕ

Задача восстановления смазанного изображения движущегося объекта достаточно хорошо изучена<sup>1</sup> [1–14]. Так, в случае, когда скорость движения объекта априорно известна, ее решение сводится к обращению дискретной свертки.

При этом указанная дискретная сверка получается в результате аппроксимации соответствующей интегральной свертки. Эта аппроксимация интегральной свертки может быть осуществлена путем замены интеграла квадратурной формулой (обычно квадратурной формулой трапеций). Однако существует и другая возможность, предлагаемая в настоящей работе. Она основывается на замене подынтегральной функции ее интерполяционным рядом Котельникова. При этом подынтегральная функция выражает зависимость яркости точки изображения от ее координат.

Если рассматривается изображение, самые мелкие детали которого существенно больше размеров пикселя, то при его восстановлении после «смазы» величина «смазы» может задаваться с точностью до размера пикселя, т.е. выражаться целым числом пикселей. В этом случае, как показано в работе, результат восстановления практически не зависит от того, каким способом была дискретизирована свертка. Однако дело обстоит иначе, когда требуется восстановить смазанное изображение, полученное на пределе разрешающей способности фотоаппарата, т.е. когда самые мелкие детали изображения по размерам близки к размерам пикселя. В этом случае для обеспечения максимального разрешения может потребоваться выразить величину «смазы» в долях пикселя. Фактически это может означать, что смазанное изображение перед восстановлением должно быть проинтерполировано, т.е. виртуально представлено как бы более мелкими «пикселями». После чего точную величину «смазы» уже можно будет выразить целым числом этих более мелких

«пикселей» и затем применить традиционный метод восстановления.

Но такой подход сопряжен с дополнительным расходованием памяти компьютера. Так, если размеры пикселя потребуется уменьшить в 10 раз, то размер соответствующего массива с изображением увеличится в 100 раз.

При этом предлагаемый метод аппроксимации интегральной свертки на основе интерполяционного ряда Котельникова допускает задавать величину «смазы» в долях пикселя, и, следовательно, интерполяция изображения не потребуется, т.е. не потребуется дополнительного расходования памяти компьютера.

## МЕТОД

### Основное интегральное уравнение

Основное интегральное уравнение, связывающее яркость точек смазанного изображения  $Q(x, y)$  с яркостью точек восстанавливаемого изображения  $P(x, y)$ , имеет вид:

$$Q(x, y) = w^2 \int_0^T P(x - v_x t; y - v_y t) dt,$$

где  $(x, y)$  – декартовы координаты текущей точки,  $(v_x, v_y)$  – декартовы координаты скорости смещения изображения по поверхности ПЗС-матрицы (по предположению все точки изображения движутся с одинаковыми скоростями),  $w$  – размер пикселя,  $T$  – время экспозиции [1–3]. Если вертикальная составляющая скорости отсутствует, то имеем интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода типа свертки:

$$Q(x) = \frac{w^2}{v_x} \int_0^{v_x T} P(x - \xi) d\xi. \quad (1)$$

### Дискретизация свертки на основе квадратурной формулы

Заменяя интеграл в формуле (1) квадратурной формулой трапеций, получим

$$Q(x) \approx \frac{w^2}{v_x} \sum_{k=0}^n c_k P(x - kw),$$

<sup>1</sup> Грузман И.С., Киричук В.С., Косых В.П., Перетягин Г.И., Спектор А.А. Цифровая обработка изображений в информационных системах: учебное пособие. Новосибирск: Изд-во НГТУ; 2002. 352 с. [Gruzman I.S., Kirichuk V.S., Kosykh V.P., Peretyagin G.I., Spector A.A. Digital Image Processing in Information Systems: Tutorial. Novosibirsk: NSTU; 2002. 352 p. (in Russ.).]

где  $c_0 = c_n = 0.5$ ,  $c_1 = \dots = c_{n-1} = 1$  – коэффициенты квадратурной формулы;  $n = v_x T / w$  – величина смещения изображения за время экспозиции, выраженная целым числом пикселей;  $k \in \{0, \dots, n\}$ .

Или, поскольку в пределах одного пикселя яркость должна считаться постоянной, имеем

$$Q(m) \approx \sum_{k=0}^{\min\{n,m\}} \frac{w^2}{v_x} c_k P(m-k), \quad (2)$$

где  $m$  – номер пикселя,  $m \in \{0, \dots, M-1\}$ ,  $M$  – число пикселей в одном ряду,  $k \in \{0, \dots, m\}$ ,  $Q[m] = Q(mw)$ ,  $P[m] = P(mw)$ .

