

Математическое моделирование
Mathematical modeling

УДК 539.3
<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2023-11-3-70-85>



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Развитие обобщенных модельных представлений теплового удара для локально-неравновесных процессов переноса теплоты

Э.М. Карташов[®]

МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, 119454 Россия

[®] Автор для переписки, e-mail: professor.kartashov@gmail.com

Резюме

Цели. Процессы переноса энергии в твердых телах и вызываемые ими тепловые нагрузки имеют широкое распространение в природе и технике. Этим объясняется исключительно важное научное и практическое значение построения теории указанных процессов, создание эффективных методов исследования развиваемых при этом модельных представлений. Цель этих исследований – установление основных закономерностей протекания достаточно сложных процессов, особенно в условиях мощных энергетических воздействий в различного рода технологических операциях. К ним можно отнести плазмохимическую обработку материалов, обработку в инфракрасных печах и гелиоустановках, интенсивный нагрев материалов лазерными или электронными лучами, применение мощных радиационных излучателей для термической закалки и упрочнения поверхности изделий. В этих случаях возникает так называемый термический удар – одна из центральных тем в термомеханике и физике прочности твердых тел, имеющая важное научное и практическое значение. Цель работы – рассмотреть открытую проблему теории теплового удара в терминах обобщенной модели динамической термоупругости в условиях локально-неравновесного процесса переноса теплоты. Модель (в зависимости от вида и кривизны граничной поверхности рассматриваемого массивного тела) позволяет исследовать проблему в трех системах координат: декартовы координаты – массивное тело, ограниченное плоской поверхностью; сферические координаты – массивное тело с внутренней сферической полостью; цилиндрические координаты – массивное тело с внутренней цилиндрической полостью. Рассматриваются три вида интенсивного нагрева: температурный, тепловой, нагрев средой. Ставится задача: получить аналитическое решение, провести численные эксперименты и дать их физический анализ.

Методы. Использованы методы и теоремы операционного исчисления, теория специальных функций.

Результаты. Развита обобщенная модельные представления теплового удара в терминах динамической термоупругости для локально-неравновесных процессов переноса теплоты одновременно в трех системах координат: декартовой, сферической и цилиндрической. Наличие кривизны граничной поверхности области теплового удара обосновывает исходную постановку динамической задачи в перемещениях с использованием предложенного соответствующего уравнения «совместности».

Выводы. Предложена обобщенная динамическая модель термической реакции массивных тел с внутренними полостями одновременно в декартовой, сферической и цилиндрической системах координат в условиях интенсивного температурного нагрева, теплового нагрева, нагрева средой. Модель рассмотрена в перемещениях на основе локально-неравновесного теплопереноса. Получено аналитическое решение для напряжений, проведен численный эксперимент; описан волновой характер распространения термоупругой волны.

Проведено сравнение с классическим решением без учета локальной неравновесности. На основе операционного решения задачи предложены важные в практическом отношении расчетные инженерные соотношения для верхней оценки максимума термических напряжений.

Ключевые слова: тепловой удар, обобщенная динамическая модель, аналитическое решение, термические напряжения

• Поступила: 24.06.2022 • Доработана: 16.12.2022 • Принята к опубликованию: 03.03.2023

Для цитирования: Карташов Э.М. Развитие обобщенных модельных представлений теплового удара для локально-неравновесных процессов переноса теплоты. *Russ. Technol. J.* 2023;11(3):70–85. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2023-11-3-70-85>

Прозрачность финансовой деятельности: Автор не имеет финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

RESEARCH ARTICLE

Developing generalized model representations of thermal shock for local non-equilibrium heat transfer processes

Eduard M. Kartashov[®]

MIREA – Russian Technological University, Moscow, 119454 Russia

[®] Corresponding author, e-mail: professor.kartashov@gmail.com

Abstract

Objectives. Processes of energy transfer in solids and resultant thermal loads are widespread in nature and technology. This explains the scientific and practical significance of constructing a theory of these processes, as well as developing effective methods for studying the modeled concepts developed on this basis. The purpose of such studies is to determine basic flux patterns of complex processes occurring especially under conditions of powerful energy impacts in various technological operations. These include plasma-chemical processing of materials, their processing in infrared furnaces and solar plants, intense heating of materials carried out by laser or electron beams, and the use of powerful radiation emitters for thermal hardening and hardening of the surface of products. In these cases, the phenomenon of thermal shock arises, forming one of the central topics in thermomechanics and strength physics of solids. The present work considers an open theoretical problem of thermal shock in terms of a generalized model of dynamic thermoelasticity under conditions of a locally nonequilibrium heat transfer process. Depending on the type and curvature of the boundary surface of the considered massive body, the model can be used to study the problem in three coordinate systems: cartesian coordinates—a massive body bounded by a flat surface; spherical coordinates—a massive body with an internal spherical cavity; cylindrical coordinates—a massive body with an internal cylindrical cavity. Three types of intensive heating are considered: temperature heating, thermal heating, and heating by medium. Following the development of an analytical solution, the results of conducted numerical experiments are presented along with their physical analysis.

Methods. The study applies methods and theorems of operational calculus according to the theory of special functions.

Results. Generalized model representations of thermal shock are developed in terms of dynamic thermoelasticity for locally nonequilibrium heat transfer processes simultaneously in three coordinate systems: Cartesian, spherical, and cylindrical. The presence of curvature of the boundary surface of the thermal shock area substantiates the initial statement of the dynamic problem in displacements using the proposed corresponding “compatibility” equation.

Conclusions. A generalized dynamic model of the thermal reaction of massive bodies with internal cavities simultaneously in Cartesian, spherical, and cylindrical coordinate systems under conditions of intense temperature heating, thermal heating, and heating by medium is proposed. The model is considered in terms of displacements based on local nonequilibrium heat transfer. A numerical experiment carried out according to the obtained analytical solution for stresses forms a basis for a description of the wave nature of the propagation of a thermoelastic wave. A comparison with the classical solution is made without taking into account local nonequilibrium. The calculation of engineering relations carried out on the basis of the operational solution of the problem is important in practical terms for the upper estimate of the maximum thermal stresses.

Keywords: heat stroke, generalized dynamic model, analytical solution, thermal stresses

• Submitted: 24.06.2022 • Revised: 16.12.2022 • Accepted: 03.03.2023

For citation: Kartashov E.M. Developing generalized model representations of thermal shock for local non-equilibrium heat transfer processes. *Russ. Technol. J.* 2023;11(3):70–85. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2023-11-3-70-85>

Financial disclosure: The author has no a financial or property interest in any material or method mentioned.

The author declares no conflicts of interest.

ВВЕДЕНИЕ

Статья продолжает исследования автора, описанные в [1, 2]. В рамках обобщенной модели динамической термоупругости изучается открытая проблема термической реакции на нагрев массивного тела, ограниченного изнутри либо плоской поверхностью (упругое полупространство в декартовой системе координат), либо цилиндрической поверхностью (упругое пространство в цилиндрической системе координат с внутренней цилиндрической полостью), либо сферической поверхностью (упругое пространство в сферической системе координат с внутренней сферической полостью).

Рассматриваются три случая интенсивного нагрева границы тела (области): температурный, тепловой и нагрев средой. Следует подчеркнуть, что развитие обобщенных моделей, затрагивающих многочисленные практические приложения – одно из направлений в теории теплового удара, не получившего своего развития до настоящего времени. Специфика такого рода исследований заключается, с одной стороны, в относительной простоте исходных математических моделей, с другой – в вычислительных трудностях при получении искомого результата и при этом – в очевидной значимости применения полученных соотношений в многочисленных практических ситуациях.

Исследование проводится в условиях локально-неравновесного процесса переноса теплоты [3–8]. Принимаются во внимание два обстоятельства. При высокоинтенсивном нагреве твердых тел, создающих тепловой удар, тепловые потоки $\bar{q}(M, t)$, где t – время в области $\Omega = \{M(x, y, z) \in D, t > 0\}$, описывающей реальное твердое тело, отстают от градиента

температуры $T(M, t)$ на величину, пропорциональную времени релаксации τ_r , связанную со скоростью распространения теплоты v_T соотношением $v_T = \sqrt{a / \tau_r}$, a – температуропроводность [9–15]:

$$\bar{q}(M, t) = -\lambda_T \text{grad} T(M, t) - \tau_r \frac{\partial \bar{q}(M, t)}{\partial t}, \quad (1)$$

где λ_T – теплопроводность. Уравнение энергии для изотропных твердых тел $c \rho^* \partial T(M, t) / \partial t = \text{div} \bar{q}(M, t)$, где c – удельная теплоемкость, ρ^* – плотность и соотношение (1) приводят к уравнению переноса гиперболического типа [16, 17]:

$$\frac{\partial T(M, t)}{\partial t} = a \Delta T(M, t) - \tau_r \frac{\partial^2 T(M, t)}{\partial t^2}, \quad (2)$$

содержащему не только первую, но и вторую производную от температуры по времени. Вследствие этого уравнение (2) описывает волновые процессы, в данном случае – волновой теплоперенос. Второе обстоятельство состоит в том, что вопросы корректной постановки краевых задач для уравнения (2) рассмотрены сравнительно недавно [16], и ряд вопросов, связанных с тепловыми задачами, для уравнения (2) требует своего дальнейшего изучения.

