

Математическое моделирование  
Mathematical modeling

УДК 519.857  
<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2023-11-4-72-83>



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

## Комбинированные алгоритмы аппроксимации для интерактивного проектирования дорожных трасс в системах автоматизированного проектирования

Д.А. Карпов,  
В.И. Струченков <sup>®</sup>

МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, 119454 Россия  
<sup>®</sup> Автор для переписки, e-mail: [str1942@mail.ru](mailto:str1942@mail.ru)

### Резюме

**Цели.** Цель работы состоит в создании алгоритмов аппроксимации последовательности точек на плоскости дугами клотоид и окружностей. Такая задача возникает в проектировании трасс железных и автомобильных дорог. План (проекция на горизонтальную плоскость) трассы дороги – это кривая (сплайн), состоящая из повторяющейся связки элементов «прямая + дуга клотоиды + дуга окружности + дуга клотоиды + ...». Такая комбинация элементов обеспечивает непрерывность не только кривой и касательной к ней, но и кривизны. Поскольку число элементов сплайна заранее неизвестно, а на их параметры накладываются ограничения, для этой задачи пока не опубликовано математически корректного алгоритма. Разработанная в РТУ МИРЭА двухэтапная схема решения задачи с определением числа элементов сплайна с помощью динамического программирования на первом этапе и оптимизацией его параметров с применением нелинейного программирования на втором, реализована только для сплайна с прямыми и окружностями (без клотоид). Ее реализация для сплайна с клотоидами много сложнее и пока не выполнена в силу ряда причин. В действующих системах автоматизированного проектирования (САПР) проектирование плана трассы выполняется в интерактивном режиме с последовательным подбором элементов. В этой связи имеет смысл разработка математически корректных алгоритмов поэлементной аппроксимации.

**Метод.** Задача поэлементной аппроксимации окружностью или клотоидой формализована как задача нелинейного программирования малой размерности. Целевая функция – сумма квадратов отклонений от исходных точек. Поскольку клотоида в декартовых координатах представляется степенными рядами, возникают трудности вычисления производных целевой функции по искомым параметрам элементов сплайна. Предложен математически корректный алгоритм вычисления этих производных на основе интегрального представления декартовых координат точек клотоиды как функций ее длины.

**Результаты.** Разработаны математическая модель и алгоритмы аппроксимации последовательности точек на плоскости клотоидой и окружностью с применением метода нелинейного программирования. Реализован алгоритм второго порядка с вычислением и обращением матрицы вторых производных (матрица Гессе).

**Выводы.** Для аппроксимации окружностью и клотоидой с применением нелинейного программирования не обязательно иметь аналитическое выражение целевой функции через искомые переменные. Предложенные алгоритмы позволяют вычислять не только первые, но и вторые производные в отсутствие таких выражений.

**Ключевые слова:** план трассы, сплайн, нелинейное программирование, клотоида, целевая функция, градиент, матрица Гессе

• Поступила: 20.12.2022 • Доработана: 12.04.2023 • Принята к опубликованию: 14.05.2023

**Для цитирования:** Карпов Д.А., Струченков В.И. Комбинированные алгоритмы аппроксимации для интерактивного проектирования дорожных трасс в системах автоматизированного проектирования. *Russ. Technol. J.* 2023;11(4):72–83. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2023-11-4-72-83>

**Прозрачность финансовой деятельности:** Авторы не имеют финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## RESEARCH ARTICLE

# Combined approximation algorithms for interactive design of road routes in CAD

Dmitry A. Karpov,  
Valery I. Struchenkov @

MIREA – Russian Technological University, Moscow, 119454 Russia

@ Corresponding author, e-mail: str1942@mail.ru

### Abstract

**Objectives.** The aim of the work is to create algorithms for approximating a sequence of points on a plane by arcs of clothoids and circles. Such a problem typically arises in the design of railroad and highway routes. The plan (projection onto a horizontal plane) of the road route is a curve (spline) consisting of a repeating bundle of elements “straight line + clothoid arc + circle arc + clothoid arc + ...”. Such a combination of elements provides continuity not only for the curve and its tangent, but also for the curvature. Since the number of spline elements is not known in advance, and their parameters are subject to restrictions, there is no mathematically consistent algorithm for this problem. The two-stage scheme for solving the problem is developed at RTU MIREA only for a spline with lines and circles (i.e., without clothoid elements). At the first stage, the scheme uses dynamic programming to determine the number of spline elements. At the second stage, the scheme optimizes parameters of the spline using nonlinear programming. This scheme has yet to be implemented for a spline with clothoids due to a significantly more complicated nature of this problem. Therefore, the design of route plans in existing computer aided design (CAD) systems is carried out in interactive mode using iterative selection of elements. In this regard, it makes sense to develop mathematically consistent algorithms for element-by-element approximation.

**Methods.** The problem of element-by-element approximation by a circle and a clothoid is formalized as a low-dimensional non-linear programming problem. The objective function is the sum of squared deviations from the original points. Since a clothoid can only be represented in Cartesian coordinates by power series, there are difficulties in calculating the derivatives of the objective function with respect to the desired parameters of the spline elements. The proposed mathematically consistent algorithm for calculating these derivatives is based on the integral representation of the Cartesian coordinates of the points of the clothoid as functions of its length.

**Results.** A mathematical model and algorithms have been developed for approximating a sequence of points on a plane by clothoids and circles using the method of nonlinear programming. A second-order algorithm is implemented with the calculation and inversion of the matrix of second derivatives (Hesse matrix).

**Conclusions.** For approximation by circles and clothoids using nonlinear programming, it is not necessary to have an analytical expression of the objective function in terms of the required variables. The proposed algorithms make it possible to calculate not only the first, but also the second derivatives in the absence of such expressions.

**Keywords:** route plan, spline, non-linear programming, clothoid, objective function, gradient, Hessian matrix

• Submitted: 20.12.2022 • Revised: 12.04.2023 • Accepted: 14.05.2023

**For citation:** Karpov D.A., Struchenkov V.I. Combined approximation algorithms for interactive design of road routes in CAD. *Russ. Technol. J.* 2023;11(4):72–83. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2023-11-4-72-83>

**Financial disclosure:** The authors have no a financial or property interest in any material or method mentioned.

The authors declare no conflicts of interest.

## ВВЕДЕНИЕ

Задача аппроксимации кривой, заданной последовательностью точек на плоскости, окружностью, а тем более клотоидой, много сложнее, чем широко применяемая линейная или параболическая регрессия. В случае поиска аппроксимирующей окружности в декартовых координатах задача сводится к нелинейной системе уравнений, а в случае клотоиды не удастся получить даже этого, т.к. клотоида не представляется в виде  $y = f(x)$ . Математически корректного алгоритма аппроксимации клотоидой в литературе найти не удалось.

