

УДК 517.958

## О ПОВЕДЕНИИ ТРАЕКТОРИЙ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ N-МЕРНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НАВЬЕ-СТОКСА

Д.А. Хрычѳв, к.ф.-м.н., доцент

Московский технологический университет (МИРЭА), Москва 119454, Россия

@Автор для переписки, e-mail: dakford@yandex.ru

В работе изучается поведение траекторий слабых решений стохастической  $n$ -мерной ( $n \geq 2$ ) системы Навье–Стокса, возбуждаемой аддитивным белым шумом. Показано, что, какой бы ни был взят момент времени  $t$ , траектории в последующем своем движении по фазовому пространству системы: а) неизбежно покидают любое ограниченное подмножество фазового пространства и б) неизбежно возвращаются к некоторому компактному множеству  $K$ , зависящему от вязкости и от внешних сил, действующих на систему. Тем самым установлено, что траектории попеременно то уходят сколь угодно далеко от упомянутого множества  $K$ , то снова возвращаются к нему.

**Ключевые слова:** стохастическая система Навье–Стокса, слабые решения, траектории решений.

## ON BEHAVIOR OF TRAJECTORIES OF WEAK SOLUTIONS OF N-DIMENSIONAL STOCHASTIC NAVIER-STOKES EQUATIONS

D.A. Khrychev

Moscow Technological University (MIREA), Moscow 119454, Russia

@Corresponding author e-mail: dakford@yandex.ru

The research paper study a behavior of trajectories of weak solutions of  $n$ -dimensional ( $n \geq 2$ ) Navier–Stokes equations, perturbed by an additive white noise. It is shown that at any given moment  $t$  trajectories in its subsequent motion along the phase space of the system: а) inevitably leave any bounded subset of the phase space; б) inevitably return to some compact set  $K$ , depending on the viscosity and on the external forces acting on the system. Thus, it is established that the trajectories alternately go away arbitrarily far from the mentioned set  $K$ , then again return to it, i.e. the recurrence of trajectories in relation to the set  $K$  and infinity. These results are obtained by estimating the mathematical expectation of the moments of the first exit of trajectory after  $t$  from the corresponding subsets of the phase space.

**Keywords:** stochastic Navier–Stokes equations, weak solutions, solution trajectories.

В предлагаемой работе изучается поведение траекторий решений стохастической системы Навье–Стокса с аддитивным белым шумом, заданной в ограниченной области  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , путем оценивания математического ожидания моментов выхода траекторий из тех или иных подмножеств фазового пространства  $\mathcal{H}$  системы. Получены следующие результаты. Для произвольного  $t \geq 0$  и любого ограниченного подмножества  $B$  пространства  $\mathcal{H}$  математическое ожидание первого после  $t$  момента выхода траектории из множества  $B$  конечно (теорема 2). С другой стороны, установлено существование компактного в  $\mathcal{H}$  множества  $K$  такого, что конечно математическое ожидание первого после  $t$  ( $t$  по-прежнему произвольно) момента достижения этого множества (теорема 3). Как следствие получаем (теорема 4), что траектории всю свою жизнь проводят в скитаниях по фазовому пространству, то уходя как угодно далеко, то возвращаясь к упомянутому множеству  $K$ . Применяя терминологию, используемую в конечномерной теории уравнений Ито [1], описанные свойства траекторий следует назвать возвратностью.

Объяснение такому поведению видится в воздействии двух противоположных факторов. Первый — наличие диссипативного члена  $-\nu \Delta u$ , приводящее к появлению ограниченного поглощающего множества у детерминированной системы, а у стохастической — указанного выше множества  $K$ . Второй фактор — влияние белого шума, "выталкивающего" траектории, как хорошо известно по конечномерному случаю ([1], [10]), из любого ограниченного подмножества фазового пространства. Можно предположить, что подобное поведение траекторий является типичным для стохастической системы, полученной путем возбуждения белым шумом диссипативной детерминированной системы.

