

УДК 535

О МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПРОБЛЕМАХ ОПТИКИ СЛОИСТЫХ ДИЭЛЕКТРИКОВ

Ю.И. Худак, д.т.н., профессор, заведующий кафедрой

Московский технологический университет (МИРЭА), Москва 119454, Россия

@Автор для переписки, e-mail: hudak@mirea.ru

Для успешного решения разнообразных проблем оптики и радиофизики, связанных с распространением волн в неоднородных средах, используются слоистооднородные модели таких сред. Однако, даже в случае двухслойных непроводящих сред, до сих пор не существует детальной классификации таких систем – их «фазовых портретов».

В работе получено решение прямой задачи распространения плоской электромагнитной волны в N-слойной диэлектрической среде в виде квазитригонометрических полиномов и даны точные выражения для коэффициентов отражения и пропускания. Приведён алгоритм решения обратной задачи о нахождении физических параметров слоистой системы по амплитудному коэффициенту отражения, установлена единственность решения. Введён ряд содержательных понятий, позволяющих упростить задачу. Для малого количества слоёв найдены явные решения задач просветления и антипросветления на заданной частоте и на заданном интервале частот. В более сложных случаях построены алгоритмы численного решения задач. Введена исчерпывающая классификация двухслойных систем на основе пространства параметров, имеющего структуру плоского графа с 19 собственными вершинами, 66 ребрами и 48 гранями.

Ключевые слова: прямая задача, электродинамические параметры системы, матрица передачи, представление элементов матрицы передачи, спектральные характеристики, почти-периодическая функция, точные оценки, задачи просветления, обратные задачи.

ON THE MATHEMATICS PROBLEM OF MULTILAYERED DIELECTRIC SYSTEMS IN THE CLASSICAL ELECTRODYNAMIC

Yu.I. Hudak

Moscow Technological University (MIREA), Moscow, 119454 Russia

@Corresponding author e-mail: hudak@mirea.ru

Solving numerous problems of wave propagation in inhomogeneous medium in optics and radio-physics involves layered media models. Unfortunately even for two-layer systems there is no known exhaustive classification of such systems presenting their “phase image”.

In the paper the solution of direct problem of flat electromagnetic wave propagation in N-layer dielectric media derived in the form of quasi-trigonometric polynomials. Exact expressions for reflectivity factor and transmission factor are given. The algorithm of inverse problem solution providing layered media physical parameters from amplitude reflectivity factor is devised. The solution is proved to be unique. New substantial notions allow handling the problem in an easier and more natural way. In the cases of a few layers, explicit solutions for translucence and anti-translucence problems at a given frequency and in a fixed frequency range are found. The comprehensive classification of two-layer systems is based on the structure of the planar graph in the parameter space having 19 inherent graph nodes, 66 graph edges and 48 facets.

Keywords: direct problem, electrodynamic parameters of systems, transfer matrix, representation of elements for transfer matrix, spectrum characteristics, almost periodic function, precise estimation, antireflection coating problems, inverse problems.

Введение

Многие научные и технические задачи оптики [1], [2], [3], радиофизики и геофизики [4], [5], связанные с распространением электромагнитных волн, используют слоистооднородные модели среды¹.

Во многом сходные проблемы возникают в теории анализа и синтеза электродинамических устройств [6] и общей теории фильтров [7].

Однако, несмотря на фундаментальные работы выдающихся физиков школы академика Л.И. Мандельштама [8], [9] и математиков [10], далеко не все сделано в вопросах математического моделирования соответствующих проблем. Многие теоретические и алгоритмические аспекты недостаточно разработаны².

Некоторые специальные аспекты рассматриваемых ниже проблем затронуты также, например, в [12].

Необходимость в существенном развитии аналитической составляющей теории, ориентированной на приложения, указывает хотя бы то, что даже в случае двухслойных непроводящих сред, только относительно недавно [13] получена детальная классификация таких систем.

В предлагаемой работе приведены экспоненциальные представления (улучшенные формулы П.Г. Карда [3]) для решения прямой задачи о распространении плоской электромагнитной волны в N-слойной диэлектрической среде в виде квазитригонометрических полиномов, т.е. равномерных почти-периодических функций частоты [8], [11].

С использованием алгебраической формы этих представлений установлены принципиально важные, точные, неулучшаемые на классе слоистых сред оценки для коэффициентов отражения и пропускания диэлектрических систем.

¹Среда – вещество, заполняющее \mathbb{R}^3 .

²Возможно, это следствие абстрактного уровня изложения в [10] или [11] и отсутствия в литературе других хороших источников математического анализа соответствующих физических проблем.

Теория "прямой" задачи о распространении плоских электромагнитных волн в слоистых диэлектриках развита до такого уровня, который позволяет ставить и решать практически важные обратные и оптимизационные задачи для таких систем.

Введены понятия о вычислительных параметрах слоистых систем (через них оцениваются коэффициенты отражения и пропускания), а также порождающих и профилирующих функций слоистых систем, которые полезны при постановке обратных и оптимизационных задач.

Предложен алгоритм решения обратной задачи о нахождении электродинамических параметров слоистой системы по ее амплитудному коэффициенту отражения, из которого вытекает теорема единственности их определения. Описаны все возможные варианты неединственности определения физических параметров слоистых систем по амплитудному коэффициенту отражения.

Используемые понятия позволяют дать математическую постановку оптимизационных задач (просветления и антипросветления) оптики слоистых сред, а затем существенно упростить их (эквивалентным образом), сведя дробнорациональные функционалы качества оптических систем к квадратическим по вспомогательным параметрам.

Для малого числа слоев выписаны явные решения задач просветления на заданной частоте или заданном интервале частот. Для численного решения задач отыскания локальных минимумов функционалов просветления разработаны эффективные алгоритмы [14], [15], [16].

Нетривиальность обсуждаемых проблем демонстрирует хотя бы такой факт, что однослойные системы могут быть только двух типов (см., например, [1], стр. 90, рис. 1.18): просветляющие и антипросветляющие, тогда как в [13] показано, что пространство параметров материалов двухслойных систем имеет структуру плоского графа, что порождает 118 разных классов таких систем.

Используемые методы решения практически важных задач при малых N при точном или алгоритмическом варианте их использования универсальны и позволяют рассчитывать на их обобщение для больших N .

Определение. Будем называть N -слойной диэлектрической системой стопку N слоев, ограниченных параллельными друг другу вертикальными плоскостями π_j , $j = 1, 2, \dots, N$ и заполненных средами с постоянными вещественными диэлектрическими $\varepsilon_j > 0$ и магнитными проницаемостями $\mu_j > 0$, $j = 1, 2, \dots, N$.

Пространство слева от слоев будем обозначать \mathbb{R}_-^3 , а справа — \mathbb{R}_+^3 и будем считать, что они заполнены разными средами с физическими параметрами $\{\varepsilon_0, \mu_0\}$ для левого полупространства \mathbb{R}_-^3 и $\{\varepsilon_{N+1}, \mu_{N+1}\}$ для правого полупространства \mathbb{R}_+^3 .

Прямая задача. Найти общий вид всех возможных плоских электромагнитных полей, которые могут существовать в составном пространстве \mathbb{R}^3 .

Уравнения Максвелла для скалярных амплитуд плоских электромагнитных волн, распространяющихся вдоль общей нормали к слоям системы в каждом из слоев $j = 0, 1, \dots, N, N + 1$ в векторно-матричной записи имеют вид:

$$\vec{u}_j' = i\omega \mathcal{P}_j \vec{u}_j, \quad \mathcal{P}_j \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & i\omega\mu_j \\ i\omega\varepsilon_j & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_j \stackrel{\text{def}}{=} \vec{u}_j(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} u_j(x) \\ v_j(x) \end{pmatrix} \quad (1)$$

Коэффициенты системы (1) не зависят от x и ее общее решение имеет вид:

$$\vec{u}_j(x) = c_0 \vec{l}_0 \exp[i\omega n_j(x-x_0^{(j)})] + c_1 \vec{l}_1 \exp[-i\omega n_j(x-x_0^{(j)})], \quad \vec{l}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ p_j \end{pmatrix}, \quad \vec{l}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ -p_j \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где \vec{l}_0 и \vec{l}_1 собственные векторы матрицы \mathcal{P}_j , отвечающие собственным значениям: $\lambda_0^{(j)} = i\omega n_j$ и $\lambda_1^{(j)} = -i\omega n_j$ и использованы обозначения:

$$\begin{aligned} n_j &\stackrel{\text{def}}{=} (\varepsilon_j \mu_j)^{1/2} - \text{коэффициент преломления } j\text{-ой среды,} \\ p_j &\stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\varepsilon_j}{\mu_j}\right)^{1/2} - \text{величина, обратная волновому сопротивлению } j\text{-ой среды,} \end{aligned} \quad (3)$$

$x_0^{(j)}$ – некоторая точка оси OX , – начало отсчета в j -ой среде, а $c_0^{(j)}$ и $c_1^{(j)}$ – произвольные постоянные для общего решения (2) системы (1) в j -ом слое, $j = 0, 1, \dots, N, N+1$.

Ниже будет использована векторно-матричная запись (2):

$$\begin{aligned} \vec{u}_j(x) &= \mathcal{B}_j \mathcal{S}_j(t) \vec{c}_j, & \text{где} & & \mathcal{B}_j &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ p_j & -p_j \end{pmatrix}, \\ \mathcal{S}_j(t_j) &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} e^{it_j} & 0 \\ 0 & e^{-it_j} \end{pmatrix}, & t_j &= \omega n_j(x - x_0^{(j)}), & \vec{c}_j &\stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} c_0^{(j)} \\ c_1^{(j)} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

Выберем точки $x_0^{(j)}$ в (2) слева от плоскостей $\pi_j : x = a_j$, ($j = 1, \dots, N+1$) на этой плоскости: $x_0^{(j)} = a_j$, а на плоскости $\pi_{N+1} : x = a_{N+1} - x_0^{(N+1)} = a_{N+1}$.

Электродинамические граничные условия непрерывности касательных компонент электрического и магнитного векторов полей на каждой из плоскостей π_j имеют вид:

$$\vec{u}_j \Big|_{\pi-0} = \vec{u}_{j+1} \Big|_{\pi+0}, \quad (5)$$

где $\vec{u}_j \Big|_{\pi \mp 0}$, – пределы слева (справа) тангенциальных составляющих компонент вектора \vec{u} на плоскости π_j .

Подстановка (2) в (5) приводит к **основной** системе векторно-матричных уравнений:

$$\mathcal{B}_j \vec{c}_j = \mathcal{B}_{j+1} \mathcal{S}_{j+1}(\omega \nu_{j+1}) \vec{c}_{j+1}, \quad j = 0, 1, \dots, N \quad (6)$$

где $\mathcal{B}_j = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ p_j & -p_j \end{pmatrix}$, $j = 0, 1, \dots, N+1$, $\mathcal{S}_{j+1}(\omega \nu_{j+1}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} e^{-i\omega \nu_j} & 0 \\ 0 & e^{i\omega \nu_j} \end{pmatrix}$, $j = 1, \dots, N$, которая является системой $2(N+1)$ линейных алгебраических уравнений относительно $2(N+2)$ неизвестных $c_s^{(j)}$, $s = 0, 1, j = 0, 1, \dots, N+1$.

Т.к. матрицы \mathcal{B}_j , $j = 0, 1, \dots, N+1$ невырождены, то (6) имеет **двухпараметрическое** семейство решений. В качестве свободных переменных можно выбрать, например, любой из векторов \vec{c}_j , $j = 0, N+1$.

Выберем свободные переменные **справа** от плоскости $\pi_{N+1} - \vec{c}_{N+1}$ и введем **матрицы передачи**:

$$\mathcal{T}_j \stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{B}_{j-1})^{-1} \mathcal{B}_j \mathcal{S}_j(\omega \nu_j) \quad (7)$$

Для матриц передачи \mathcal{T}_j из (7) получается их выражение через параметры материалов слева и справа от плоскости π_j и электрическую толщину слоя ν_j в виде:

$$\mathcal{T}_j \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 + \theta_j)e^{-i\nu_j\omega} & \frac{1}{2}(1 - \theta_j)e^{i\nu_j\omega} \\ \frac{1}{2}(1 - \theta_j)e^{-i\nu_j\omega} & \frac{1}{2}(1 + \theta_j)e^{i\nu_j\omega} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где $\theta_j = \frac{p_j}{p_{j-1}}$, $j = 1, \dots, N + 1$.

Тогда (6) можно переписать в виде, разрешенном относительно \vec{c}_j :

$$\vec{c}_j = \mathcal{T}_{j+1} \vec{c}_{j+1} \quad (9)$$

Замечание. Из выражения (8) для матриц передачи и (9) следует, что все векторы \vec{c}_j , $j = 0, 1, \dots, N - 1$ (при $N > 1$), *зависят* от частоты ω и электрических толщин слоев ν_j и параметров материалов p_j , лежащих правее рассматриваемого слоя.

Вывод. *Прямая задача* в составном пространстве \mathbb{R}^3 имеет решение в виде *двупараметрического* семейства плоских электромагнитных полей, плоскости постоянной фазы которых \parallel плоскостям раздела π_j пространства \mathbb{R}^3 на слои.

При дополнительном условии:

$$c_1^{(N+1)} = 0, \quad (10)$$

отсутствия приходящей с $+\infty$ плоской волны в правом полупространстве \mathbb{R}_+^3 или, как говорят, при *отсутствии отражения* на $+\infty$, *общее* решение прямой задачи является *однопараметрическим*.

Замечание. Решение прямой задачи станет *единственным*, если, в дополнение к (10), потребовать выполнение условия *нормировки* решения прямой задачи:

$$c_0^{(N+1)} = 1, \quad (11)$$

которое будем называть нормировкой решения прямой задачи *по прохождению*.

2. Основные определения и важные соотношения

Утверждение. (О свойстве инвариантности матрицы передачи).