Вместо этого в действующих системах автоматизированного проектирования (САПР) используется метод перебора назначаемых проектировщиком вариантов или аппроксимация по методу эвольвент. Последний был предложен еще в докомпьютерную эпоху [1] при вычислении сдвижек плана трассы для приведения его в заданное проектное положение. Если проектное положение неизвестно, как это бывает при реконструкции плана трассы железной дороги, с изменением его параметров, таких как длины переходных кривых (дуг клотоид) или радиусов круговых кривых, то это проектное положение тем или иным способом задается проектировщиком, после чего компьютер вычисляет все проектные параметры плана трассы и сдвижки существующего пути. Метод эвольвент использовался и для приближенного решения задачи аппроксимации вместо ее точного решения в декартовых координатах<sup>1</sup>. Этот метод успешно применялся и для проектирования плана трассы как единого целого в пределах перегона еще в 80-х гг. прошлого века на таких малоприспособных для создания САПР ЭВМ, как Минск 32 и ЕС 1033<sup>1</sup>. Уход от декартовых координат представлялся вынужденным. При этом было известно, что при наличии больших углов поворота и малых радиусов погрешность метода весьма существенна, особенно в случае сильно сбитых кривых и соответственно больших сдвижек или при проектировании

реконструкции с существенным изменением параметров плана трассы. Метод эвольвент использовался в 80-х гг. XX века и для оптимизации плана трассы новой железной дороги на участках напряженного хода [2, 3]. План трассы представлялся в виде ломаной линии для поиска числа элементов и их примерного расположения, которая затем преобразовывалась к требуемому виду с применением этого метода с последующей оптимизацией параметров полученного сплайна [3]. Широкое применение метода эвольвент для решения различных задач, несмотря на его недостатки, объясняется тем, что в отличие от использования декартовых координат, он позволяет работать с однозначными функциями, имеющими простые аналитические выражения: параболой второй степени вместо окружности и кубической параболой вместо клотоиды.

В работах зарубежных авторов предлагались различного рода эвристические алгоритмы [4–12]. Первоначально они основывались на анализе таких характеристик исходной ломаной, получаемой после соединения смежных точек съемки отрезками прямых, как углы поворота в вершинах ломаной и графики кривизны, затем перешли к использованию генетических алгоритмов. В нашей стране в действующих САПР используются различные программы, облегчающие поэлементный подбор и оценку вариантов трассы. Наиболее успешно это реализовано в системе *Robur* фирмы Топоматик<sup>2</sup>, в которой используется полуавтоматический метод подбора параметров плана существующей трассы, основанный на графике кривизны. В последние годы периодически появляются сообщения о том, что задача проектирования реконструкции плана трассы железной дороги решена, но алгоритмы полностью не публикуются. Из недавно опубликованных эвристических алгоритмов иностранных авторов следует отметить представленные в работах китайского профессора Хао Пу с коллегами [13–15].

Трудно поверить в оптимальное решение задачи для нескольких круговых и переходных

<sup>1</sup> Методические рекомендации по расчету составных кривых плана трассы железных дорог. М.: ВНИИ транспортного строительства; 1985. 26 с. [*Methodical recommendations for the calculation of composite curves of the railroad route plan.* Moscow: All-Russian Research Institute of Transport Construction; 1985. 26 p. (in Russ.).]

<sup>2</sup> Документация по продуктам Топоматик Robur «Подбор пути с помощью графика кривизны». [Топоматик Robur product documentation “Path selection via curvature graph” (in Russ.).] [http://help.topomatic.ru/v6/doku.php?id=rail:rail:tasks:selection\\_path:start](http://help.topomatic.ru/v6/doku.php?id=rail:rail:tasks:selection_path:start). Дата обращения 18.04.2023. / Accessed April 18, 2023 (in Russ.).

кривых (клотоид), если нет алгоритма оптимального решения для одной клотоиды.

Рассматриваемая задача, как и проектирование плана и продольного профиля дорог в целом, характерна тем, что в сложных случаях оптимальное решение неизвестно, и в условиях отсутствия заинтересованности проектировщиков в его достижении, все «правдоподобное», что выдает компьютер, можно называть оптимальным. В этом ее принципиальное отличие от задач моделирования геометрических форм автомобильных дорог [16].

Тем не менее, разработка математически корректных алгоритмов аппроксимации окружностью и клотоидой остается актуальной как в теоретическом, так и в практическом плане, т.к. результат может быть полезен не только при проектировании дорог. Актуальный уровень развития вычислительной техники позволяет решить эту задачу в приемлемое время на общедоступных компьютерах, не используя паллиативные алгоритмы.

Цель настоящей статьи состоит в изложении математически корректных алгоритмов аппроксимации окружностью и клотоидой в декартовых координатах с применением алгоритмов нелинейного программирования, использующих метод эвольвент только для получения начального приближения с последующей оптимизацией параметров, определяющих положение окружности или клотоиды.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для заданной последовательности точек на плоскости найти клотоиду (окружность), такую, что сумма квадратов расстояний  $h_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) от заданных точек до клотоиды (окружности) минимальна. Расстояния вычисляются по нормали от заданной точки к клотоиде (окружности).

Начальная точка искомой кривой задана. Может быть задано и направление касательной к искомой кривой в начальной точке и ограничение по минимальному и максимальному радиусам кривизны искомой кривой.

Итак, целевая функция:

$$F(\mathbf{h}) = \frac{1}{2} \sum_1^n h_i^2 \rightarrow \min, \quad (1)$$

где  $\mathbf{h}(h_1, h_2, \dots, h_n)$  – вектор неизвестных,  $n$  – их количество.

### МЕТОД ЭВОЛЬВЕНТ

В отличие от других кривых (парабол, окружностей, синусоид и т.д.) говорить об эвольвенте нельзя без указания другой кривой (эволюты), которая

порождает эвольвенту. В литературе можно встретить различные определения понятия «эвольвента». В математике эвольвента – это кривая, для которой заданная эволюта является геометрическим местом центров кривизны [17]. Следовательно, нормаль в каждой точке к эвольвенте является касательной к эволюте. Именно касательной, а не секущей, т.к. в каждой точке кривой может быть только один центр кривизны. В этой связи эвольвентой называют кривую, которую описывает конец гибкой нерастяжимой нити, сматываемой с эволюты (например, с окружности).

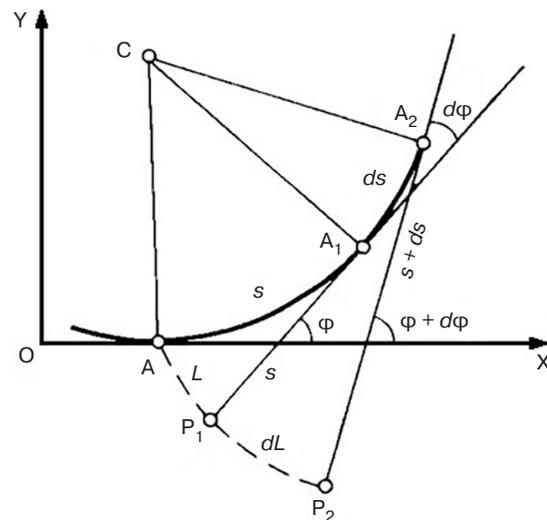
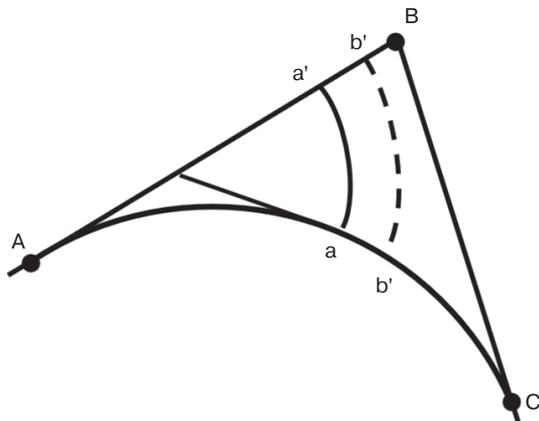