Далее равенство в (2) будет считаться точным.

Свертку (2) можно записать также в матричном виде

$$\mathbf{Q} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}, \quad (3)$$

где, например, при  $M = 8$ ,  $n = 3$  теплицева матрица  $\mathbf{A}$  будет иметь вид:

$$\mathbf{A} = \frac{w^2}{v_x} \begin{bmatrix} 0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 1.0 & 0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 1.0 & 1.0 & 0.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.5 & 1.0 & 1.0 & 0.5 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.5 & 1.0 & 1.0 & 0.5 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.5 & 1.0 & 1.0 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

### Дискретизация свертки на основе интерполяционного ряда Котельникова

Предполагая, что максимальная пространственная частота в преобразовании Фурье изображения  $P(x)$  не превосходит  $1/2w$ , подынтегральную

функцию в (1) можно представить интерполяционным рядом Котельникова:

$$P(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} P[k] \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{w} - k\right).$$

Подставляя это выражение в (1), получим

$$Q(x) = \frac{w^2}{v_x} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} P[k] \int_0^{v_x T} \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{w} - \frac{\xi}{w} - k\right) d\xi$$

или

$$Q[m] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} P[k] a[m-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a[k] P[m-k].$$

Но поскольку фактически горизонтальные размеры изображения ограничены  $M$  пикселями, то приходим к приближенному равенству (которое далее условимся считать точным):

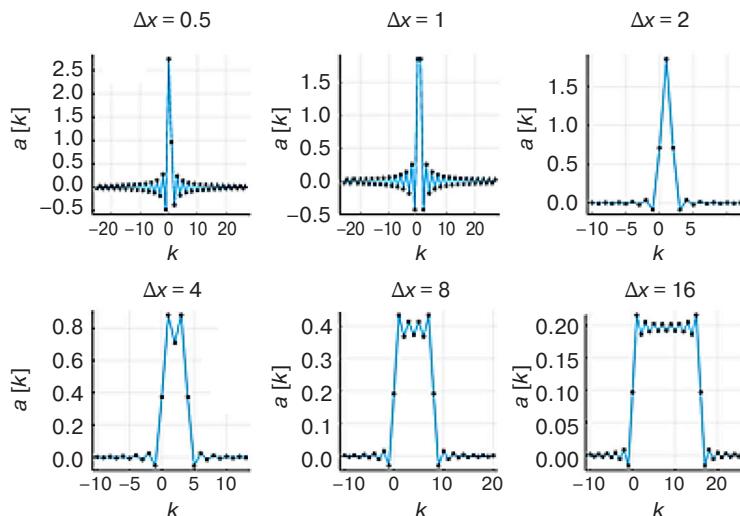
$$Q[m] \approx \sum_{k=0}^{M-1} P[k] a[m-k], \quad (4)$$

где ядро этой дискретной свертки определяется формулой

$$a[k] = \frac{w^2}{v_x \pi} \left( Si\left(\pi\left(\frac{v_x T}{w} - k\right)\right) + Si(\pi k)\right). \quad (5)$$

Соответствующие графики представлены на рис. 1.

Как видно из приведенных графиков, с ростом величины смещения изображения за время экспозиции ядро свертки (4) приближается к ядру свертки (2). Отметим



**Рис. 1.** Графики ядра дискретной свертки (4), полученной с использованием интерполяционной теоремы Котельникова, соответствующие различным величинам «смазы» изображения  $\Delta x = v_x T / w$

при этом, что в случае свертки (4) величина смещения может выражаться не только целым числом пикселей, но и долями пикселя. В случае же свертки (2) эта величина всегда выражается целым числом пикселей.

Свертка (4) также может быть записана в матричном виде:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}. \quad (6)$$

Однако здесь, в отличие от (3), теплицева матрица  $\mathbf{A}$  уже не будет нижней треугольной матрицей (у нее вообще не будет нулевых диагоналей).

### Моделирование смазанного изображения (решение прямой задачи)

Для проведения численных экспериментов по восстановлению смазанного изображения необходимо располагать смазанными нужным образом изображениями. Получать такие изображения можно, используя соотношения (2) или (4), считая при этом функцию  $P[m]$  заданной, а функцию  $Q[m]$  – неизвестной. Указанные соотношения, как известно, могут быть сведены к циклической свертке, которая эффективно вычисляется (и обращается) на основе быстрого преобразования Фурье (БПФ). Например, на рис. 2 и 3 показано исходное и полученное указанным способом горизонтально смазанное на 20 пикселей изображение соответственно.

