Russian Technological Journal.
2023;11(4):84–93

ISSN 2782-3210 (Print)
ISSN 2500-316X (Online)

Математическое моделирование

Mathematical modeling

УДК 621.372.8
https://doi.org/10.32362/2500-316X-2023-11-4-84-93

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Модели волноводов, сочетающих градиентные и нелинейно-оптические слои

С.Е. Савотченко @

Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова, Белгород, 308012 Россия
@ Автор для переписки, e-mail: savotchenkose@mail.ru

Резюме
Цели. Теоретические исследования волноводных свойств границ раздела нелинейно-оптических и градиентных сред являются важными для использования в оптоэлектронике. Комбинированные волноводы, сочетающие слои с различными оптическими свойствами, представляются наиболее перспективными, поскольку для них можно подобрать оптимальные характеристики с помощью широкого ряда управляющих параметров. Цель работы – разработка теории композитных оптически-нелинейных градиентных волноводов с произвольным профилем, в рамках которой возможно получение точных аналитических выражений для поверхностных волн и волноводных мод в явном виде. Основной особенностью предлагаемой в данной работе теории является то, что она применима для описания поверхностных волн и волноводных мод, поле в которых сосредоточено внутри градиентного слоя и не выходит за его границу, не контактирующую с нелинейным слоем.
Методы. Использованы аналитические методы теории оптических волноводов, нелинейной оптики.
Результаты. Проведено теоретическое описание волноводных свойств границы раздела двух сред с принципиально различными оптическими характеристиками. Сформулированная модель плоского волновода применима для сред с произвольным распределением пространственного профиля диэлектрической проницаемости. Получено аналитическое выражение, описывающее поверхностную волну, распространяющуюся вдоль границы раздела среды со ступенчатой нелинейностью и градиентного слоя с произвольным профилем диэлектрической проницаемости. Также получены аналитические выражения для поверхностных волн, распространяющихся вдоль границы раздела среды с керровской нелинейностью (как самофокусирующей, так и дефокусирующей) с градиентными средами, характеризующимися экспоненциальным и линейным профилями диэлектрической проницаемости.
Выводы. Предложенная теория позволяет наглядно описать в явном аналитическом виде узко локализованные световые потоки в таких волноводах. Показано, что сочетание различных полупроводниковых кристаллов в композитном волноводе позволяет получить с одной стороны от волноведущего интерфейса нелинейно-оптический слой, а с другой – слой с градиентным профилем диэлектрической проницаемости.

Ключевые слова: нелинейная оптика, нелинейные волны, оптическая нелинейность, керровская нелинейность, оптический волновод, градиентный волновод

• **Поступила:** 13.12.2022 • **Доработана:** 17.02.2023 • **Принята к опубликованию:** 18.05.2023

Для цитирования: Савотченко С.Е. Модели волноводов, сочетающих градиентные и нелинейно-оптические слои. *Russ. Technol. J.* 2023;11(4):84–93. https://doi.org/10.32362/2500-316X-2023-11-4-84-93

Прозрачность финансовой деятельности: Автор не имеет финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

RESEARCH ARTICLE

Models of waveguides combining gradient and nonlinear optical layers

Sergey E. Savotchenko @

V.G. Shukhov Belgorod State Technological University, Belgorod, 308012 Russia
@ Corresponding author, e-mail: savotchenkose@mail.ru

Abstract

Objectives. Theoretical studies of the waveguide properties of interfaces between nonlinear optical and graded-index media are important for application in optoelectronics. Waveguides combining layers with different optical properties seem to be the most promising, since they can be matched to optimal characteristics using a wide range of control parameters. The paper aims to develop a theory of composite optically nonlinear graded-index waveguides with an arbitrary profile, within which it is possible to obtain exact analytical expressions for surface waves and waveguide modes in an explicit form. The main feature of the theory proposed in this paper is its applicability for describing surface waves and waveguide modes, in which the field is concentrated inside the gradient layer and does not exceed its boundary, avoiding contact with the nonlinear layer.

Methods. Analytical methods of the theory of optical waveguides and nonlinear optics are used.

Results. A theoretical description of the waveguide properties of the interface between two media having significantly different optical characteristics is carried out. The formulated model of a plane waveguide is applicable to media having an arbitrary spatial permittivity profile. An analytical expression describing a surface wave propagating along the interface between a medium having stepwise nonlinearity and a gradient layer with an arbitrary permittivity profile is obtained. Additionally, analytical expressions for surface waves propagating along the interface between a medium with Kerr nonlinearity (both self-focusing and defocusing), as well as graded-index media characterized by exponential and linear permittivity profiles, are obtained.

Conclusions. The proposed theory supports a visual description in an explicit analytical form of a narrowly localized light beam within such waveguides. It is shown that by combining different semiconductor crystals in a composite waveguide, it is possible to obtain a nonlinear optical layer on one side of the waveguide interface and a layer with a graded-index dielectric permittivity profile on the other.

Keywords: nonlinear optics, nonlinear waves, optical nonlinearity, Kerr nonlinearity, optical waveguide, graded-index waveguide

• **Submitted:** 13.12.2022 • **Revised:** 17.02.2023 • **Accepted:** 18.05.2023

For citation: Savotchenko S.E. Models of waveguides combining gradient and nonlinear optical layers. *Russ. Technol. J.* 2023;11(4):84–93. https://doi.org/10.32362/2500-316X-2023-11-4-84-93

Financial disclosure: The author has no a financial or property interest in any material or method mentioned.

The author declares no conflicts of interest.

ВВЕДЕНИЕ

Волноводные структуры обычно основаны на различиях оптических свойств их слоев [1, 2]. В оптоэлектронике широко используются волноводы с постоянными значениями показателя преломления слоев [3], с переменным профилем пространственного распределения (градиентные) [4], а также с нелинейно-оптическим откликом, когда показатель преломления зависит от интенсивности светового потока [5]. Комбинированные волноводы, сочетающие такие слои, представляются наиболее перспективными для оптоэлектроники, поскольку для них можно подобрать оптимальные характеристики с помощью широкого ряда управляющих параметров [6, 7].