Пусть $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{T} = \mathcal{T}_j$, $j = 1, \dots, N + 1$.

Тогда справедливо следующее *тождество инвариантности*:

$$\mathbf{T}^* \mathbf{J} \mathbf{T} = \theta_j \mathbf{J}, \quad \theta_j = \det \mathcal{T}_j. \quad (12)$$

Определение матрицы \mathbf{J} приводит к тождеству:

$$\vec{c}^* \mathbf{J} \vec{c} = |c_0|^2 - |c_1|^2, \quad \forall \vec{c} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

которое, для *всякого* решения прямой задачи, с использованием (12) для \mathcal{T}_j , порождает *закон инвариантности* — тождество:

$$p_0 (|c_0^{(0)}|^2 - |c_1^{(0)}|^2) = p_1 (|c_0^{(1)}|^2 - |c_1^{(1)}|^2) = \dots = p_{N+1} (|c_0^{(N+1)}|^2 - |c_1^{(N+1)}|^2). \quad (14)$$

В частности, для нормированного по прохождению решения прямой задачи из (14) вытекает принципиальное для *диэлектрических* сред соотношение:

$$|c_0^{(0)}(\vec{t})|^2 - |c_1^{(0)}(\vec{t})|^2 = \Theta, \quad \left(\Theta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{p_{N+1}}{p_0} \stackrel{\text{def}}{=} \text{const} > 0 \right), \quad (15)$$

где

$$\vec{t} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{\nu} \omega, \quad \vec{\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \{\nu_1, \dots, \nu_N\}, \text{ — направляющий вектор } N\text{-слойной системы,} \quad (16)$$

в силу чего $|c_0^{(0)}(\vec{t})|^2 \neq 0$, т.к. $|c_0^{(0)}(\vec{t})|^2 = |c_1^{(0)}(\vec{t})|^2 + \Theta \geq \Theta > 0 \quad \forall \vec{t}$.

Определение. *Амплитудным коэффициентом отражения* от N -слойной системы называется отношение:

$$r(\vec{t}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{c_1^{(0)}(\vec{t})}{c_0^{(0)}(\vec{t})} \quad (17)$$

Определение. *Энергетическим коэффициентом отражения* от N -слойной системы называется отношение:

$$R(\vec{t}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|c_1^{(0)}(\vec{t})|^2}{|c_0^{(0)}(\vec{t})|^2} \quad (18)$$

Из приведенных определений очевидно, что $R = |r|^2$, а также, что для нормированного по прохождению решения прямой задачи тождество (14) может быть переписано в виде:

$$1 - R(\vec{t}) = \frac{\Theta}{|c_0^{(0)}(\vec{t})|^2}$$

Определение. *Энергетическим коэффициентом пропускания* N -слойной системы называется отношение:

$$T(\vec{t}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Theta}{|c_0^{(0)}(\vec{t})|^2}, \quad (19)$$

в силу которого тождество (15) может быть записано в классическом виде закона *сохранения энергии*:

$$R(\vec{t}) + T(\vec{t}) = 1.$$

После подстановки каждого из уравнений *основной системы* (9) в предыдущее уравнение, используя *матрицу передачи* \mathcal{T} всей системы N диэлектрических слоев, (9) предстанет в "окончательном" виде соотношения:

$$\vec{c}_0 = \mathcal{T} \vec{c}_{N+1}, \quad (20)$$

$$\mathcal{T} = \prod_{j=1}^{N+1} \mathcal{T}_j \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \tau_{00} & \tau_{01} \\ \tau_{10} & \tau_{11} \end{pmatrix}, \quad \tau_{j_0 j_{N+1}}(\omega) = \sum_J Q_J(\vec{\theta}) e^{-i\Lambda_J(\vec{\nu})\omega}, \quad (21)$$

$$J = (j_0; j_1, \dots, j_N; j_{N+1}), \quad j_k = 0, 1, \quad (k = 0, 1, \dots, N); \quad j_0 = 0, 1; \quad j_{N+1} = 0, 1.$$

Показатели Фурье и **коэффициенты Фурье** элементов $\tau_{j_0 j_{N+1}}(\omega)$ \mathcal{T} :

$$\Lambda_J(\vec{\nu}) = \sum_{k=1}^N (-1)^{j_k} \nu_k, \quad Q_J(\vec{\theta}) = \prod_{k=1}^{N+1} \frac{1 + (-1)^{j_{k-1} \oplus j_k} \theta_k}{2}. \quad (22)$$

Замечание. Коэффициенты Фурье $Q_J(\vec{\theta})$ элементов матрицы \mathcal{T} *существенно* зависят от положения этих элементов в матрице, определяемых значениями первой и последней координат $j_0 = 0, 1$, $j_{N+1} = 0, 1$ двоичного вектора J .

Однако, мы, обычно, будем использовать упрощенные обозначения для этих коэффициентов, не вводя эти индексы явно, если это не может привести к путанице. В особых же случаях мы будем напоминать о неявных индексах, используя, вообще говоря, только часть их значений в виде верхних указателей.

Например, $Q_J^{(s)}$, $s = 0, 1$, будут ниже обозначаться коэффициенты Фурье элементов *первого* столбца матрицы \mathcal{T} .

Преобразование $\boxed{\vec{v} \cdot \omega \stackrel{\text{def}}{=} \vec{t}}$ в (21), упоминавшееся в (16), приводит к 2π -периодическим по каждой из переменных t_j *порождающим функциям*:

$$\tau_{j_0 j_{N+1}}(\vec{t}) = \sum_J Q_J(\vec{\theta}) \exp(-i\Lambda_J(\vec{t})), \text{ — "exp" представление} \quad (23)$$

$$\det \mathcal{T}(\vec{t}) = |\tau_{00}(\vec{t})|^2 - |\tau_{10}(\vec{t})|^2 \equiv \Theta, \quad \tau_{11}(\vec{t}) = \tau_{00}^*(\vec{t}), \quad \tau_{01}(\vec{t}) = \tau_{10}^*(\vec{t}),$$

имеющим *алгебраическое представление*: $\tau_{j_0 j_{N+1}}(\vec{t}) = u_{j_0 j_{N+1}}(\vec{t}) - i \cdot v_{j_0 j_{N+1}}(\vec{t})$

$$\tau_{j_0 j_{N+1}}(\vec{t}) = \sum_L (-i)^{\|L\|} \alpha_L \Psi_L(\vec{t}), \quad \Psi_L(\vec{t}) = \prod_{k=1}^N x_k^{l_k} y_k^{l_k}, \quad L = (l_1, \dots, l_N) \quad (24)$$

$$l_k = 0, 1 \quad (k = 1, \dots, N), \quad \|L\| = \sum_{k=1}^N l_k, \quad x_k = \cos t_k, \quad y_k = \sin t_k,$$

которое, кроме прочего, вводит в рассмотрение *вычислительные параметры* диэлектрических систем — коэффициенты α_L в (24): $\vec{\alpha} = \mathcal{H} \vec{Q}$, где \mathcal{H} — матрица Адамара, а вектор \vec{Q} составляют коэффициенты Фурье представления (23): $\vec{Q} = (Q_0, Q_1, \dots, Q_{2^N-1})$.

Замечание. Упрощенные обозначения для координат векторов \vec{Q} будут использоваться и для координат векторов $\vec{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2^N-1})$.

Профилирующие функции определяются соотношением:

$$F_{\vec{p}}^{(s)}(\vec{t}) \stackrel{\text{def}}{=} |C_{(s)}^{(0)}(\vec{t})|^2, \quad s = 0, 1, \quad (25)$$

и, в силу тождества (15), отличаются на *const* — Θ .

Нетрудно показать, что *точные, неуплучшаемые на классе* N -слойных диэлектрических систем оценки $F_{\vec{p}}^{(s)}(\vec{t})$ имеют вид:

$$\max_{\vec{t}} F_{\vec{p}}^{(s)}(\vec{t}) \leq \frac{1}{2} [\mathbf{A} + (-1)^s \mathbf{B}] \stackrel{\text{def}}{=} \max_{0 \leq k \leq 2^N-1} \left\{ \left[\alpha_k^{(s)} \right]^2 \right\}, \quad s = 0, 1, \quad (26)$$

где $\mathbf{A} = \prod_{\{\theta_k > 1\}} \theta_k$, $\mathbf{B} = \prod_{\{\theta_k < 1\}} \theta_k$, влекут *точные, неуплучшаемые на классе*

N -слойных систем оценки энергетического коэффициента отражения $\mathbf{R}(\omega)$:

$$\max_{\vec{t}} \mathbf{R}(\vec{t}; \vec{p}) \leq \Theta^{-1} \cdot \max_{0 \leq k \leq 2^N-1} \left\{ \left[\alpha_k^{(1)} \right]^2 \right\}, \quad (27)$$

где использована оценка снизу: $\Theta \leq F_{\vec{p}}^{(0)}(\vec{t})$ и оценка сверху (26) для $F_{\vec{p}}^{(1)}(\vec{t})$.

Если целью решения прямой задачи считать отыскание амплитудного коэффициента отражения от системы $\mathbf{r}(\omega)$, то из определения (17) и формул (8), (9) получаются рекуррентные формулы Власова [2]:

$$\mathbf{r}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} r_0(\omega), \quad r_{j-1}(\omega) = \frac{q_j + r_j(\omega) \exp(2i\nu_j \omega)}{1 + q_j r_j(\omega) \exp(2i\nu_j \omega)}, \quad r_{N+1}(\omega) \equiv 0 \quad (28)$$

(аналог формулы Эйри для одного слоя [1]), которые используются последовательно при $j = N + 1, N, \dots, 2, 1$, $\nu_{N+1} \stackrel{\text{def}}{=} 0$, а параметры Френеля для каждой пары соседних сред вычисляются по формуле: $q_j = \frac{1-\theta_j}{1+\theta_j}$, $|q_j| < 1$.

Для решения обратной задачи важны следующие особенности множества показателей Фурье — **спектра почти-периодических** функций $r_{j-1}(\omega)$ [11], которые выясняются при разложении $r_{j-1}(\omega)$ в ряд Фурье [18]:

1°. Имеют "линейчатый" **спектр** — показатели Фурье состоят из целых кратных электрических толщин слоев ν_j с номерами j большими текущего $j - 1$.

2°. $\forall j$ **нуль** является точкой **спектра** функции $r_{j-1}(\omega)$.

3°. Ближайшей к 0 точкой **спектра** $r_{j-1}(\omega)$ является $2\nu_j > 0$.

3. Постановка и решение обратной амплитудной задачи

Постановка задачи:

По заданному амплитудному коэффициенту отражения $r \stackrel{\text{def}}{=} r(\omega)$ найти число слоев N и электродинамические параметры диэлектрической системы:

$$\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_{N+1}), \quad \theta_j = \frac{p_j}{p_{j-1}} > 0, \quad j = 1, 2, \dots, N + 1 \quad \text{и}$$

$$\vec{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_N), \quad \nu_j = (\varepsilon_j \mu_j)^{1/2} h_j > 0, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Решение задачи

Вычисляя **среднее** значение почти-периодической функции $r(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} r_0(\omega)$:

$$M[r_0(\omega)] \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Omega \rightarrow +\infty} \int_0^{\Omega} r_0(\omega) d\omega = q_1,$$

— мы получим значение величины электродинамического параметра q_1 первого слоя.

Вычисления средних значений почти-периодических функций $r_0(\omega) \exp(-i\lambda\omega)$ при значениях λ в пределах интервала $0 < \lambda < 2\nu_1$ будут давать 0, т.к. в этом интервале нет ни одной точки спектра почти-периодической функции $r_0(\omega)$:

$$M[r_0(\omega) \exp(-i\lambda\omega)] \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Omega \rightarrow +\infty} \int_0^{\Omega} r_0(\omega) \exp(-i\lambda\omega) d\omega = 0, \quad \forall \lambda : 0 < \lambda < 2\nu_1.$$

Впервые, после точки $\lambda = 0$, — левого конца интервала $0 < \lambda < 2\nu_1$, **среднее** значение почти-периодической функции $r_0(\omega) \exp(-i\lambda\omega)$ будет отлично от нуля при $\lambda = 2\nu_1$, — ближайшей к нулю точке спектра почти-периодической функции $r_0(\omega)$:

$$M[r_0(\omega) \exp(-i2\nu_1\omega)] \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Omega \rightarrow +\infty} \int_0^{\Omega} r_0(\omega) \exp(-i2\nu_1\omega) d\omega = (1 - q_1^2)q_2 \neq 0,$$

которое, определяет величину электродинамического параметра $\nu_1 > 0$ для 1-го слоя.

По значениям пары электродинамических параметров для первого слоя (q_1, ν_1) , из **обращенной** рекуррентной формулы Власова (28) при $j = 1$, найдем $r_1(\omega)$:

$$r_1(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{r_0(\omega) - q_1}{1 - q_1 r_0(\omega)} \exp(-2i\nu_1\omega).$$

Далее итерационная *процедура* "расшифровки" N -слойной диэлектрической системы повторяется с заменой $j = 0$, на $j = 1$. При этом будет найден коэффициент отражения $r_2(\omega)$, а затем, при $j = 2$ будет найден коэффициент отражения $r_3(\omega)$ и, так далее, до $j = N$.

Сигналом к окончанию процедуры "расшифровки" будет такая ситуация, когда *среднее* значение набора почти-периодических функций $r_k(\omega) \exp(-i\lambda\omega)$ будет оставаться равным нулю при любых значениях λ . Это будет означать, что последний найденный коэффициент $r_k(\omega)$ не имеет других точек спектра, кроме $\lambda = 0$, т.е. является *постоянной* величиной, — коэффициентом отражения Френеля q_{N+1} на правой границе π_{N+1} диэлектрической системы.

Это условие определяет величину N : $N = k + 1$, где k — последнее значение номера очередного найденного коэффициента отражения в итерационной процедуре, *не являющегося* постоянной.