При моделировании смазанного изображения существенным моментом является наличие или отсутствие на смазанном изображении «переходных краев». У горизонтально смазанного изображения, представленного на рис. 3, такие «переходные края» (слева и справа) имеются. Каждый из этих «переходных краев» представляет собой полосу шириной, равной величине смещения изображения, яркость которой постепенно уменьшается до нуля.

Однако у реального смазанного фотографического изображения такие края будут отсутствовать, т.к. прообраз получаемого изображения представляет собой как бы бесконечную в оба конца ленту, у которой нет краев. Поэтому для приведения полученного смазанного изображения к реальности его края следует «обрезать».

## РЕЗУЛЬТАТЫ

### Результаты восстановления смазанного изображения без использования регуляризации

Обращение смоделированного смазанного изображения, также, как и решение прямой задачи, осуществимо на основе БПФ. Так, дискретную свертку вида (2) или (4) можно представить в виде циклической свертки, дополнив каждую из конечных последовательностей, входящих в свертку, требуемым числом нулей



Рис. 2. Исходное изображение



Рис. 3. Смоделированное смазанное изображение с необрезанными краями (величина горизонтального «смазы» – 20 пикселей)

$$\mathbf{Q}[m] = \sum_{k=0}^{M-1} \mathbf{P}[k] \mathbf{a}[m-k], \quad (7)$$

где  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{a}$  – массивы длины, равной  $\text{length}(\mathbf{P}) + \text{length}(\mathbf{a}) - 1$ , получаемые из соответствующих массивов  $Q$ ,  $P$ ,  $a$  (входящих в (2) и (4)) добавлением требуемого числа нулей.

Тогда, для обращения этой свертки может быть использован так называемый инверсный фильтр, действие которого в частотной области имеет следующий вид:

$$\mathcal{F}[\mathbf{P}] = \frac{1}{\mathcal{F}[\mathbf{a}]} \mathcal{F}[\mathbf{Q}],$$

где  $\mathcal{F}[\cdot]$  обозначает дискретное преобразование Фурье,  $1/\mathcal{F}[\mathbf{a}]$  – так называемая передаточная функция инверсного фильтра.

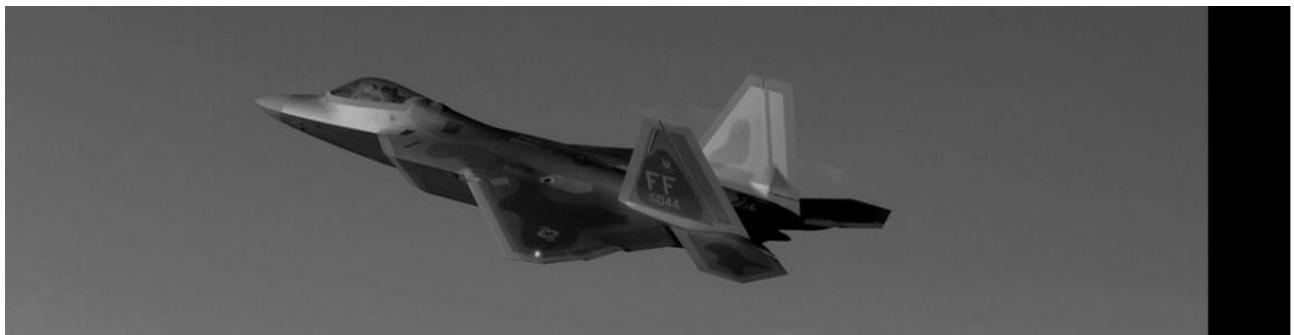
Если при этом «переходные края» смоделированного смазанного изображения не обрезать, то результат восстановления будет получаться практически идеальным даже без применения регуляризации. Пример восстановленного таким образом изображения показан на рис. 4. Эксперименты показывают, что в случае, когда края смазанного изображения остаются не обрезанными, при величине смещения изображения  $\Delta x = \frac{v_x T}{w} = 20$  для получения данного

результата длина «хвостов» ядра Котельникова должна быть не меньше 3. Под длиной «хвостов» понимается число учитываемых отсчетов ядра с отрицательными индексами, которое также равно числу учитываемых отсчетов с индексами, большими величины  $\Delta x$ .