В последние годы активизировались теоретические исследования волноводных свойств границ раздела нелинейно-оптических и градиентных сред [8, 9]. В частности, получены волноводные моды слоистой структуры, состоящей из градиентного слоя с линейным [10, 11] и экспоненциальным [12, 13] профилями, контактирующими с керровской нелинейной средой. В наших недавних работах представлены результаты теоретического исследования волноводных свойств структур, сочетающих пары различных градиентных и нелинейных сред. В частности, рассмотрены линейный [14–19], параболический [20, 21] и экспоненциальный профили [22, 23] показателя преломления / диэлектрической проницаемости сред, контактирующих со средами различной нелинейности: ступенчатой [14, 22], керровской [20] и ее обобщений [16–18, 20, 21], фоторефрактивной диффузионного типа [21, 23]. Описаны также симметричные трехслойные структуры, состоящие из линейно-градиентного слоя в среде с керровской нелинейностью [24] и в среде с фоторефрактивной нелинейностью [25].

В работе предлагается теоретическое описание поверхностных волн, распространяющихся вдоль плоской границы раздела сред, одна из которых обладает нелинейным откликом, а другая характеризуется пространственным градиентом диэлектрической проницаемости. Новизна работы заключается в том, что предложена теория таких композитных оптически-нелинейных градиентных волноводов с произвольным профилем, в рамках которой получены аналитические выражения для поверхностных волн. Основная особенность данной теории – это ее применимость для описания поверхностных волн и волноводных мод, поле в которых сосредоточено внутри градиентного слоя и не выходит за его границу, не контактирующую с нелинейным слоем. Предложенная теория позволяет наглядно описать в явном аналитическом виде узколокализованные световые потоки в таких волноводах. Рассмотрены также примеры полупроводниковых материалов, которые могут быть использованы для проектирования волноводов рассматриваемого типа.

1. ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

В качестве простейшей волноводной структуры рассмотрим плоскую границу раздела двух немагнитных сред принципиально различных оптических типов. В частности, с одной стороны границы будет среда с плавным изменением пространственного профиля показателя преломления / диэлектрической проницаемости (т.е. $n = n(x)$ или $\varepsilon = \varepsilon(x)$ соответственно; x – пространственная координата в направлении, перпендикулярном плоскости контакта $x = 0$), а с другой – нелинейно-оптическая среда, в которой показатель преломления / диэлектрическая проницаемость зависят от интенсивности света I (т.е. $n = n(I)$ или $\varepsilon = \varepsilon(I)$, $I = |E|^2$, E – амплитуда напряженности электрического поля). Будем считать, что рассматриваемые среды не обладают диэлектрическими потерями, и поэтому все их оптические характеристики являются действительными величинами.

Начало координат располагается в плоскости yz так, что ось x перпендикулярна границе раздела, расположенной в плоскости $x = 0$. Будем рассматривать распространяющуюся вдоль границы раздела поперечную волну с отличной от нуля компонентой напряженности электрического поля: $E_y = \psi(x) \times \exp(i\beta z - i\omega t)$, где $\beta = kn$ – константа распространения; $n = ck/\omega$ – эффективный показатель преломления; c – скорость света в вакууме; ω – частота; $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число; λ – длина волны; $\psi(x)$ – пространственное распределение напряженности электрического поля в направлении, поперечном границе раздела. Как хорошо известно [1, 2], функция $\psi(x)$

подчиняется стационарному уравнению (магнитная проницаемость считается равной единице):

$$\psi''(x) + \{\varepsilon(x, I) - n^2\}k^2\psi(x) = 0, \quad (1)$$

где диэлектрическую проницаемость волноводной системы представим в виде:

$$\varepsilon(x, I) = \begin{cases} \varepsilon_G(x), \; x < 0, \\ \varepsilon_N(I), \; x > 0. \end{cases} \quad (2)$$

И пусть для определенности градиентная среда располагается в левом полупространстве и характеризуется диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_G(x)$, а оптически нелинейная среда располагается в правом полупространстве и характеризуется диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_N(I)$.

Если поперечное распределение поля представить в виде:

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_G(x), \; x < 0, \\ \psi_N(x), \; x > 0, \end{cases} \quad (3)$$

то с учетом (2) уравнение (1) распадается на два:

$$\psi''_G(x) + \{\varepsilon_G(x) - n^2\}k^2\psi_G(x) = 0, \; x < 0, \quad (4)$$

$$\psi''_N(x) + \{\varepsilon_N(I) - n^2\}k^2\psi_N(x) = 0, \; x > 0. \quad (5)$$

Уравнения (4) и (5) следует дополнить граничными условиями, описывающими требование непрерывности компонент поля на границе раздела сред:

$$\psi_N(+0) = \psi_G(-0), \quad \psi'_N(+0) = \psi'_G(-0), \quad (6)$$

а также ограниченности на бесконечности: $|\psi(x)| \to 0$, $|x| \to \infty$.

Поскольку локализация энергии светового пучка вдоль волноведущего слоя является важной задачей, то основное внимание будет уделено таким волнам, для которых глубина проникновения поля меньше толщины градиентного слоя. В ряде наших работ [14–22] было показано, что в определенных интервалах значений параметров волноводной системы амплитуда поля на расстояниях порядка толщины градиентного слоя может быть намного меньше амплитуды на границе раздела, и поэтому ею можно пренебречь. Следовательно, в таком случае нет необходимости использовать граничные условия на расстоянии толщины градиентного слоя, можно использовать только граничные условия на границе раздела сред для описания узколокализованных поверхностных волн.

Решение уравнения (4) представим в виде:

$$\psi_G(x) = \psi_0 \frac{F(g(x))}{F(g(0))}, \quad (7)$$

где ψ_0 – амплитуда поля на границе раздела; $F(g)$ представляет собой специальную функцию с вспомогательным аргументом $g(x)$, разрешающую аналитически уравнение (4) при заданном профиле диэлектрической проницаемости $\varepsilon_G(x)$ и удовлетворяющую уравнению

$$F''g' + F'g'' + \{\varepsilon_G(x) - n^2\}k^2 F = 0. \quad (8)$$

Явный вид зависимости $g(x)$ связан с заменой переменных, которую необходимо сделать, чтобы привести уравнение (8) к виду, для которого известно, что точное решение выражается через какую-либо специальную функцию. К примеру, в случае линейной замены $g(x) = ax + b$ в (8) будет $g' = a$ и $g'' = 0$ и тогда оно упростится: $aF'' + \{\varepsilon_G(x) - n^2\}k^2 F = 0$.