Теорема. По амплитудному коэффициенту отражения $r(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} r_0(\omega)$ *однозначно* находятся число слоев N и *электродинамические* параметры N -слойной диэлектрической системы: $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_{N+1})$ и $\vec{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_N)$.

4. Нахождение физических параметров по электродинамическим

Утверждение. *Физические* параметры

$$\vec{z} = \{\varepsilon_0, \mu_0; \varepsilon_1, \mu_1, h_1; \dots; \varepsilon_N, \mu_N, h_N; \varepsilon_{N+1}, \mu_{N+1}\}$$

определяются по $r(\omega)$, вообще говоря, *неоднозначно*.

Действительно, рассмотрим уравнения, связывающие между собой физические \vec{z} и электродинамические \vec{u} параметры N -слойной диэлектрической системы:

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_j}{\mu_j} \left[\frac{\varepsilon_{j-1}}{\mu_{j-1}} \right]^{-1} &= \theta_j^2, \quad (j = 1, \dots, N + 1) \\ \varepsilon_j \mu_j h_j^2 &= \nu_j^2 \quad (j = 1, \dots, N) \end{aligned} \quad (29)$$

Логарифмируя уравнения (29) и обозначая

$$x_k = \ln z_k \quad (k = 1, \dots, 3N + 4), \quad b_m = 2 \ln u_m \quad (m = 1, \dots, 2N + 1), \quad (30)$$

получим линейную систему из $(2N + 1)$ -го уравнения с $(3N + 4)$ -мя неизвестными:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_{3N+4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ b_{2N+1} \end{bmatrix} \quad (31)$$

Ранг матрицы системы (31) равен $2N + 1$, а полный ортогональный базис ее ядра образуют векторы

$$\tilde{\mathbf{x}}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{x}}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \tilde{\mathbf{x}}_N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{x}}_{N+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{x}}_{N+2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (32)$$

Поэтому всякое решение системы (31) имеет единственное представление

$$\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{x}}^0 = \gamma_0 \tilde{\mathbf{x}}_0 + \gamma_1 \tilde{\mathbf{x}}_1 + \dots + \gamma_N \tilde{\mathbf{x}}_N + \gamma_{N+1} \tilde{\mathbf{x}}_{N+1} + \gamma_{N+2} \tilde{\mathbf{x}}_{N+2}, \quad (33)$$

где $\tilde{\mathbf{x}}^0$ – нормальное решение (31), а γ_j , ($j = 0, \dots, N + 2$) – некоторые числа.

Определение. Две N -слойные диэлектрические системы с физическими параметрами

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{z}}^{(0)} &= \{\varepsilon_0^{(0)}, \mu_0^{(0)}; \varepsilon_1^{(0)}, \mu_1^{(0)}, h_1^{(0)}; \dots; \varepsilon_N^{(0)}, \mu_N^{(0)}, h_N^{(0)}; \varepsilon_{N+1}^{(0)}, \mu_{N+1}^{(0)}\} \\ \tilde{\mathbf{z}}^{(1)} &= \{\varepsilon_0^{(1)}, \mu_0^{(1)}; \varepsilon_1^{(1)}, \mu_1^{(1)}, h_1^{(1)}; \dots; \varepsilon_N^{(1)}, \mu_N^{(1)}, h_N^{(1)}; \varepsilon_{N+1}^{(1)}, \mu_{N+1}^{(1)}\} \end{aligned}$$

назовем **эквивалентными**, если они имеют одинаковые электродинамические параметры $\tilde{\mathbf{u}} = \{\theta_1, \nu_1; \dots; \theta_N, \nu_N; \theta_{N+1}\}$.

Замечание. Принятое определение является отношением эквивалентности в смысле соответствующего понятия общей алгебры, т.к. обладает всеми необходимыми для этого свойствами рефлексивности, симметрии и транзитивности.

Поэтому все N -слойные магнитоэлектрические системы разбиваются на непесекающиеся классы эквивалентных между собой систем.

Определение. Элементарным преобразованием первого типа системы слоев с параметром $\tau > 0$ будем называть преобразование вектора $\tilde{\mathbf{z}}$ ее физических параметров в вектор $\tilde{\mathbf{z}}'$, при котором в τ раз изменяются диэлектрические ε_j ($j = 0, \dots, N+1$) и в $1/\tau$ магнитные μ_j ($j = 0, \dots, N+1$) проницаемости всех слоев системы, а конечные толщины слоев h_j ($j = 1, \dots, N$) остаются неизменными.

Элементарным преобразованием второго типа системы слоев, относительно j -го слоя системы $j = 0, \dots, N+1$, с параметром $\tau_j > 0$ будем называть преобразование вектора $\tilde{\mathbf{z}}$ ее физических параметров в вектор $\tilde{\mathbf{z}}'$, при котором в τ_j раз изменяются диэлектрические ε_j и магнитные μ_j проницаемости j -го слоя и в $1/\tau_j$ толщина h_j j -го слоя системы, если он имеет конечную толщину, т.е. если $j \neq 0, j \neq N + 1$.

Всего, без учета величины параметров τ , τ_j ($j = 0, \dots, N + 1$), имеется ровно $N + 3$ независимых между собой элементарных преобразования N -слойной диэлектрической системы, каждое из которых имеет ясный физический смысл.

Выполнение любого числа элементарных преобразований слоистой системы не меняет вектора \vec{u} ее электродинамических параметров.

Очевидно, что каждому из $N + 3$ элементарных преобразований отвечает свой базисный вектор ядра матрицы системы уравнений (31).

Если вектор \vec{z}' получен из вектора \vec{z} при элементарном преобразовании с параметром τ или τ_j ($j = 0, \dots, N + 1$), то соответствующие \vec{z} и \vec{z}' при преобразовании (30) векторы \vec{x} и \vec{x}' отличаются на векторы

$$\vec{x}' - \vec{x} = \gamma_{N+2} \vec{x}_{N+2}, \quad (\gamma_{N+2} = \ln \tau), \quad \vec{x}' - \vec{x} = \gamma_j \vec{x}_j, \quad (\gamma_j = \ln \tau_j, \quad j = 0, \dots, N + 1), \quad (34)$$

где использованы векторы (32).

Наоборот, если вектор $\vec{x}' - \vec{x}$ имеет вид (33), то \vec{z}' и \vec{z} связаны элементарными преобразованиями первого или второго типов с параметрами $\tau = e^{\gamma_{N+2}}$ или $\tau_j = e^{\gamma_j}$, ($j = 0, \dots, N + 1$).

На основании (29), (30) всякое решение \vec{z} системы уравнений (26), отвечающее решению \vec{x} системы (31) получается из решения $\vec{z}^{(0)}$ (32), отвечающего нормальному решению $\vec{x}^{(0)}$ (31), при помощи композиции элементарных преобразований, определяемых векторами (32) и числами $\tau = e^{\gamma_{N+2}}$, $\tau_j = e^{\gamma_j}$, ($j = 0, \dots, N + 1$).

Поэтому представление (31) по-существу описывает **все** эквивалентные между собой диэлектрические N -слойные системы, имеющие одинаковые коэффициенты отражения.

5. Просветление и антипросветление

Определение. N -слойная диэлектрическая система (МДС) дает **просветление** или **антипросветление** на частоте ω , если выполнены **неравенства**:

$$R(\omega; \vec{p}, \vec{v}) < R_F \quad \text{или} \quad R(\omega; \vec{p}, \vec{v}) > R_F, \quad (35)$$

где R_F — коэффициент отражения Френеля на границе \mathbb{R}_- и \mathbb{R}_+ (без МДС).

Определение. МДС дает **окно просветления** или **антипросветления** (Ω_1, Ω_2) по частоте ω , если (35) справедливо $\forall \omega \in (\Omega_1, \Omega_2)$.

Упрощенные неравенства просветления (антипросветления) имеют вид:

$$F_{\vec{p}; \vec{v}}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} |C_1(\omega)|^2 < \alpha_0^2, \quad \left(F_{\vec{p}; \vec{v}}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} |C_1(\omega)|^2 > \alpha_0^2 \right) \quad (36)$$

Замечание. **Упрощенные** неравенства (36) **эквивалентны** (35).

Определение. МДС дает **гарантированное просветление** (**антипросветление**) на частоте ω , если:

$$R(\omega; \vec{p}, \vec{v}) < \delta_0 \cdot R_F, \quad 0 < \delta_0 < 1, \quad (37)$$

$$\left(R(\omega; \vec{p}, \vec{v}) > \delta_1 \cdot R_F, \quad 1 < \delta_1 < \text{const} < R_F^{-1} \right) \quad (38)$$

\exists **окно** гарантированного **просветления** (**антипросветления**) МДС (Ω_1, Ω_2), если (37) или (38) справедливо $\forall \omega \in (\Omega_1, \Omega_2)$.

Лемма о гарантированном просветлении (антипросветлении)

Неравенства (37), (38) для *гарантированного* просветления (антипросветления) на частоте ω эквивалентны *упрощенным*:

$$F_{\vec{p}; \vec{v}}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} |C_1(\omega)|^2 < h_0 \cdot \alpha_0^2, \quad F_{\vec{p}; \vec{v}}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} |C_1(\omega)|^2 > h_1 \cdot \alpha_0^2, \quad (39)$$

где $0 < h_0 = \frac{\delta_0 \cdot \Theta}{(1-\delta_0)\alpha_0^2 + \Theta} < 1$ и $1 < h_1 = \frac{\delta_1 \cdot \Theta}{(1-\delta_1)\alpha_0^2 + \Theta} < \frac{\max_{0 \leq j \leq 2^N - 1} \{\alpha_j^2\}}{\alpha_0^2}$.

6. Математические постановки оптимизационных задач просветления и антипросветления

В силу замечания после формулы (36) и (16) в задачах просветления и синтеза диэлектрических систем по задаваемым энергетическим характеристикам можно иметь дело с одной функцией, которую будем называть *профилирующей*:

$$F(\vec{t}) \stackrel{\text{def}}{=} |C_1^{(N)}(\vec{t})|^2, \quad \vec{t} = (t_1, \dots, t_N). \quad (40)$$

Она имеет период $\pi \forall t_j, j = 1, \dots, N$, основной N -мерный куб ее периодов будем обозначать T_0^N , а границу этого куба $\Gamma_{T_0^N}$.

Определение. *Областью просветления (антипросветления)* для $F_{\vec{p}}^{(1)}(\vec{t})$ называется множество точек $\vec{t} \in T_N$, для которых выполнены неравенства

$$F_{\vec{p}}^{(1)}(\vec{t}) < \alpha_0 \quad \text{или, соответственно,} \quad F_{\vec{p}}^{(1)}(\vec{t}) > \alpha_0 \quad (41)$$

С учетом периодичности профилирующая функция $F(\vec{t})$ всегда имеет *счетное* множество областей просветления (если они вообще существуют при данном \vec{p}).

Если $G_{\vec{p}}$ – какая-либо область просветления, то всякая МДС, получаемая из $F(\vec{t})$ по (16) с \vec{v} так, что пересечение луча (16) с $G_{\vec{p}}$ состоит из *более* чем одной точки, обязательно имеет хотя бы одно *окно просветления*.

Постановки задач просветления³

1°. *Классическая* (на фиксированной частоте ω_0):

При заданной частоте ω_0 подобрать параметры N слоев \vec{p} , – материалы, и \vec{v} , – электрические толщины, чтобы *минимизировать* по \vec{p} и \vec{v} функционал качества системы – значение энергетического коэффициента отражения на частоте ω_0 – $R(\vec{p}; \vec{v}; \omega_0)$:

$$R(\vec{p}; \vec{v}; \omega_0) \xrightarrow{\vec{p}, \vec{v}} \min \quad \iff \quad F(\vec{p}; \vec{v}; \omega_0) \xrightarrow{\vec{p}, \vec{v}} \min$$

2°. Просветление *в смысле Чебышева* (для интервала частот $[\Omega_1, \Omega_2]$):

Для фиксированного интервала частот $[\Omega_1, \Omega_2]$ подобрать параметры N слоев \vec{p} , – материалы, и \vec{v} , – электрические толщины, чтобы *минимизировать* по \vec{p} и \vec{v} функционал качества системы – максимум на $[\Omega_1, \Omega_2]$ энергетического коэффициента отражения $R(\omega; \vec{p}, \vec{v})$:

$$\max_{\Omega_1 \leq \omega \leq \Omega_2} R(\omega; \vec{p}, \vec{v}) \xrightarrow{\vec{p}, \vec{v}} \min \quad \iff \quad \max_{\Omega_1 \leq \omega \leq \Omega_2} F(\omega; \vec{p}, \vec{v}) \xrightarrow{\vec{p}, \vec{v}} \min$$

³Приведены три постановки задач просветления: слева исходная постановка задачи, а справа – *эквивалентная* ей *упрощенная* постановка. Эквивалентность обоснована ранее [13].

3°. **Ослабленная** задача в смысле Чебышева (для интервала частот $[\Omega_1, \Omega_2]$) отличается от "общей" задачи Чебышева тем, что **оптимизация** проводится только по вектору \vec{v} , при фиксированном наборе материалов слоев — \vec{p} :

$$\max_{\Omega_1 \leq \omega \leq \Omega_2} R(\omega; \vec{p}, \vec{v}) \xrightarrow{\vec{v}} \min \iff \max_{\Omega_1 \leq \omega \leq \Omega_2} F(\omega; \vec{p}, \vec{v}) \xrightarrow{\vec{v}} \min$$

Замечание. Существуют другие полезные постановки задач просветления. В частности, ниже решена **ослабленная** классическая задача.

Постановки задач антипросветления отличаются от задач просветления важным **дополнительным** условием ограниченности \vec{p} :

$$\exists \text{ const } \hat{p}, \check{P} \text{ такие, что: } 0 < \hat{p} \leq \min_{1 \leq k \leq N} p_k \leq \max_{1 \leq k \leq N} p_k \leq \check{P} < +\infty, \quad (42)$$

которое будем предполагать выполненным всюду ниже.