Отметим, что интерес к вопросам качественной теории стохастических уравнений с частными производными породил, начиная с 90-х годов прошлого века, обширную литературу. В основном исследования проводились по двум направлениям: устойчивость и существование аттракторов (см., например, работы обзорного характера [2] и [3]; в частности, для системы Навье–Стокса при  $n = 2$  и  $n = 3$  построены аттракторы различных типов [4]–[7] и др.). При этом, в отличие от детерминированного случая, где каждому решению отвечает единственная траектория, наличие у стохастического уравнения устойчивости или аттрактора того или иного типа не дает представления о поведении его индивидуальных траекторий.

Отметим также, что практически все результаты, относящиеся к качественной теории стохастических систем Навье–Стокса, получены для случая  $n = 2$ , т.е. когда имеется единственность решения. При  $n \geq 3$  единственность не установлена, и имеющиеся здесь отдельные результаты, как легко заметить ([6], [7] и др.), носят условный характер, т.е. получены при тех или иных не доказанных дополнительных предположениях. В настоящей работе, подчеркнем,  $n$  произвольно и никаких дополнительных предположений о свойствах решений системы не делается.

В ограниченной области  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , с бесконечно гладкой границей  $\partial\mathcal{O}$  рассмотрим систему Навье–Стокса с аддитивным белым шумом (давление применением известной процедуры, см., например, [8], исключено):

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} - \nu \Delta u + \Pi(u, \nabla)u = f(x) + \frac{\partial w(t, x)}{\partial t}, \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{O}, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} u = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{O}, \quad (2)$$

$$u(t, x) = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \partial \mathcal{O}, \quad (3)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in \mathcal{O}. \quad (4)$$

Здесь  $\nu > 0$  — вязкость,  $u(t, x) = (u^1(t, x), \dots, u^n(t, x))$  — поле скоростей,  $f(x) = (f^1(x), \dots, f^n(x))$  — детерминированная составляющая плотности внешних сил,  $w(t, x)$  — винеровский процесс со значениями в пространстве  $\mathcal{H}$  бездивергентных квадратично интегрируемых векторных полей в области  $\mathcal{O}$ , определяемом как замыкание множества  $\mathcal{V} = \{u \in (C_0^\infty(\mathcal{O}))^n : \operatorname{div} u = 0\}$  в норме  $(L_2(\mathcal{O}))^n$ ,  $\Pi$  — ортогональный проектор  $(L_2(\mathcal{O}))^n \rightarrow \mathcal{H}$ .

Пусть  $\mathcal{H}^s$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , — стандартным образом определенная (см. [8]) соболевская шкала пространств бездивергентных векторных полей в области  $\mathcal{O}$ ,  $\mathcal{H}^0 = \mathcal{H}$ . Норма в пространстве  $\mathcal{H}^s$  обозначается  $\|\cdot\|_s$ , вместо  $\|\cdot\|_0$  пишем  $\|\cdot\|$ . Скалярное произведение в  $\mathcal{H}$ , а также отношение двойственности между пространствами  $\mathcal{H}^s$  и  $\mathcal{H}^{-s}$  будем обозначать символом  $(\cdot, \cdot)$ . Далее, если  $X$  — топологическое векторное пространство, то  $X_w$  будет обозначать то же пространство, снабженное слабой топологией. Наконец, будем использовать символ  $\mathbb{E}$  для обозначения математического ожидания.

Мы будем опираться на следующий результат из работы [9] о слабой разрешимости задачи (1) — (4).

**ТЕОРЕМА 1.** Пусть  $\Omega_T = (L_2(0, T; \mathcal{H}^1))_w \cap C(0, T; \mathcal{H}_w)$ ,  $T > 0$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\Omega_T)$  —  $\sigma$ -алгебра борелевских подмножеств пространства  $\Omega_T$ ,  $u(t, \omega) = \omega(t)$ ,  $\omega \in \Omega_T$ ,  $\mathcal{F}_t = \sigma\{u(s), s \leq t\}$ ,  $t \in [0, T]$ . Пусть, далее,  $f \in \mathcal{H}^{-1}$ ,  $Q$  — самопряженный неотрицательный ядерный оператор в  $\mathcal{H}$  и  $\mu$  — вероятностная борелевская мера на  $\mathcal{H}$  с конечным вторым моментом:

$$\int \|u\|^2 d\mu < \infty.$$

Тогда существует вероятностная борелевская мера  $P$  на пространстве  $\Omega_T$  такая, что:

- 1)  $P\{u(0) \in D\} = \mu(D) \quad \forall D \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ;
- 2) процесс

$$w(t) = u(t) - u(0) - \int_0^t (\nu \Delta u(s) - (u(s), \nabla)u(s) + f) ds \quad (5)$$

является винеровским со значениями в  $\mathcal{H}$  и корреляционным оператором  $Q$  относительно меры  $P$  и фильтрации  $\mathcal{F}_t$ ;

- 3) выполняется энергетическое неравенство

$$\mathbb{E} \left[ \|u(t)\|^2 + \nu \int_0^t \|u(s)\|_1^2 ds \right] \leq \mathbb{E} \|u(0)\|^2 + (\nu^{-1} \|f\|_{-1}^2 + \operatorname{tr} Q) t \quad \forall t \in [0, T], \quad (6)$$

где  $\operatorname{tr} Q$  обозначает след оператора  $Q$ .

Отметим, что в силу произвольности  $T$  теорема распространяется и на случай  $T = +\infty$ . При этом  $\Omega_T$  заменяется на  $\Omega = (L_2(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}^1))_w \cap C(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_w)$ , а оценка (6) оказывается справедливой при любых  $t > 0$  (уточним, что пространство  $C(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_w)$  снабжается топологией компактной сходимости, задаваемой набором полунорм  $\|u\|_{T, \varphi} = \sup_{0 \leq t \leq T} |(u(t), \varphi)|$ ,  $T > 0$ ,  $\varphi \in \mathcal{H}$ ; топология пространства  $(L_2^{loc}(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}^1))_w$  задается набором полунорм  $\|u\|_{T, \psi} = \left| \int_0^T (u(t), \psi(t)) dt \right|$ ,  $T > 0$ ,  $\psi \in L_2(0, T; \mathcal{H}^{-1})$ ).

В дальнейшем, говоря о слабом решении задачи (1) – (4), мы всегда будем иметь в виду процесс  $u(t)$ , описанный в теореме 1 (или, что будет ясно по контексту, распределение  $P$  этого процесса; напомним, что при  $n \geq 3$  слабая единственность решения стохастической системы Навье–Стокса не установлена).

Основным используемым ниже инструментом является

**ЛЕММА 1.** Пусть  $X$  — топологическое пространство,  $D$  — замкнутое подмножество  $X$ ,  $\xi_t$ ,  $t \geq 0$ , — согласованный с некоторой фильтрацией  $\mathcal{F}_t$  случайный процесс со значениями в  $X$ , имеющий непрерывные справа траектории,  $\tau^s = \inf\{t \geq s : \xi_t \notin D\}$ ,  $s > 0$ , — момент первого после  $s$  выхода процесса  $\xi_t$  из множества  $D$ . Предположим, что на  $X$  существуют измеримые по Борелю числовые функции  $\Phi(x)$  и  $\Psi(x)$  такие, что:

а)  $\Phi(x) \geq 0$  и  $\Psi(x) \leq -c < 0 \quad \forall x \in D$ ;

б) процесс

$$\eta_t = \Phi(\xi_t) - \int_0^t \Psi(\xi_u) du \quad (7)$$

является мартингалом относительно потока  $\mathcal{F}_t$  с непрерывными справа траекториями.

Тогда справедлива оценка

$$E\tau^s \leq s + c^{-1}E[I_D(\xi_s)\Phi(\xi_s)], \quad (8)$$

где  $I_D(x)$  — индикатор множества  $D$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** В силу непрерывности справа траекторий процесса  $\xi_t$  и замкнутости множества  $D$   $\tau^s$  является марковским моментом относительно фильтрации  $\mathcal{F}_{t+} = \cap_{u>t} \mathcal{F}_u$ ,  $t \geq 0$ . Аналогично, благодаря непрерывности справа траекторий мартингала  $\eta_t$  он является мартингалом также относительно потока  $\mathcal{F}_{t+}$ . Отсюда для любого  $T \geq s$  получаем