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Пусть D – конечная или частично ограниченная выпуклая область пространства $M(x, y, z)$, описывающая реальное твердое тело и находящаяся в условиях термонапряженного состояния; S – кусочно-гладкая поверхность, ограничивающая область D ;

$\bar{n} = (n_1, n_2, n_3)$ – внешняя нормаль к S (вектор, непрерывный на S); $T(M, t)$ – распределение температуры в области D при $t > 0$; T_0 – начальная температура, при которой область находится в недеформированном и ненапряженном состоянии. Пусть $\sigma_{ij}(M, t)$, $\varepsilon_{ij}(M, t)$, $U_i(M, t)$ – соответственно компоненты тензоров напряжения, деформации и вектора перемещения, удовлетворяющие основным уравнениям (несвязанной) термоупругости (в индексных обозначениях) [17]:

$$\sigma_{ij,j}(M, t) + F_i(M, t) = \rho^* U_i(M, t), \quad (3)$$

$$\varepsilon_{ij}(M, t) = (1/2)[U_{i,j}(M, t) + U_{j,i}(M, t)], \quad (4)$$

$$\sigma_{ij}(M, t) = 2\mu\varepsilon_{ij}(M, t) + [\lambda\varepsilon_{ii}(M, t) - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T(T(M, t) - T_0)]\delta_{ij}, \quad M \in D, t > 0, \quad (5)$$

где ρ^* – плотность; λ, μ – изотермические коэффициенты Ламе; G – модуль сдвига; $\lambda = 2G\nu/(1 - 2\nu)$; ν – коэффициент Пуассона, при этом $2G(1 + \nu) = E$, где E – модуль Юнга; α_T – коэффициент линейного теплового расширения; δ_{ij} – символ Кронекера; $F_i(M, t)$ – компоненты объемной силы; $\bar{\varepsilon}(M, t) = U_{i,i}(M, t) = \varepsilon_{ii}(M, t)$ – объемная деформация, связанная с суммой нормальных напряжений $\bar{\sigma}(M, t) = \sigma_{nn}(M, t)$, $n = x, y, z$ соотношением

$$\bar{\varepsilon}(M, t) = \frac{1 - 2\nu}{E} \bar{\sigma}(M, t) + 3\alpha_T [T(M, t) - T_0]. \quad (6)$$

Термонапряженное состояние области D при $t > 0$ может возникать при различных режимах теплового воздействия на границу S , создающих термический удар. К ним можно отнести наиболее распространенные на практике случаи:

- температурный нагрев

$$T(M, t) = T_c(t), \quad M \in S, t > 0 \quad (T_c(t) > T_0, t \geq 0); \quad (7)$$

- тепловой нагрев

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_r} \int_0^t \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial n} \Big|_{M \in S} \exp\left(-\frac{t - \tau}{\tau_r}\right) d\tau = \\ = -\frac{1}{\lambda_T} q(t) S_+(t), \quad t \geq 0; \end{aligned} \quad (8)$$

- нагрев средой

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_r} \int_0^t \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial n} \Big|_{M \in S} \exp\left(-\frac{t - \tau}{\tau_r}\right) d\tau = \\ = h \{ T(M, t) \Big|_{M \in S} - [T_0 + S_+(t)(T_c - T_0)] \}, \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (9)$$

а также от действия внутренних источников теплоты. Здесь λ_T – теплопроводность материала; $q(t)$ – величина теплового потока; h – относительный коэффициент теплообмена; T_c – температура окружающей среды; $S_+(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$

В равной мере могут быть рассмотрены и случаи охлаждения твердого тела.

Входящая в (5) температурная функция $T(M, t)$ находится из решения краевой задачи нестационарной теплопроводности для уравнения (2) с граничными условиями (7)–(9). Соотношения (3)–(6) – общие соотношения динамической термоупругости, связывающие напряжения, деформации, перемещения и температуру. При переходе к конкретным случаям необходимо преобразовать (3)–(6) в так называемые уравнения совместности либо в напряжениях, либо в перемещениях, и для этих уравнений записывать соответствующую задачу динамической термоупругости. Для рассматриваемого в статье случая необходимо учесть влияние кривизны граничной поверхности твердого тела на температуру и соответствующие температурные напряжения. Здесь более удобной математической моделью является уравнение «совместности» в перемещениях, одновременно охватывающее цилиндрическую, сферическую и декартову системы координат.

Подставляя правые части (5) в (3) (без объемных сил) и используя далее (4) и (6), после ряда длительных преобразований приходим к трем уравнениям:

$$\begin{aligned} \Delta U_i(M, t) + \frac{1}{(1 - 2\nu)} \cdot \frac{\partial \bar{\varepsilon}(M, t)}{\partial i} - (\rho^*/G) \frac{\partial^2 U_i(M, t)}{\partial t^2} = \\ = \frac{2(1 + \nu)\alpha_T}{(1 - 2\nu)} \cdot \frac{\partial [T(M, t) - T_0]}{\partial i}, \quad i = x, y, z, \end{aligned}$$

которые формально можно записать в виде векторного равенства:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{U}(M, t) + \frac{1}{(1 - 2\nu)} \text{grad} [\text{div} \bar{U}(M, t)] - \\ - (\rho^*/G) \frac{\partial^2 \bar{U}(M, t)}{\partial t^2} = \\ = \frac{2(1 + \nu)}{(1 - 2\nu)} \alpha_T \text{grad} [T(M, t) - T_0], \quad M \in D, t > 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Заметим, что при обратном переходе необходимо приравнять соответствующие компоненты в векторной записи левой и правой частей в (10).

Рассмотрим далее практические случаи динамической термоупругости на основе соотношения (10). В первой случае в декартовых координатах (x, y, z) рассматривается область $z > R$, $t > 0$, ограниченная плоской поверхностью, температурное состояние которой описывается функцией $T_i(z, t)$, $i = 1, 2, 3$; при

этом $U_x = U_y = 0$, $U_z = U_z(z, t)$ и соотношение (10) будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{\partial^2 U_z(z, t)}{\partial z^2} - \frac{1}{v_p^2} \cdot \frac{\partial^2 U_z(z, t)}{\partial t^2} = \frac{1+v}{1-v} \cdot \alpha_T \cdot \frac{\partial [T_i(z, t) - T_0]}{\partial z}, \quad z > R, t > 0. \quad (11)$$

Здесь $v_p = \sqrt{\frac{2G(1-v)}{\rho^*(1-2v)}} = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho^*}$ – скорость распространения волны расширения в упругой среде, близкая к скорости звука.

Интересующая нас компонента напряжения $\sigma_{zz}(z, t)$ связана с перемещением соотношением

$$\sigma_{zz}(z, t) = 2G \left\{ \frac{1-v}{1-2v} \cdot \frac{\partial U_z(z, t)}{\partial z} - \frac{1+v}{1-2v} \cdot \alpha_T [T_i(z, t) - T_0] \right\}. \quad (12)$$

Температурная функция удовлетворяет трем условиям нагрева

$$\frac{\partial T_i(z, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T_i(z, t)}{\partial z^2} - \tau_r \frac{\partial^2 T_i(z, t)}{\partial t^2}, \quad z > R, t > 0, \quad (13)$$

$$T_i(z, t)|_{t=0} = T_0, \quad \frac{\partial T_i(z, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad (14)$$

$$z \geq R, |T_i(z, t)| < \infty, z \geq R, t \geq 0,$$

$$T_i(z, t)|_{z=R} = T_c, t > 0, \quad (15)$$

$$\frac{1}{\tau_r} \int_0^t \frac{\partial T_2(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=R} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_r}\right) d\tau = -\frac{1}{\lambda_T} q_0, t > 0, \quad (16)$$

$$\frac{1}{\tau_r} \int_0^t \frac{\partial T_3(z, \tau)}{\partial z} \Big|_{z=R} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_r}\right) d\tau = \quad (17)$$

$$= h [T_3(z, t)|_{z=R} - T_c], t > 0.$$

Во втором случае в сферических координатах (ρ, φ, θ) рассматривается область $\rho > R, t > 0$ с внутренней сферической полостью при нагреве в условиях центральной симметрии $T_i = T_i(\rho, t)$, так что $U_\varphi = U_\theta = 0$, $U_\rho = U_\rho(\rho, t)$ и (12) записывается в виде:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U_\rho(\rho, t)}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \cdot \frac{\partial U_\rho(\rho, t)}{\partial \rho} - \\ & - \frac{2}{\rho^2} \cdot U_\rho(\rho, t) - \frac{1}{v_p^2} \cdot \frac{\partial^2 U_\rho(\rho, t)}{\partial t^2} = \\ & = \frac{1+v}{1-v} \cdot \alpha_T \cdot \frac{\partial [T_i(\rho, t) - T_0]}{\partial \rho}, \quad \rho > R, t > 0. \end{aligned} \quad (18)$$

При этом

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}(\rho, t) = 2G \left\{ \frac{1-v}{1-2v} \cdot \frac{\partial U_\rho(\rho, t)}{\partial \rho} +, \right. \\ \left. + \frac{2v}{1-2v} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot U_\rho(\rho, t) - \frac{1+v}{1-2v} \cdot \alpha_T [T_i(\rho, t) - T_0] \right\}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_i(\rho, t)}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T_i(\rho, t)}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \cdot \frac{\partial T_i(\rho, t)}{\partial \rho} \right) - \\ - \tau_r \cdot \frac{\partial^2 T_i(\rho, t)}{\partial t^2}, \quad \rho > R, t > 0, \end{aligned} \quad (20)$$

$$T_i(\rho, t)|_{t=0} = T_0, \quad \frac{\partial T_i(\rho, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad (21)$$

$$\rho \geq R, |T_i(\rho, t)| < \infty, \rho \geq R, t \geq 0,$$

$$T_i(\rho, t)|_{\rho=R} = T_c, t > 0, \quad (22)$$

$$\frac{1}{\tau_r} \int_0^t \frac{\partial T_2(\rho, \tau)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_r}\right) d\tau = -\frac{1}{\lambda_T} q_0, t > 0, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_r} \int_0^t \frac{\partial T_3(\rho, \tau)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_r}\right) d\tau = \\ = h [T_3(\rho, t)|_{\rho=R} - T_c], t > 0. \end{aligned} \quad (24)$$