При выборе представления решения в форме (7) обязательно следует учесть требование на бесконечности: $|F(g(x))| \to 0$, $|x| \to \infty$.

Резюмируем кратко основные положения теории рассматриваемых композитных волноводов. Волновод представляет собой ультратонкую границу, разделяющую среду с градиентом диэлектрической проницаемости и нелинейно-оптическую среду. Поперечная волна локализована так, что поле не выходит за границу градиентного слоя. Распределение электрического поля в направлении, поперечном границе раздела, определяется из стационарного одномерного нелинейного уравнения, удовлетворяет условиям сопряжения на границе раздела и условию исчезновения на бесконечности.

Явный вид решения уравнения (5) зависит от выбора модели нелинейности среды. Рассмотрим далее возникающие в таких волноводах волны с профилями, узколокализованными вдоль границы раздела сред, на примерах керровской и ступенчатой нелинейностях и градиентного экспоненциального профиля.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

2.1. Керровская нелинейность

Наиболее распространенной формой нелинейного отклика оптической системы является керровская, для которой диэлектрическая проницаемость линейно зависит от интенсивности света:

$$\varepsilon_N(I) = \varepsilon_{0N} + \alpha I, \quad (9)$$

где ε_{0N} – невозмущенная диэлектрическая константа (положительная); α – коэффициент керровской нелинейности, положительное значение которого соответствует самофокусирующей среде, а отрицательное – дефокусирующей. Тогда с учетом диэлектрической проницаемости (9) уравнение (5) примет вид:

$$\psi''_{\mathrm{N}}(x) - q_{\mathrm{N}}^2\psi_{\mathrm{N}}(x) + \alpha k^2\psi_{\mathrm{N}}^3(x) = 0, \tag{10}$$

где $q_{\mathrm{N}}^2 = k^2(n^2 - \varepsilon_{0\mathrm{N}})$.

Решение нелинейного уравнения (10) при $n^2 > \varepsilon_{0\mathrm{N}}$, удовлетворяющее условию $|\psi(x)| \to 0$, $|x| \to \infty$, можно записать в виде:

$$\psi_{\mathrm{N}}(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{\alpha}} \cdot \dfrac{q_{\mathrm{N}}}{k\,\mathrm{ch}\,q_{\mathrm{N}}(x - x_{\mathrm{N}})}, & \alpha > 0, \\ \sqrt{\dfrac{2}{|\alpha|}} \cdot \dfrac{q_{\mathrm{N}}}{k\,\mathrm{sh}\,q_{\mathrm{N}}(x - x_{\mathrm{N}})}, & \alpha < 0, \end{cases} \tag{12}$$

где величина x_{N} характеризует положение центра «солитона» и определяется из граничных условий (6). Подставив (7) и (12) в (6), получим:

$$x_{\mathrm{N}} = \begin{cases} \dfrac{1}{k\sqrt{n^2 - \varepsilon_{0\mathrm{N}}}} \cdot \mathrm{arctg}\left(\dfrac{\varepsilon_{\mathrm{G\,eff}}}{n^2 - \varepsilon_{0\mathrm{N}}}\right)^{1/2}, & \alpha > 0, \\ \dfrac{1}{k\sqrt{n^2 - \varepsilon_{0\mathrm{N}}}} \cdot \mathrm{arcctg}\left(\dfrac{\varepsilon_{\mathrm{G\,eff}}}{n^2 - \varepsilon_{0\mathrm{N}}}\right)^{1/2}, & \alpha < 0, \end{cases} \tag{13}$$

где введена эффективная диэлектрическая проницаемость градиентного слоя

$$\varepsilon_{\mathrm{G\,eff}} = \frac{F'(g(0))}{F(g(0))} \cdot \frac{g'(0)}{k}. \tag{14}$$

Аналогично, после подстановки (7) и (12) в (6) получается интенсивность поля на границе раздела:

$$I_0 = \psi_0^2 = \begin{cases} 2(n^2 - \varepsilon_{0\mathrm{N}} - \varepsilon_{\mathrm{G\,eff}})/\alpha, & \alpha > 0, \\ 2(\varepsilon_{\mathrm{G\,eff}} + \varepsilon_{0\mathrm{N}} - n^2)/|\alpha|, & \alpha < 0. \end{cases} \tag{15}$$

В качестве примера рассмотрим экспоненциальный профиль диэлектрической проницаемости:

$$\varepsilon_{\mathrm{G}}(x) = \varepsilon_{\mathrm{e}} + (\varepsilon_0 - \varepsilon_{\mathrm{e}})\mathrm{e}^{2x/a}, \tag{16}$$

где ε_0 и ε_{e} диэлектрические константы (положительные) на границе раздела и на конце градиентного слоя характерной толщины a.

Подставив профиль (16) в уравнение (4), можно получить:

$$\psi''_{\mathrm{G}}(x) + (V/a)^2\exp(2x/a) - q^2\}\psi_{\mathrm{G}}(x) = 0, \tag{17}$$

где $V^2 = a^2k^2(\varepsilon_0 - \varepsilon_{\mathrm{e}})$, $q^2 = k^2(n^2 - \varepsilon_{\mathrm{e}})$.