$$E\eta_{\tau^s \wedge T} = E\eta_s. \quad (9)$$

Согласно (7) перепишем левую часть (9) как

$$\begin{aligned} E\eta_{\tau^s \wedge T} &= E\Phi(\xi_{\tau^s \wedge T}) - E \int_0^{\tau^s \wedge T} \Psi(\xi_u) du \\ &= E[(I_D(\xi_s) + I_{X \setminus D}(\xi_s))\Phi(\xi_{\tau^s \wedge T})] - E \int_0^{\tau^s \wedge T} \Psi(\xi_u) du \\ &= E[I_D(\xi_s)\Phi(\xi_{\tau^s \wedge T})] + E[I_{X \setminus D}(\xi_s)\Phi(\xi_s)] - E \int_0^{\tau^s \wedge T} \Psi(\xi_u) du; \end{aligned} \quad (10)$$

здесь учтено, что  $\tau^s = s$ , если  $\xi_s \in X \setminus D$ .

Далее, поскольку

$$E\eta_s = E\Phi(\xi_s) - E \int_0^s \Psi(\xi_u) du,$$

из (9) и (10) вытекает

$$E[I_D(\xi_s)\Phi(\xi_{\tau^s \wedge T})] - E \int_s^{\tau^s \wedge T} \Psi(\xi_u) du = E[I_D(\xi_s)\Phi(\xi_s)]. \quad (11)$$

Первое слагаемое в левой части (11) неотрицательно в силу условия а) и того факта, что  $\xi_{\tau^s \wedge T} \in D$ :

$$\mathbb{E}[I_D(\xi_s)\Phi(\xi_{\tau^s \wedge T})] \geq 0. \quad (12)$$

Второе слагаемое перепишем в виде

$$\mathbb{E} \int_s^{\tau^s \wedge T} \Psi(\xi_u) du = \mathbb{E} \left[ (I_D(\xi_s) + I_{X \setminus D}(\xi_s)) \int_s^{\tau^s \wedge T} \Psi(\xi_u) du \right] = \mathbb{E} \left[ I_D(\xi_s) \int_s^{\tau^s \wedge T} \Psi(\xi_u) du \right],$$

где последнее равенство справедливо, т. к.  $\tau^s = s$  при  $\xi_s \in X \setminus D$ . Отсюда в силу условия а)

$$\mathbb{E} \int_s^{\tau^s \wedge T} \Psi(\xi_u) du \leq -c \mathbb{E}[I_D(\xi_s)(\tau^s \wedge T - s)] = -c \mathbb{E}(\tau^s \wedge T - s). \quad (13)$$

Из (11), (12) и (13) следует, что

$$\mathbb{E}(\tau^s \wedge T) \leq s + c^{-1} \mathbb{E}[I_D(\xi_s)\Phi(\xi_s)],$$

откуда, устремляя  $T \rightarrow +\infty$ , приходим к (8).

Применим доказанную лемму для слабого решения  $u(t) \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_w)$  задачи (1) – (4) и множества  $D = B_R = \{\|u\| \leq R\}$ , замкнутого в слабой топологии пространства  $\mathcal{H}$ .

**ТЕОРЕМА 2.** Пусть  $u(t)$  – слабое решение задачи (1) – (4),  $R > 0$ ,  $\tau^s = \tau_{B_R}^s = \inf\{t \geq s : u(t) \notin B_R\}$ . Тогда

$$\mathbb{E}\tau^s < \infty. \quad (14)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Возьмем функцию  $\varphi \in \mathcal{V}$  такую, что  $\|\varphi\| = 1$  и  $(Q\varphi, \varphi) > 0$  (что возможно благодаря плотности  $\mathcal{V}$  в  $\mathcal{H}$ ). Умножив обе части (5) на  $\varphi$ , придем к равенству

$$(u(t), \varphi) = (u(0), \varphi) + \int_0^t g(u(s)) ds + (w(t), \varphi),$$

где

$$g(u) = (\nu \Delta u - (u, \nabla)u + f, \varphi) = \nu(u, \Delta \varphi) + \frac{1}{2}((u, \nabla)\varphi, u) + (f, \varphi), \quad u \in \mathcal{H}^1. \quad (15)$$

Покажем, что процесс  $\xi_t = (u(t), \varphi)$  есть процесс Ито.