Постановки задач антипросветления⁴

1°. **Классическая** (на фиксированной частоте ω_0):

При заданной частоте ω_0 подобрать параметры N слоев \vec{p} , — материалы, и \vec{v} , — электрические толщины, чтобы **максимизировать** по \vec{p} и \vec{v} функционал качества системы — значение энергетического коэффициента отражения на частоте ω_0 — $R(\vec{p}; \vec{v}; \omega_0)$:

$$R(\vec{p}; \vec{v}; \omega_0) \xrightarrow{\vec{p}, \vec{v}} \max \iff F(\vec{p}; \vec{v}; \omega_0) \xrightarrow{\vec{p}, \vec{v}} \max$$

2°. Антипросветление **в смысле Чебышева** (для интервала частот $[\Omega_1, \Omega_2]$):

Для фиксированного интервала частот $[\Omega_1, \Omega_2]$ подобрать параметры N слоев \vec{p} , — материалы, и \vec{v} , — электрические толщины, чтобы **максимизировать** по \vec{p} и \vec{v} функционал качества системы — минимум на $[\Omega_1, \Omega_2]$ энергетического коэффициента отражения $R(\omega; \vec{p}, \vec{v})$:

$$\min_{\Omega_1 \leq \omega \leq \Omega_2} R(\omega; \vec{p}, \vec{v}) \xrightarrow{\vec{p}, \vec{v}} \max \iff \min_{\Omega_1 \leq \omega \leq \Omega_2} F(\omega; \vec{p}, \vec{v}) \xrightarrow{\vec{p}, \vec{v}} \max$$

3°. **Ослабленная** задача в смысле Чебышева (для интервала $[\Omega_1, \Omega_2]$) отличается от "общей" задачи Чебышева тем, что **оптимизация** проводится только по вектору \vec{v} , при фиксированном — \vec{p} :

$$\min_{\Omega_1 \leq \omega \leq \Omega_2} R(\omega; \vec{p}, \vec{v}) \xrightarrow{\vec{v}} \max \iff \min_{\Omega_1 \leq \omega \leq \Omega_2} F(\omega; \vec{p}, \vec{v}) \xrightarrow{\vec{v}} \max$$

Замечание. Для задач антипросветления могут быть полезны и другие постановки.

7. Решение ослабленной классической задачи просветления

Для N -слойной диэлектрической системы **ослабленная** классическая задача решается с использованием свойства **периодичности** профилирующей функции.

В каждом замкнутом периоде $T_N \exists \vec{t}_0 \in T^N$ такой, что на этом векторе достигается минимум профилирующей функции по всему периоду:

$$F_{\vec{p}}^{(1)}(\vec{t}_0) = \min_{\vec{t} \in T^N} F_{\vec{p}}^{(1)}(\vec{t})$$

⁴Приведены три постановки задач антипросветления: слева исходная постановка задачи, а справа — **эквивалентная** ей **упрощенная** постановка.

Если (при заданном \vec{p}) $F_{\vec{p}}^{(1)}(\vec{t}_0) \geq \alpha_0^2$, то решений задачи не существует, т.к. это неравенство будет справедливо и для всех других $\vec{t} \in T^N$.

Если же $F_{\vec{p}}^{(1)}(\vec{t}_0) < \alpha_0^2$, то, ввиду условия $\omega_0 \neq 0$, решение задачи дает "направляющий" вектор системы (16) $\vec{v}_0 = \frac{1}{\omega_0} \vec{t}_0$.

Замечание. В силу периодичности $F_{\vec{p}}^{(1)}(\vec{t})$ по каждой переменной $t_j, j = 1, \dots, N$, в каждом из периодов существует хотя бы один такой же минимум, а следовательно, **счетное** множество равных локальных минимумов $F_{\vec{p}}^{(1)}(\vec{t})$, каждый из которых дает свое решение ослабленной классической задачи просветления по указанной выше формуле.

Если при заданном \vec{p} существуют нули $F_{\vec{p}}^{(1)}(\vec{t})^5$, то именно они будут порождать **неулучшаемые** решения ослабленной классической задачей просветления.

В частности, такая возможность реализуется, если \vec{p} выбран так, чтобы какой-то из вычислительных параметров $\alpha_k, k = 1, 2, \dots, 2^N - 1$ равен нулю, т.к. **все** значения α_k достигаются профилирующей функцией $F_{\vec{p}}^{(1)}(\vec{t})$ при подходящем выборе $\vec{t} = \vec{t}(\vec{p})$.

Замечание. Условие $\alpha_k = 0$ является **достаточным** для существования **неулучшаемых** решений ослабленной классической задачи просветления.

8. Решение задачи Чебышева при $N = 1$

При $N = 1$ профилирующая функция $F_{p,\nu}(t)$ имеет вид:

$$F_{p,\nu}(t) = \alpha_0^2 \cos^2 t + \alpha_1^2 \sin^2 t$$

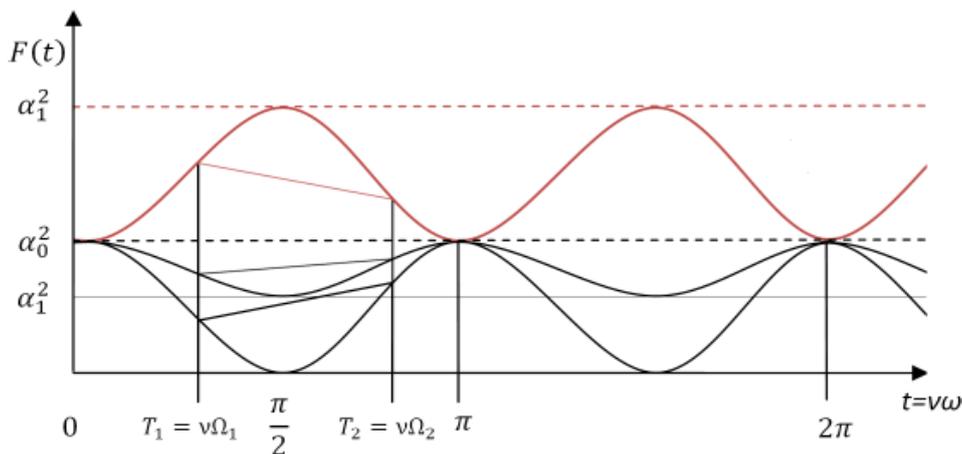


Рис. 1: К задаче просветления (антипросветления) Чебышева при $N = 1$. Нижние профилирующие функции $F_p(t)$ (при разных p) относятся к случаю просветления, а верхняя $F_p(t)$ относится к случаю антипросветления.

Решение **полной** задачи просветления в смысле Чебышева уже в случае $N = 1$ является нетривиальной задачей, имеющей методический интерес для последующего.

⁵При $N = 2$, по-видимому впервые, зоны изменения параметров \vec{p} , для которых соответствующие функции $\mathbf{R}(\omega_0; \vec{p}, \vec{v})$ **имеют** нули, были указаны в [24]. В литературе изображение таких областей известно под названием диаграммы Шустера.

Сделаем это в два этапа. Сначала решим ослабленную задачу, проводя минимизацию только по одному параметру ν , а затем расширим процесс минимизации, включив в него параметр p .

Записывая основное неравенство (35) для произвольного $\omega \in [\Omega_1, \Omega_2]$ можно получить *необходимые* и *достаточные* условия *существования* окон просветления, *подходящих* для просветления сразу всего интервала частот $[\Omega_1, \Omega_2]$:

$$1^\circ. \quad t \neq k\pi. \quad 2^\circ. \quad \alpha_1^2 < \alpha_0^2.$$

3°. Условие *погружения* интервала $[\Omega_1, \Omega_2]$ в окно просветления:

$$k\pi < \nu\Omega_1 < \nu\Omega_2 < (k+1)\pi \iff \boxed{\frac{\Omega_2}{\Omega_1} < 1 + \frac{1}{k}} \iff \frac{k\pi}{\Omega_1} < \nu < \frac{(k+1)\pi}{\Omega_2}$$

4°. Конечность множества "подходящих" окон просветления: $k = 0, \dots, K$, где $0 \leq K < +\infty$ — наибольшее k , для которого выполнено условие *погружения*.

Для решения ослабленной задачи просветления в смысле Чебышева мы используем **Метод подвижного отрезка** (см. [23]).

Если указанные выше необходимые и достаточные условия выполнены, то в соответствии с неравенствами п. 3°. для ν в последней форме, "подвижный" отрезок $T_1 = \nu\Omega_1, \nu\Omega_2 = T_2$ попадет в одно из $k = 0, \dots, K$ подходящих окон просветления.

Так на Рис. 1 изображен случай, когда значение ν выбрано так, что $T_1 = \nu\Omega_1, \nu\Omega_2 = T_2$ "попал" в нулевое окно ($k = 0$) просветления: $(0, \pi)$ и точка минимума $F(t)$ в рассматриваемом окне $-\pi/2$, — оказалась ближе к левому концу T_1 *подвижного* отрезка.

В этом случае увеличение параметра ν приводит к увеличению функционала качества, которое достигается в правом конце T_2 *подвижного* отрезка, а уменьшение ν — к уменьшению функционала качества.

Если уменьшать ν , то уменьшение функционала качества будет продолжаться до тех пор, пока значения $F(t)$ на концах *подвижного* отрезка не сравняются между собой: $F(T_1) = F(T_2)$.

Последнее равенство есть условие *оптимума* по ν , т.к. при дальнейшем уменьшении ν значение функционала качества, которое теперь будет достигаться в левом конце T_1 *подвижного* отрезка, будет монотонно возрастать.

Аналогичное рассуждение показывает сходимость процесса оптимизации и тогда, когда значение начальной величины ν для рассматриваемого подходящего окна таково, что точка минимума $F(t)$ в рассматриваемом окне $-\pi/2$, — оказалась ближе к правому концу T_2 *подвижного* отрезка.

Тогда максимальное значение функционала качества достигается в левом конце *подвижного* отрезка и к оптимизации ведет увеличение ν до тех пор, пока не будет достигнуто то же самое условие оптимума: $F(T_1) = F(T_2)$.

Для полноты обоснования алгоритма подвижного отрезка необходимо еще рассмотреть два других возможных варианта расположения *подвижного* отрезка в окне просветления в зависимости от начального значения ν , когда минимум $F(t)$ не попадает на *подвижный* отрезок: минимум находится левее левого конца подвижного отрезка или правее его правого конца.

В первом случае значение функционала качества достигается в правом конце *подвижного* отрезка и уменьшение ν будет приводить к его уменьшению. После того, как минимум $F(t)$ в точке $\pi/2$ попадает внутрь *подвижного* отрезка, ситуация сводится к изображенной на Рис. 1 и разобранный выше.

Во втором случае рассуждение проводится аналогичным образом. Только значение функционала качества достигается в левом конце *подвижного* отрезка и уве-

личение ν будет приводить к его уменьшению. После того, как минимум $F(t)$ в точке $\pi/2$ попадает внутрь *подвижного* отрезка, ситуация приводится к изображенной на Рис. 1 и разобранной выше.

Таким образом, в каждом из допустимых окон просветления $k = 0, \dots, K$ будет найден свой оптимум для задачи просветления.

Важно, что все локальные оптимумы, упорядочены по величине: величина минимумов возрастают с увеличением номера k допустимого окна просветления.

Таким образом, глобальный минимум в ослабленной задаче просветления в смысле Чебышева, всегда *существует* и достигается в нулевом окне просветления.

Для завершения решения общей задачи просветления в смысле Чебышева заметим, что профилирующая функция $F(t)$ ведет себя монотонно по параметру p в каждом из окон просветления, подходящем для просветления интервала частот $[\Omega_1, \Omega_2]$.

При $p_{\min} < p < p_{\max}$ ($p_{\min} = \min\{p_0, p_2\}$, $p_{\max} = \max\{p_0, p_2\}$) $F(t)$ равномерно монотонно убывает при увеличении p от p_{\min} до $p_* = (p_{\min}p_{\max})^{1/2}$ и равномерно монотонно возрастает при дальнейшем увеличении p от $p_* = (p_{\min}p_{\max})^{1/2}$ до p_{\max} ⁶.

Таким образом, общая задача просветления в смысле Чебышева имеет K локальных точек минимума $\nu_* \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(2k+1)\pi}{\Omega_1 + \Omega_2}$, $k = 0, 1, \dots, K$, в каждой из которых минимальные значения по параметру p достигаются при $p = p_* \stackrel{\text{def}}{=} (p_{\min}p_{\max})^{1/2}$ и при этом лучший минимум будет при $k = 0$ — в "нулевом" окне просветления: $0 < t < \pi$.

9. Структура пространства материалов \mathcal{P}_2 при $N = 2$

В пространстве параметров $\mathcal{P}_2 = \{\vec{p}\}$ есть такие линии, что поведение функции $F_{\vec{p}}(t_1, t_2)$ *качественно* меняется при "переходе" точки \vec{p} через эти линии.

Это три линии *вырождения* $V_j : \theta_j = 1$, $j = 1, 2, 3$ (см. Рис. 2, Рис. 3, Рис. 4), когда одна из пар коэффициентов Q_j в *каждой* из функций $C_l(\omega)$, $l = 0, 1$ (см. (25)), обращается в нуль, что означает *вырождение* двухслойной МДС в однослойную.