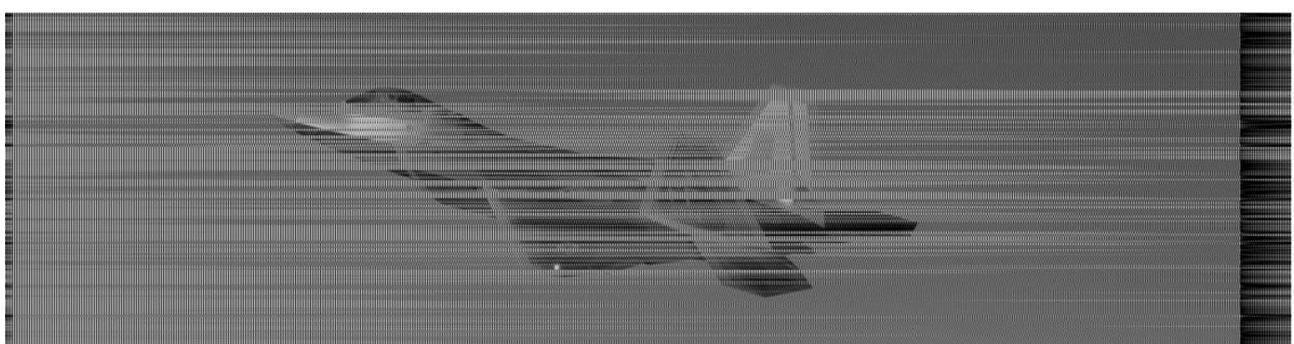
Однако, как уже отмечалось, реальное смазанное изображение отличается тем, что не имеет «переходных краев». Если же в соответствии с реальностью получившиеся «переходные края» обрезать, то результат восстановления (без регуляризации) окажется чрезвычайно плохим. Соответствующий пример результата восстановления приведен на рис. 5.

Ситуацию можно попытаться исправить путем предварительной реконструкции обрезанных краев. Такая реконструкция может представлять собой просто добавление слева и справа к обрезанному изображению двух вертикальных полос шириной равной величине «смазы», яркость пикселей горизонтальных рядов которых будет увеличиваться/уменьшаться («по непрерывности») по линейному закону. На рис. 6 приведен пример смоделированного смазанного изображения с обрезанными «переходными краями», а на рис. 7 и 8 – результаты его восстановления после реставрации обрезанных краев.

Как можно видеть, результат восстановления путем обращения дискретной свертки с ядром Котельникова оказался значительно лучше. Однако, как показывают численные эксперименты, качество



**Рис. 4.** Смазанное изображение с необрезанными краями, восстановленное с помощью инверсного фильтра при использовании ядра Котельникова и отсутствии регуляризации



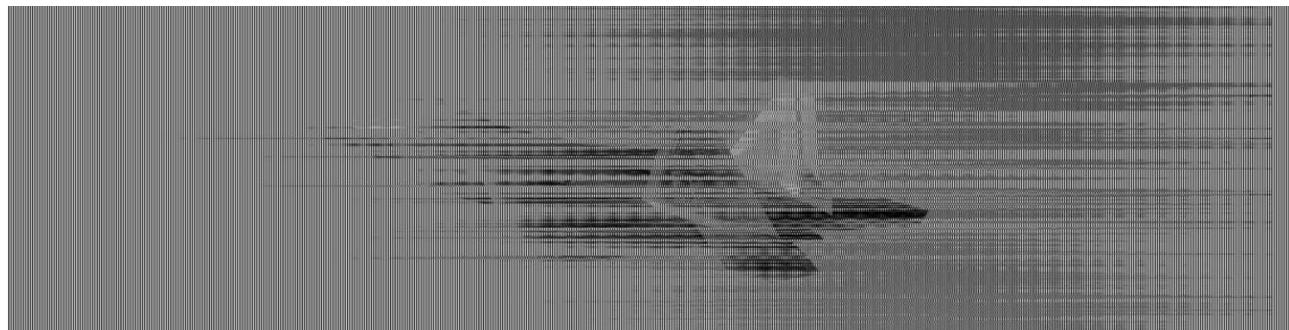
**Рис. 5.** Смазанное изображение с необрезанными краями, восстановленное с помощью инверсного фильтра при использовании квадратурной формулы трапеций и отсутствии регуляризации



**Рис. 6.** Смоделированное смазанное изображение с обрезанными «переходными краями» при величине горизонтального «смаза», равной 20 пикселям



**Рис. 7.** Смазанное изображение с обрезанными краями, восстановленное с помощью инверсного фильтра при использовании ядра Котельникова и отсутствии регуляризации



**Рис. 8.** Смазанное изображение с обрезанными краями, восстановленное с помощью инверсного фильтра при использовании квадратурной формулы трапеций и отсутствии регуляризации

восстановления существенно зависит от того, сколько отсчетов в «хвостах» ядра Котельникова, определяемого формулой (5), учитывается. В данном случае учитывались лишь отсчеты с индексами от 0 до 20 (при величине «смаза» 20 пикселей), т.е. «хвосты» ядра полностью отбрасывались. В целом нельзя утверждать, что обращение дискретной свертки с ядром Котельникова без применения регуляризации во всех случаях гарантирует удовлетворительный результат.