В этом случае $F(g(x)) = J_\nu(g(x))$, где $J_\nu(g)$ – функция Бесселя первого рода, $g(x) = V\mathrm{e}^{x/a}$, и тогда выражение (7), определяющее решение уравнения (17) при $n^2 > \varepsilon_{\mathrm{e}}$ и удовлетворяющее условию $|\psi(x)| \to 0$, $x \to -\infty$, можно записать в виде:

$$\psi_{\mathrm{G}}(x) = \psi_0 J_{aq}(V\mathrm{e}^{x/a})/J_{aq}(V). \tag{18}$$

Эффективная диэлектрическая проницаемость экспоненциального градиентного слоя:

$$\varepsilon_{\mathrm{G\,eff}} = \frac{J'_{aq}(V)}{J_{aq}(V)} \cdot \frac{V}{ak}. \tag{19}$$

Таким образом, используя выражения (3), (12) и (18), можно записать волну, распространяющуюся вдоль границы раздела самофокусирующей керровской нелинейной среды и экспоненциального градиентного слоя, в виде:

$$\psi(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2(n^2 - \varepsilon_{0\mathrm{N}} - \varepsilon_{\mathrm{G\,eff}})}{\alpha}} \cdot \dfrac{J_{aq}(V\mathrm{e}^{x/a})}{J_{aq}(V)}, & x < 0, \\ \sqrt{\dfrac{2}{\alpha}} \cdot \dfrac{q_{\mathrm{N}}}{k\,\mathrm{ch}\,q_{\mathrm{N}}(x - x_{\mathrm{N}})}, & x > 0, \end{cases} \tag{20}$$

где диэлектрическая проницаемость экспоненциального градиентного слоя определяется выражением (19).

В качестве второго примера рассмотрим линейный профиль диэлектрической проницаемости:

$$\varepsilon_{\mathrm{G}}(x) = \varepsilon_0 + (\varepsilon_0 - \varepsilon_{\mathrm{e}})(x/h). \tag{21}$$

где h – толщина слоя в случае линейной функции.

Подставив профиль (21) в уравнение (4), можно получить:

$$\psi''_{\mathrm{G}}(x) + \{\varepsilon_0 - n^2 + (\varepsilon_0 - \varepsilon_{\mathrm{e}})(x/h)\}k^2\psi_{\mathrm{G}}(x) = 0. \tag{22}$$

В этом случае $F(g(x)) = \mathrm{Ai}(g(x))$, где $\mathrm{Ai}(g)$ – функция Эйри первого рода, $g(x) = -x/x_{\mathrm{G}} + \delta$ и $x_{\mathrm{G}} = \{a/k_0^2(\varepsilon_0 - \varepsilon_{\mathrm{e}})\}^{1/3}$, $\delta = -(\varepsilon_0 - n^2)h/x_{\mathrm{G}}(\varepsilon_0 - \varepsilon_{\mathrm{e}})$. Тогда выражение (7), определяющее решение уравнения (22) при $\varepsilon_{\mathrm{e}} < n^2 < \varepsilon_0$ и удовлетворяющее условию $|\psi(x)| \to 0$, $x \to -\infty$, можно записать в виде:

$$\psi_{\mathrm{G}}(x) = \psi_0\mathrm{Ai}(-x/x_{\mathrm{L}} + \delta)/\mathrm{Ai}(\delta). \tag{23}$$

Эффективная диэлектрическая проницаемость линейного градиентного слоя:

$$\varepsilon_{\mathrm{G\,eff}} = -\frac{1}{kx_{\mathrm{L}}} \cdot \frac{\mathrm{Ai}'(\delta)}{\mathrm{Ai}(\delta)}. \tag{24}$$

Таким образом, используя выражения (3), (12) и (24), можно записать волну, локализованную вдоль границы раздела самофокусирующей керровской нелинейной среды и линейного градиентного слоя, в виде:

$$\psi(x)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2(n^2-\varepsilon_{0\mathrm{N}}-\varepsilon_{\mathrm{G\,eff}})}{\alpha}}\cdot\dfrac{\mathrm{Ai}(-x/x_{\mathrm{L}}+\delta)}{\mathrm{Ai}(\delta)},\ x<0,\\ \sqrt{\dfrac{2}{\alpha}}\cdot\dfrac{q_N}{k\mathrm{ch}q_{\mathrm{N}}(x-x_{\mathrm{N}})},\ x>0,\end{cases}\tag{25}$$

где диэлектрическая проницаемость экспоненциального градиентного слоя определяется выражением (24).

2.2. Ступенчатая нелинейность

Пусть теперь с градиентным слоем контактирует нелинейная среда, диэлектрическая проницаемость которой описывается ступенчатой функцией (модель простейшей нелинейной среды [26] или модель «резкой ступеньки» [27]):

$$\varepsilon_{\mathrm{N}}\left(|E|\right)=\begin{cases}\varepsilon_1,|E|<E_{\mathrm{s}},\\ \varepsilon_2,|E|>E_{\mathrm{s}},\end{cases}\tag{26}$$

где E_{s} – значение поля, при достижении которого происходит резкое (мгновенное) переключение от одного значения диэлектрической константы ε_1 к другому ε_2 ($\varepsilon_2>\varepsilon_1$). Таким образом, вблизи контакта в нелинейной среде, где $|E|>E_{\mathrm{s}}$, возникает область (приповерхностный домен) ширины x_{s}, в которой диэлектрическая константа имеет значение ε_2, а за ее пределами, где $|E|<E_{\mathrm{s}}$, диэлектрическая константа имеет значение ε_1. Положение границы приповерхностного домена x_{s}, определяется условиями:

$$\begin{gathered}\psi_{\mathrm{N}}(x_{\mathrm{s}}+0)=\psi_{\mathrm{N}}(x_{\mathrm{s}}-0)=E_{\mathrm{s}},\\ \psi'_N(x_{\mathrm{s}}+0)=\psi'_{\mathrm{N}}(x_{\mathrm{s}}-0).\end{gathered}\tag{27}$$

Как показано в [26], в модели ступенчатой нелинейности уравнение (5) с диэлектрической проницаемостью (26) распадается на два:

$$\psi''_{\mathrm{N}}(x)-(n^2-\varepsilon_1)k^2\psi_{\mathrm{N}}(x)=0,\ |E|<E_{\mathrm{s}},\tag{28}$$

$$\psi''_{\mathrm{N}}(x)+(\varepsilon_2-n^2)k^2\psi_{\mathrm{N}}(x)=0,\ |E|>E_{\mathrm{s}}.\tag{29}$$