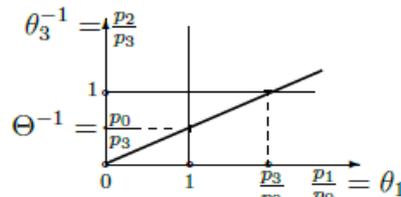
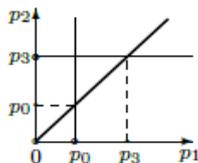


Рис. 2: \mathcal{P}_2 в *абсолютных* единицах Рис. 3: \mathcal{P}_2 в *относительных* единицах

Т.к. для $F_{\vec{p}}(t_1, t_2)$ имеется *характерный* параметр: $\Theta = p_3/p_0$, то в пространстве "материалов" \mathcal{P}_2 удобно ввести "*показательные*" координаты s_1, s_2 , которые на плоскости $\mathcal{P}_2 = \{\vec{p}\}$ приводят к следующим выражениям для отношений электродинамических параметров соседних слоев:

$$\theta_1 \stackrel{\text{def}}{=} \Theta^{s_1+1/2}, \quad \theta_3 \stackrel{\text{def}}{=} \Theta^{-s_2+1/2}, \quad \theta_2 \stackrel{\text{def}}{=} \Theta^{s_2-s_1} \quad (43)$$

Пространство \mathcal{P}_2 в координатах s_1, s_2 изображено на Рис. 4, где наборами $(ijkl)$ отмечены 24 области, для которых справедливы неравенства *упорядочения*:

$$\alpha_i^2 < \alpha_j^2 < \alpha_k^2 < \alpha_l^2 \quad (44)$$

⁶Рассматривать значения p вне интервала $p_{\min} < p < p_{\max}$ не нужно, т.к. соответствующие значения p дают профилирующие функции не пригодные для просветления.

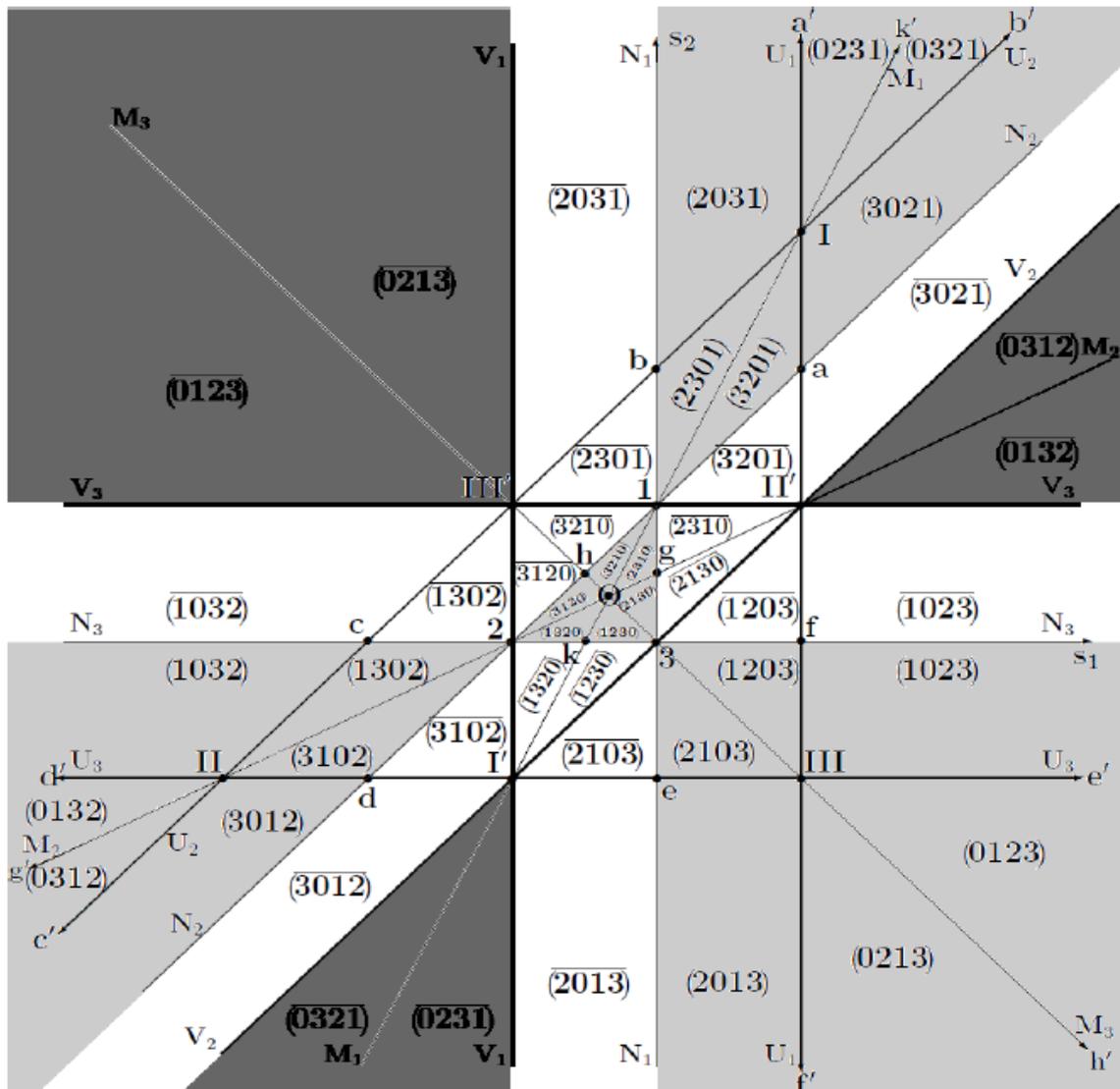


Рис. 4: Пространство параметров \mathcal{P}_2 двухслойных МДС — *карта* изменения *свойств* функции $F(t_1, t_2)$. Наборами чисел $(ijkl)$ отмечены области, для точек которых выполнены *упорядочивающие* неравенства $\alpha_i^2 < \alpha_j^2 < \alpha_k^2 < \alpha_l^2$ и условие \exists нулей. Наборами чисел $(\bar{i}j\bar{k}l)$ отмечены области, для точек которых выполнены *упорядочивающие* неравенства, а условие \exists нулей не выполняется. Три жирные линии *вырождения* $\theta_j = 1$ (на них $\alpha_j^2 = \alpha_0^2$ и $\alpha_i^2 = \alpha_l^2, i \neq j, 0, l \neq j, 0$), образуют *средний* треугольник I', II', III' . Три полужирные линии $\theta_j = \Theta$ (на них $\alpha_j^2 = \alpha_0^2$), образуют *большой* треугольник I, II, III . Три тонкие линии $\theta_j = \Theta^{1/2}$ (на них $\alpha_j = 0$), образуют *малый* треугольник $1, 2, 3$. Кроме того, нанесены три медианы всех треугольников (на них $\alpha_j^2 = \alpha_k^2$). Условие \exists нулей выполняется в замкнутом малом треугольнике и его замкнутых внешних углах.

и в которых *существуют* нули функции $F_{\vec{p}}(t_1, t_2)$, а наборами (\overline{ijkl}) — 24 области, для которых справедливы неравенства (44), но *не существует* нулей $F_{\vec{p}}(t_1, t_2)$.

Группировка областей $(ijkl)$ по доминированию, — состоит в фиксации какого-то числа из 0, 1, 2, 3 в "старшей" позиции l . При этом плоскость (s_1, s_2) оказывается разбитой на 4 *зоны*, с номерами L , но "римскими" — **I, II, III, O**.

Зона **O** состоит из 6 областей (1230), (2130), (2310), (3210), (3120), (1320) и 6 областей (1230), (2130), (2310), (3210), (3120), (1320), которые дают *средний* треугольник **I', II', III'** на Рис. 4, вершины которого, — **I', II', III'** точки *двойного* вырождения МДС. При соответствующих параметрах (s_1, s_2) двухслойная МДС вырождается в 0-слойную систему полупространств \mathbb{R}_-^3 и \mathbb{R}_+^3 .

Каждая из 6 областей зоны **O**, состоит из двух частей, смежных вдоль *линии* нулей $N_i : \alpha_i = 0$, когда одна — (*главная* $(ijk0)$), лежит в *малом* треугольнике **1, 2, 3**, а другая — (*дополнительная* — $(ijk0)$), — вне треугольника **1, 2, 3**. Ниже будет показано, что для значений (s_1, s_2) из треугольника **1, 2, 3** существуют нули функции $F_{\vec{p}}(t_1, t_2)$, а для значений (s_1, s_2) из **O**, но вне треугольника **1, 2, 3**, — у $F_{\vec{p}}(t_1, t_2)$ нулей нет.

Каждая из зон доминирования **I, II, III** — также состоит из двух частей: *главной* части — 6-и областей $(ijkl)$ (l — фиксировано!), — образующих три *трапеции*, примыкающие к треугольнику **I', II', III'** сверху (зона **I**), слева — (зона **II**) и справа — (зона **III**) и *дополнительных* частей зон **I, II, III** — противоположащих трапециям **I, II, III** *внешних* углов треугольника **I', II', III'**, состоящим из двух областей $(0jkl)$.

Каждая из 4 областей $(ijkl)$, когда 0 стоит на втором или третьем месте, каждой зоны **L, L = I, II, III**, расположена внутри трапеции **I, II, III** и устроена аналогично областям зоны **O** — это две части, разделенные линией нулей $N_i : \alpha_i = 0$.

Ниже будет показано что, для значений (s_1, s_2) внутри главных частей зон доминирования **I, II, III** существуют нули функции $F_{\vec{p}}(t_1, t_2)$, а для (s_1, s_2) из дополнительных частей — у $F_{\vec{p}}(t_1, t_2)$ нулей нет.

Изображенное на Рис. 4 пространство $\mathcal{P}_2 = \{\vec{p}\}$ двухслойных систем в координатах (s_1, s_2) представляет собой плоский *граф* с 20-ю вершинами (одна в бесконечности!), 66-ю ребрами, являющимися отрезками (см. Рис. 4) 12-и прямых: трех прямых *вырождения* ($V_j : \theta_j = 1$), трех *дуальных* прямых ($U_j : \theta_j = \Theta$), трех *прямых "нулей"* ($N_j : \theta_j = \Theta^{1/2}$), трех *медиан* ($M_j : \theta_j = \theta_{j+1}$) и $2 \times 24 = 48$ -ю гранями, которыми является каждая из половинок 24 областей упорядочения $(ijkl)$ параметров (s_1, s_2) .

Каждая грань \mathcal{P}_2 порождает *класс* двухслойных систем с "индивидуальными" свойствами, а ребра и конечные вершины порождают "промежуточные" *классы* МДС, т.к. каждому из 133 конечных элементов графа \mathcal{P}_2 соответствует, вообще говоря, "свое" поведение профилирующей функции $F_{\vec{p}}(t_1, t_2)$.

Замечание. Пространство \mathcal{P}_2 можно рассматривать как результат пересечения трех полос, присвоив вертикальной *полосе* между V_1 и U_1 — двоичный номер 001, диагональной *полосе* между V_2 и U_2 — двоичный номер 010 и горизонтальной *полосе* между V_3 и U_3 — двоичный номер 100.

Другим частям \mathcal{P}_2 присвоим номер по *правилу*: номер части плоскости получается двоичным суммированием номеров полос, *на пересечении* которых лежит эта часть плоскости.

Тогда двоичный номер 000 получит дополнение полос до плоскости, а 111 — пересечение трех полос.

10. Существование и местоположение нулей $F(t_1, t_2)$ для $N = 2$
 Уравнения (по (t_1, t_2)) для нулей коэффициента отражения имеют вид:

$$\alpha_0 x_1 x_2 - \alpha_3 y_1 y_2 = 0, \quad \alpha_1 x_1 y_2 + \alpha_2 y_1 x_2 = 0, \quad (45)$$

где $x_i \stackrel{\text{def}}{=} \cos t_i$, $y_i \stackrel{\text{def}}{=} \sin t_i$, $i = 1, 2$, а α_s , $s = 0, 1, 2, 3$ – вычислительные параметры **числителя** коэффициента отражения двухслойной системы:

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}(1 - \Theta), \quad \alpha_1 = \frac{1}{2}(\theta_3 - \theta_1 \theta_2), \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}(\theta_2 \theta_3 - \theta_1), \quad \alpha_3 = \frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1 \theta_3) \quad (46)$$

Для **существования** решений (t_1, t_2) уравнения (45) **необходимо и достаточно**, чтобы величины коэффициентов α_s , $s = 0, 1, 2, 3$ удовлетворяли неравенству:

$$\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \leq 0. \quad (47)$$

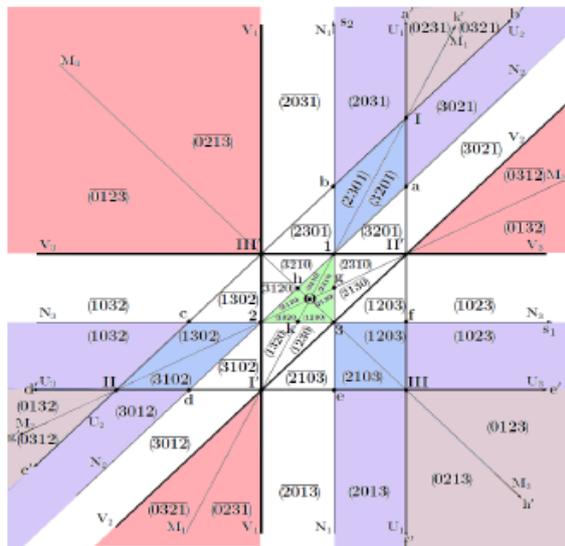


Рис. 5: Карта свойств $F(t_1, t_2)$.

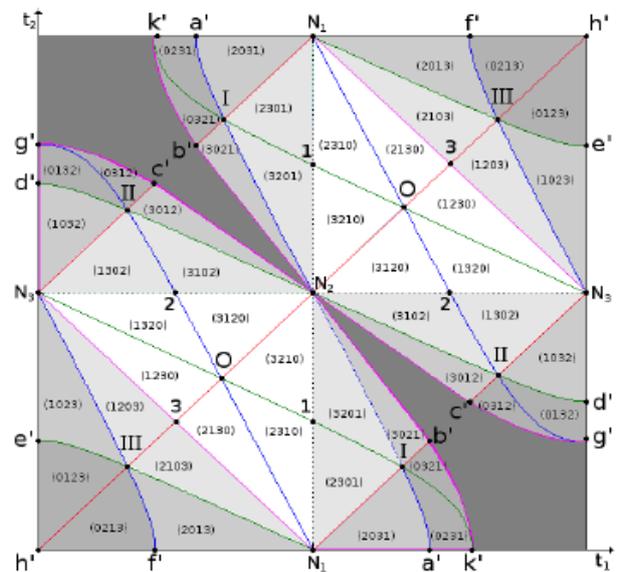


Рис. 6: Области \exists нулей $F(t_1, t_2)$ и их отсутствия.