Как можно видеть из примеров, реконструкция краев несколько улучшает результат восстановления изображения, но в общем случае его качество

все равно остается неудовлетворительным. Причина этого в том, что обращение дискретных сверток (2) или (4) можно рассматривать как решение системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида (3) или (6) соответственно.

Погрешности реконструкции (а тем более полное отсутствие такой реконструкции) надо рассматривать как погрешности в задании исходных данных (т.е. погрешностей в нескольких крайних значениях  $Q[0], \dots, Q[M - 1]$ ). Оценка относительной погрешности полученного решения, как известно, пропорциональна относительной погрешности правой части СЛАУ с коэффициентом

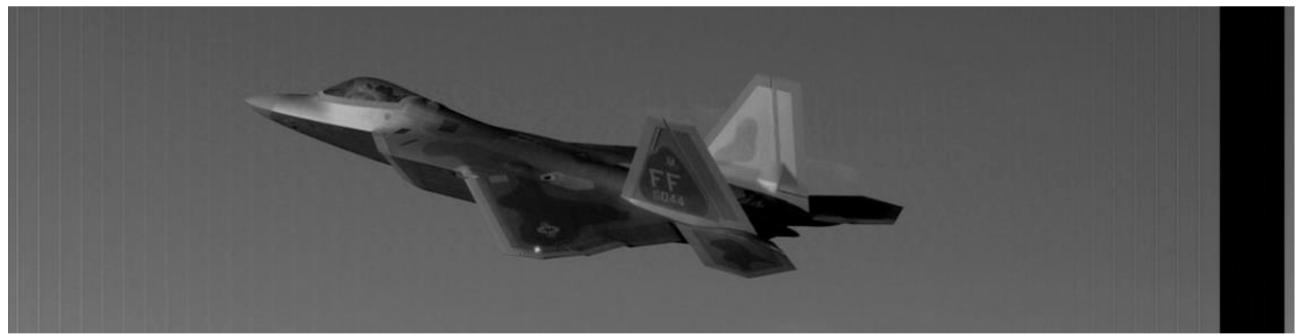
пропорциональности, равным числу обусловленности матрицы СЛАУ. А это число обычно весьма велико, его величина зависит как от размера матрицы, так и от величины «смазы». Таким образом, даже довольно малая относительная погрешность исходных данных может приводить к очень значительным относительным погрешностям получаемого решения. Для предотвращения этого явления при обращении свертки обычно используется метод регуляризации Тихонова [1–3].

### Результаты восстановления смазанного изображения методом инверсной фильтрации с тихоновской регуляризацией

Задача восстановления изображения, как известно, является очень чувствительной к погрешностям исходных данных (решение интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода (1) относится к классу некорректно поставленных задач). Поэтому при наличии сколько-нибудь существенных погрешностей в исходных данных обращение свертки требует применения регуляризации.

Передаточная функция регуляризированного по Тихонову дискретного инверсного фильтра имеет вид:

$$\frac{A[m]}{|A[m]|^2 + \alpha W^{2p}[m]},$$



**Рис. 9.** Смазанное изображение после реставрации обрезанных краев, восстановленное с помощью инверсного фильтра при использовании ядра Котельникова ( $\alpha = 10^{-3}$ ,  $p = 1$ )



**Рис. 10.** Смазанное изображение после реставрации обрезанных краев, восстановленное с помощью инверсного фильтра при использовании квадратурной формулы трапеций ( $\alpha = 10^{-2}$ ,  $p = 1$ )

где  $A = \mathcal{F}[\mathbf{a}]$ ;  $W^{2p}$  – стабилизирующая функция порядка  $p = 0, 1, 2, \dots$ ;  $\alpha$  – параметр регуляризации ( $\alpha \geq 0$ , при  $\alpha = 0$  регуляризации нет, этот параметр можно подбирать, например, экспериментально); массив  $\mathbf{a}$  определен в формуле (7) [1–3].