Решение уравнения (28) при $n^2>\varepsilon_1$ имеет вид:

$$\psi_{\mathrm{N}}(x)=E_{\mathrm{s}}\mathrm{e}^{-q_1(x-x_{\mathrm{s}})},\tag{30}$$

где $q_1^2=(n^2-\varepsilon_1)k^2$, а решение уравнения (28) при $n^2<\varepsilon_2$ имеет вид:

$$\psi_{\mathrm{N}}(x)=\psi_0\cos(p_2(x-x_m))/\cos(p_2x_m),\tag{31}$$

где $p_2^2=(\varepsilon_2-n^2)k^2$, а величины x_{s}, x_{m} определяются из граничных условий. Подставив решения (7), (30) и (31) в граничные условия (6) и (27), получим:

$$x_{\mathrm{m}}=\frac{1}{k\sqrt{\varepsilon_2-n^2}}\cdot\mathrm{arctg}\left(\frac{\varepsilon_{\mathrm{G\,eff}}}{\varepsilon_2-n^2}\right)^{1/2},\tag{32}$$

$$x_{\mathrm{s}}=x_{\mathrm{m}}+q_1/p_2^2,\tag{33}$$

$$I_0=\psi_0^2=E_{\mathrm{s}}^2\cdot\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_{\mathrm{G\,eff}}+\varepsilon_2-n^2},\tag{34}$$

где диэлектрическая проницаемость экспоненциального градиентного слоя определяется выражением (19). Таким образом, поверхностная волна, распространяющаяся вдоль границы раздела среды со ступенчатой нелинейностью и градиентного слоя с произвольным профилем, может быть записана в виде:

$$\psi(x)=E_{\mathrm{s}}\cdot\begin{cases}\left(\dfrac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_{\mathrm{G\,eff}}+\varepsilon_2-n^2}\right)^{1/2}\dfrac{F(g(x))}{F(g(0))},\ x<0,\\ \left(\dfrac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_2-n^2}\right)^{1/2}\cos(p_2(x-x_{\mathrm{m}})),\ 0<x<x_{\mathrm{s}},\\ \mathrm{e}^{-q_1(x-x_s)},\ x>x_{\mathrm{s}},\end{cases}\tag{35}$$

где положение границы приповерхностного домена определяется выражением (33).

В работе [22] был рассмотрен случай контакта среды со скачкообразной нелинейностью и среды с экспоненциальным профилем диэлектрической проницаемости. Было подробно проанализировано (и проиллюстрировано) влияние оптических параметров соответствующих волноводных структур на профили волн и их управляемую локализацию.

2.3. Обсуждение

Полученное выражение (20) для поверхностных волн отличается от приведенного в работе [14]. Волна (20) может распространяться при произвольно изменяемом в допустимой области значений эффективном показателе преломления (константе распространения). В [14] авторы приводят и анализируют дисперсионное уравнение, связывающее эффективный показатель преломления и оптические характеристики волновода, т.е. его значение фиксировано при заданных значениях характеристик волновода. В частности, ими проанализирована зависимость эффективного показателя преломления n от параметра нелинейности αI_0, представляющего собой произведение коэффициента керровской нелинейности на интенсивность поля на границе раздела сред.

Как известно, константа распространения связана с углом падения возбуждающего поверхностную волну луча, который может меняться в экспериментах. Поэтому такой параметр должен считаться управляющим, т.е. варьируемым в экспериментах на выбранной волноводной структуре. В данной работе получено выражение (15), определяющее зависимость параметра нелинейности αI_0 от эффективного показателя преломления n. Эта зависимость является, на наш взгляд, более практичной с экспериментальной точки зрения.

Также следует подчеркнуть отличие полученного выражения (25), описывающего волну, узколокализованную вдоль границы раздела самофокусирующей керровской нелинейной среды и линейного градиентного слоя. Полученный в работах [10, 12] профиль поверхностных волн, поперечный границе раздела таких сред, может выходить за пределы градиентного слоя. Нами же разработана теория для описания волн, пространственное распределение интенсивности которых полностью сосредоточено в градиентном слое и не выходит за его пределы.

Далее приведем примеры материалов, на которых могут быть основаны композитные волноводы, комбинирующие нелинейно-оптические слои и градиентные слои с пространственным распределением оптических характеристик.

В нелинейных оптических кристаллах локализация светового пучка происходит вследствие нелинейного отклика среды. При определенных условиях локализация поля происходит не только в среде с самофокусирующей нелинейностью, но и с дефокусирующей [28].

Диэлектрическая проницаемость, или квадрат показателя преломления, зависят от квадрата напряженности электрического поля, т.е. линейно от интенсивности света (керровская нелинейность), что характерно для кристаллов KDP и $LiNbO_3$ при определенных длинах волн. Такая форма нелинейного отклика наблюдается в многослойных нанокомпозитных пленках Co/TiO_2 в диапазоне длин волн 400–1000 нм при температурах 10–50 °C [29]. В [30] отмечалось усиление эффекта Керра в тонких пленках на основе кобальта в том же диапазоне длин волн.

В [31, 32] указано, что высокоинтенсивный световой пучок может изменять оптические характеристики кристаллов в узких областях вдоль направления его распространения. В результате наблюдалось образование приповерхностного слоя с отличающимися от остального кристалла оптическими характеристиками. Подобные изменения обусловлены нелинейным откликом кристалла, зависящим от интенсивности распространяющегося вдоль поверхности светового пучка. Теоретическое описание таких явлений основано на моделях, таких как «резкая» ступенчатая нелинейность [26, 33], «гладкая» ступенчатая нелинейность [27] и насыщаемая нелинейность в различных формулировках [34, 35].

Как отмечалось в п. 2.2, модель «резкой» ступенчатой нелинейности описывает изменение диэлектрической проницаемости скачком от одного постоянного значения к другому при достижении интенсивности светового пучка определенного порогового значения. В рамках такой модели многие авторы смогли получить в явном аналитическом виде результаты, примененные для теоретического описания особенностей распространения поверхностных волн [26], самоотражения [33], самолокализованных оптических импульсов [27], оптических бистабильностей [36]. Такая зависимость может рассматриваться как предельный случай модели «гладкой» ступенчатой нелинейности в случае резкого возрастания диэлектрической проницаемости при малом росте интенсивности светового пучка.