Точки $(s_1, s_2) \in \mathcal{P}_2$, отвечающие решениям неравенства (47), заполняют **замкнутые** области **мало** треугольника 123 и трех его **внешних** углов на Рис. 4 или на его цветной копии на Рис. 5 выше.

Если для точки $(s_1, s_2) \in \mathcal{P}_2$ выполняется строгое неравенство (47), то **существуют** "внутренние" решения (45), т.е. значения $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, для которых (t_1, t_2) лежат **внутри** квадратов: $k\frac{\pi}{2} \leq t_1 \leq (k+1)\frac{\pi}{2}$, $m\frac{\pi}{2} \leq t_2 \leq (m+1)\frac{\pi}{2}$ при любых целых k, m .

1°. Внутренние решения уравнений (45) при изменении (s_1, s_2) **внутри** соответствующих зон (ijkl) в I, II, III, O – **существуют, парны** и непрерывно заполняют **внутренние** части **двух** областей (ijkl), центрально-симметричных в T_0^2 на Рис. 6.

2°. Зоны нулей, отвечающих точкам параметров (s_1, s_2) из областей (ijkl) в \mathcal{P}_2 , целиком заполняют части четвертей T_{ij} , $i = 0, 1; j = 0, 1$ периода T_0^2 с соответствующей маркировкой (ijkl) на Рис. 6 (за вычетом темносерой области, вытянутой вдоль

главной диагонали периода функции $F_{\bar{p}}(t_1, t_2) - T_0^2$, где нулей *не существует* ни при каких значениях $(s_1, s_2) \in \mathcal{P}_2$.

3°. Нули $F_{\bar{p}}(t_1, t_2)$, для разных значений (s_1, s_2) , не лежащих на линиях вырождения $V_j, j = 1, 2, 3$, **различны** и **простые**, если $s_1 \neq 0$ или $s_2 \neq 0$ или $s_2 \neq s_1$.

4°. Координаты **внутренних** нулей $F_{\bar{p}}(t_1, t_2)$ **однозначно** определяют соответствующие им значения параметров s_1, s_2 , если $s_1 \neq 0$ или $s_2 \neq 0$ или $s_2 \neq s_1$.

11. Области просветления в случае $N = 2$

Уравнение границы $\Gamma_{\bar{p}}$ области просветления $G_{\bar{p}}$ имеет вид:

$$ax_1^2y_2^2 + 2bx_1y_1x_2y_2 + cy_1^2x_2^2 + dy_1^2y_2^2 = 0, \tag{48}$$

где a, c, d, b выражены через вычислительные параметры α_j в виде:

$$a = \alpha_1^2 - \alpha_0^2, \quad c = \alpha_2^2 - \alpha_0^2, \quad d = \alpha_3^2 - \alpha_0^2, \quad b = \alpha_1\alpha_2 - \alpha_0\alpha_3. \tag{49}$$

Кривая (48) на плоскости переменных $\xi \stackrel{\text{def}}{=} \text{ctg } t_1, \eta \stackrel{\text{def}}{=} \text{ctg } t_2$, при **любых** (s_1, s_2) , для которых она не вырождена, представляет собой **гиперболу**, ветви которой, после преобразования: $t_1 \stackrel{\text{def}}{=} \text{arccctg } \xi, t_2 \stackrel{\text{def}}{=} \text{arccctg } \eta$ являются границами $G_{\bar{p}}$.

На рисунках 7 – 12 изображены **качественно** разные области просветления $G_{\bar{p}}$ для значений s_1, s_2 , когда точка (s_1, s_2) лежит **внутри** грани $(ijkl)$ или $(\overline{ijkl}) \subset \mathcal{P}_2$.

1°. Для $\forall s_1, s_2$ из внешних углов **большого** треугольника область просветления **существует, двухсвязна** (в T_0^2), имеет локальный характер и "**каплевидна**".

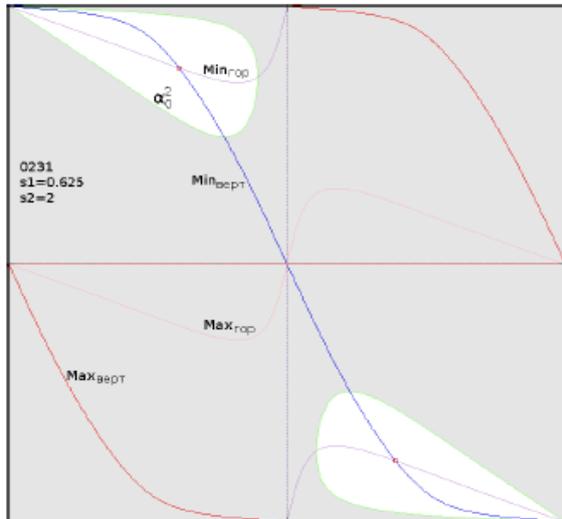


Рис. 7: Просветление для $(s_1, s_2) \in (0231)$.

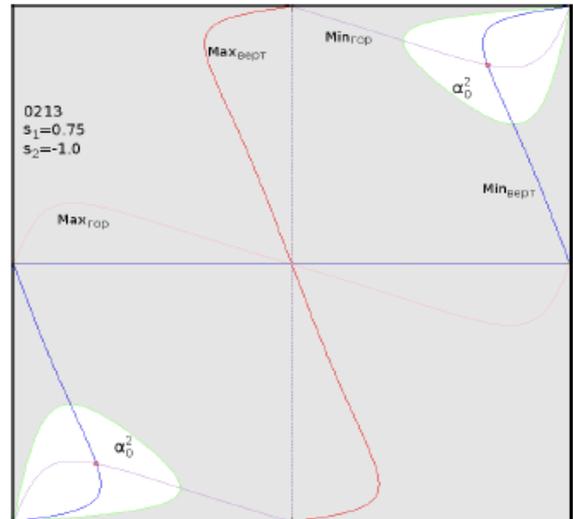


Рис. 8: Просветление для $(s_1, s_2) \in (0123)$.

2°. Для $\forall s_1, s_2$ из областей $(i0kl), (\overline{i0kl})$ $i, k, l = 1, 2, 3$ область просветления $G_{\bar{p}}$ **существует**, имеет **привершинный** характер (относительно вершины i со значением $F_{\bar{p}} = \alpha_k^2, k = 1, 2, 3$), в случаях I, II **двухсвязна** (в T_0^2), а в случае III – **односвязна**.

3°. Для областей $(ij0l), (\overline{ij0l})$ $i, k, l = 1, 2, 3$, область просветления $G_{\bar{p}}$ в T_0^2 **существует**, имеет характер **полосы** в пространстве переменных t_1, t_2 , и в случаях I, II **односвязна**, а в случае III **двухсвязна** (в T_0^2).

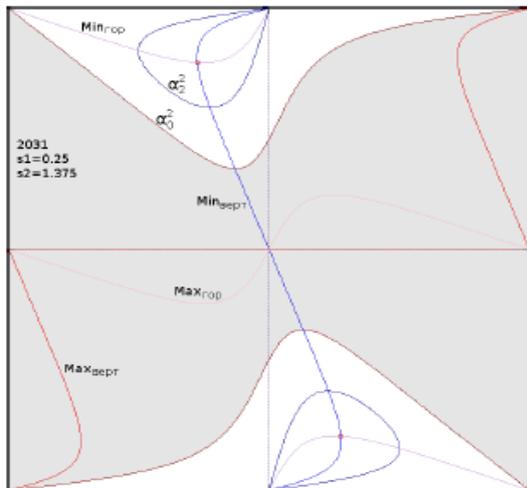


Рис. 9: Просветление для $(s_1, s_2) \in (2031)$ или $(\overline{2031})$.

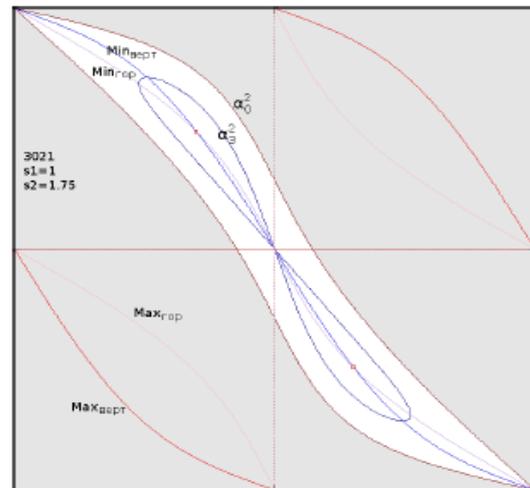


Рис. 10: Просветление для $(s_1, s_2) \in (3021)$ или $(\overline{3021})$.

Замечания. 1. Число принципиально разных приведенных изображений $G_{\vec{p}}$ сокращено на треть за счет тех изображений, где переход от одной области параметров $(ijkl) \subset \mathcal{P}_2$ к другой области, переводит "горизонтальную" $G_{\vec{p}}$, изображенную на картинке, в "вертикальную" или наоборот.

2. Отдельно не приведены изображения ни одной $G_{\vec{p}}$ для областей параметров $(\overline{ijkl}) \subset \mathcal{P}_2$, которые аналогичны изображенным на рисунках 9 – 12, но для которых $F_{\vec{p}}(t_1, t_2) \neq 0 \forall (t_1, t_2)$, несмотря на то, что подписи к рисункам 9 – 12 говорят обратное. "Картинки", действительно, получаются очень похожие, но в случае параметров (s_1, s_2) из областей $(\overline{ijkl}) \subset \mathcal{P}_2$ два расположенных симметрично (относительно центра картинки) нуля профилирующей функции $F_{\vec{p}}(t_1, t_2)$ для случая $(ijkl) \subset \mathcal{P}_2$ при подходящей непрерывной деформации параметров постепенно "собираются" в ближайшую вершину, а затем "исчезают" в этой вершине, заменяясь значением $\alpha_j^2 \neq 0$ с подходящим индексом j .

3. В соответствии с графовой структурой пространства \mathcal{P}_2 имеется 118 разных **класса** двухслойных систем, из которых в 105 случаях МДС имеют области просветления, которые существенно разнятся по своим свойствам и местоположению.

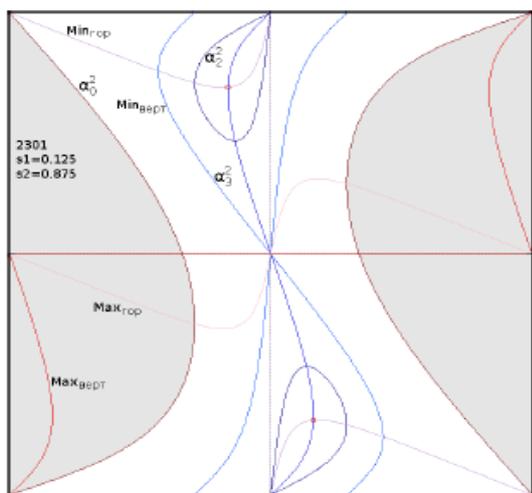
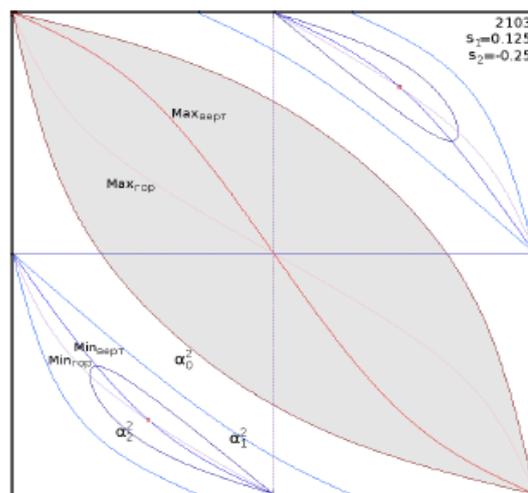
4. В работе для экономии места не приведены изображения областей просветления, соответствующие положениям параметров (s_1, s_2) на ребрах и в вершинах графа \mathcal{P}_2 , которые полезны для теории.

12. К решению ослабленной задачи Чебышева $N = 2$

Теорема. Для **существования** решения ослабленной задачи просветления в смысле Чебышева при заданном векторе материалов $\vec{p} = (p_1, p_2)$ **необходимо**, чтобы при значениях $s_1 = \log_{\Theta} p_1 - \log_{\Theta} p_0 - 1/2$, $s_2 = \log_{\Theta} p_2 - \log_{\Theta} p_3 + 1/2$ **существовали** области просветления $G_{\vec{p}}$ в пространстве t_1, t_2 .

Для 6-и областей параметров $(\overline{0jkl}) \subset \mathcal{P}_2$, когда 0 стоит на первом месте (внешние углы среднего треугольника I', II', III' на Рис. 4) и $F_{\vec{p}}(t_1, t_2) \neq 0 \forall t_1, t_2$, просветление **невозможно** ни для какой-то одной частоты ω_0 , и, тем более, какого-либо интервала частот, т.к. не выполняется **необходимое** условие.

Решение ослабленной задачи просветления в смысле Чебышева при $N = 2$

Рис. 11: Просветление для $(s_1, s_2) \in (2301)$ или $(230\bar{1})$.Рис. 12: Просветление для $(s_1, s_2) \in (2103)$ или $(210\bar{3})$.