Рис. 1. Построение эвольвенты окружности.  
 $L$  – длина эвольвенты

Построение эвольвенты окружности показано на рис. 1. Здесь  $A$  – начальная точка на эволюте,  $A_1$  и  $A_2$  – ее новые положения на эволюте. Им соответствуют длины дуг, отсчитываемых от начальной точки,  $s$  и  $s + ds$ . Эти длины отложены по касательным в сторону, противоположную движению от начальной точки. Получены точки на эвольвенте  $P_1$  и  $P_2$ , соответственно. Длины дуг эвольвенты –  $AP_1$  и  $AP_2$ . При полном обороте ( $\phi = 2\pi$ ) длина эвольвенты  $\mathcal{E} = 2\pi R$ , где  $R$  – радиус окружности и т.д., т.е. фиксируется не начальная точка  $A$ , а ее новые положения на эволюте, в которых строятся касательные и на них разворачиваются дуги эволюты. Эвольвентой окружности является разворачивающаяся спираль.

Однако в [1, 18, 19] излагается другая трактовка понятия эвольвенты окружности и способ ее построения (рис. 2). Фиксируется точка  $A$  начала круговой кривой и для каждой точки окружности ( $a$ ) длина дуги от начальной точки до текущей ( $Aa$ ) разворачивается на касательную от точки  $A$ . Таким образом для каждой точки окружности получается своя эвольвента ( $aa'$ ,  $bb'$  ...). Кривая  $aa'$  не является эвольвентой окружности, но ее длина равна длине

соответствующего куска эвольвенты. Отсюда и возникла путаница понятий.



**Рис. 2.** Построение эвольвенты окружности по [1, 18, 19]

Если в [1, 18] эвольвентой окружности называются построенные описанным способом *кривые*, то в [19, с. 243, рис. 7.20] читаем: «*Эвольвентой* (курсив авторов) называется *длина дуги aa'*, которую опишет конец нерастяжимой нити, натянутой на окружность Aa и закрепленной в точке A, при выпрямлении нити».

Если принять, что эвольвента не *кривая*, о которой шла речь выше, а *длина дуги aa'*, то эта длина равна  $K^2/(2R)$ , где  $K$  – длина дуги Aa, а  $R$  – радиус окружности, и эвольвента окружности – это не спираль в декартовых координатах, а парабола второй степени как функция длины эволюты.

Если следовать способу построения эвольвенты окружности принятому в [1, 18, 19], то для каждой точки окружности (эволюты) получится своя эвольвента, и все они будут заканчиваться на касательной к окружности в начальной точке, которая фиксирована. Настоящую эвольвенту окружности следует строить, как показано на рис. 1.

Из рис. 1 следует  $dL = \varphi(s)ds$ , т.к.  $dL = s d\varphi = s ds/R = \varphi ds$ , и далее:

$$L(S) = \int_0^S \varphi(s) ds. \quad (2)$$

Здесь  $S$  – длина эволюты от начальной точки,  $\varphi(s)$  – зависимость угла касательной к эволюте с осью OX (или любым заданным направлением, что не принципиально), называемая угловой диаграммой (углограммой). Понятие «эвольвента» определялось для гладких кривых и формула (2) верна для всех таких кривых. Но в нашей задаче (1) исходная кривая – это ломаная линия и применять к ней приведенные выше определения эвольвенты, т.е. рассматривать ломаную как эволюту, нельзя.

Однако формулу (2) можно обобщить, если считать эвольвентой кривую, длина которой вычисляется через углограмму эволюты по формуле (2), т.е. длина эвольвенты – это площадь углограммы как функция длины исходной кривой (в частности, ломаной). Сама по себе эвольвента для рассматриваемой задачи не представляет интереса. Важно, что разность длин эвольвент двух эволют, имеющих общую точку, при некоторых дополнительных условиях приближенно равна расстоянию между эволютами по нормали. В нашей задаче первая эволюта – это ломаная, соединяющая аппроксимируемые точки, а вторая – проектная кривая (окружность или клотоида). Отсюда и происходит метод эвольвент, который состоит в следующем:

1. Вычисляем углы исходной ломаной с осью OX и значения длины эвольвенты  $L_i$  исходной ломаной для точек съемки  $i = 1, 2, \dots, n$ .  $L_1 = 0$ , далее

$$L_i = \sum_{j=2}^i \varphi_j s_j. \quad (3)$$

Здесь  $\varphi_j$  – угол с осью OX  $j$ -го звена ломаной (от точки  $j - 1$  до точки  $j$ ),  $s_j$  – длина этого звена.

Для окружности угол поворота линейно зависит от длины дуги, соответственно длина проектной эвольвенты  $L_{пр}(S)$  – парабола второй степени.

2. Если проектная кривая задана, то разность  $L_{пр}(S) - L_{исх}(S)$  приближенно дает искомую сдвигку  $h_j$ , где  $j$  и  $S$  должны соответствовать друг другу.
3. Если же требуется решить задачу аппроксимации, то неизвестные коэффициенты искомой параболы ( $a$  и  $b$ ) определяются по методу наименьших квадратов.

Для окружности *длина* эвольвенты  $L_{пр}(S) = aS^2 + bS$ , где  $S$ , как и ранее, длина дуги от заданной начальной точки. Смысл искомых параметров следующий:  $a = 1/(2R)$  и  $b$  – угол с осью OX касательной к окружности в начальной точке.

Получаем задачу:

$$F(a, b) = \sum_{i=2}^n (aS_i^2 + bS_i - L_i)^2 \rightarrow \min. \quad (4)$$

Условия  $\frac{\partial F}{\partial a} = 0$  и  $\frac{\partial F}{\partial b} = 0$  дают систему двух линейных уравнений, из которой находим  $a$  и  $b$  и затем  $R = 1/(2a)$ . Угол  $b$  может быть задан, и тогда останется неизвестным только  $a$ .

При аппроксимации клотоидой возможны варианты: клотоида сопрягает прямую с окружностью; окружность с прямой; две окружности разного радиуса.

Если длины сопрягающих клотоид существенно меньше длин круговых кривых, то важно подобрать положение окружности, а затем «пристроить клотоиды». Однако возможна и обратная ситуация, при которой клотоида является самостоятельным элементом. Например, в проектировании автодорог есть термин «клотоидное трассирование» [20]. Не следует думать, что в этом случае трасса состоит из одних клотоид и прямых, но клотоиды в процентном отношении по длине преобладают.