Стабилизирующая функция нулевого порядка есть  $W^0 = \mathcal{F}([1, 0, \dots, 0])$ , т.е. тождественно равна 1. Регуляризующая функция первого порядка определяется как  $W^2 = \mathcal{F}([1, -2, 1, 0, \dots, 0])$  – преобразование Фурье конечно-разностного фильтра 2-го порядка. Регуляризующие функции более высоких порядков – суть степени  $W^2$ . Результаты восстановления с реконструкцией краев и применением регуляризации горизонтально смазанного на 20 пикселей изображения представлены на рис. 9 и 10.

Как можно видеть из полученных результатов, качество восстановления смазанного изображения, как в случае использования квадратурной формулы, так и в случае использования ряда Котельникова одинаково хорошее.

### Результаты численных экспериментов по восстановлению изображения при величинах «смазы», выраженных долями пикселя

Рассмотрим теперь ситуацию, когда требуется восстановить смазанное изображение, полученное на пределе разрешающей способности фотоаппарата,

т.е. когда мгновенные образы самых мелких деталей движущегося изображения по размерам близки к размерам пикселя. В этом случае в качестве модели объекта съемки будем рассматривать миру, состоящую из параллельных полос уменьшающейся ширины, вплоть до размера одного пикселя (имеется в виду – в пространстве образов). На рис. 11 представлен мгновенный образ такой миры (с учетом конечно-сторонних размеров пикселей ПЗС-матрицы фотоаппарата). На рис. 12 представлено горизонтально смазанное изображение на 5.5 пикселя той же самой миры.

На рис. 13 показано восстановленное смазанное изображение миры с необрезанными краями с помощью инверсного фильтра при использовании ядра Котельникова и отсутствии регуляризации. Для получения наилучшего результата восстановления при заданной величине «смазы» изображения длина «хвостов» ядра Котельникова должна подбираться экспериментально. Так, представленный на рис. 13 результат получен при длине «хвостов», равной 2.



**Рис. 11.** Мгновенное (несмазанное) изображение миры, получаемое на пределе разрешающей способности



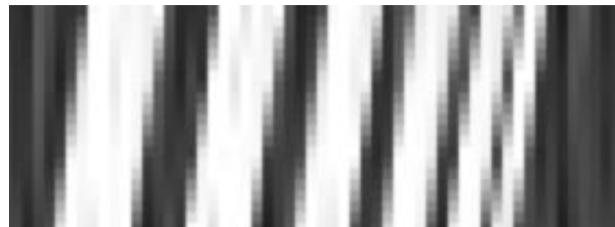
**Рис. 12.** Смазанное по горизонтали на 5.5 пикселяй изображение миры (края не обрезаны)



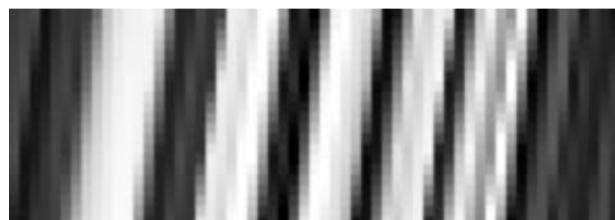
**Рис. 13.** Смазанное изображение миры с необрезанными краями, восстановленное с помощью инверсного фильтра при использовании ядра Котельникова и отсутствии регуляризации

Как видно из сравнения рис. 14 и 15, контрастность восстановленного смазанного изображения миры с использованием ядра Котельникова

получилась выше, чем при использовании квадратурной формулы, что неудивительно, поскольку величина «смазы» равна 5.5 пикселяй, а при использовании квадратурной формулы возможно учитывать только смещение на целое число пикселей. При этом, в случае использования квадратурной формулы, инверсный фильтр был «настроен» не на величину «смазы», равной 5.5, а на величину 6 (т.к. при использовании квадратурной формулы нет возможности учитывать дробную часть величины «смазы»).



**Рис. 14.** Результат восстановления обрезанного смазанного изображения миры с помощью инверсного фильтра при использовании ядра Котельникова с предварительной реставрацией обрезанных краев ( $\alpha = 10^{-3}$ ,  $p = 1$ )



**Рис. 15.** Результат восстановления обрезанного смазанного изображения миры с необрезанными краями с помощью инверсного фильтра при использовании квадратурной формулы трапеций с предварительной реставрацией обрезанных краев ( $\alpha = 10^{-2}$ ,  $p = 1$ )

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты численных экспериментов показывают, что в случае, если величина «смазы» изображения выражена целом числом пикселей, то предложенный подход, основанный на использовании ядра Котельникова, работает так же хорошо, как и традиционный, основанный на использовании квадратурных формул. Однако применение ряда Котельникова будет иметь преимущество в случае, если величина «смазы» изображения выражена долями пикселя, поскольку в этом случае для полного учета априорной информации о величине «смазы» исключается необходимость интерполяции исходного изображения, как это было бы при использовании квадратурных формул.