в каждом из случаев существования областей просветления $G_{\bar{p}}$ в зависимости от принадлежности (s_1, s_2) тем или иным областям параметров $(ijkl), (\bar{i}j\bar{k}\bar{l}) \subset \mathcal{P}_2$ имеет свою специфику.

Полный анализ конфигураций возможных областей просветления $G_{\bar{p}}$ в пространстве (t_1, t_2) показывает, что все возникающие ситуации можно разделить на четыре группы классов двухслойных систем:

6 классов систем *первого* объединенного класса имеют нуль на первом месте в символе класса $(0jkl)$.

Для 6-и областей параметров $(0jkl) \subset \mathcal{P}_2$, 0 стоит на первом месте и при соответствующих (s_1, s_2) существует нуль профилирующей функции (это внешние углы *большого* треугольника I, II, III (см. Рис. 4)), — области просветления $G_{\bar{p}}$ носят *локальный, каплевидный* характер (см. Рис. 7, 8), и, вообще говоря, *невозможно* просветление для достаточно больших интервалов частот $[\Omega_1, \Omega_2]$. Допустимые для просветления заданного интервала $[\Omega_1, \Omega_2]$ области просветления $G_{\bar{p}}$ должны иметь достаточно большие сечения лучами (16). Для больших интервалов $[\Omega_1, \Omega_2]$, при $\frac{\Omega_2}{\Omega_1} > 2$, это требует, чтобы точка $t_1 = 0, t_2 = 0$ принадлежала границе области просветления $G_{\bar{p}}$. Поэтому, из класса областей $(0jkl)$, наиболее предпочтительны для просветления больших интервалов $[\Omega_1, \Omega_2]$, области параметров $(0jk3) \in \mathcal{P}_2$.

12 классов систем *второго* объединенного класса имеют нуль на втором месте в символе класса $(i0kl)$ или $(\bar{i}0\bar{k}\bar{l})$, а соответствующие профилирующие функции $F_{\bar{p}}(t_1, t_2)$ имеют нули в первом случае и не имеют их во втором.

Подобные системы имеют значительно более обширные области просветления $G_{\bar{p}}$ при параметрах (s_1, s_2) из 12-и областей параметров $(i0kl), (\bar{i}0\bar{k}\bar{l}) \subset \mathcal{P}_2$ (частей трех полос (001), (010) и (100) *вне* большого треугольника I, II, III (см. Рис. 4))). Области просветления $G_{\bar{p}}$ имеют *привершинный* характер (см. Рис. 9, 10). Они "вертикальны" при $i = 1$, "горизонтальны" при $i = 2$ и "диагональны" при $i = 3$.

12 классов систем *третьего* объединенного класса имеют нуль на третьем месте в символе класса $(ij0l)$ или $(\bar{i}\bar{j}0\bar{l})$, а соответствующие профилирующие функции $F_{\bar{p}}(t_1, t_2)$ имеют нули в первом случае и не имеют их во втором.

Эти системы имеют еще большие области просветления $G_{\bar{p}}$ при параметрах

(s_1, s_2) из 12-и областей параметров $(ij01), (\overline{ij01}) \subset \mathcal{P}_2$ (это части большого треугольника I, II, III, *не входящие* в средний треугольник I', II', III' (см. Рис. 4))). Области просветления $G_{\vec{p}}$ имеют *полосовой* характер (см. Рис. 11, 12). Они "вертикальны" при $l = 1$, "горизонтальны" при $l = 2$ и "диагональны" при $l = 3$.

12 классов систем *четвертого* объединенного класса имеют нуль на четвертом месте в символе класса $(ijk0)$ или $(\overline{ijk0})$, а соответствующие профилирующие функции $F_{\vec{p}}(t_1, t_2)$ имеют нули в первом случае и не имеют их во втором.

Это самый важный для целей *просветления* случай, когда (s_1, s_2) лежит *внутри* какой-либо из 12 областей $(ijk0)$ или $(\overline{ijk0}) \subset \text{зоне } \mathbf{O} \subset \mathcal{P}_2$ (см. Рис. 4)), гипербола (48) вырождается в точку $(0, 0)$, а соответствующая область просветления $G_{\vec{p}}$ *тотальна*, — *все* пространство (t_1, t_2) , за исключением вершин периодов, точек $t_1 = k \cdot \pi, t_2 = m \cdot \pi$, где k, m — произвольные целые числа. В вершинах периодов профилирующей функции $F_{\vec{p}}(t_1, t_2)$, она имеет значение α_0^2 .⁷

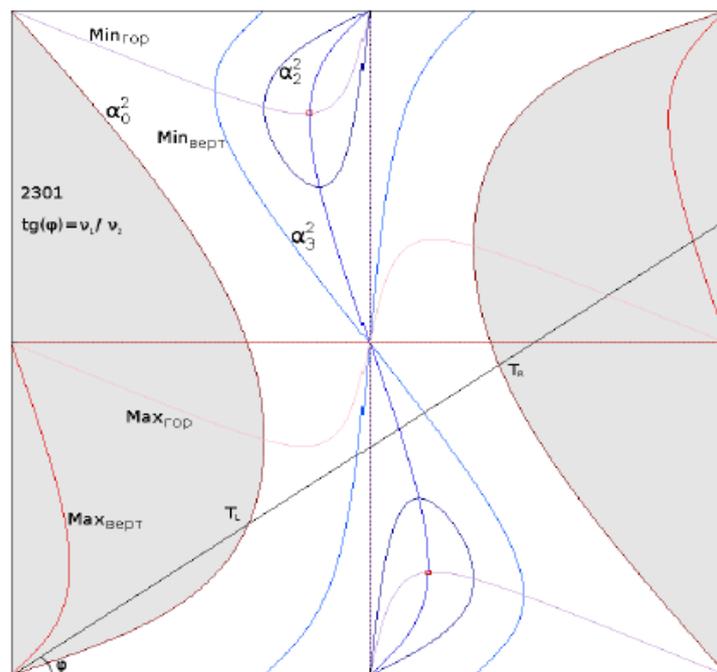


Рис. 13: К решению ослабленной задачи просветления Чебышева методом *углового сканирования* совмещенным с методом *подвижного отрезка*.

Описание алгоритма⁸ решения ослабленной задачи Чебышева

Не останавливаясь на деталях, проведем общее рассуждение о пригодности совмещения методов "углового сканирования" и обобщенного метода "подвижного отрезка" для решения ослабленной задачи просветления в смысле Чебышева во всех вариантах существования областей просветления $G_{\vec{p}}$.

⁷Различие между случаями, когда профилирующая функция имеет нули или не имеет их, состоит в возможном уровне просветления h :

$$\vec{p} \in (\overline{ijkl}), \text{ то } \min_{0 \leq j \leq 3} \alpha_j^2 < h < \alpha_0^2; \vec{p} \in (ijkl), \text{ то } 0 < h < \min_{0 \leq j \leq 3} \alpha_j^2 \leq \alpha_0^2.$$

⁸Предлагаемый алгоритм решает ослабленную задачу просветления в смысле Чебышева во всех предыдущих случаях, но специфика классов $(ijkl)$ или (\overline{ijkl}) вносит незначительные особенности в используемые подходы.

Если для заданного набора параметров материалов (p_1, p_2) и соответствующей точки (s_1, s_2) из \mathcal{P}_2 *существуют* области просветления $G_{\vec{p}}$, то нас интересуют только те из них, что расположены в первой четверти плоскости t_1, t_2 , описываемой преобразованием (16): $\vec{t} = \vec{\nu}\omega$ при разных $\vec{\nu}$ и $0 \leq \omega \leq +\infty$.

Для двухслойной диэлектрической системы вектор $\vec{\nu}$ имеет координаты ν_1, ν_2 .

Рассматривая в первой четверти плоскости t_1, t_2 полярные координаты t, φ , будем иметь:

$$t \stackrel{\text{def}}{=} (t_1^2 + t_2^2)^{1/2} \stackrel{\text{def}}{=} \nu \cdot \omega, \quad \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \arctg\left(\frac{t_2}{t_1}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \arctg\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right), \quad (50)$$

где $t = \nu \cdot \omega$ — расстояние до начала координат ($t_1 = 0, t_2 = 0$), вследствие чего длина вектора $\vec{\nu}$ —

$$\nu \stackrel{\text{def}}{=} (\nu_1^2 + \nu_2^2)^{1/2} \text{ — среднеквадратичная электрическая толщина слоя,} \quad (51)$$

в задачах просветления при $N = 2$ играет роль *одноименного* параметра ν в однослойной задаче, а угол $\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \arctg(\frac{\nu_2}{\nu_1})$ указывает направление луча (16).

В основе алгоритма решения ослабленной задачи просветления в смысле Чебышева при заданной величине \vec{p} и заданном интервале частот $[\Omega_1, \Omega_2]$ лежит метод *углового сканирования* по углу φ подходящих областей просветления в плоскости t_1, t_2 в пределах их угловых размеров с применением при каждом фиксированном значении угла $\varphi = \varphi_0$ обобщенного метода *подвижного отрезка*, подробно рассмотренного выше при решении задачи просветления в смысле Чебышева при $N = 1$ и обобщенного для $N = 2$ (см. Рис. 13).

Необходимо проводить различие между почти локальными задачами просветления при малых величинах интервала частот $[\Omega_1, \Omega_2]$ и при больших значениях этого параметра задачи, когда $\frac{\Omega_2}{\Omega_1} > 2$.

В первом случае существует конечное, но достаточно большое количество вариантов "погружения" подвижного отрезка

$$[T_1 \stackrel{\text{def}}{=} \nu\Omega_1, T_2 \stackrel{\text{def}}{=} \nu\Omega_2] \quad (52)$$

луча $\vec{t} = \vec{\nu}\omega$ в счетную последовательность подходящих окон просветления, как в случае $N = 1$, возникающих при пересечении лучом, при фиксированном значении угла φ с рациональным значением его тангенса⁹, встретившихся "на пути" этого луча локальных областей просветления $G_{\vec{p}}$.

Нумеруя окна просветления, начиная от самого близкого к началу координат $(0, 0)$, и, далее, в порядке возрастания параметра луча t , получим конечное число K подходящих окон просветления.

Нумерацию окон просветления на луче будем начинать с нуля, если точка начала координат $(0, 0)$ лежит на границе области просветления $\Gamma_{\vec{p}}$ и начало координат $(0, 0)$ является точкой локального *максимума* для профилирующей функции $F_{\vec{p}}(t_1, t_2)$ *вдоль луча*, определяемого текущим углом φ . В противном случае нумерацию окон просветления будем начинать с единицы.

⁹Как угодно малое изменение угла, если его тангенс не является рациональным числом, сводит ситуацию к рациональному случаю, когда почти-периодическая профилирующая функция превращается в периодическую и ситуация с пересечением областей просветления приводится к случаю $N = 1$.

С учетом подстрочного замечания, при $N = 2$ получается, как при $N = 1$, упорядоченная по возрастанию в порядке нумерации окон просветления **конечная** последовательность ухудшающихся минимумов функционала просветления в смысле Чебышева.

Поэтому наилучшее значение функционала качества **достигается** в наименьшем по номеру окне просветления.

Если окну был присвоен номер нуль, то в такое окно может быть помещен, при соответствующем малом значении ν , любой конечный интервал частот $[\Omega_1, \Omega_2]$.

Если же нумерация окон просветления на луче начинается с единицы, то обязательно существует частотное ограничение¹⁰ на использование наименьшего по номеру окна просветления и, тем более, всех других окон на данном луче, для заданного большого интервала частот $[\Omega_1, \Omega_2]$.

Успех работы алгоритма обеспечивается двумя обстоятельствами: во-первых, компактностью множества значений углов сканирования $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, а во-вторых, универсальностью обобщенного метода **подвижного отрезка**.

Кратко работа алгоритма описывается следующим образом:

Если — **if**, — соответствующие заданному \vec{p} значения (s_1, s_2) лежат в каком-либо **внешнем** угле большого треугольника $I'II'III' \subset \mathcal{P}_2$ (см. Рис. 4), то просветление **невозможно** и алгоритм заканчивает свою работу — **end**.

иначе — **then**:

Проводится угловое сканирование¹¹ $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ области просветления $G_{\vec{p}}$.

При каждом фиксированном значении φ вертикальное сечение профилирующей функции $F_{\vec{p}}(t_1, t_2)$ вдоль соответствующего луча, определяемого единичным вектором $\vec{\nu}_0 \stackrel{\text{def}}{=} (\nu_1^0, \nu_2^0)$:

$$f(\nu\omega) \stackrel{\text{def}}{=} F_{\vec{p}}(\nu_1\omega, \nu_2\omega)^{12},$$

сводит двумерную задачу к серии одномерных минимизаций по параметру ν (см. 51), к каждой из которых применяется метод **подвижного отрезка**.

Профиль $f(\nu\omega)$ при пересечении луча (16), отвечающего текущему значению φ , с границами областей просветления $\Gamma_{\vec{p}}$ определяют набор окон просветления $[T_L^{(k;s)}, T_R^{(k;s)}]$, $k = 1^{13}, 2, \dots; s = 1, \dots, q; \Delta T^{(k;s)} = T_R^{(k;s)} - T_L^{(k;s)}$.

Двойная нумерация необходима из-за того, что в случае $N = 2$ у получившейся функции $f(t)$ периода T в каждом периоде может возникнуть не одно окно просветления, как при $N = 1$, а конечное число $q(\varphi)$ окон просветления.

Условие **погружения** интервала $[\Omega_1, \Omega_2]$ в окно просветления с номером (k, s) , лежащего **внутри** периода T функции $f(t)$ имеет вид¹⁴:

$$T_L^{(k;s)} < \nu\Omega_1 < \nu\Omega_2 < T_R^{(k;s)}, \quad T_L^{(k;s)} = T_L^{(1;s)} + kT, \quad T_L^{(1;s)} \geq 0, \quad (53)$$

которое легко приводится к важному неравенству:

$$\frac{\Omega_2}{\Omega_1} < \frac{T_R^{(k;s)}}{T_L^{(k;s)}} < 1 + \frac{\Delta T^{(k;s)}}{T_L^{(k;s)}} < 1 + \frac{\Delta T^{(k;s)}}{kT} < 1 + \frac{1}{k}, \quad (54)$$

¹⁰Точная формулировка ограничения будет приведена ниже.