По определению кривизна клотоиды  $\sigma = \sigma_0 + kS$ , где  $\sigma_0$  – кривизна в начальной точке (при длине  $S = 0$ ),  $k$  – скорость изменения кривизны. Текущий угол касательной с осью  $OX$   $\varphi = \varphi_0 + \sigma_0 S + kS^2/2$ , где  $\varphi_0$  – начальный угол касательной с осью  $OX$ . Наконец, длина эвольвенты клотоиды равна

$$L = \varphi_0 S + \sigma_0 S^2/2 + kS^3/6.$$

Аппроксимация клотоидой по методу эвольвент в общем случае сводится к задаче:

$$F(\varphi_0, \sigma_0, k) = \sum_{i=2}^n \left( \varphi_0 S_i + \frac{\sigma_0 S_i^2}{2} + \frac{k S_i^3}{6} - L_i \right)^2 \rightarrow \min. \quad (5)$$

Здесь  $S_i$  и  $L_i$  имеют тот же смысл, что и в задаче аппроксимации окружностью (4). Одна или две переменные могут быть фиксированы. В любом случае задача (5) решается просто. Дифференцируя (5) по искомым переменным и приравнявая производные к нулю, получаем систему линейных уравнений (при двух фиксированных неизвестных – одно уравнение). После решения системы нужно вычислить кривизну в конечной точке клотоиды  $\sigma_n = \sigma_0 + kS_n$ .

Если  $R_n = 1/\sigma_n$  окажется вне допустимых пределов, надо принять  $R_n = R_{\text{пред}}$  и при заданном  $\sigma_0$  вычислить  $k = (1/R_{\text{пред}} - \sigma_0)S_n$ . Далее неизвестное  $\varphi_0$  получаем, подставляя в (5) найденное  $k$  и решая задачу с одним неизвестным. Если же  $\sigma_0$  не задана, то подставляем в (5)  $\sigma_0 = \sigma_n - kS_n$  и решаем задачу (5) с оставшимися неизвестными и найденным  $\sigma_n$ .

Таким образом, использовать метод эвольвент весьма просто для аппроксимации как окружностью, так и клотоидой. К сожалению, точность метода может оказаться недостаточной.

Для проверки этого утверждения в качестве координат исходных точек съемки вычислялись декартовы координаты концов хорд заданной длины на заданной окружности. По этим координатам вычислялись углы хорд с осью  $OX$  и длины эвольвенты по формуле (3). Далее решалась задача (4). Очевидно, что ее решением являются переменные,

соответствующие исходной окружности. При этом отклонения всех исходных точек от аппроксимирующей окружности должны быть равны нулю. Однако этого не получалось. Если при радиусе окружности  $R = 500$  м и более, хордах по  $l_x = 20$  м и длине окружности  $S \leq 500$  м, т.е. углах поворота менее 1 рад отклонения получаемой окружности от исходной были менее 0.01 м, то при  $R = 200$  м,  $l_x = 20$  м,  $S = 200$  м радиус по методу эвольвент получался 199.9167 м вместо 200 м и максимальное отклонение  $D_{\text{max}} = 0.0383$  м вместо 0. При  $S = 400$  м (угол поворота 2 рад) для той же окружности  $D_{\text{max}} = 0.1180$  м вместо 0. При этом во всех случаях разности длин проектной и исходной эвольвент аппроксимируемой окружности во всех точках съемки были равны нулю. При  $l_x = 10$  м точность метода существенно выше. Так при  $R = 300$  м,  $S = 200$  м при разбивке по 10 м получаем  $R = 299.9861$  и  $D_{\text{max}} = 0.00297$ , а при разбивке той же окружности по 20 м получим  $R = 299.9444$  м и  $D_{\text{max}} = 0.01190$  м.

Аналогичные расчеты были выполнены применительно к использованию метода эвольвент для аппроксимации клотоидой. Использовались дуги равной длины, а не стягивающие их хорды, что упрощает вычисление декартовых координат точек по концам дуг. Эти точки рассматривались как точки съемки, вычислялись длины хорд, и, как и для окружностей, вычислялись углы и длины эвольвенты  $L_i$  по формуле (3). Далее решалась задача (5) при  $\sigma_0 = 0$  и неизвестных  $\varphi_0$  и  $k$ .

Как и следовало ожидать, метод эвольвент хорошо работает при малых значениях параметра  $k$  и коротких клотоидах. В противном случае результаты неудовлетворительны.

**Пример 1.** Клотоида длиной 400 м разбита на 20 равных частей через 20.0 м;  $k = 3.333333 \cdot 10^{-5}$ . Получено  $\varphi_0 = -0.00027412$  вместо 0 и  $k = 3.337930 \cdot 10^{-5}$  вместо исходного  $k = 3.333333 \cdot 10^{-5}$ .

Аппроксимация длины эвольвенты как функции длины ломаной кубической параболы (решение задачи 5) выполнена с отклонениями не более 0.041 м. Однако максимальное отклонение исходных точек от полученной клотоиды по нормали к ней  $D_{\text{max}} = 0.255$  м.

**Пример 2.** Та же задача, но длина клотоиды 200 м.

Аппроксимация кубической параболой выполнена с отклонениями не более 0.001 м. Получено  $\varphi_0 = -1.839272551 \cdot 10^{-5}$  вместо 0 и  $k = 3.334527 \cdot 10^{-5}$  вместо исходного  $k = 3.333333 \cdot 10^{-5}$ ,  $D_{\text{max}} = 0.048$  м.

Следует отметить, что в этих расчетах показано не столько как метод эвольвент находит оптимум, а скорее – как он уходит от него. Для «сильно сбитой» исходной трассы отклонения от оптимума решений, получаемых по методу эвольвент, могут

быть существенно больше, особенно при малых радиусах и больших углах поворота. Однако в любом случае эти решения можно использовать как начальные приближения для оптимальной аппроксимации окружностью.

### ОПТИМИЗАЦИЯ НАЧАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ПРИ АППРОКСИМАЦИИ ОКРУЖНОСТЬЮ

Будем считать, что заданы координаты точек, подлежащих аппроксимации окружностью, и ее начальная точка А. Обычно фиксируют и направление касательной в этой точке (угол  $\alpha$  с осью OX), но мы без ограничения общности будем считать неизвестными этот угол и радиус окружности R. Координаты центра окружности (рис. 3):

$$x_c = x_a - R \cdot \sin \alpha \text{ и } y_c = y_a + R \cdot \cos \alpha. \quad (6)$$