Таким образом, использование ядра Котельникова предпочтительнее при обработке смазанного изображения, получаемого на пределе разрешающей

способности фотоаппарата, когда важно устранять «смаз», величина которого может составлять доли пикселя. Такая ситуация характерна, например, для спутниковой фотосъемки поверхности Земли.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sizikov V., Dovgan A. Reconstruction of images smeared uniformly and non-uniformly. *CEUR Workshop Proceedings*. 2019;2344: paper 2. URL: <https://ceur-ws.org/Vol-2344/paper2.pdf>
2. Сизиков В.С. *Прямые и обратные задачи восстановления изображений, спектроскопии и томографии с MatLab*. СПб.: Лань; 2011. 410 с. ISBN 978-5-8114-2754-3
3. Василенко Г.И., Тараторин А.М. *Восстановление изображений*. М.: Радио и связь; 1986. 302 с.
4. Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. *Некорректные задачи. Численные методы и приложения*. М.: Изд-во МГУ; 1989. 199 с.
5. Бейтс Р., Мак-Доннелл М. *Восстановление и реконструкция изображений*: пер с англ. М.: Мир; 1989. 336 с.
6. Гонсалес Р., Вудс Р. *Цифровая обработка изображений*. М.: Техносфера; 2012. 1104 с.
7. Гончарский А.В., Леонов А.С., Ягола А.Г. Методы решения интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода типа свертки. В: *Некоторые вопросы автоматизированной обработки и интерпретации физических экспериментов*. Вып. 1. М.: Изд-во МГУ. 1973. С. 170–191.
8. Медофф Б.П. Реконструкция изображений по ограниченным данным: Теория и применение в компьютерной томографии. В: *Реконструкция изображений*; под ред. Г. Старка. М.: Мир; 1992. С. 384–436.
9. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. *Регуляризующие алгоритмы и априорная информация*. М.: Наука; 1983. 198 с.
10. Арефьева М.В., Сысоев А.Ф. Быстрые регуляризующие алгоритмы цифрового восстановления изображений. В: *Вычислительные методы и программирование: сборник работ науч.-исслед. центра МГУ*. 1983. Вып. 39. С. 40–55.
11. Василенко Г.И. *Теория восстановления сигналов: О редукции к идеальному прибору в физике и технике*. М.: Сов. радио; 1979. 272 с.
12. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. *Методы решения некорректных задач*. М.: URSS; 2022. 288 с. ISBN 978-5-9710-9341-1
13. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В. Обратные задачи обработки фотоизображений. В: *Некорректные задачи естествознания*; под ред. А.Н. Тихонова, А.В. Гончарского. М.: Изд-во МГУ; 1987. С. 185–195.
14. Russ J.C. *The Image Processing Handbook*. Boca Raton: CRC Press; 2007. 852 p.