В третьем случае, в цилиндрических координатах (r, φ, z) , рассматривается область $r > R, t > 0$ с внутренней цилиндрической полостью в условиях радиальной температуры $T_i = T_i(r, t)$, так что $U_\varphi = U_z = 0$, $U_r = U_r(r, t)$ и соотношение (10) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 U_r(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial U_r(r, t)}{\partial r} - \\ & - \frac{1}{r^2} \cdot U_r(r, t) - \frac{1}{v_p^2} \cdot \frac{\partial^2 U_r(r, t)}{\partial t^2} = \\ & = \frac{1+v}{1-v} \cdot \alpha_T \cdot \frac{\partial [T_i(r, t) - T_0]}{\partial r}, \quad r > R, t > 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Далее:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r, t) = 2G \left\{ \frac{1-v}{1-2v} \cdot \frac{\partial U_r(r, t)}{\partial r} + \frac{v}{1-2v} \times \right. \\ \left. \times \frac{1}{r} U_r(r, t) - \frac{1+v}{1-2v} \cdot \alpha_T [T_i(r, t) - T_0] \right\}, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\frac{\partial T_i(r, t)}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T_i(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T_i(r, t)}{\partial r} \right) - \tau_r \cdot \frac{\partial^2 T_i(r, t)}{\partial t^2}, \quad r > R, \quad t > 0, \quad (27)$$

$$T_i(r, t)|_{t=0} = T_0, \quad r \geq R, \quad \frac{\partial T_i(r, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad (28)$$

$$r \geq R, \quad |T_i(r, t)| < \infty, \quad r \geq R, \quad t \geq 0,$$

$$T_i(r, t)|_{r=R} = T_c, \quad t > 0, \quad (29)$$

$$\frac{1}{\tau_r} \int_0^t \frac{\partial T_2(r, \tau)}{\partial r} \Big|_{r=R} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_r}\right) d\tau = -\frac{1}{\lambda_T} q_0, \quad t > 0,$$

$$\frac{1}{\tau_r} \int_0^t \frac{\partial T_3(r, \tau)}{\partial r} \Big|_{r=R} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_r}\right) d\tau = h \left[T_3(r, t) \Big|_{r=R} - T_c \right] t > 0. \quad (30)$$

Подобные случаи интенсивного нагрева поверхности области (реального тела) представляют значительный практический интерес, например, в следующих случаях: поверхностный диэлектрический нагрев; расчет термических напряжений в стенках цилиндров паровых машин и двигателей внутреннего сгорания; в теории автоматических систем регулирования температуры; при исследовании области звуковых частот металлов при высоких или очень низких температурах поверхности; многочисленные случаи резкой смены температуры поверхности космических и авиационных объектов; в машиностроительной отрасли при работе на различных экспериментальных установках для определения температурного состояния образцов и др. [6]. Несомненной практической значимостью для теории теплового удара будет представление в рамках обобщенной модели одновременно всех трех случаев в трех системах координат.

Во избежание излишней громоздкости введем следующие безразмерные переменные.
В области $z > R, t > 0$:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{v_p z}{a}, \quad \tau = \frac{v_p^2 t}{a}, \quad \xi_0 = \frac{v_p R}{a}, \quad \beta = \frac{v_p}{v_T}, \quad Bi^* = \frac{ha}{v_p}, \quad S_T = \frac{2G\alpha_T(1+\nu)}{1-2\nu}, \\ W_i(\xi, \tau) &= \frac{T_i(z, t) - T_0}{T_c - T_0}, \quad i = 1, 3; \quad W_2(\xi, \tau) = \frac{T_2(z, t) - T_0}{(q_0 / \lambda_T)(a / v_p)}, \quad i = 2, \\ \sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) &= \frac{\sigma_{zz}(z, t)}{S_T(T_c - T_0)}, \quad i = 1, 3; \quad \sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) = \frac{\sigma_{zz}(z, t)}{S_T(q_0 / \lambda_T)(a / v_p)}, \quad i = 2, \\ U_i(\xi, \tau) &= \frac{(1-\nu)U_z(z, t)}{(1+\nu)\alpha_T(T_c - T_0)(a / v_p)}, \quad i = 1, 3, \\ U_2(\xi, \tau) &= \frac{(1-\nu)U_z(z, t)}{(1+\nu)\alpha_T(q_0 / \lambda_T)(a / v_p)^2}, \quad i = 2. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

В области $\rho > R, t > 0$:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{v_p \rho}{a}, \quad \tau = \frac{v_p^2 t}{a}, \quad \xi_0 = \frac{v_p R}{a}, \quad \beta = \frac{v_p}{v_T}, \quad Bi^* = \frac{ha}{v_p}, \quad S_T = \frac{2G\alpha_T(1+\nu)}{1-2\nu}, \\ W_i(\xi, \tau) &= \frac{T_i(\rho, t) - T_0}{T_c - T_0}, \quad i = 1, 3; \quad W_2(\xi, \tau) = \frac{T_2(\rho, t) - T_0}{(q_0 / \lambda_T)(a / v_p)}, \quad i = 2, \\ \sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) &= \frac{\sigma_{\rho\rho}(\rho, t)}{S_T(T_c - T_0)}, \quad i = 1, 3; \quad \sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) = \frac{\sigma_{\rho\rho}(\rho, t)}{S_T(q_0 / \lambda_T)(a / v_p)}, \quad i = 2, \\ U_i(\xi, \tau) &= \frac{(1-\nu)U_\rho(\rho, t)}{(1+\nu)\alpha_T(T_c - T_0)(a / v_p)}, \quad i = 1, 3, \\ U_2(\xi, \tau) &= \frac{(1-\nu)U_\rho(\rho, t)}{(1+\nu)\alpha_T(q_0 / \lambda_T)(a / v_p)^2}, \quad i = 2. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

В области $r > R, t > 0$:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{v_p r}{a}, \tau = \frac{v_p^2 t}{a}, \xi_0 = \frac{v_p R}{a}, \beta = \frac{v_p}{v_T}, Bi^* = \frac{ha}{v_p}, S_T = \frac{2G\alpha_T(1+v)}{1-2v}, \\ W_i(\xi, \tau) &= \frac{T_i(r, t) - T_0}{T_c - T_0}, i = 1, 3; W_2(\xi, \tau) = \frac{T_2(r, t) - T_0}{(q_0 / \lambda_T)(a / v_p)}, i = 2, \\ \sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) &= \frac{\sigma_{rr}(r, t)}{S_T(T_c - T_0)}, i = 1, 3; \sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) = \frac{\sigma_{rr}(r, t)}{S_T(q_0 / \lambda_T)(a / v_p)}, i = 2, \\ U_i(\xi, \tau) &= \frac{(1-v)U_r(r, t)}{(1+v)\alpha_T(T_c - T_0)(a / v_p)}, i = 1, 3, \\ U_2(\xi, \tau) &= \frac{(1-v)U_r(r, t)}{(1+v)\alpha_T(q_0 / \lambda_T)(a / v_p)^2}, i = 2. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

ОБОБЩЕННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ И ЕЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Запишем обобщенную модель задачи, предполагая границы области свободными от напряжений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_i(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} + \frac{2m+1}{\xi} \left[\frac{\partial U_i(\xi, \tau)}{\partial \xi} - \frac{U_i(\xi, \tau)}{\xi} \right] - \\ - \frac{\partial^2 U_i(\xi, \tau)}{\partial \tau^2} = \frac{\partial W_i(\xi, \tau)}{\partial \xi}, \xi > \xi_0, \tau > 0. \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} U_i(\xi, \tau)|_{\tau=0} = \frac{\partial U_i(\xi, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0, \xi \geq \xi_0, \\ |U_i(\xi, \tau)| < \infty, \xi \geq \xi_0, \tau \geq 0. \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial U_i(\xi, \tau)}{\partial \xi} + \frac{(2m+1)v}{1-v} \cdot \frac{1}{\xi} U_i(\xi, \tau) \right]_{\xi=\xi_0} = \\ = W_i(\xi, \tau) \Big|_{\xi=\xi_0}, \tau > 0. \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_i(\xi, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 W_i(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} + \xi \frac{\partial W_i(\xi, \tau)}{\partial \xi} - \\ - \beta^2 \frac{\partial^2 W_i(\xi, \tau)}{\partial \tau^2} = 0, \xi > \xi_0, \tau > 0. \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} W_i(\xi, \tau)|_{\tau=0} = 0, \xi \geq \xi_0, \frac{\partial W_i(\xi, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0; \\ |W_i(\xi, \tau)| < \infty, \xi \geq \xi_0, \tau \geq 0. \end{aligned} \quad (38)$$

$$W_1(\xi, \tau) \Big|_{\xi=\xi_0} = 1, \tau > 0. \quad (39)$$

$$\frac{1}{\beta^2} \int_0^\tau \frac{\partial W_2(\xi, \tau')}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_0} \exp\left(-\frac{\tau-\tau'}{\beta^2}\right) d\tau' = -1, \tau > 0. \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta^2} \int_0^\tau \frac{\partial W_3(\xi, \tau')}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_0} \exp\left(-\frac{\tau-\tau'}{\beta^2}\right) d\tau' = \\ = Bi^* \left[W_3(\xi, \tau) \Big|_{\xi=\xi_0} = -1 \right], \tau > 0. \end{aligned} \quad (41)$$

Здесь $i = 1$ при $m = -0.5$; $i = 2$ при $m = 0.5$; $i = 3$ при $m = 0$. Заметим, что искомое напряжение $\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)$ во всех трех случаях связано с перемещением $U_i(\xi, \tau)$ соотношением:

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) = \frac{\partial U_i(\xi, \tau)}{\partial \xi} + \\ + \frac{(2m+1)v}{(1-v)} \cdot \frac{1}{\xi} \cdot U_i(\xi, \tau) - W_i(\xi, \tau). \end{aligned} \quad (42)$$

Решение обобщенной задачи (34)–(42) с целью изучения, например, влияния геометрии области на кинетику соответствующих термоупругих напряжений – открытая проблема теории теплового удара. Ее решение приводится ниже.