¹¹При численной реализации угловое сканирование ведется с некоторым шагом $\Delta\varphi$ по углу φ , но вопросы численной реализации предлагаемых методов в данной работе не рассматриваются.

¹²При рациональном значении тангенса угла φ функция $f(\nu\omega)$ периодическая.

¹³В этом месте, для упрощения обозначений и единообразия, мы отступаем от договоренности о нумерации окон просветления и нумеруем первое окно единицей.

¹⁴Сравни с соответствующим условием просветления **3°** при $N = 1$.

из которого следует **принцип "локализации"** — конечность множества "подходящих" окон просветления: $k = 0, \dots, K$, где $0 \leq K < +\infty$ — наибольшее k , для которого выполнено условие **погружения** (54).

Условие **погружения** $[\Omega_1, \Omega_2]$ в $[T_L^{(k;s)}, T_R^{(k;s)}] \subset T$ (54), как и в случае $N = 1$, эквивалентно **ограничению** величины ν для окна $(k; s)$:

$$0 < \nu_{\min}^{(k;s)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{T_L^{(k;s)}}{\Omega_1} < \nu < \frac{T_R^{(k;s)}}{\Omega_2} \stackrel{\text{def}}{=} \nu_{\max}^{(k;s)}$$

Обобщенный метод **подвижного отрезка** для окна просветления $(k; s)$ состоит в изменении ν в пределах **ограничения** (54) так, чтобы

$$\max_{[T_1 \leq t \leq T_2]} F_{\vec{p}}(t; \vec{\nu}_0) \rightarrow \min,$$

где $t = \nu\omega$, $T_i = \nu\Omega_i$, $i = 1, 2$, $\vec{\nu}_0$ — единичный вектор, для заданного значения $\text{tg } \varphi$.

Теорема (\exists решения ослабленной задачи Чебышева при $N = 2$)

Для всех значений \vec{p} , для которых существуют области просветления $G_{\vec{p}}$, и заданном интервале частот $[\Omega_1, \Omega_2]$, который может "погрузить" в область $G_{\vec{p}}$ при подходящем значении параметра ν , **существует единственное** наилучшее решение ослабленной задачи просветления в смысле Чебышева при $N = 2$.

13. Иллюстрации к решению ослабленной задачи Чебышева $N = 2$

Рис. 14: Случай фильтра Баттерворта

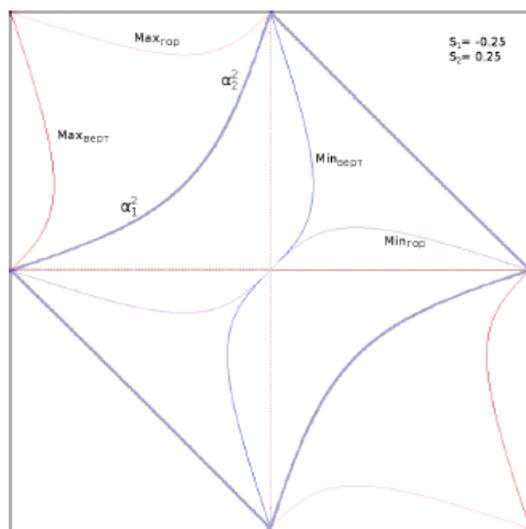


Рис. 15: Случай фильтра Чебышева

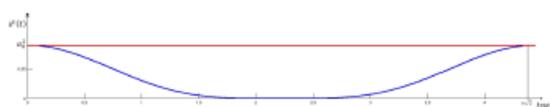
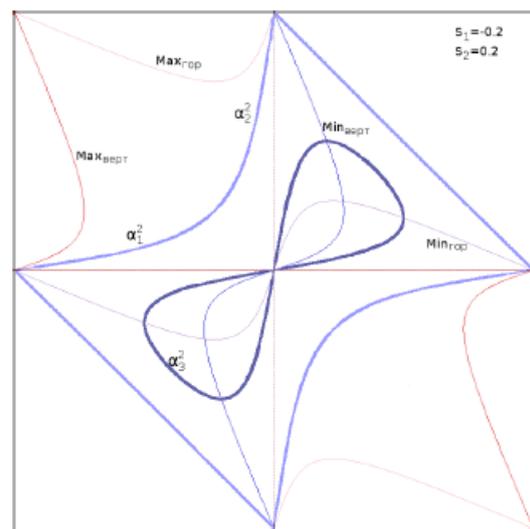


Рис. 16: Просветление для $(s_1, s_2) \in (0231)$.

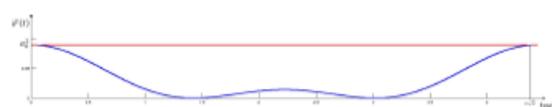


Рис. 17: Просветление для $(s_1, s_2) \in (0123)$.

Проведенные выше построения и их графические иллюстрации позволяют выдвинуть гипотезу о существовании глобального минимума функционала общей задачи просветления Чебышева при $N = 2$ в виде теоремы:

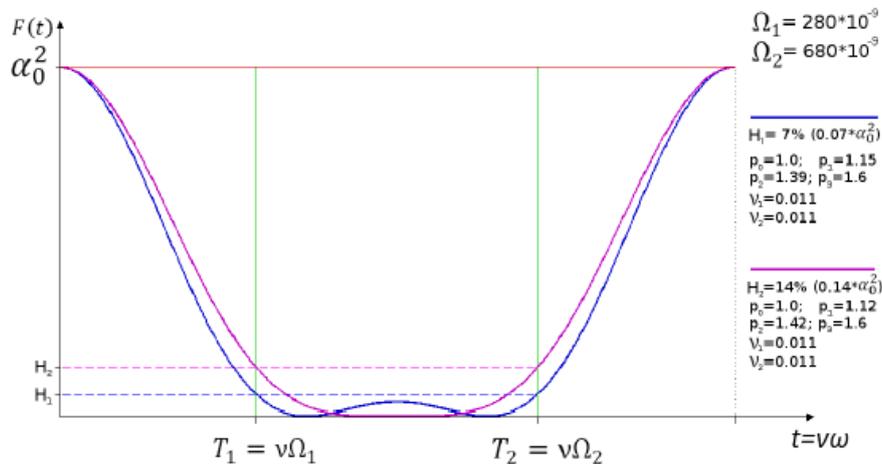


Рис. 18: Сравнение фильтра Чебышева и фильтра Баттерворта при $N = 2$.

Теорема (\exists решения общей задачи Чебышева при $N = 2$)

Для \forall интервала частот $[\Omega_1, \Omega_2]$ *существует единственный глобальный минимум* функционала общей задачи просветления Чебышева при $N = 2$, который реализуется фильтром Чебышева:

$$v_1^* = v_2^* = \frac{\pi}{\Omega_1 + \Omega_2}, \quad p_1^* = \frac{(p_0 p_3)^{1/2}}{[(\alpha_3^2 + \Theta)^{1/2} + \alpha_3]^{1/2}}, \quad p_2^* = (p_0 p_3)^{1/2} [(\alpha_3^2 + \Theta)^{1/2} + \alpha_3]^{1/2}$$

и функционал Чебышева достигает своего **максимального** значения:

$$F(T_1) = F\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) = F(T_2) = \alpha_3^2$$

при трех значениях частоты

$$\omega : \quad \Omega_1, \quad \frac{1}{2}(\Omega_1 + \Omega_2), \quad \Omega_2.$$

Именно сформулированный результат проиллюстрирован на Рис. 18.

Выводы: основные результаты

1°. Теория *прямой* задачи доведена до уровня, позволяющего решать *обратные* и *оптимизационные* задачи. Получены "компактные" *формулы* для элементов матрицы передачи МДС. Указано на "ячеистую" структуру пространства материалов МДС \mathcal{P}_N , связанную с их возможным вырождением. В пространстве \mathcal{P}_N введены показательные координаты, линеаризующие многие соотношения.

2°. Получена эффективная форма закона сохранения энергии, *существенно* упрощающая постановки задач просветления и других задач конструирования.

3°. Получены *эффективные, точные* и *неулучшаемые* на классе МДС оценки энергетических коэффициентов отражения и пропускания. Эти оценки, при помощи неравенства Бернштейна, дают точные *оценки производных* спектральных характеристик МДС.

4°. Введены периодические по всем своим аргументам *порождающие* и *профилирующие* функции МДС, полезные при постановке и решении спектральных

задач. На базе введенных функций сформулированы понятия *областей просветления*.

5°. Даны постановки задач просветления в смысле Чебышева. Получены *необходимые* и *достаточные* условия просветления на заданном интервале частот $[\Omega_1, \Omega_2]$. Получено фундаментальное неравенство *погружения* для задач Чебышева, указывающее на *конечность* множества "подходящих" областей просветления для интервала частот $[\Omega_1, \Omega_2]$. Предложен метод "подвижного" отрезка для эффективного решения задач Чебышева.

6°. Исследованы и систематизированы возможные расположения нулей для двухслойных МДС в зависимости от значений параметров s_1, s_2 материалов слоев в \mathcal{P}_2 .

7°. Исследованы и систематизированы возможные формы и местоположения *областей просветления (антипросветления)* для двухслойных МДС в зависимости от значений параметров s_1, s_2 материалов слоев в \mathcal{P}_2 .

8°. Обобщен метод *подвижного отрезка*, решающий задачу Чебышева при $N = 1$. Дополненный методом *углового сканирования* он позволяет эффективно решать задачу просветления Чебышева при $N > 1$, а также локальные задачи оптимизации просветления или антипросветления.

9°. Исследована обратная задача восстановления параметров МДС по заданному амплитудному коэффициенту отражения. Показано, что *электродинамические* параметры восстанавливаются *конструктивно* и *однозначно*. Полностью описана *неоднозначность* восстановления *физических* параметров МДС.

Литература:

1. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: «Физматлит», 1970. 848 с.
2. Розенберг Г.В. Оптика тонкослойных покрытий. М. Физматгиз, 1958. 582 с.
3. Кард П.Г. Анализ и синтез многослойных интерференционных пленок. Таллин: Валгус, 1971. 235 с.
4. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 343 с.
5. Дмитриев В.И. Прямая и обратная задачи зондирования слоистой среды // Изв. АН СССР. Физика земли. 1970. № 1. С. 64–69.
6. Фельдштейн А.Л., Явич Л.Р. Синтез четырехполюсников и восьмиполюсников на СВЧ. М.: Связь, 1971. 388 с.
7. Современная теория фильтров и их проектирование: пер. с англ. / под ред. Г. Темеша и С. Митра. М.: Мир, 1977. 560 с.
8. Мандельштам Л.И. Лекции по теории колебаний. М.: Наука, 1972. 471 с.
9. Мандельштам Л.И. Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. М.: Наука, 1972. 440 с.
10. Винер Н. Интеграл Фурье и некоторые его приложения. М.: Физматгиз, 1963. 256 с.
11. Левитан Б.М. Почти-периодические функции. М.: ГИТТЛ, 1953. 396 с.
12. Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи. М.: Мир, 1968. 750 с.
13. Худак Ю.И. О задаче просветления в классической постановке // Доклады РАН. 2013. Т. 448. № 5. С. 1–4.

14.Худак Ю.И., Ахмедов И.А. On the Problem of Antireflection Coating for the Normal Incidence of Light // PROGRESS IN ANALYSIS, Proceedings of the 8th Congress of the International Society for Analysis, its Applications, and Computation (22-27 August 2011): Volume 1, Moscow: Peoples' Friendship University of Russia, 2012. P. 123–128.

15.Худак Ю.И., Ахмедов И.А., Музылев Н.В., Парфенов Д.В. О структуре пространства параметров двухслойных магнитодиэлектрических систем // Электромагнитные волны и электронные системы. 2016. № 2. С. 24–32.

16.Худак Ю.И., Ахмедов И.А., Музылев Н.В., Парфенов Д.В. О решении задачи просветления Чебышева для двухслойных магнитодиэлектрических систем // Нелинейный мир. 2016. № 2. С. 38–48.

17.Худак Ю.И., Ахмедов И.А. О задаче гарантированного согласования одним элементом для интервала частот // Нелинейный мир. 2013. № 10. С. 12–15.

18.Худак Ю.И. О представлении коэффициента отражения слоистооднородной системы рядом Фурье // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1985. Т. XXVIII. № 4. С. 12–15.

19.Худак Ю.И. О локальной структуре одного класса решений однородной системы уравнений Максвелла // Докл. АН СССР. 1985. Т. 282. № 1. С. 12–15.

20.Худак Ю.И. О некоторых математических вопросах теории плоских электромагнитных полей в слоистых диэлектриках // Сб. Научный отчет кафедры за 1975 г. Деп. ВИНТИ. 1977. Рег. № 76006097. инв. № Б 461690. С. 12–15.

21.Худак Ю.И. О почти-периодичности электродинамических характеристик слоистооднородных магнитодиэлектрических систем // Сб. Машинное проектирование устройств и систем СВЧ. М.: МИРЭА, 1980. С. 12–15.

22.Худак Ю.И. Об оценке коэффициента отражения системы диэлектрических слоев // Журнал вычисл. матем. и матем. физики АН СССР. 1986. Т. 26. № 7. С. 12–15.

23.Худак Ю.И. О наилучшем однослойном просветляющем покрытии для интервала частот // Журнал вычисл. матем. и матем. физики АН СССР. 1990. Т. 30. № 2. С. 12–15.

24.Schuster K. Anwendung der Vierpoltheorie auf die Probleme der optischen Reflexionsminderung, Reflexionsverstärkung und der Interferenzfilter // Annalen der Physik. 1949. V. 6. № 4. S. 352–356.