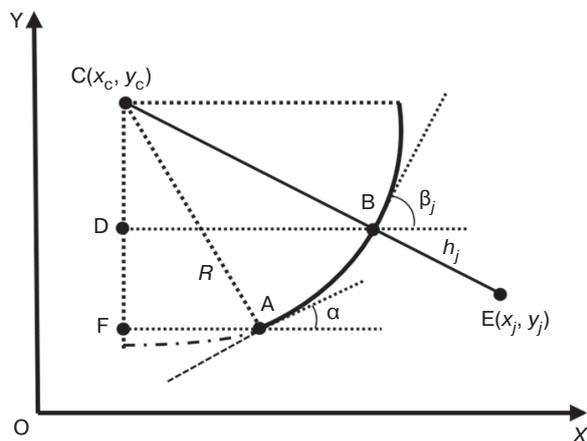


Рис. 3. К вычислению производных отклонений  $h_j$  от окружности

Отклонение  $h_j$  (BE на рис. 3) произвольной точки съемки с координатами  $x_j, y_j$  от окружности

$$h_j = \sqrt{(x_j - x_c)^2 + (y_j - y_c)^2} - R. \quad (7)$$

Используя (6) и (7), получаем производные:

$$\frac{\partial h_j}{\partial R} = \cos(\beta_j - \alpha) - 1 \text{ и } \frac{\partial h_j}{\partial \alpha} = R \sin(\beta_j - \alpha).$$

Здесь  $\beta_j$  – угол касательной к окружности в точке В. Далее вычисляем градиент целевой функции (1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial R} &= \sum_{j=1}^n h_j \cdot \frac{\partial h_j}{\partial R} = \sum_{j=1}^n h_j (\cos(\beta_j - \alpha) - 1), \\ \frac{\partial F}{\partial \alpha} &= \sum_{j=1}^n h_j \cdot \frac{\partial h_j}{\partial \alpha} = R \sum_{j=1}^n h_j \sin(\beta_j - \alpha). \end{aligned} \quad (8)$$

Задача аппроксимации окружностью с целевой функцией (1) сведена к двумерной задаче минимизации с ограничением на R и начальным приближением, полученным по методу эволюент в результате решения задачи (4). Наличие хорошего начального приближения особенно важно, т.к. нет оснований полагать, что задача одноэкстремальна.

Можно использовать различные методы для решения задачи [21–23], в частности градиентные или покоординатный спуск, меняя поочередно R и  $\alpha$ .

Отметим, что если фиксированы начальная точка А и угол  $\alpha$ , то задание еще одной точки окружности (например, конечной) определяет окружность однозначно, и перебор нескольких таких точек с вычислением значения целевой функции для каждой из них может оказаться достаточным, особенно при больших радиусах, когда метод эволюент дает приемлемый результат и нужно убедиться в этом, пытаясь его улучшить.

### ОПТИМИЗАЦИЯ НАЧАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ПРИ АППРОКСИМАЦИИ КЛОТОИДОЙ

Как и при аппроксимации окружностью, при аппроксимации клотоидой основной вопрос состоит в вычислении производных расстояний заданных точек съемки от клотоиды по параметрам, ее определяющим. Покажем, как решается эта задача на примере перехода от прямой к окружности с использованием клотоиды.

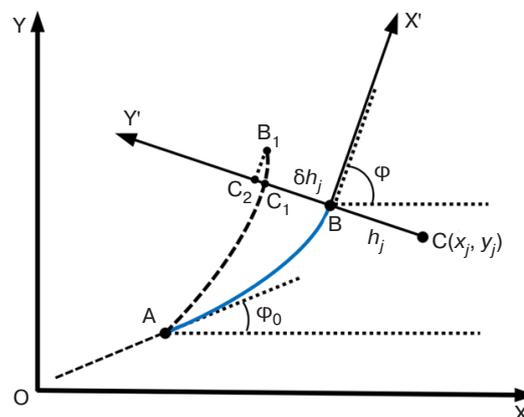


Рис. 4. К вычислению производных отклонений  $h_j$  от клотоиды

На рис. 4 АВ – исходное положение куска клотоиды; АВ<sub>1</sub> – его новое положение при изменении одного из параметров клотоиды;  $\phi_0$  и  $\phi$  углы касательной с осью OX; СВ =  $h_j$  – отклонение точки съемки С от клотоиды; ВС<sub>1</sub> – его приращение.

Обозначим приращения координат точки В при ее переходе в новое положение В<sub>1</sub> из-за изменения какого-либо из параметров клотоиды через  $\delta x_B$  и  $\delta y_B$ . В системе координат с центром в точке В и

осями, направленными по касательной и нормали к клотоиде соответственно, координата  $y'$  точки  $B_1$ , т.е.  $BC_2 = \delta y_B \cos \varphi - \delta x_B \sin \varphi$ . Величиной  $C_1 C_2$  можно пренебречь по сравнению с  $C_1 B$  и считать, что линейная часть приращения

$$\delta h_j = \delta y_B \cos \varphi - \delta x_B \sin \varphi. \quad (9)$$

Поскольку начальная точка  $A$  фиксирована, то параметрами, определяющими положение клотоиды, а значит и качество аппроксимации, являются в общем случае  $\varphi_0$  – угол касательной с осью  $OX$  в начальной точке (при  $L = 0$ ),  $\sigma_0$  – начальная кривизна и  $k$  – параметр клотоиды (скорость изменения кривизны, иначе говоря – производная кривизны по длине).

В случае перехода с прямой на окружность  $\sigma_0 = 0$ , остаются только две переменных  $\varphi_0$  и  $k$ , и фактически задача сводится к вычислению производных координат точек клотоиды по этим переменным, т.к. еще до вычисления производных с использованием итерационного алгоритма [24] вычисляются координаты точек пересечения с клотоидой нормалей из каждой точки съемки, длины клотоиды  $L_j$  от начальной точки до точек пересечения и углы касательных с осью  $OX$ .

Декартовы координаты точек клотоиды как функции ее длины выражаются степенными рядами, но мы воспользуемся их интегральным представлением

$$\begin{aligned} x_B &= x_A + \int_0^L \cos \left( \varphi_0 + \frac{kt^2}{2} \right) dt, \\ y_B &= y_A + \int_0^L \sin \left( \varphi_0 + \frac{kt^2}{2} \right) dt. \end{aligned} \quad (10)$$

Дифференцируя (10), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_B}{\partial \varphi_0} &= - \int_0^L \sin \left( \varphi_0 + \frac{kt^2}{2} \right) dt = -(y_B - y_A), \\ \frac{\partial y_B}{\partial \varphi_0} &= \int_0^L \cos \left( \varphi_0 + \frac{kt^2}{2} \right) dt = (x_B - x_A), \\ \frac{\partial x_B}{\partial k} &= - \int_0^L \sin \left( \varphi_0 + \frac{kt^2}{2} \right) \frac{t^2}{2} dt = \\ &= \frac{1}{2k} \int_0^L t d \cos \left( \varphi_0 + \frac{kt^2}{2} \right) = \frac{L \cos \varphi - (x_B - x_A)}{2k}, \\ \frac{\partial y_B}{\partial k} &= \int_0^L \cos \left( \varphi_0 + \frac{kt^2}{2} \right) \frac{t^2}{2} dt = \\ &= \frac{1}{2k} \int_0^L t d \sin \left( \varphi_0 + \frac{kt^2}{2} \right) = \frac{L \sin \varphi - (y_B - y_A)}{2k}. \end{aligned}$$

Используя (9), получаем искомые производные отклонений точек съемки от клотоиды:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_j}{\partial \varphi_0} &= (x_B - x_A) \cos \varphi + (y_B - y_A) \sin \varphi, \\ \frac{\partial h_j}{\partial k} &= \frac{(x_B - x_A) \sin \varphi - (y_B - y_A) \cos \varphi}{2k}. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь  $A$  – начальная точка клотоиды,  $h_j$  – отклонение произвольной  $j$ -й точки съемки от клотоиды по нормали к ней,  $B$  – точка пересечения этой нормали с клотоидой,  $\varphi$  – угол касательной в этой точке с осью  $OX$ ,  $L$  – длина клотоиды от точки  $A$  до точки  $B$ .