В пространстве изображений по Лапласу

$$\left. \begin{aligned} \bar{W}_i(\xi, p) &= \int_0^\infty W_i(\xi, \tau) \exp(-p\tau) d\tau, \\ \bar{U}_i(\xi, p) &= \int_0^\infty U_i(\xi, \tau) \exp(-p\tau) d\tau, \\ \bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi, p) &= \int_0^\infty \sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) \exp(-p\tau) d\tau \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

решение тепловой задачи (37)–(41) имеет вид:

$$\begin{aligned} \bar{W}_i(\xi, p) = \bar{f}_i(\xi_0, p) (\xi_0 / \xi)^m K_m[\xi \bar{\mu}(p)], \\ (\bar{\mu}(p) = \sqrt{\beta^2 p^2 + p}), \end{aligned}$$

где

$$\bar{f}_i(\xi_0, p) = \begin{cases} \frac{1}{pK_m[\xi_0\bar{\mu}(p)]}, & i=1, \\ \frac{\bar{\mu}(p)}{p^2K_{m+1}[\xi_0\bar{\mu}(p)]}, & i=2, \\ \frac{Bi^*\bar{\mu}(p)}{p\{pK_{m+1}[\xi_0\bar{\mu}(p)] + Bi^*\bar{\mu}(p)K_m[\xi_0\bar{\mu}(p)]\}}, & i=3. \end{cases}$$

Здесь $K_m(z)$ – модифицированная функция Бесселя.

Соотношения (34)–(36) переведем в пространство изображений (43):

$$\frac{d^2\bar{U}_i(\xi, p)}{d\xi^2} + \frac{2m+1}{\xi} \cdot \frac{d\bar{U}_i(\xi, p)}{d\xi} - \left(p^2 + \frac{2m+1}{\xi^2} \right) \bar{U}_i(\xi, p) = \frac{d\bar{W}_i(\xi, p)}{d\xi}, \quad \xi > \xi_0. \quad (44)$$

$$\left[\frac{d\bar{U}_i(\xi, p)}{d\xi} + \frac{(2m+1)v}{(1-v)} \cdot \frac{1}{\xi} \cdot \bar{U}_i(\xi, p) \right] \Big|_{\xi=\xi_0} = \bar{W}_i(\xi, p) \Big|_{\xi=\xi_0}. \quad (45)$$

$$|\bar{U}_i(\xi, p)| < \infty, \quad \xi \geq \xi_0. \quad (46)$$

Общее решение уравнения (44) состоит из общего решения однородного и частного решения неоднородного уравнения:

$$\bar{U}_i(\xi, p) = \frac{1}{\xi^m} [C_1 K_{m+1}(\xi p) + C_2 I_{m+1}(\xi p)] + \bar{U}_{i\text{чн}}(\xi, p). \quad (47)$$

Нахождение частного решения уравнения (44) требует отдельного рассмотрения. Имеем:

$$\frac{d}{d\xi}(\Delta\bar{U}_i) = \Delta \left(\frac{d\bar{U}_i}{d\xi} \right) - \frac{2m+1}{\xi^2} \cdot \frac{d\bar{U}_i}{d\xi}. \quad (48)$$

При этом

$$\Delta\bar{U}_i = \frac{d^2\bar{U}_i}{d\xi^2} + \frac{2m+1}{\xi} \cdot \frac{d\bar{U}_i}{d\xi}, \quad \Delta\bar{W}_i = (\beta^2 p^2 + p)\bar{W}_i. \quad (49)$$

Частное решение в (47) ищем в виде $\bar{U}_{i\text{чн}}(\xi, p) = A \frac{d\bar{W}_i}{d\xi}$, где постоянную A следует найти.

Подставляя это выражение в (44) и используя (48)–(49), находим $A = \frac{1}{p^2(\beta^2 - 1) + p}$. Таким образом, общее решение уравнения (44) с учетом граничного условия (46) будет иметь вид:

$$\bar{U}_i(\xi, p) = C \left[\frac{1}{\xi^m} K_{m+1}(\xi p) \right] - \bar{\varphi}_i(\xi_0, p) (\xi_0 / \xi)^m K_{m+1}[\xi \bar{\mu}(p)], \quad (50)$$

где

$$\bar{\varphi}_i(\xi_0, p) = \begin{cases} \frac{\bar{\mu}(p)}{p^2[p(\beta^2 - 1) + 1]K_m[\xi_0\bar{\mu}(p)]}, & i=1, \\ \frac{\bar{\mu}^2(p)}{p^3[p(\beta^2 - 1) + 1]K_{m+1}[\xi_0\bar{\mu}(p)]}, & i=2, \\ \frac{Bi^*\bar{\mu}^2(p)}{p^2[p(\beta^2 - 1) + 1][pK_{m+1}(\xi_0\bar{\mu}(p)) + Bi^*\bar{\mu}(p)K_m(\xi_0\bar{\mu}(p))]}, & i=3. \end{cases}$$

Здесь было использовано соотношение

$$\frac{d}{d\xi} [\xi^{-m} K_m(\xi \bar{\mu}(p))] = -\bar{\mu}(p) \xi^{-m} K_{m+1}[\xi \bar{\mu}(p)].$$

Используя свойства функций Бесселя, находим после преобразований следующее важное соотношение, имеющее принципиальное значение для нахождения аналитического решения обобщенной проблемы (34)–(42):

$$\frac{d}{d\xi} \left[\frac{1}{\xi^m} K_{m+1}(\xi p) \right] + \frac{(2m+1)v}{(1-v)} \times \frac{1}{\xi^{m+1}} \cdot K_{m+1}(\xi p) = -\frac{1}{\xi^{m+1}} \bar{\Theta}(\xi p), \quad (51)$$

где

$$\bar{\Theta}(\xi p) = \xi p K_m(\xi p) + (2m+1) \frac{(1-2v)}{(1-v)} K_{m+1}(\xi p). \quad (52)$$

Соотношения (59)–(60) и граничное условие (50) позволяют определить постоянную величину в (55), а вместе с этим – искомое перемещение. Находим:

$$\bar{U}_i(\xi, p) = \frac{(\xi_0 / \xi)^m \bar{\Theta}[\xi_0 \bar{\mu}(p)] K_{m+1}(\xi p) \bar{\varphi}_i(\xi_0 p)}{\bar{\Theta}(\xi_0 p)} - \frac{(\xi_0 / \xi)^m K_m[\xi_0 \bar{\mu}(p)] K_{m+1}(\xi p) \bar{f}_i(\xi_0, p)}{\xi_0^{-1} \bar{\Theta}(\xi_0 p)} - (\xi_0 / \xi)^m \bar{\varphi}_i(\xi_0, p) K_{m+1}[\xi \bar{\mu}(p)].$$

Находим искомое напряжение:

$$\frac{\bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi, p)}{(\xi_0 / \xi)^m} = \frac{(\xi_0 / \xi) \bar{\Theta}(\xi p) K_m[\xi_0 \bar{\mu}(p)] \bar{f}_i(\xi_0, p)}{\bar{\Theta}(\xi_0 p)} +$$

$$+ \frac{\bar{\varphi}_i(\xi_0, p) \bar{\Theta}[\xi \bar{\mu}(p)]}{\xi} - \frac{\bar{\varphi}_i(\xi_0, p) \bar{\Theta}[\xi_0 \bar{\mu}(p)] \bar{\Theta}(\xi p)}{\xi \bar{\Theta}(\xi_0 p)} -$$

$$- \bar{f}_i(\xi_0, p) K_m[\xi \bar{\mu}(p)].$$

Теперь можно записать для напряжений операционные соотношения для всех трех видов нагрева:

- температурный нагрев ($i = 1$)

$$\frac{\bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi, p)}{(\xi_0 / \xi)^m} = \frac{(\xi_0 / \xi) \bar{\Theta}(\xi p)}{p \bar{\Theta}(\xi_0 p)} +$$

$$+ \frac{\bar{\mu}(p) \bar{\Theta}[\xi \bar{\mu}(p)]}{\xi p^2 [p(\beta^2 - 1) + 1] K_m[\xi_0 \bar{\mu}(p)]} - \frac{K_m[\xi \bar{\mu}(p)]}{p K_m[\xi_0 \bar{\mu}(p)]} -$$

$$- \frac{\bar{\mu}(p) \bar{\Theta}[\xi_0 \bar{\mu}(p)] \bar{\Theta}(\xi p)}{\xi p^2 [p(\beta^2 - 1) + 1] K_m[\xi_0 \bar{\mu}(p)] \bar{\Theta}(\xi_0 p)}; \quad (53)$$

- тепловой нагрев ($i = 2$)

$$\frac{\bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi, p)}{(\xi_0 / \xi)^m} = \frac{(\xi_0 / \xi) \bar{\mu}(p) \bar{\Theta}(\xi p) K_m[\xi_0 \bar{\mu}(p)]}{p^2 \bar{\Theta}(\xi_0 p) K_{m+1}[\xi_0 \bar{\mu}(p)]} +$$

$$+ \frac{\bar{\mu}^2(p) \bar{\Theta}(\xi \bar{\mu}(p))}{\xi p^3 [p(\beta^2 - 1) + 1] K_{m+1}[\xi_0 \bar{\mu}(p)]} -$$

$$- \frac{\bar{\mu}(p) K_m[\xi_0 \bar{\mu}(p)]}{p^2 K_{m+1}[\xi_0 \bar{\mu}(p)]} -$$

$$- \frac{\bar{\mu}^2(p) \bar{\Theta}(\xi p) \bar{\Theta}[\xi_0 \bar{\mu}(p)]}{\xi p^3 [p(\beta^2 - 1) + 1] \bar{\Theta}(\xi_0 p) K_{m+1}[\xi_0 \bar{\mu}(p)]}; \quad (54)$$