Как следует из правой части (15),  $g(u)$  продолжается до функционала, непрерывного на пространстве  $\mathcal{H}$ , снабженном сильной топологией и, следовательно, измеримого на  $\mathcal{H}_w$ . Отсюда выводим прогрессивную измеримость функции  $g(u(s))$ . Далее, в силу (15) справедлива оценка

$$|g(u)| \leq C(\varphi)(1 + \|u\|^2), \quad (16)$$

которая вкупе с энергетическим неравенством обеспечивает выполнение необходимого условия интегрируемости  $g(u(s))$ . Остается заметить, что  $(w(t), \varphi) = (Q\varphi, \varphi)^{1/2} b_t$ , где  $b_t$  – стандартное одномерное броуновское движение.

Пусть  $V(x)$  – финитная функция класса  $C^2$  на  $\mathbb{R}^n$ , при  $|x| \leq R$  равная  $\text{ch}(\gamma R) - \text{ch}(\gamma x)$ , где  $\gamma$  – некоторая положительная константа. Тогда согласно лемме Ито

$$dV(\xi_t) = \left( V'(\xi_t)g(u(t)) + \frac{1}{2}V''(\xi_t)(Q\varphi, \varphi) \right) dt + V'(\xi_t)(Q\varphi, \varphi)^{1/2} db_t,$$

а потому процесс

$$V(\xi_t) - \int_0^t \left( V'(\xi_s)g(u(s)) + \frac{1}{2}V''(\xi_s)(Q\varphi, \varphi) \right) ds$$

является мартингалом с непрерывными траекториями.

Покажем теперь, что функционалы  $\Phi(u) = V((u, \varphi))$  и  $\Psi(u) = V'((u, \varphi))g(u) + V''((u, \varphi))(Q\varphi, \varphi)/2$  удовлетворяют условиям леммы 1. Поскольку  $\xi_t = (u(t), \varphi)$ , выполнение условия б) уже доказано. Проверим, что при подходящем выборе константы  $\gamma$  выполнено также и а).

Поскольку  $|(u, \varphi)| \leq R$  для всех  $u \in B_R$ , функция  $\Phi(u) = V((u, \varphi))$  на  $B_R$  равна  $\text{ch}(\gamma R) - \text{ch}(\gamma(u, \varphi)) \geq 0$ . Далее, при  $u \in B_R$

$$\Psi(u) = -\gamma \text{sh}(\gamma(u, \varphi))g(u) - \frac{\gamma^2}{2} \text{ch}(\gamma(u, \varphi))(Q\varphi, \varphi). \quad (17)$$

Заметим, что в силу (16)  $|g(u)| \leq C_R = C(\varphi)(1 + R^2)$  на  $B_R$  и положим  $\gamma = \frac{4C_R}{(Q\varphi, \varphi)}$ .

Тогда согласно (17) при  $u \in B_R$

$$\Psi(u) \leq \frac{4C_R^2}{(Q\varphi, \varphi)} |\text{sh}(\gamma(u, \varphi))| - \frac{8C_R^2}{(Q\varphi, \varphi)} \text{ch}(\gamma(u, \varphi)) \leq -\frac{4C_R^2}{(Q\varphi, \varphi)} \text{ch}(\gamma(u, \varphi)) \leq -\frac{4C_R^2}{(Q\varphi, \varphi)}.$$

Итак, условия леммы 1 выполняются, а потому

$$\mathbb{E}\tau^s \leq s + \frac{(Q\varphi, \varphi)}{4C_R^2} \mathbb{E}[I_{B_R}(u(s))\Phi((u(s), \varphi))].$$

Отметим, что конечномерный прообраз доказанной теоремы содержится в книге [10] (§13.2, микротема 2).

Для дальнейшего изложения нам понадобятся галеркинские приближения системы (1), в определении которых мы будем следовать работе [8].