В [37] было показано, что изменение диэлектрической проницаемости полупроводника с экситон-экситонным взаимодействием в определенном спектральном диапазоне может происходить практически скачкообразно. Авторы [38, 39] отмечали, что такое поведение может наблюдаться в полупроводниковых кристаллах, таких как кристаллы CdS и CdSe с малой энергией связи биэкситона в диапазоне примерно 0.5–3.0 мэВ. Такое явление авторами объясняется тем, что когерентные фотоны, проходя через полупроводниковую пленку, возбуждают когерентные экситоны с такими же значениями волновых векторов и фаз, как и у фотонов. В результате такого оптического взаимодействия возникают биэкситоны, которые определяют как поляризацию кристалла, так и концентрацию квазичастиц, отвечающих за его оптические свойства. При этом оптические нелинейные эффекты могут наблюдаться при относительно малых интенсивностях падающего светового пучка.

Следует отметить, что в некоторых средах при интенсивном освещении происходит быстрое изменение их оптических свойств, в частности, в легированных полупроводниками стеклах CdSSe и Schott OG 550 [40, 41], легированных ионами кристаллах $GdAlO_3:Cr^{3+}$ [42], тонких пленках, сформированных из фотохромного белка бактериородопсина [43]. В них наблюдалось в пределе при малых временах релаксации практически скачкообразное изменение показателя преломления от одного значения к другому в зависимости от интенсивности светового пучка.

С другой стороны, для многих полупроводниковых гетероструктур, используемых в современной оптоэлектронике, наблюдается зависимость показателя преломления или диэлектрической функции от пространственного расстояния [3]. В частности, показатели преломления полупроводниковых фотонных кристаллов GaAs/GaAlAs [44, 45], InGaAs/InAlAs [46], InGaAsP/InP [47] описываются пространственно-градиентными профилями. Поэтому их можно отнести к оптически градиентным средам. Следует отметить, что использование арсенида галлия и основанных на нем гетероструктур типа Ga1–*x*Al*x*As, Ga1–*x*In*x*As и Ga1–*x*Al*x*N, Ga1–*x*In*x*N представляется весьма перспективным в связи с их повышенной радиационной стойкостью [48] по сравнению с другими кристаллами, используемыми в полупроводниковой оптоэлектронике.

Пространственные распределения показателей преломления часто создаются путем имплантации в стекла ионов, которые индуцируют ионообменные процессы, создающие индукцию напряжений вблизи поверхности из-за большой разницы между ионными радиусами обмениваемых ионов. К примеру, градиентные профили показателя преломления формируются в стеклах BK7 введением ионов K^+-Na^+ и в известково-натриевом стекле – ионов Ag^+-Na^+ [49]. Отметим, что к экспоненциальному профилю близкими являются профили, получаемые методом термодиффузии ионов металла в стеклянную подложку [50].

Таким образом, сочетание различных полупроводниковых кристаллов в композитном волноводе позволяет получить с одной стороны от волноведущего интерфейса нелинейно-оптический слой, а с другой – слой с градиентным профилем диэлектрической проницаемости.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведено теоретическое описание волноводных свойств границы раздела двух сред с принципиально различными оптическими характеристиками. Сформулированная модель плоского волновода применима для сред с произвольным распределением пространственного профиля диэлектрической проницаемости.

Получено аналитическое выражение, описывающее поверхностную волну, распространяющуюся вдоль границы раздела среды со ступенчатой нелинейностью и градиентного слоя с произвольным профилем диэлектрической проницаемости. Также получены аналитические выражения для поверхностных волн, распространяющихся вдоль границы раздела среды с керровской нелинейностью (как самофокусирующей, так и дефокусирующей) с градиентными средами, характеризующимися экспоненциальным и линейным профилями диэлектрической проницаемости.

Приведенный анализ материалов показал, что возможно подобрать такие полупроводниковые кристаллы, на которых могут быть основаны композитные волноводы, комбинирующие нелинейно-оптические слои и градиентные слои с пространственным распределением оптических характеристик.

Полученные в работе результаты могут иметь значение при проектировании элементов оптических устройств, основанных на использовании возможностей управления локализацией световых пучков вдоль волноведущих поверхностей раздела контактирующих сред.

Благодарности

Работа выполнена с использованием оборудования центра высоких технологий БГТУ им. В.Г. Шухова.

Acknowledgments

The study was performed using the equipment of the High Technology Center at the V.G. Shukhov Belgorod State Technological University.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

1. Adams M.J. *An Introduction to Optical Waveguides.* Chichester: Wiley; 1981. 401 p.
2. Chen C.-L. *Foundations for Guided-Wave Optics.* New York: John Wiley & Sons Inc.; 2005. 462 p. https://doi.org/10.1002/0470042222
3. Dragoman D., Dragoman M. *Advanced Optoelectronic devices.* Berlin: Springer; 1999. 424 p.
4. Bednarik M., Cervenka M. Electromagnetic waves in graded-index planar waveguides. *J. Opt. Soc. Am. B.* 2020;37(12):3631–3643. https://doi.org/10.1364/JOSAB.408679
5. Čada M., Qasymeh M., Pištora J. Optical Wave Propagation in Kerr Media. In: *Wave Propagation. Theories and Applications*. London: IntechOpen; 2013. P. 175–192. http://doi.org/10.5772/51293