- нагрев средой ($i = 3$)

$$\frac{\bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi, p)}{(\xi_0 / \xi)^m} = \frac{(\xi_0 / \xi) \bar{\Theta}(\xi p)}{p \bar{\Theta}(\xi_0 p)} \times$$

$$\times \frac{K_m[\xi_0 \bar{\mu}(p)] Bi^* \bar{\mu}(p)}{[p K_{m+1}(\xi_0 \bar{\mu}(p)) + Bi^* \bar{\mu}(p) K_m(\xi_0 \bar{\mu}(p))] \bar{\mu}} +$$

$$+ \frac{Bi^* \bar{\mu}^2(p)}{\xi p^2 [p(\beta^2 - 1) + 1]} \times$$

$$\times \frac{\bar{\Theta}[\xi_0 \bar{\mu}(p)]}{[p K_{m+1}(\xi_0 \bar{\mu}(p)) + Bi^* \bar{\mu}(p) K_m(\xi_0 \bar{\mu}(p))]} -$$

$$- \frac{Bi^* \bar{\mu}^2(p)}{\xi p^2 [p(\beta^2 - 1) + 1]} \times$$

$$\times \frac{\bar{\Theta}[\xi_0 \bar{\mu}(p)] \bar{\Theta}(\xi p)}{[p K_{m+1}(\xi_0 \bar{\mu}(p)) + Bi^* \bar{\mu}(p) K_m(\xi_0 \bar{\mu}(p))] \bar{\Theta}(\xi_0 p)} -$$

$$- \frac{Bi^* \bar{\mu}(p) K_m[\xi_0 \bar{\mu}(p)]}{p [p K_{m+1}(\xi_0 \bar{\mu}(p)) + Bi^* \bar{\mu}(p) K_m(\xi_0 \bar{\mu}(p))]}.$$

Обратное преобразование в (53)–(55) оказывается весьма трудоемким и приводит к сложным и трудно обозримым выражениям. Но если учесть, что в постановке задачи (34)–(42) имеют место инерционные эффекты микросекундной длительности [17], во времена которых напряжения $\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)$ как раз и достигают максимальных значений, то можно рассмотреть малые времена τ , соответствующие в изображениях большим p , т.е. непосредственно после теплового удара. Для этого используем в (53)–(55) асимптотическое представление цилиндрических функций для больших p :

$$K_\nu(p) = \frac{\sqrt{\pi/2}}{\sqrt{p}} \exp(-p), \quad \nu \geq 0,$$

где K_ν – модифицированная функция Бесселя.

Введем далее следующие обозначения:

$$A_m(\xi) = \frac{(2m+1)(1-2\nu)}{(1-\nu)\xi}, \quad \gamma = \frac{1}{1-\beta^2}.$$

Введем также функцию для данного класса задач (функцию Карташова)

$$\bar{\chi}_m(\xi, p) = \frac{p + A_m(\xi)}{(p - \gamma)[p + A_m(\xi_0)]},$$

которую используем при нахождении оригиналов найденных изображений. Оригинал этой функции имеет вид:

$$\chi_m(\xi, \tau) = \frac{\gamma + A_m(\xi)}{\gamma + A_m(\xi_0)} \times$$

$$\times \left[\frac{A_m(\xi_0) - A_m(\xi)}{\gamma + A_m(\xi)} \exp(-A_m(\xi_0)\tau) + \exp(\gamma\tau) \right].$$

После преобразований находим:

$$\frac{\bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi, p)}{(\xi_0 / \xi)^{m+1/2}} = -\bar{\Psi}_1(\xi, p) \exp[-(\xi - \xi_0) \bar{\mu}(p)] +$$

$$+ \bar{\Psi}_2(\xi, p) \exp[-(\xi - \xi_0) p], \quad (56)$$

где при температурном нагреве ($i = 1$):

$$\bar{\Psi}_1(\xi, p) = \left\{ \frac{\gamma \bar{\mu}(p) [\bar{\mu}(p) + A_m(\xi)]}{p^2 (p - \gamma)} + \frac{1}{p} \right\}, \quad (57)$$

$$\bar{\Psi}_2(\xi, p) = \left\{ \frac{p - \gamma}{p} \bar{\chi}_m(\xi, p) + \right.$$

$$\left. + \frac{\gamma \bar{\mu}(p) [\bar{\mu}(p) + A_m(\xi_0)] \bar{\chi}_m(\xi, p)}{p^2} \right\}; \quad (58)$$

при тепловом нагреве ($i = 2$):

$$\bar{\Psi}_1(\xi, p) = \left\{ \frac{\gamma \bar{\mu}^2(p) [\bar{\mu}(p) + A_m(\xi)]}{p^3(p - \gamma)} + \frac{\bar{\mu}^2(p)}{p^2} \right\}, \quad (59)$$

$$\bar{\Psi}_2(\xi, p) = \left\{ \frac{\bar{\mu}(p)(p - \gamma) \bar{\chi}_m(\xi, p)}{p^2} + \frac{\gamma \bar{\mu}^2(p) [\bar{\mu}(p) + A_m(\xi_0)] \bar{\chi}_m(\xi, p)}{p^3} \right\}, \quad (60)$$

при нагреве средой ($i = 3$):

$$\bar{\Psi}_1(\xi, p) = \left\{ \frac{\gamma Bi^* \bar{\mu}^2(p) [\bar{\mu}(p) + A_m(\xi)]}{p^2(p - \gamma) [p + Bi^* \bar{\mu}(p)]} + \frac{Bi^* \bar{\mu}(p)}{p[p + Bi^* \bar{\mu}(p)]} \right\}, \quad (61)$$

$$\bar{\Psi}_2(\xi, p) = \left\{ \frac{Bi^* \bar{\mu}(p)(p - \gamma) \bar{\chi}_m(\xi, p)}{p[p + Bi^* \bar{\mu}(p)]} + \frac{\gamma Bi^* \bar{\mu}^2(p) [\bar{\mu}(p) + A_m(\xi_0)] \bar{\chi}_m(\xi, p)}{p^2[p + Bi^* \bar{\mu}(p)]} \right\}. \quad (62)$$

При нахождении оригиналов в (56)–(62) следует обратить внимание на величину параметра $\beta = \nu_p / \nu_T$. Так для органического стекла $\beta = 0.4$, для кварца

и кремния $\beta = 0.7$, т.е. $\beta < 1$; для стали $\beta = 3.4$, для кристаллов и алюминия $\beta = 1.8$, т.е. $\beta > 1$. Величина параметра β играет определяющую роль в записи интервалов изменения напряжения $\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)$. Находим для напряжений:

- при $\beta < 1$:

$$\frac{\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)}{(\xi_0 / \xi)^{m+1/2}} = \begin{cases} 0, & \tau < (\xi - \xi_0)\beta, \\ -\sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau), & (\xi - \xi_0)\beta < \tau < (\xi - \xi_0), \\ -\sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) + \sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau), & \tau > (\xi - \xi_0); \end{cases} \quad (63)$$

- при $\beta > 1$:

$$\frac{\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)}{(\xi_0 / \xi)^{m+1/2}} = \begin{cases} 0, & \tau < (\xi - \xi_0), \\ \sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau), & (\xi - \xi_0) < \tau < (\xi - \xi_0)\beta, \\ -\sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) + \sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau), & \tau > \beta(\xi - \xi_0). \end{cases} \quad (64)$$

Здесь $\sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau)$ – оригинал изображения $\bar{\Psi}_1(\xi, p) \exp \left[-(\xi - \xi_0)\beta \sqrt{p^2 + p / \beta^2} \right]$, $\sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau) = \Psi_2[\xi, \tau - (\xi - \xi_0)]$.

Переходя к оригиналам, запишем аналитические соотношения для напряжений во всех трех случаях нагрева:

- температурный нагрев ($i = 1$)

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) = & \gamma \left\langle \exp \{ \gamma [\tau - (\xi - \xi_0)\beta] - (\xi - \xi_0) / 2\beta \} + \right. \\ & + \frac{\xi - \xi_0}{2\beta} \int_{(\xi - \xi_0)\beta}^{\tau} \exp[\gamma(\tau - \tau') - (1/2\beta^2)\tau'] \frac{I_1 \left((1/2\beta^2) \sqrt{(\tau')^2 - (\xi - \xi_0)^2 \beta^2} \right)}{\sqrt{(\tau')^2 - (\xi - \xi_0)^2 \beta^2}} d\tau' \times \eta[\tau - (\xi - \xi_0)\beta] + \\ & + \frac{\gamma A_m(\xi)}{\beta} \left\{ \int_{(\xi - \xi_0)\beta}^{\tau} \exp[\gamma(\tau - \tau') - (1/2\beta^2)\tau'] I_0 \left((1/2\beta^2) \sqrt{(\tau')^2 - (\xi - \xi_0)^2 \beta^2} \right) d\tau' \right\} \times \eta[\tau - (\xi - \xi_0)\beta] - \\ & - \frac{A_m(\xi)}{\beta} \left\{ \int_{(\xi - \xi_0)\beta}^{\tau} \exp[-(1/2\beta^2)\tau'] I_0 \left((1/2\beta^2) \sqrt{(\tau')^2 - (\xi - \xi_0)^2 \beta^2} \right) d\tau' \right\} \times \eta[\tau - (\xi - \xi_0)\beta]. \end{aligned} \quad (65)$$

$$\sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau) = \Psi_2[\xi, \tau - (\xi - \xi_0)], \quad (66)$$