Пусть  $e_1(x), e_2(x), \dots$  — ортонормированный базис в  $\mathcal{H}$ , состоящий из собственных функций оператора Стокса,  $V_m$  — подпространство, натянутое на векторы  $\{e_1, \dots, e_m\}$ ,  $\Pi_m$  — оператор ортогонального проектирования пространства  $(L_2(\mathcal{O}))^n$  на  $V_m$ .

Галеркинским приближением системы (1) назовем систему уравнений Ито в пространстве  $V_m$  ( $m = 1, 2, \dots$ )

$$du_m(t) = \Pi_m(\nu \Delta u_m(t) - (u_m(t), \nabla)u_m(t) + f) dt + dw_m(t), \quad t > 0, \quad (18)$$

где  $w_m(t)$  — винеровский процесс со значениями в  $V_m$  и корреляционным оператором  $\Pi_m Q \Pi_m$ , заданный на некотором фильтрованном вероятностном пространстве.

Система (18) дополняется начальным условием

$$u_m(0) = u_{0,m}, \quad (19)$$

где  $u_{0,m}$  — случайный вектор со значениями в  $V_m$ , имеющий распределение  $\mu_m = \Pi_m \mu$  и удовлетворяющий стандартным условиям независимости от  $w_m(t)$  и измеримости относительно минимальной  $\sigma$ -алгебры фильтрации.

Как показано в [8], задача (18), (19) обладает единственным сильным решением  $u_m(t) \in C(\mathbb{R}_+; V_m)$ , для которого выполняется энергетическое неравенство (6). Последовательность распределений  $P_m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , решений  $u_m(t)$ , рассматриваемая как множество мер на пространстве  $\Omega$ , плотна, а любая ее предельная точка является слабым решением задачи (1) – (4). Отметим, что вследствие уже упоминавшегося

отсутствия результатов о единственности не исключено наличие слабых решений, не являющихся предельными точками последовательности  $P_m$ .

**ТЕОРЕМА 3.** Пусть  $u(t)$  — слабое решение задачи (1) — (4), распределение  $P$  которого является предельной точкой последовательности галеркинских мер  $P_m$ . Пусть, далее,  $\varepsilon > 0$ ,  $K_\varepsilon = \{u \in \mathcal{H}^1 : \|u\|_1^2 \leq \nu^{-2}\|f\|_{-1}^2 + \nu^{-1}\text{tr } Q + \varepsilon\}$ ,  $\sigma^s = \sigma_{K_\varepsilon}^s = \inf\{t \geq s : u(t) \in K_\varepsilon\}$  — момент первого после  $s$  достижения множества  $K_\varepsilon$  процессом  $u(t)$ . Тогда

$$\mathbb{E}\sigma^s < \infty. \quad (20)$$

Доказательству теоремы предпошлим две леммы.

**ЛЕММА 2.** Для моментов  $\sigma_m^s = \inf\{t \geq s : u_m(t) \in K_\varepsilon\}$  выполняется равномерная по  $m$  оценка

$$\mathbb{E}\sigma_m^s \leq C(s, \varepsilon). \quad (21)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Применим лемму 1 для пространства  $X = V_m$ , снабженного метрикой пространства  $\mathcal{H}$ , множества  $D = \{u \in V_m : \|u\|_1^2 \geq \nu^{-2}\|f\|_{-1}^2 + \nu^{-1}\text{tr } Q + \varepsilon\}$  и процесса  $u_m(t)$ .

Согласно лемме Ито

$$d\|u_m(t)\|^2 = (2(u_m(t), \nu \Delta u_m(t) + f) + \text{tr } Q_m) dt + 2(u_m(t), dw_m(t))$$

(мы учли равенство нулю трилинейной формы  $(u_m, (u_m, \nabla)u_m)$ ). Отсюда с учетом энергетического неравенства заключаем, что процесс

$$\|u_m(t)\|^2 - \int_0^t (2(u_m(r), \nu \Delta u_m(r) + f) + \text{tr } Q_m) dr$$

является мартингалом с непрерывными траекториями.