Формулы (11) позволяют найти градиент целевой функции (1)

$$\frac{\partial F}{\partial k} = \sum_{j=1}^n h_j \cdot \frac{\partial h_j}{\partial k}; \quad \frac{\partial F}{\partial \varphi_0} = \sum_{j=1}^n h_j \cdot \frac{\partial h_j}{\partial \varphi_0}. \quad (12)$$

Далее можно использовать градиентные методы оптимизации, например, метод сопряженных градиентов [22–24]. Однако формулы (10)–(12) позволяют вычислить матрицу вторых производных целевой функции  $G$  (матрицу Гессе) и применить более эффективный метод второго порядка [23, 24]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial k^2} &= \sum_{j=1}^n \left( \left( \frac{\partial h_j}{\partial k} \right)^2 + h_j \cdot \frac{\partial^2 h_j}{\partial k^2} \right) = G_{11}, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial k \partial \varphi_0} &= \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial h_j}{\partial \varphi_0} \cdot \frac{\partial h_j}{\partial k} + \frac{\partial^2 h_j}{\partial k \partial \varphi_0} \right) = G_{12} = G_{21}, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi_0^2} &= \sum_{j=1}^n \left( \left( \frac{\partial h_j}{\partial \varphi_0} \right)^2 + h_j \cdot \frac{\partial^2 h_j}{\partial \varphi_0^2} \right) = G_{22}. \end{aligned} \quad (13)$$

Вычисление матрицы Гессе сведено к вычислению вторых производных отклонений  $h_j$  аппроксимируемых точек от клотоиды по искомым переменным  $\varphi_0$  и  $k$ , т.к. первые производные уже вычислены.

В соответствии с (9)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h_j}{\partial k^2} &= - \sin \varphi \cdot \frac{\partial^2 x_B}{\partial k^2} + \cos \varphi \cdot \frac{\partial^2 y_B}{\partial k^2} = \\ &= \sin \varphi \int_0^L \cos \left( \varphi_0 + \frac{kt^2}{2} \right) \frac{t^4}{4} dt - \cos \varphi \int_0^L \sin \left( \varphi_0 + \frac{kt^2}{2} \right) \frac{t^4}{4} dt. \end{aligned}$$

Применяя интегрирование по частям и используя вычисленные ранее интегралы, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h_j}{\partial k^2} &= \frac{1}{4k} \left\{ L^3 + \frac{3}{k} (\cos \varphi(y_B - y_A) - \sin \varphi(x_B - x_A)) \right\}, \\ \frac{\partial^2 h_j}{\partial \varphi_0^2} &= -\sin \varphi \cdot \frac{\partial^2 x_B}{\partial \varphi_0^2} + \cos \varphi \cdot \frac{\partial^2 y_B}{\partial \varphi_0^2} = \\ &= \sin \varphi (x_B - x_A) - \cos \varphi (y_B - y_A), \\ \frac{\partial^2 h_j}{\partial k \partial \varphi_0} &= \sin \varphi \int_0^L \cos \left( \varphi_0 + \frac{kt^2}{2} \right) \frac{t^2}{2} dt - \\ &- \cos \varphi \int_0^L \sin \left( \varphi_0 + \frac{kt^2}{2} \right) \frac{t^2}{2} dt = \\ &= \frac{1}{2k} \{ L - \sin \varphi (y_B - y_A) - \cos \varphi (x_B - x_A) \}. \end{aligned} \quad (14)$$

Используя полученные производные, вычисляем матрицу Гессе и обратную к ней  $\mathbf{G}^{-1}$ .

Обозначим:  $\mathbf{x}(\varphi_0, k)$  – вектор неизвестных,  $\mathbf{g} \left( \frac{\partial F}{\partial \varphi_0}, \frac{\partial F}{\partial k} \right)$  – градиент. Для начального приближения, полученного по методу эволюент (нулевая итерация), это  $\mathbf{x}^0$  и  $\mathbf{g}^0$ . Вычислим следующую итерационную точку:

$$\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^0 - \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{g}^0. \quad (15)$$

Для положительно определенной матрицы Гессе это точка минимума целевой функции, если ее разложить в ряд Тейлора и ограничиться вторыми производными. В общем случае одного шага до точки минимума на луче  $\mathbf{x}^0 - \lambda \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{g}^0$  недостаточно. В квадратичной задаче минимум достигается при  $\lambda = 1$ . В общем случае при  $\lambda = 1$  получаем точку минимума не исходной функции, а аппроксимирующей ее квадратичной формы с матрицей Гессе, что не одно и то же. Поэтому  $\lambda = 1$  следует рассматривать лишь как приближенное значение и искать точное значение путем решения задачи одномерной оптимизации функции  $F(\mathbf{x})$  на луче  $\mathbf{x}^0 - \lambda \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{g}^0$ , рассматривая ее как функцию единственного параметра  $\lambda$ .

В полученной точке минимума по направлению приходится снова вычислять градиент и матрицу, обратную к матрице Гессе и т.д.

В целом алгоритм клотоидной аппроксимации состоит из следующих пунктов.

1. Построение углограммы исходной ломаной по точкам съемки.
2. Вычисление длин эволюенты ломаной последовательно по точкам съемки по формуле (3).
3. Решение задачи аппроксимации полученной ломаной. В общем случае аппроксимация кубической параболой при наличии трех неизвестных параметров клотоиды или квадратной параболой при двух параметрах, как рассмотрено выше.

При этом решается система не более чем трех линейных уравнений.

4. Для клотоиды, соответствующей полученному решению, по специальному итерационному алгоритму определяются точки пересечения с нормальными из каждой точки съемки, углы касательных в этих точках с осью OX, соответствующие длины от начальной точки клотоиды до каждой из них и отклонения  $h_j$  точек съемки от клотоиды.
5. Вычисляются первые и вторые производные отклонений  $h_j$  по искомым параметрам клотоиды (12), (13).
6. Вычисляется градиент целевой функции (14) и проверяются условия окончания счета (например, малость нормы градиента). Если условия окончания счета не выполнены, то далее:
7. Вычисляется матрица Гессе и обратная к ней.
8. Определяется точка минимума соответствующей квадратичной формы (15), решается задача одномерной оптимизации, т.е. корректировки шага по направлению поиска, и осуществляется переход в новую итерационную точку и далее с новыми значениями неизвестных к п. 4.

Для отладки и проверки алгоритма клотоидной аппроксимации сначала использовались результаты решения тестовых задач по методу эволюент, для которых оптимум был известен, но решения по методу эволюент были неудовлетворительны.