где

$$\Psi_2(\xi, \tau) = \gamma \chi_m(\xi, \tau) + A_m(\xi_0) \left[2\beta \int_0^{\tau} \chi_m(\xi, \tau') d\tau' \right] - \beta \int_0^{\tau} \exp[-(1/2\beta^2)(\tau - \tau')] \chi_m(\xi, \tau') d\tau'; \quad (67)$$

- тепловой нагрев ($i = 2$)

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) = & \gamma\beta \exp[-(1/2\beta^2)\tau] I_0\left((1/2\beta^2)\sqrt{\tau^2 - (\xi - \xi_0)^2\beta^2}\right) \eta[\tau - (\xi - \xi_0)\beta] + \\ & + \frac{\gamma^2}{\beta} \left\{ \int_{(\xi - \xi_0)\beta}^{\tau} \exp[\gamma(\tau - \tau') - (1/2\beta^2)\tau'] I_0\left((1/2\beta^2)\sqrt{(\tau')^2 - (\xi - \xi_0)^2\beta^2}\right) d\tau' \right\} \times \eta[\tau - (\xi - \xi_0)\beta] + \\ & + A_m(\xi) \left\{ \exp[\gamma(\tau - (\xi - \xi_0)\beta)] - 1 - [\tau - (\xi - \xi_0)\beta] \right\} \exp(-1/2\beta^2)\tau + \\ & + \frac{\xi - \xi_0}{2\beta} \int_{(\xi - \xi_0)\beta}^{\tau} [\exp \gamma(\tau - \tau') - 1 - (\tau - \tau')] \exp[-(1/2\beta^2)\tau'] \times \\ & \times \frac{I_1\left((1/2\beta^2)\sqrt{(\tau')^2 - (\xi - \xi_0)^2\beta^2}\right)}{\sqrt{(\tau')^2 - (\xi - \xi_0)^2\beta^2}} d\tau' \eta[\tau - (\xi - \xi_0)\beta]. \end{aligned} \quad (68)$$

$$\Psi_2(\xi, \tau) = \gamma\beta \chi_m(\xi, \tau) + \frac{\gamma[1 + 2\beta^3 A_m(\xi_0)]}{2\beta} \int_0^{\tau} \chi_m(\xi, \tau') d\tau' + \gamma A_m(\xi_0) \int_0^{\tau} (\tau - \tau') \chi_m(\xi, \tau') d\tau'; \quad (69)$$

- нагрев средой ($i = 3$). Для этого случая при нахождении оригинала используем разложение изображения $\bar{\mu}(p) = \beta p[1 + 1/(\beta^2 p)]^{1/2}$ в биномиальный ряд. Введем также ряд обозначений:

$$\begin{aligned} \gamma &= 1 + \gamma\beta^2; \quad \gamma_1 = \frac{1}{1 + Bi^*\beta}; \quad \gamma_2 = \frac{Bi^*}{2\beta(1 + Bi^*\beta)}; \\ A_1 &= \gamma - \frac{\gamma_1[\gamma^2 + (\gamma - 1)Bi^* A_m(\xi)]}{\gamma + \gamma_2}; \\ A_2 &= \frac{\gamma_1[\gamma^2 + (\gamma - 1)Bi^* A_m(\xi)]}{\gamma + \gamma_2} - \gamma\gamma_1 + 2\beta A_m(\xi); \quad A_3 = -2\beta A_m(\xi); \\ A_4 &= [\gamma\gamma_1(1 + \gamma_2) - \gamma_1\gamma_2 - \gamma(1 + \gamma_1)\beta A_m(\xi_0)]. \end{aligned}$$

Находим искомые оригиналы:

$$\begin{aligned} \Psi_1(\xi, \tau) = & A_1 \left\{ \exp[\gamma(\tau - (\xi - \xi_0)\beta)] - (\xi - \xi_0) / 2\beta \right\} + \\ & + \frac{A_1(\xi - \xi_0)}{2\beta} \int_{(\xi - \xi_0)\beta}^{\tau} \exp[\gamma(\tau - \tau') - (1/2\beta^2)\tau'] \frac{I_1\left((1/2\beta^2)\sqrt{(\tau')^2 - (\xi - \xi_0)^2\beta^2}\right)}{\sqrt{(\tau')^2 - (\xi - \xi_0)^2\beta^2}} d\tau' \times \eta[\tau - (\xi - \xi_0)\beta] + \\ & + A_2 \left\{ \exp[-\gamma_2(\tau - (\xi - \xi_0)\beta)] - (\xi - \xi_0) / 2\beta \right\} + \frac{\xi - \xi_0}{2\beta} \int_{(\xi - \xi_0)\beta}^{\tau} \exp[-\gamma_2(\tau - \tau') - (1/2\beta^2)\tau'] \times \\ & \times \frac{I_1\left((1/2\beta^2)\sqrt{(\tau')^2 - (\xi - \xi_0)^2\beta^2}\right)}{\sqrt{(\tau')^2 - (\xi - \xi_0)^2\beta^2}} d\tau' \times \eta[\tau - (\xi - \xi_0)\beta] + \\ & + A_3 \times \left\{ \exp[-(1/2\beta)(\xi - \xi_0)] + \frac{\xi - \xi_0}{2\beta} \int_{(\xi - \xi_0)\beta}^{\tau} \exp[-(1/2\beta^2)\tau'] \frac{I_1\left((1/2\beta^2)\sqrt{(\tau')^2 - (\xi - \xi_0)^2\beta^2}\right)}{\sqrt{(\tau')^2 - (\xi - \xi_0)^2\beta^2}} d\tau' \right\} \times \\ & \times \eta[\tau - (\xi - \xi_0)\beta]; \end{aligned} \quad (70)$$

$$\Psi_2(\xi, \tau) = \gamma(1 - \gamma_1) \chi_m(\xi, \tau) + 2\beta A_m(\xi_0) \int_0^{\tau} \chi_m(\xi, \tau') d\tau' + A_4 \int_0^{\tau} \exp[-\gamma_2(\tau - \tau')] \chi_m(\xi, \tau') d\tau'. \quad (71)$$

Таким образом, полученные соотношения (63)–(71) завершают решение практически важной задачи о термической реакции массивного тела с внутренними полостями. В дополнение к развитому подходу можно указать весьма эффективный способ оценки величины термических напряжений, практически не применявшийся ранее в теории теплового удара.

Как следует из операционного решения динамической задачи, наличие в (56) слагаемого $\bar{\Psi}_2(\xi, p) \exp[-(\xi - \xi_0)p]$ показывает, что можно предложить расчетную инженерную формулу для верхней оценки величины температурного напряжения через скачок напряжений в (70) на фронте термодинамической волны. Для этого используем теорему запаздывания [6] в виде:

$$\begin{cases} \bar{\Psi}(\xi, p) \exp[-(\xi - \xi_0)p] \leftarrow 0, & \tau < \xi - \xi_0, \\ \Psi_2[\xi, \tau - (\xi - \xi_0)], & \tau > \xi - \xi_0, \end{cases}$$

откуда видно, что в точке $(\xi - \xi_0)$ происходит скачок функции $\Psi_2(\xi, \tau)$, величина которого рассчитывается по формуле

$$\begin{aligned} |\Delta| &= \lim_{\tau \rightarrow (\xi - \xi_0) + 0} \Psi_2[\xi, \tau - (\xi - \xi_0)] = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0 +} \Psi_2(\xi, \tau) = \lim_{p \rightarrow \infty} \bar{\Psi}_2(\xi, p). \end{aligned}$$

Вначале находим величину скачка для напряжений $\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)$ в координатах (ξ, τ) , затем переходим к исходным напряжениям в исходных областях

(11)–(30), используя формулы перехода (31)–(33). В результате для режима температурного нагрева (58) находим:

$$\begin{aligned} |\Delta| &= |\sigma_{zz}; \sigma_{pp}; \sigma_{rr}|_{\max} = \\ &= \begin{cases} \frac{2G\gamma(1+\nu)\alpha_T|T_c - T_0|}{(1-2\nu)}, & m = -1/2; \\ \frac{(R/\rho)2G\gamma(1+\nu)\alpha_T|T_c - T_0|}{(1-2\nu)}, & m = 1/2; \\ \frac{\sqrt{R/r}2G\gamma(1+\nu)\alpha_T|T_c - T_0|}{(1-2\nu)}, & m = 0. \end{cases} \quad (72) \end{aligned}$$

Оценки (72) справедливы как при интенсивном нагреве ($T_c > T_0$), когда в фиксированном сечении $\xi = \text{const} > \xi_0$ возникают напряжения сжатия, так и при охлаждении ($T_c < T_0$) когда возникают более опасные напряжения растяжения.

ФИЗИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ

На рис. 1 представлены кривые зависимости напряжения (63), (65)–(67) (температурный нагрев) от времени в фиксированном сечении $\xi = 1$ при $\xi_0 = 0.1$, $\nu = 0.3$, $\beta = 0.4$ для $m = -0.5$; 0; 0.5. На рис. 2 представлены кривые для напряжений (температурный нагрев) при тех же данных, но для $\beta = 0$, т.е. для случая классической феноменологии Фурье на основе уравнений параболического типа.