6. Shvartsburg A.B., Maradudin A. *Waves in Gradient Metamaterials*. Singapore: World Scientific; 2013. 339 p. https://doi.org/10.1142/8649
7. Al-Bader S.J., Jamid H.A. Graded-index optical waveguides with nonlinear cladding. *J. Opt. Soc. Am. A*. 1988;5(3):374–379. https://doi.org/10.1364/JOSAA.5.000374
8. Taya S.A., Kullab H.M., Qadoura I.M. Dispersion properties of slab waveguides with double negative material guiding layer and nonlinear substrate. *J. Opt. Soc. Am. B*. 2013;30(7):2008–2013. https://doi.org/10.1364/JOSAB.30.002008
9. Almawgani A.H.M., Taya S.A., Hussein A.J., Colak I. Dispersion properties of a slab waveguide with a graded-index core layer and a nonlinear cladding using the WKB approximation method. *J. Opt. Soc. Am. B*. 2022;39(6): 1606–1613. https://doi.org/10.1364/JOSAB.458569
10. Hussein A.J., Nassar Z.M., Taya S.A. Dispersion properties of slab waveguides with a linear graded-index film and a nonlinear substrate. *Microsyst. Technol*. 2021;27(7):2589–2594. https://doi.org/10.1007/s00542-020-05016-z
11. Taya S.A., Hussein A.J., Colak I. An exact solution of a slab waveguide dispersion relation with a linear graded-index guiding layer (TM case). *Microsyst Technol*. 2022;28(22):1213–1219. https://doi.org/10.1007/s00542-022-05281-0
12. Taya S.A., Hussein A.J., Ramahi O.M., Colak I., Chaouche Y.B. Dispersion curves of a slab waveguide with a nonlinear covering medium and an exponential graded-index thin film (transverse magnetic case). *J. Opt. Soc. Am. B*. 2021;38(11):3237–3243. https://doi.org/10.1364/JOSAB.439034
13. Hussein A.J., Taya S.A., Vigneswaran D., Udiayakumar R., Upadhyay A., Anwar T., Amiri I.S. Universal dispersion curves of a planar waveguide with an exponential graded-index guiding layer and a nonlinear cladding. *Results in Physics*. 2021;20:103734. https://doi.org/10.1016/j.rinp.2020.103734
14. Savotchenko S.E. The surface waves propagating along the contact between the layer with the constant gradient of refractive index and photorefractive crystal. *J. Opt*. 2022;24(4):045501. https://doi.org/10.1088/2040-8986/ac51e9
15. Savotchenko S.E. The composite planar waveguide structure consisting of the linearly graded-index layer and the nonlinear layer formed with an increasing the electric field. *Optik*. 2022;252:168542. https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2021.168542
16. Savotchenko S.E. Light localization in a linearly graded-index substrate covered by intensity dependent nonlinear self-focusing cladding. *J. Opt*. 2022;24(6): 065503. https://doi.org/10.1088/2040-8986/ac6bab
17. Savotchenko S.E. Discrete spectrum of waveguide modes of a linearly graded-index film introduced into a medium with a stepwise nonlinearity. *Optik.* 2023;281(6):170835. https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2023.170835
18. Savotchenko S.E. Guided waves in a graded-index substrate covered by an intensity-dependent defocusing nonlinear medium. *Appl. Phys. B: Lasers and Optics.* 2022;128(8):153. https://doi.org/10.1007/s00340-022-07872-1
19. Savotchenko S.E. Nonlinear surface waves propagating along the contact between the graded-index layer and the medium with near surface layer where Kerr nonlinearity disappears with increasing light intensity. *Optik*. 2023;272:170373. https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2022.170373
20. Savotchenko S.E. Surface waves propagating along the interface between a parabolic graded-index medium and a self-focusing nonlinear medium: exact analytical solution. *J. Opt*. 2022;24(10):105501. https://doi.org/10.1088/2040-8986/ac8e80
21. Savotchenko S.E. Surface waves propagating along the interface between parabolic graded-index medium and photorefractive crystal with diffusion nonlinearity. *Phys. B: Condensed Matter*. 2023;648(2):414434. https://doi.org/10.1016/j.physb.2022.414434
22. Savotchenko S.E. Surface waves propagating along the interface separating an exponential graded-index medium and the medium with a step change in the dielectric constant. *Optik*. 2022;271(12):170092. https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2022.170092
23. Savotchenko S.E. Waveguide properties of interface separating a photorefractive crystal with diffusion nonlinearity and an exponential graded-index medium. *Phys. Lett. A*. 2022;455(12):128516. https://doi.org/10.1016/j.physleta.2022.128516
24. Savotchenko S.E. New types of transverse electric nonlinear waves propagating along a linearly graded-index layer in a medium with Kerr nonlinearity. *Opt. Quant. Electron*. 2023;55(1):74. https://doi.org/10.1007/s11082-022-04323-1
25. Savotchenko S.E. Temperature controlled waveguide properties of the linearly graded-index film in semiconductor crystal with the photorefractive nonlinearity. *Appl. Phys. B: Lasers and Optics*. 2023;129(1):7. https://doi.org/10.1007/s00340-022-07950-4
26. Khadzhi P.I., Fedorov L.V., Torstveit S. Nonlinear surface waves for the simplest model of nonlinear medium. *Phys. Tech. Lett*. 1991;61:110–113.
27. Kaplan A.E. Multistable self-trapping of light and multistable soliton pulse propagation. *IEEE J. Quant. Electron.* 1985;21(9):1538–1543. https://doi.org/10.1109/JQE.1985.1072828
28. Kartashov Y.V., Malomed B.A., Torner L. Solitons in nonlinear lattices. *Rev. Mod. Phys*. 2011;83(1):247–305. http://doi.org/10.1103/RevModPhys.83.247
29. Laudyn U.A., Rutkowska K.A., Rutkowski R.T., Karpierz M.A., Woliński T.R., Wójcik J. Nonlinear effects in photonic crystal fibers filled with nematic liquid crystals. *Cent. Eur. J. Phys*. 2008;6(3):612–618. https://doi.org/10.2478/s11534-008-0096-z
30. Polyakov V.V., Polyakova K.P., Seredkin V.A., Patrin G.S. The enhanced magneto-optical Kerr effect in Co/TiO_2 multilayer films. *Tech. Phys. Lett.* 2012;38(10):921–923. https://doi.org/10.1134/S1063785012100227
31. Jarque E.C., Malyshev V.A. Nonlinear reflection from a dense saturable absorber: from stability to chaos. *Opt. Commun*. 1997;14291(3):66–70. https://doi.org/10.1016/S0030-4018(97)00275-7
32. Schuzgen A., Peyghambarian N., Hughes S. Doppler Shifted Self Reflection from a Semiconductor. *Phys. Stat. Sol.* (*B*). 1999;206(1):125–130. https://doi.org/10.1002/(SICI)1521-3951(199803)206:1<125::AID-PSSB125>3.0.CO;2-8