**Вклад авторов.** Все авторы в равной степени внесли свой вклад в исследовательскую работу.

**Authors' contribution.** All authors equally contributed to the research work.

## REFERENCES

1. Sizikov V., Dovgan A. Reconstruction of images smeared uniformly and non-uniformly. *CEUR Workshop Proceedings*. 2019;2344: paper 2. Available from URL: <https://ceur-ws.org/Vol-2344/paper2.pdf>
2. Sizikov V.S. *Pryamye i obratnye zadachi vosstanovleniya izobrazhenii, spektroskopii i tomografii s MatLab (Direct and Inverse Problems of Image Reconstruction, Spectroscopy and Tomography with MATLAB)*. St. Petersburg: Lan'; 2011. 410 p. (in Russ.). ISBN 978-5-8114-2754-3
3. Vasilenko G.I., Taratorin A.M. *Vosstanovlenie izobrazhenii (Image Recovery)*. Moscow: Radio i svyaz'; 1986. 302 p. (in Russ.).
4. Bakushinskii A.B., Goncharskii A.V. *Nekorrektnye zadachi. Chislennye metody i prilozheniya (Incorrect Tasks. Numerical Methods and Applications)*. Moscow: Moscow University Press; 1989. 199 p. (in Russ.).
5. Bates R., McDonnell M. *Vosstanovlenie i rekonstruktsiya izobrazhenii (Image Restoration and Reconstruction)*: transl. from Engl. Moscow: Mir; 1989. 336 p. (in Russ.). [Bates R., McDonnell M. *Image Restoration and Reconstruction*. NY: Oxford University Press; 1986. 312 p.]
6. Gonzalez R., Woods R. *Tsifrovaya obrabotka izobrazhenii (Digital Image Processing)*. Moscow: Tekhnosfera; 2012. 1104 p. (in Russ.). [Gonzalez R., Woods R. *Digital Image Processing*. Prentice Hall; 2008. 954 p.]
7. Goncharskii A.V., Leonov A.S., Yagola A.G. Methods for solving Fredholm integral equations of the 1st kind of convolution type. In: *Some Problems of Automated Processing and Interpretation of Physical Experiments*. V. 1. Moscow: Moscow University Press; 1973. P. 170–191 (in Russ.).
8. Medoff B.P. Image Reconstruction from Limited Data: Theory and Application in Computed Tomography. In: G. Stark (Ed.). *Image Reconstruction*. Moscow: Mir; 1992. P. 384–436 (in Russ.).
9. Tikhonov A.N., Goncharskii A.V., Stepanov V.V., Yagola A.G. *Regulyariziruyushchie algoritmy i apriornaya informatsiya (Regularizing Algorithms and A Priori Information)*. Moscow: Nauka; 1983. 198 p. (in Russ.).
10. Aref'eva M.V., Sysoev A.F. Fast regularizing algorithms for digital image restoration. In: *Vychislitel'nye metody i programmirovaniye (Numerical Methods and Programming)*. 1983. Is. 39. P. 40–55 (in Russ.).
11. Vasilenko G.I. *Teoriya vosstanovleniya signalov: O reduksii k ideal'nому priboru v fizike i tekhnike (Theory of Signal Recovery: On the Reduction to an Ideal Device in Physics and Technology)*. Moscow: Sovetskoe Radio; 1979. 272 p. (in Russ.).

12. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach (Methods for Solving Ill-Posed Problems)*. Moscow: URSS; 2022. 288 p. (in Russ.). ISBN 978-5-9710-9341-1
13. Tikhonov A.N., Goncharskii A.V., Stepanov V.V. Inverse problems of photo image processing. In: Tikhonov A.N., Goncharskii A.V. (Eds.). *Incorrect Problems of Natural Sciences*. Moscow: Moscow University Press; 1987. P. 185–195 (in Russ.).
14. Russ J.C. *The Image Processing Handbook*. Boca Raton: CRC Press; 2007. 852 p.

#### Об авторах

**Федоров Виктор Борисович**, к.т.н., доцент, кафедра высшей математики Института искусственного интеллекта ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: feodorov@mirea.ru. Scopus Author ID 57208924592, SPIN-код РИНЦ 2622-7666, <https://orcid.org/0000-0003-1011-5453>

**Харламов Сергей Григорьевич**, магистрант, кафедра высшей математики Института искусственного интеллекта ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: serhar2000@mail.ru. <https://orcid.org/0000-0003-4470-6323>

**Стариковский Анатолий Иванович**, к.т.н., доцент, профессор кафедры радиоэлектронных систем и комплексов Института радиоэлектроники и информатики ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: starikovski@mirea.ru. Scopus Author ID 57208926243, ResearcherID AAH-2239-2020, SPIN-код РИНЦ 1126-4471, <https://orcid.org/0000-0003-4040-3843>

#### About the authors

**Victor B. Fedorov**, Cand. Sci. (Eng.), Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Institute of Artificial Intelligence, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: feodorov@mirea.ru. Scopus Author ID 57208924592, RSCI SPIN-code 2622-7666, <https://orcid.org/0000-0003-1011-5453>

**Sergey G. Kharlamov**, Master Student, Department of Higher Mathematics, Institute of Artificial Intelligence, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: serhar2000@mail.ru. <https://orcid.org/0000-0003-4470-6323>

**Anatoly I. Starikovskiy**, Cand. Sci. (Eng.), Associate Professor, Professor, Department of Radio Electronic Systems and Complexes, Institute of Radio Electronics and Informatics, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: starikovski@mirea.ru. Scopus Author ID 57208926243, ResearcherID AAH-2239-2020, RSCI SPIN-code 1126-4471, <https://orcid.org/0000-0003-4040-3843>