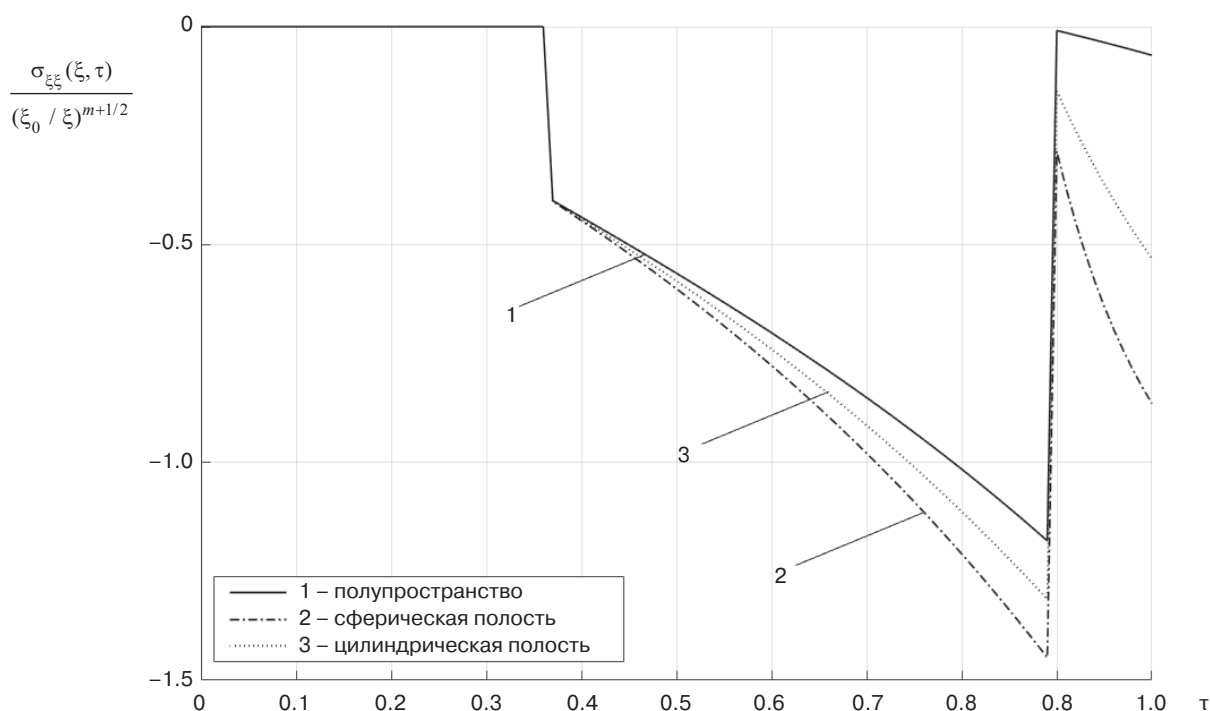


Рис. 1. Зависимость напряжения от времени в сечении $\xi = 1$ при $\xi_0 = 0.1$, $\nu = 0.3$, $\beta = 0.4$.
Рассчитано по формулам (63), (65)–(67) для $m = -0.5$ (кривая 1), $m = 0.5$ (кривая 2), $m = 0$ (кривая 3)

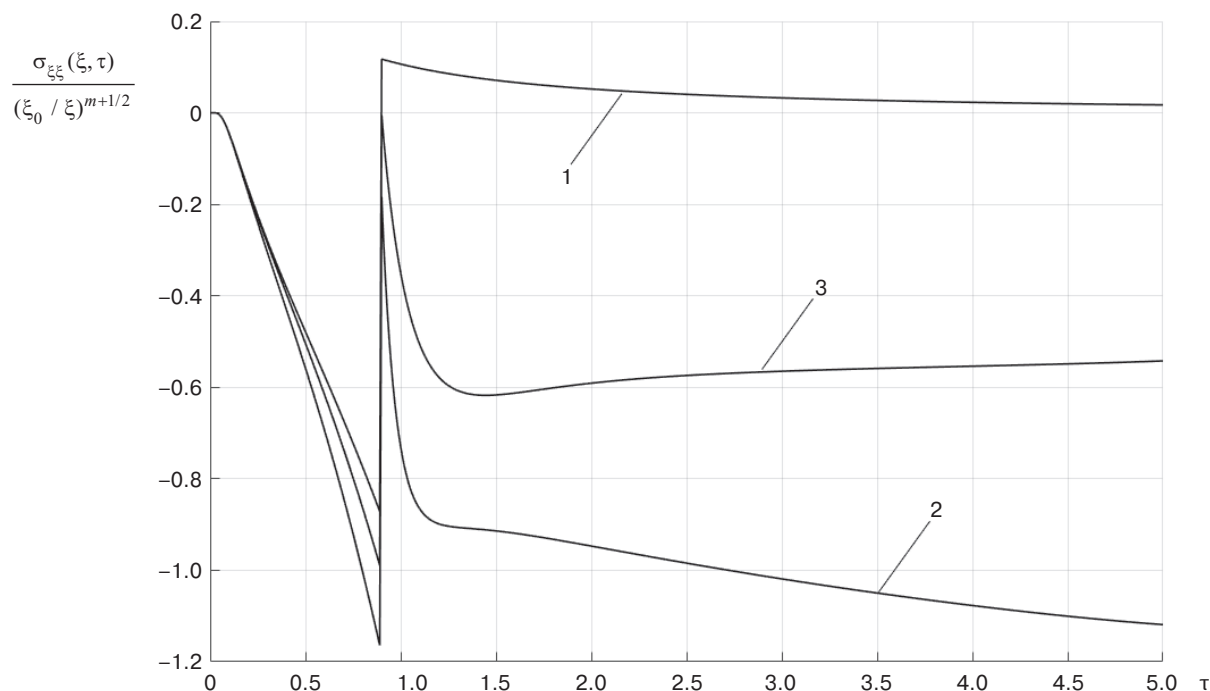


Рис. 2. Зависимость напряжения от времени в сечении $\xi = 1$ при $\xi_0 = 0.1$, $\nu = 0.3$ ($\beta = 0$).
Рассчитано по формулам (73)–(75) для $m = -0.5$ (кривая 1), $m = 0.5$ (кривая 2), $m = 0$ (кривая 3)

Представляет интерес сравнение двух указанных подходов, а именно, описание влияния гиперболическости динамической задачи (т.е. влияния локальной неравновесности в системе) на величину температурных напряжений. Выпишем решение «параболической» задачи теплового удара при температурном нагреве для всех трех описанных выше областей, учитывая, что эта часть исследований также представляет большой практический интерес и до настоящего времени также является открытой проблемой.

$$\frac{\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)}{(\xi_0 / \xi)^{m+1/2}} = \sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) + \begin{cases} 0, & \tau < \xi - \xi_0, \\ \sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau), & \tau > \xi - \xi_0, \end{cases} \quad (73)$$

где

$$\sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) = -\Psi_1^*(\xi, \tau); \quad \sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau) = \Psi_2^*[\xi, \tau - (\xi - \xi_0)];$$

$$\begin{aligned} \Psi_1^*(\xi, \tau) = & \frac{1}{2} \left\{ \exp\left[\tau - (\xi - \xi_0)\right] \Phi^*\left(\frac{\xi - \xi_0}{2\sqrt{\tau}} - \sqrt{\tau}\right) + \right. \\ & \left. + \exp\left[\tau + (\xi - \xi_0)\right] \Phi^*\left(\frac{\xi - \xi_0}{2\sqrt{\tau}} + \sqrt{\tau}\right) \right\} + \\ & + A_m(\xi) \left\{ \frac{1}{2} \left[\exp(\tau - (\xi - \xi_0)) \Phi^*\left(\frac{\xi - \xi_0}{2\sqrt{\tau}} - \sqrt{\tau}\right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \exp(\tau + (\xi - \xi_0)) \Phi^*\left(\frac{\xi - \xi_0}{2\sqrt{\tau}} + \sqrt{\tau}\right) \right] + \right. \\ & \left. - \frac{2\sqrt{\tau}}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{(\xi - \xi_0)^2}{4\tau}\right] + (\xi - \xi_0) \Phi^*\left(\frac{\xi - \xi_0}{2\sqrt{\tau}}\right) \right\}; \end{aligned} \quad (74)$$

$$\begin{aligned} \Psi_2^*(\xi, \tau) = & \chi_m(\xi, \tau) + \\ & + \frac{2A_m(\xi_0)}{\sqrt{\pi}} \int_0^\tau \sqrt{\tau - \tau'} \cdot \chi_m(\xi, \tau') d\tau'. \end{aligned} \quad (75)$$

Здесь

$$\Phi^*(z) = 1 - \Phi(z),$$

$$\Phi(z) = (2 / \sqrt{\pi}) \int_0^z \exp(-y^2) dy$$

– функция Лапласа.

Как следует из графиков, учет конечной скорости распространения теплоты приводит к существенному изменению картины динамических температурных напряжений по сравнению с данными на рис. 2. Соотношение (63) в отличие от (73) показывает наличие двух скачков напряжений: один – на фронте тепловой волны, другой – на фронте упругой волны, идущих, соответственно, со скоростями ν_T и ν_p .

Рассмотрим фиксированное сечение внутри области $\xi > \xi_0$. При $\beta < 1$ напряжения в сечении в начале равны нулю. В момент времени $\tau = \beta(\xi - \xi_0)$ к этому сечению приходит тепловая волна напряжений, фронт которой движется со скоростью ν_T ; возникает скачком сжимающее напряжение, которое дальше возрастает. В момент времени $\tau = \xi - \xi_0$ к сечению подходит продольная упругая волна, что вызывает скачкообразное изменение напряжения и его дальнейшее уменьшение.