Проверим, что функция  $\Psi(u) = 2(u, \nu \Delta u + f) + \text{Sp } Q_m \leq -\varepsilon\nu$ , если  $u \in D$ . Действительно, поскольку  $(u, \nu \Delta u) = -\nu\|u\|_1^2$ ,  $2(u, f) \leq \nu\|u\|_1^2 + \nu^{-1}\|f\|_{-1}^2$  и  $\text{tr } Q_m \leq \text{tr } Q$ , доказываемое неравенство следует из определения множества  $D$ .

Итак, согласно (8) для момента  $\tau_m^s$  первого после  $s$  выхода процесса  $u_m(t)$  из множества  $D$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\tau_m^s &\leq s + (\varepsilon\nu)^{-1} \mathbb{E} [I_D(u_m(s))\|u_m(s)\|^2] \leq s + (\varepsilon\nu)^{-1} \mathbb{E}\|u_m(s)\|^2 \\ &\leq s + (\varepsilon\nu)^{-1} (\mathbb{E}\|u(0)\|^2 + (\nu^{-1}\|f\|_{-1}^2 + \text{tr } Q)) \equiv C(s, \varepsilon). \end{aligned}$$

Для получения (21) остается заметить, что  $\sigma_m^s \leq \tau_m^s$ .

**ЛЕММА 3.** Момент  $\sigma^s$  является полунепрерывным снизу функционалом на пространстве  $\Omega$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Достаточно доказать полунепрерывность снизу функционала  $\sigma^s$  на пространстве  $C(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_w)$ , т.е. что для каждого  $c \in \mathbb{R}$  множество  $\{\omega : \sigma^s(\omega) > c\}$  открыто в  $C(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_w)$ .

Пусть  $\sigma^s(\omega_0) = c_0 > c$ . Положим  $s_0 = (c + c_0)/2$ , если  $c_0 < \infty$ , и  $s_0$  — любое конечное число, большее  $c$ , если  $c_0 = +\infty$ . Тогда множество  $\gamma = \{\omega_0(t), t \in [s, s_0]\}$  компактно в  $\mathcal{H}_w$  (как непрерывный образ компакта). Заметим также, что множество  $K_\varepsilon$  (шар в пространстве  $\mathcal{H}^1$ ) компактно в  $\mathcal{H}_w^1$ , а значит и в  $\mathcal{H}_w$ .

Выберем шар  $B_R = \{\|u\| \leq R\}$  такой, что  $\gamma \cup K_\varepsilon \subset B_R$ . Пусть  $\rho$  — метрика, порождающая слабую топологию пространства  $\mathcal{H}$  на шаре  $B_{2R}$ . Поскольку  $\gamma \cap K_\varepsilon = \emptyset$ ,

найдется  $\delta > 0$  такое, что  $\rho(u, v) \geq \delta$  для любых  $u \in \gamma$  и  $v \in K_\varepsilon$ . Возьмем окрестность нуля  $V$  в пространстве  $\mathcal{H}_w$ , пересечение которой с шаром  $B_{2R}$  содержится в шаре  $\{\rho(u, 0) < \delta\}$ , и рассмотрим окрестность  $W$  точки  $\omega_0$  в  $C(\mathbb{R}_+; \mathcal{H}_w)$ :  $W = \{\omega : \omega(t) \in \omega_0(t) + V \ \forall t \in [s, s_0]\}$ . Тогда для  $\omega \in W$   $\omega(t) \notin K_\varepsilon$  при  $t \in [s, s_0]$ , и, следовательно,  $\sigma^s(\omega) > c$ . Лемма доказана.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.** Пусть  $\mathcal{M}$  — пространство вероятностных борелевских мер на  $\Omega$ , снабженное топологией слабой сходимости. Поскольку функционал  $\sigma^s(\omega)$  неотрицателен и полунепрерывен снизу на пространстве  $\Omega$ , отображение  $\mu \rightarrow \int (\sigma^s \wedge N) d\mu$  для любого  $N > 0$  является полунепрерывным снизу функционалом на  $\mathcal{M}$  ([11], гл. IX, § 5, предложение 6). Получаем, что для каждого  $c \in \mathbb{R}$  множество  $\{\mu \in \mathcal{M} : \int (\sigma^s \wedge N) d\mu \leq c\}$  замкнуто в  $\mathcal{M}$ , а потому в силу (21) для любой меры  $P$ , являющейся предельной точкой последовательности галеркинских распределений  $P_m$ , выполняется неравенство

$$\int (\sigma^s \wedge N) dP \leq C(s, \varepsilon).$$

Остается осуществить предельный переход при  $N \rightarrow \infty$ , используя на выбор лемму Фату или теорему Беппо Леви.