В рассмотренном выше примере 1 по методу эволюент максимальное отклонение  $D_{\max} = 0.255$  м вместо 0,  $\varphi_0 = -0.00027412$  вместо 0 и  $k = 3.337930 \cdot 10^{-5}$  вместо  $k = 3.333333 \cdot 10^{-5}$ .

Целевая функция  $F^0 = 0.10298$ . В точке минимума квадратичной формы (15)  $F = 1.08524 \cdot 10^{-7}$ ,  $\varphi_0 = 3.099241 \cdot 10^{-7}$ ,  $k = 3.333335 \cdot 10^{-5}$ . После выполнения первой итерации  $F = 3.70261 \cdot 10^{-15}$ ,  $\varphi_0 = -2.422261 \cdot 10^{-14}$ ,  $k = 3.33333333 \cdot 10^{-5}$ . Все отклонения не превышали 0.00006 м.

В примере 2 решалась та же задача, но при длине клотоиды 200 м. По методу эволюент получено  $\varphi_0 = -1.839272551 \cdot 10^{-5}$ , вместо 0 и  $k = 3.334527 \cdot 10^{-5}$  вместо  $k = 3.333333 \cdot 10^{-5}$ .  $D_{\max} = 0.048$  м. В точке минимума квадратичной формы (15)  $F = 1.80438 \cdot 10^{-14}$ ,  $\varphi_0 = -9.592883457 \cdot 10^{-10}$ ,  $k = 3.333334 \cdot 10^{-5}$ ,  $D_{\max} = 0.0002$  м. Итерация была прервана из-за достижения требуемой точности по градиенту.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Возможности современных общедоступных компьютеров, теории и методов компьютерной выработки проектных решений далеко не полностью используются в действующих САПР линейных сооружений, которые основаны на идеях более чем

50-летней давности. Переход к разработке и внедрению интеллектуальных САПР, в которых проектные решения выдает компьютер в результате решения задач оптимизации, вполне возможен уже сейчас применительно ко многим проектным задачам, но в силу отсутствия заинтересованных инстанций в создании таких систем и больших затрат труда и средств на их разработку такой переход в нашей стране в ближайшее время маловероятен. Наиболее продвинутыми в этом отношении являются упоминавшиеся работы китайских ученых. Однако действующие САПР могут быть усовершенствованы и путем применения программ оптимизации в интерактивном процессе выработки проектных решений. Так, изложенные в статье алгоритмы аппроксимации можно применить вместо назначения решений вручную. Кроме того, изложенный алгоритм клотоидной

аппроксимации может быть востребован при решении задач, не имеющих отношения к проектированию дорожных трасс.

Ближайшей задачей является обобщение изложенного метода вычисления производных целевой функции по параметрам, определяющим кривую в целом (а не одну клотоиду), при отсутствии аналитического выражения этой функции через искомые параметры. Речь идет о переходе от решения задачи аппроксимации одной клотоидой к сплайн-аппроксимации последовательностью нескольких связок «прямая + клотоида + окружность + клотоида + ...».

**Вклад авторов.** Все авторы в равной степени внесли вклад в настоящую работу.

**Authors' contribution.** All authors equally contributed to the present work.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горинов А.В. *Изыскания и проектирование железных дорог*. Т. 2. М.: Трансжелдориздат; 1961. 338 с.
2. Шейдвассер Д.М. Оптимизация трасс железных дорог на напряженных ходах. В кн.: *Автоматизация проектирования объектов транспортного строительства*. М.: Транспорт; 1986. С. 16–29.
3. Струченков В.И., Шейдвассер Д.М. Оптимизация на ЭВМ трассы новой железной дороги на напряженных ходах. *Транспортное строительство*. 1987;3:7–9.
4. Jha M.K., McCall C., Schonfeld P. Using GIS, genetic algorithms, and visualization in highway development. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*. 2001;16(6):399–414. <https://doi.org/10.1111/0885-9507.00242>
5. Jha M.K., Schonfeld P. A highway alignment optimization model using geographic information systems. *Transp. Res. Part A. Policy Pract.* 2004;8(6):455–481. <https://doi.org/10.1016/j.tra.2004.04.001>
6. Jong J.C., Jha M.K., Schonfeld P. Preliminary highway design with genetic algorithms and geographic information systems. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*. 2000;15(4):261–271. <https://doi.org/10.1111/0885-9507.00190>
7. Kang M.W., Schonfeld P., Yang N. Prescreening and repairing in a genetic algorithm for highway alignment optimization. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*. 2009;24(2):109–119. <https://doi.org/10.1111/j.1467-8667.2008.00574.x>
8. Pushak Y., Hare W., Lucet Y. Multiple-path selection for new highway alignments using discrete algorithms. *Eur. J. Oper. Res.* 2016;248(2):415–427. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2015.07.039>
9. Sarma K.C., Adeli H. Bilevel parallel genetic algorithms for optimization of large steel structures. *Computer Aided Civil and Infrastructure Engineering*. 2001;16(5): 295–304. <https://doi.org/10.1111/0885-9507.00234>

#### REFERENCES

1. Gorinov A.V. *Izyskaniya i proektirovanie zheleznikh dorog (Research and Design of Railways)*. V. 2. Moscow: Transzheldorizdat; 1961. 338 p. (in Russ.).
2. Sheidwasser D.M. Optimization of railroad tracks on busy tracks. In: *Avtomatizatsiya proektirovaniya ob'ektov transportnogo stroitel'stva (Automation of the Design of Transport Construction Objects)*. Moscow: Transport; 1986. P. 16–29 (in Russ.).
3. Struchenkov V.I., Sheidwasser D.M. Optimization on a computer of the route of a new railway on stressful passages. *Transportnoe stroitel'stvo = Transport Construction*. 1987;3:7–9 (in Russ.).
4. Jha M.K., McCall C., Schonfeld P. Using GIS, genetic algorithms, and visualization in highway development. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*. 2001;16(6):399–414. <https://doi.org/10.1111/0885-9507.00242>
5. Jha M.K., Schonfeld P. A highway alignment optimization model using geographic information systems. *Transp. Res. Part A. Policy Pract.* 2004;8(6):455–481. <https://doi.org/10.1016/j.tra.2004.04.001>
6. Jong J.C., Jha M.K., Schonfeld P. Preliminary highway design with genetic algorithms and geographic information systems. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*. 2000;15(4):261–271. <https://doi.org/10.1111/0885-9507.00190>
7. Kang M.W., Schonfeld P., Yang N. Prescreening and repairing in a genetic algorithm for highway alignment optimization. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*. 2009;24(2):109–119. <https://doi.org/10.1111/j.1467-8667.2008.00574.x>
8. Pushak Y., Hare W., Lucet Y. Multiple-path selection for new highway alignments using discrete algorithms. *Eur. J. Oper. Res.* 2016;248(2):415–427. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2015.07.039>