33. Ляхомская К.Д., Хаджи П.И. Эффект самоотражения и простейшие модели нелинейной среды. *Журн. техн. физики*. 2000;70(11):86–90.
Lyakhomskaya K.D., Khadzhi P.I. Self-reflection effect in naïve model of nonlinear media. *Tech. Phys*. 2000;45(11):1457–1461. https://doi.org/10.1134/1.1325030
[Original Russian Text: Lyakhomskaya K.D., Khadzhi P.I. Self-reflection effect in naïve model of nonlinear media. *Zhurnal Tekhnicheskoi Fiziki*. 2000;70(11):86–90 (in Russ.).]
34. Christian J.M., McDonald G.S., Chamorro-Posada P. Bistable Helmholtz bright solitons in saturable materials. *J. Opt. Soc. Am. B*. 2009;26(12):2323–2330. https://doi.org/10.1364/JOSAB.26.002323
35. Korovai O.V. Nonlinear s-polarized quasi-surface waves in the symmetric structure with a metamaterial core. *Phys. Solid State*. 2015;57(7):1456–1462. https://doi.org/10.1134/S1063783415070197
36. Enns R.H., Rangnekar S.S., Kaplan A.E. Bistable-soliton pulse propagation: Stability aspect. *Phys. Rev. A*. 1987;36(3):1270–1279. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.36.1270
37. Khadzhi P.I., Rusanov A.M., Gaivan S.L. Cavity-free optical bistability of a thin semiconductor film in the exciton region of the spectrum. 1999;29(6):539–541. https://doi.org/10.1070/QE1999v029n06ABEH001526
38. Khadzhi P.I., Gaivan S.L. Nonlinear interaction of an ultrashort light pulse with a thin semiconductor film under conditions of two-photon excitation of biexcitons. *Quantum Electron*. 1995;25(9):897–900. https://doi.org/10.1070/QE1995v025n09ABEH000497
39. Corovai A.V., Khadzhi P.I. Optical properties of a semiconductor upon two-photon excitation of biexcitons by a powerful pump pulse and one-photon probing in the M band. *Quantum Electron*. 2001;31(10):937–939. https://doi.org/10.1070/QE2001v031n10ABEH002080
40. Roussignol P., Ricard D., Flytzanis C. Nonlinear optical properties of commercial semiconductor-doped glasses. *Appl. Phys. A*. 1987;44:285–292. https://doi.org/10.1007/BF00624594
41. Vanhaudenarde A., Trespidi M., Frey R. Refractive-index changes during photodarkening in semiconductor-doped glasses. *J. Opt. Soc. Am. B*. 1994;11(8):1474–1479. https://doi.org/10.1364/JOSAB.11.001474
42. Catunda T., Cury L.A. Transverse self-phase modulation in ruby and $GdAlO_3:Cr^{+3}$ crystals. *J. Opt. Soc. Am. B*. 1990;7(8):1445–1455. https://doi.org/10.1364/JOSAB.7.001445
43. Wang S.Q., Wang X., Birge R., Downie J.D., Timucin D., Gary C. Propagation of a Gaussian beam in a bacteriorhodopsin film. *J. Opt. Soc. Am. B*. 1998;15(5):1602–1609. https://doi.org/10.1364/JOSAB.15.001602
44. Mendoza-Alvarez J.G., Nunes F.D., Patel N.B. Refractive index dependence on free carriers for GaAs. *J. Appl. Phys*. 1980;51(8):4365-4367. https://doi.org/10.1063/1.328298
45. Ravindran S., Datta A., Alameh K., Lee Y.T. GaAs based *long-wavelength* microring resonator optical switches utilising bias assisted carrier-injection induced refractive index change. *Opt. Express*. 2012;20(14):15610–15627. https://doi.org/10.1364/OE.20.015610
46. Zucker J.E., Chang T.Y., Wegener M., Sauer N.J., Jones K.L., Chemla D.S. Large refractive index changes in tunable-electron-density InGaAs/InAlAs quantum wells. *IEEE Photon. Technol. Lett*. 1990;2(1):29–31. https://doi.org/10.1109/68.47032
47. Ishida K., Nakamura H., Matsumura H. InGaAsP/InP optical switches using carrier induced refractive index change. *Appl. Phys. Lett*. 1987;50(3):141–142. https://doi.org/10.1063/1.97695
48. Вигдорович Е.Н. Радиационная стойкость эпитаксиальных структур на основе GaAs. *Russ. Technol. J*. 2019;7(3):41–49. https://doi.org/10.32362/2500-316X-2019-7-3-41-49
[Vigdorovich E.N. Radiation resistance of epitaxial structures based on GaAs. *Russ. Technol. J*. 2019;7(3):41–49 (in Russ.). https://doi.org/10.32362/2500-316X-2019-7-3-41-49]
49. Karasiński P., Rogoziński R. Influence of refractive profile shape on the distribution of modal attenuation in planar structures with absorption cover. *Opt. Commun*. 2007;269(1):76–88. https://doi.org/10.1016/j.optcom.2006.07.067
50. Shutyi A., Sementsov D., Kazakevich A.V., Sannikov D. Waveguide regimes of a graded-index planar waveguide with cladding. *Tech. Phys*. 1999;44(1):1329–1333. https://doi.org/10.1134/1.1259518

Об авторе

Савотченко Сергей Евгеньевич, д.ф.-м.н, доцент, профессор кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «Белгородский государственный технологический университет им. В.Г. Шухова» (308012, Россия, Белгород, ул. Костюкова, д. 46). E-mail: savotchenkose@mail.ru. Scopus Author ID 6603577988, SPIN-код РИНЦ 2552-4344, https://orcid.org/0000-0002-7158-9145

About the author

Sergey E. Savotchenko, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor, Professor, High Mathematics Department, V.G. Shukhov Belgorod State Technological University (46, Kostyukova ul., Belgorod, 308012 Russia). E-mail: savotchenkose@mail.ru. Scopus Author ID 6603577988, RSCI SPIN-code 2552-4344, https://orcid.org/0000-0002-7158-9145