**ТЕОРЕМА 4.** Пусть  $P$  — предельная точка последовательности галеркинских мер  $P_m$ . Тогда

$$P\left(\bigcap_{s \geq 0, \varepsilon, R > 0} \left\{ \tau_{B_R}^s < \infty, \sigma_{K_\varepsilon}^s < \infty \right\}\right) = 1.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Прежде всего отметим, что рассматриваемое множество  $\mathfrak{N} = \bigcap_{s \geq 0, \varepsilon, R > 0} \left\{ \tau_{B_R}^s < \infty, \sigma_{K_\varepsilon}^s < \infty \right\}$  входит в  $\sigma$ -алгебру  $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\Omega)$  в силу представления  $\mathfrak{N} = \bigcap_{j=1}^{\infty} \left\{ \tau_{B_j}^j < \infty, \sigma_{K_{1/j}}^j < \infty \right\}$ .

Возьмем произвольное  $\delta > 0$  и построим последовательность (неслучайных) моментов времени  $0 = s_0 < t_1 \leq s_1 \leq t_2 \leq s_2 \leq \dots$  следующим образом. Момент  $t_j$  определим двумя условиями:

$$t_j \geq j \quad \text{и} \quad P\{\tau_{B_j}^{s_{j-1}} > t_j\} < 2^{-j}\delta, \quad (22)$$

а момент  $s_j$  — условием

$$P\{\sigma_{K_{1/j}}^{t_j} > s_j\} < 2^{-j}\delta, \quad j = 1, 2, \dots \quad (23)$$

Осуществимость указанной процедуры вытекает из оценок (14) и (20).

Рассмотрим событие  $\mathfrak{M} = \bigcap_{j=1}^{\infty} \{\tau_{B_j}^{s_{j-1}} \leq t_j, \sigma_{K_{1/j}}^{t_j} \leq s_j\}$ . В силу (22) и (23)  $P(\mathfrak{M}) \geq 1 - 2\delta$ . Поскольку  $\mathfrak{M}$  влечет интересующее нас событие  $\mathfrak{N}$ , для последнего справедливо такое же неравенство. Отсюда в силу произвольности  $\delta$  вытекает доказываемое утверждение.

---

---

### Литература:

1. Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969.
2. Crauel H. Measure attractors and Markov attractors // Dynamical Systems. 2008. V. 23. № 1. P.75–107.
3. Liu K., Truman A. Lyapunov function approaches and asymptotic stability of stochastic evolution equations in Hilbert spaces / In: Stoch. Partial Diff. Eq. Appl. NY.: Dekker, 2002. P. 337–371.
4. Schmalfuß B. Measure attractors of the stochastic Navier-Stokes equation. Bremen Report No. 258. 1991.
5. Crauel H., Flandoli F. Attractors for random dynamical systems // Probab. Theory Relat. Fields. 1994. V. 100. № 3. P. 365–393.
6. Marin-Rubio P., Robinson J.C. Attractors for the stochastic 3D Navier-Stokes equations // Stochastics and Dynamics. 2003. V. 3. № 3. P. 279–297.
7. Cutland N.J., Keisler H.J. Global attractors for 3-dimensional stochastic Navier-Stokes equations // J. Dynam. Diff. Eq. 2004. V. 16. № 1. P. 205–266.
8. Вишик М.И., Комеч А.И., Фурсиков А.В. Некоторые математические задачи статистической гидромеханики // Успехи матем. наук. 1979. Т. 34. Вып. 5 (209). С. 135–210.
9. Viot M. Solutions faibles d'equations aux derives partielles stochastiques non lineaires. Paris. These. 1976.
10. Вентцель А.Д. Курс теории случайных процессов. М.: Наука, 1996.
11. Бурбаки Н. Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах. М.: Наука, 1977.