10. Shafahi Y., Bagherian M. A customized particle swarm method to solve highway alignment optimization problem. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*. 2013;28(1):52–67. <https://doi.org/10.1111/j.1467-8667.2012.00769.x>
11. Bosurgi G., D'Andrea A. A polynomial parametric curve (PPC-curve) for the design of horizontal geometry of highways. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*. 2012;27(4):303–312. <https://doi.org/10.1111/j.1467-8667.2011.00750.x>
12. Cerf R. *The quasispecies regime for the simple genetic algorithm with roulette wheel selection*. arXiv:1506.0981v2. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1506.0981>
13. Pu H., Li W., Schonfeld P., et al. A Method for Automatically Recreating the Horizontal Alignment Geometry of Existing Railways. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*. 2019;34(1):71–94. <https://doi.org/10.1111/mice.12392>
14. Li W., Zhen S., Schonfeld P., et al. Recreating Existing Railway Horizontal Alignments Automatically Using Overall Swing Iteration. *J. Transport. Eng. Part A: Systems*. 2022;148(8). <https://doi.org/10.1061/JTEPBS.0000691>
15. Pu H., Fu H., Schonfeld P., et al. Modelling and optimization of constrained alignments for existing railway reconstruction. *Int. J. Rail Transportat.* 2023;11(3):428–447. <https://doi.org/10.1080/23248378.2022.2081878>
16. Сальков Н.А. *Моделирование геометрических форм автомобильных дорог*: монография. М.: ИНФРА-М; 2019. 162 с.
17. Смирнов В.И. *Курс высшей математики*. Т. 2. М.: Наука; 1967. 479 с.
18. Горинов А.В., Кантор И.И., Кондратенко А.П., Турбин И.В. *Изыскания и проектирование железных дорог*. М.: Транспорт; 1979. 319 с.
19. Кантор И.И. *Изыскания и проектирование железных дорог*. М.: ИКЦ «Академкнига»; 2003. 288 с.
20. Федотов Г.А., Пospelov И.И. *Изыскания и проектирование автомобильных дорог*. Кн. 1. М.: Высшая школа; 2009. 650 с.
21. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. *Практическая оптимизация*: пер. с англ. М.: Мир; 1985. 509 с.
22. Кохендерфер М.Д., Уилер Т.А. *Алгоритмы оптимизации*. М.: Вильямс; 2020. 528 с.
23. Черноуцкий И.Г. *Методы оптимизации. Компьютерные технологии*. СПб.: БХВ-Петербург; 2011. 329 с.
24. Струченков В.И. Новый алгоритм поэлементного расчета трасс в САПР линейных сооружений. *Информационные технологии*. 2015;21(4):271–276.
9. Sarma K.C., Adeli H. Bilevel parallel genetic algorithms for optimization of large steel structures. *Computer Aided Civil and Infrastructure Engineering*. 2001;16(5): 295–304. <https://doi.org/10.1111/0885-9507.00234>
10. Shafahi Y., Bagherian M. A customized particle swarm method to solve highway alignment optimization problem. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*. 2013;28(1):52–67. <https://doi.org/10.1111/j.1467-8667.2012.00769.x>
11. Bosurgi G., D'Andrea A. A polynomial parametric curve (PPC-curve) for the design of horizontal geometry of highways. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*. 2012;27(4):303–312. <https://doi.org/10.1111/j.1467-8667.2011.00750.x>
12. Cerf R. *The quasispecies regime for the simple genetic algorithm with roulette wheel selection*. arXiv:1506.0981v2. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1506.0981>
13. Pu H., Li W., Schonfeld P., et al. A Method for Automatically Recreating the Horizontal Alignment Geometry of Existing Railways. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*. 2019;34(1):71–94. <https://doi.org/10.1111/mice.12392>
14. Li W., Zhen S., Schonfeld P., et al. Recreating Existing Railway Horizontal Alignments Automatically Using Overall Swing Iteration. *J. Transport. Eng. Part A: Systems*. 2022;148(8). <https://doi.org/10.1061/JTEPBS.0000691>
15. Pu H., Fu H., Schonfeld P., et al. Modelling and optimization of constrained alignments for existing railway reconstruction. *Int. J. Rail Transportat.* 2023;11(3):428–447. <https://doi.org/10.1080/23248378.2022.2081878>
16. Sal'kov N.A. *Modelirovanie geometricheskikh form avtomobil'nykh dorog*: Monografiya (Modeling Geometric Shapes of Highways: Monograph). Moscow: INFRA-M; 2019. 162 p. (in Russ.).
17. Smirnov V.I. *Kurs vysshei matematiki (Higher Mathematics Course)*. V. 2. Moscow: Nauka; 1979. 479 p. (in Russ.).
18. Gorinov A.V., Kantor I.I., Kondratenko A.P., Turbin I.V. *Izyskaniya i proektirovanie zheleznykh dorog (Research and Design of Railways)*. Moscow: Transport; 1979. 319 p. (in Russ.).
19. Kantor I.I. *Izyskaniya i proektirovanie zheleznykh dorog (Research and Design of Railways)*. Moscow: Akademkniga; 2003. 288 p. (in Russ.).
20. Fedotov G.A., Pospelov I.I. *Izyskaniya i proektirovanie avtomobil'nykh dorog (Research and Design of Highways)*. V. 1. Moscow: Vysshaya shkola; 2009. 650 p. (in Russ.).
21. Gill Ph.E., Murray W., Wright M.H. *Prakticheskaya optimizatsiya (Practical Optimization)*: transl. from Engl. Moscow: Mir; 1985. 509 p. (in Russ.). [Gill Ph.E., Murray W., Wright M.H. *Practical Optimization*. London: Academic Press; 1981. 402 p.]
22. Kochenderfer M.D., Wheeler T.A. *Algoritmy optimizatsii (Algorithms for Optimization)*. Moscow: Vil'yams; 2020. 528 p. (in Russ.). [Kochenderfer M.D., Wheeler T.A. *Algorithms for Optimization*. London: MIT Press; 2019. 520 p.]

23. Chernorutskii I.G. *Metody optimizatsii. Komp'yuternye tekhnologii (Methods of optimization. Computer technologies)*. St. Petersburg: BHV-Petersburg; 2011. 329 p. (in Russ.).
24. Struchenkov V.I. New algorithm for perelement calculation of line structures routes. *Informacionnye tekhnologii = Information Technologies*. 2015;21(4): 271–276 (in Russ.).

#### Об авторах

**Карпов Дмитрий Анатольевич**, к.т.н., заведующий кафедрой общей информатики Института искусственного интеллекта, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: karpov@mirea.ru. SPIN-код РИНЦ 2619-7100, <https://orcid.org/0000-0003-3734-7182>

**Струченков Валерий Иванович**, д.т.н., профессор, кафедра общей информатики Института искусственного интеллекта, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: str1942@mail.ru. SPIN-код РИНЦ 4581-4698, <https://orcid.org/0000-0002-9801-7454>

#### About the authors

**Dmitry A. Karpov**, Cand. Sci. (Eng.), Head of the General Informatics Department, Institute of Artificial Intelligence, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: karpov@mirea.ru. RSCI SPIN-code 2619-7100, <https://orcid.org/0000-0003-3734-7182>

**Valery I. Struchenkov**, Dr. Sci. (Eng.), Professor, General Informatics Department, Institute of Artificial Intelligence, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: str1942@mail.ru. RSCI SPIN-code 4581-4698, <https://orcid.org/0000-0002-9801-7454>