Кривые на рис. 1 показывают и другой интересный результат: наиболее «уязвимой» (в смысле термической реакции) является область с внутренней сферической полостью. Во всех трех случаях ($m = -0.5; 0; 0.5$) возникающие напряжения являются сжимающими. Оценки (72) отчетливо показывают, что приповерхностные слои (вблизи границы тела (области)) в наибольшей степени подвержены термическому удару. Что касается теплового удара в классическом случае (рис. 2), то здесь наибольшие напряжения сжатия характерны для массивного тела, ограниченного плоской поверхностью ($m = -0.5$). При этом после прохождения волны расширения (за счет функции $\sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau)$ в (72)) напряжение переходит в область положительных (растягивающих) значений и затем быстро убывает, достигая квазистатических значений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе развиты обобщенные модельные представления теплового удара в терминах динамической термоупругости для локально-неравновесных процессов переноса теплоты. Получено аналитическое решение (открытой) обобщенной задачи термической реакции массивных тел с внутренними полостями одновременно в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат при температурном нагреве, тепловом нагреве, нагреве средней границы твердого тела. Проведены численные эксперименты, показывающие влияние локальной неравновесности на кинетику температурных напряжений (по сравнению с классической феноменологией Фурье). Предложены важные в практическом отношении расчетные инженерные соотношения для верхней границы температурных напряжений при интенсивном температурном нагреве.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карташов Э.М. Модельные представления теплового удара в динамической термоупругости. *Russ. Technol. J.* 2020;8(2):85–108. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2020-8-2-85-108>
2. Карташов Э.М. Новые операционные соотношения для математических моделей локально-неравновесного теплообмена. *Russ. Technol. J.* 2022;10(1):68–79. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2022-10-1-68-79>
3. Кудинов И.В., Кудинов В.А. Математическая модель локально-неравновесного теплопереноса с учетом пространственно-временной нелокальности. *Инженерно-физический журнал*. 2015;88(2):393–408.
4. Кудинов В.А., Еремин А.В., Кудинов И.В. Разработка и исследование сильно неравновесной модели теплообмена в жидкости с учетом пространственно-временной нелокальности и диссипации энергии. *Теплофизика и аэромеханика*. 2017;24(6):929–935.
5. Кирсанов Ю.А., Кирсанов А.Ю. Об измерении времени тепловой релаксации твердых тел. *Изв. РАН. Энергетика*. 2015;1:113–122.
6. Карташов Э.М., Кудинов В.А. *Аналитические методы теории теплопроводности и ее приложений*. М.: URSS; 2012. 1080 с. ISBN 978-5-9710-4994-4
7. Соболев С.Л. Процессы переноса и бегущие волны в локально-неравновесных системах. *Успехи физ. наук*. 1991;161(3):5–29. <https://doi.org/10.3367/UFNr.0161.199103b.0005>
8. Соболев С.Л. Локально-неравновесные модели процессов переноса. *Успехи физ. наук*. 1997;167(10):1095–1106. <https://doi.org/10.3367/UFNr.0167.199710f.1095>

REFERENCES

1. Kartashov E.M. Model representations of heat shock in terms of dynamic thermal elasticity. *Russ. Technol. J.* 2020;8(2):85–108 (in Russ.). <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2020-8-2-85-108>
2. Kartashov E.M. New operational relations for mathematical models of local nonequilibrium heat transfer. *Russ. Technol. J.* 2022;10(1):68–79 (in Russ.). <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2022-10-1-68-79>
3. Kudinov I.V., Kudinov V.A. Mathematical simulation of the locally nonequilibrium heat transfer in a body with account for its nonlocality in space and time. *J. Eng. Phys. Thermophys.* 2015;88(2):406–422. <https://doi.org/10.1007/s10891-015-1206-6> [Original Russian Text: Kudinov I.V., Kudinov V.A. Mathematical simulation of the locally nonequilibrium heat transfer in a body with account for its nonlocality in space and time. *Inzhenerno-Fizicheskii Zhurnal*. 2015;88(2):393–408 (in Russ.).]
4. Kudinov V.A., Eremin A.V., Kudinov I.V. The development and investigation of a strongly non-equilibrium model of heat transfer in fluid with allowance for the spatial and temporal non-locality and energy dissipation. *Thermophys. Aeromech.* 2017;24(6):901–907. <https://doi.org/10.1134/S0869864317060087> [Original Russian Text: Kudinov V.A., Eremin A.V., Kudinov I.V. The development and investigation of a strongly non-equilibrium model of heat transfer in fluid with allowance for the spatial and temporal non-locality and energy dissipation. *Teplofizika i Aeromekhanika*. 2017;24(6):929–935 (in Russ.).]

9. Кудинов И.В., Котова Е.В., Кудинов В.А. Метод получения аналитических решений краевых задач на основе определения дополнительных граничных условий и дополнительных искоемых функций. *Сиб. журн. вычисл. математ.* 2019;22(2):153–165. <https://doi.org/10.15372/SJNM20190203>
10. Кудинов В.А., Еремин А.В., Кудинов И.В., Жуков В.В. Исследование сильнонеравновесной модели теплового воспламенения с учетом пространственно-временной нелокальности. *Физика горения и взрыва.* 2018;54(6):25–29. <https://doi.org/10.15372/FGV20180603>
11. Формалев В.Ф. *Уравнения математической физики.* М.: URSS; 2021. 648 с. ISBN 978-5-9710-8380-1
12. Kudinov I.V., Eremin A.V., Kudinov V.A., Dovgallo A.I., Zhukov V.V. Mathematical model of damped elastic rod oscillations with dual-phase-lag. *Int. J. Solids Struct.* 2020; 200–201:231–241. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2020.05.018>
13. Zhukov V.V. Study of analytical solution of the thermal conductivity equation considering relaxation phenomena under the third class boundary conditions. *J. Phys.: Conf. Ser.* 2021;1889:022027. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1889/2/022027>
14. Zhukov V.V., Kudinov I.V., Kutsev N.M., Mikheeva G.V., Klebleev R.M. Determination of quasi-static and residual stresses in the course of the thermoplastic hardening in a boundary layer of the material. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.* 2020;709(3):033078. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/709/3/033078>
15. Eremin A.V., Kudinov V.A., Kudinov I.V., Zhukov V.V., Trubitsyn K.V. Mathematical model of fuel heat ignition considering space-time nonlocality. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.* 2019;552(1):012003. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/552/1/012003>
16. Карташов Э.М. Аналитические решения гиперболических моделей теплопроводности. *Инженерно-физ. журн.* 2014;87(5):1072–1081.
17. Карташов Э.М., Кудинов В.А. *Аналитическая теория теплопроводности и прикладной термоупругости.* М.: URSS; 2012. 670 с. ISBN 978-5-397-02750-2
5. Kirsanov Yu.A., Kirsanov A.Yu. About measuring the thermal relaxation time of solid body. *Izvestiya RAN. Energetika.* 2015;1:113–122 (in Russ.).
6. Kartashov E.M., Kudinov V.A. *Analyticheskie metody teorii teploprovodnosti i ee prilozhenii (Analytical Methods of the Theory of Heat Conduction and its Applications).* Moscow: URSS; 2012. 1080 p. (in Russ.). ISBN 978-5-9710-4994-4
7. Sobolev S.L. Transport processes and traveling waves in systems with local nonequilibrium. *Sov. Phys. Usp.* 1991;34: 217. <https://doi.org/10.1070/PU1991v034n03ABEH002348> [Original Russian Text: Sobolev S.L. Transport processes and traveling waves in systems with local nonequilibrium. *Uspekhi Fizicheskikh Nauk.* 1991;161(3):5–29 (in Russ.). <https://doi.org/10.3367/UFNr.0161.199103b.0005>]
8. Sobolev S.L. Local non-equilibrium transport models. *Phys. Usp.* 1997;40(10):1043. <https://doi.org/10.1070/PU1997v040n10ABEH000292> [Original Russian Text: Sobolev S.L. Local non-equilibrium transport models. *Uspekhi Fizicheskikh Nauk.* 1997;167(10):1095–1106 (in Russ.). <https://doi.org/10.3367/UFNr.0167.199710f.1095>]
9. Kudinov I.V., Kotova E.V., Kudinov V.A. A method for obtaining analytical solutions to boundary value problems by defining additional boundary conditions and additional sought-for functions. *Numer. Analys. Appl.* 2019;12(2):126–136. <https://doi.org/10.1134/S1995423919020034> [Original Russian Text: Kudinov I.V., Kotova E.V., Kudinov V.A. A method for obtaining analytical solutions to boundary value problems by defining additional boundary conditions and additional sought-for functions. *Sibirskii Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki.* 2019;22(2):153–165. <https://doi.org/10.15372/SJNM20190203>]
10. Kudinov V.A., Eremin A.V., Kudinov I.V., Zhukov V.V. Strongly nonequilibrium model of thermal ignition with account for space–time nonlocality. *Combust. Explos. Shock Waves.* 2018;54(6):649–653. <https://doi.org/10.1134/S0010508218060035> [Original Russian Text: Kudinov V.A., Eremin A.V., Kudinov I.V., Zhukov V.V. Strongly nonequilibrium model of thermal ignition with account for space–time nonlocality. *Fizika Goreniya i Vzryva.* 2018;54(6):25–29 (in Russ.). <https://doi.org/10.15372/FGV20180603>]
11. Formalev V.F. *Uravneniya matematicheskoi fiziki (Equations of mathematical physics).* Moscow: URSS; 2021. 648 p. (in Russ.). ISBN 978-5-9710-8380-1
12. Kudinov I.V., Eremin A.V., Kudinov V.A., Dovgallo A.I., Zhukov V.V. Mathematical model of damped elastic rod oscillations with dual-phase-lag. *Int. J. Solids Struct.* 2020; 200–201:231–241. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2020.05.018>
13. Zhukov V.V. Study of analytical solution of the thermal conductivity equation considering relaxation phenomena under the third class boundary conditions. *J. Phys.: Conf. Ser.* 2021;1889:022027. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1889/2/022027>
14. Zhukov V.V., Kudinov I.V., Kutsev N.M., Mikheeva G.V., Klebleev R.M. Determination of quasi-static and residual stresses in the course of the thermoplastic hardening in a boundary layer of the material. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.* 2020;709(3):033078. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/709/3/033078>

15. Eremin A.V., Kudinov V.A., Kudinov I.V., Zhukov V.V., Trubitsyn K.V. Mathematical model of fuel heat ignition considering space-time nonlocality. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.* 2019;552(1):012003. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/552/1/012003>
16. Kartashov É.M. Analytical solutions of hyperbolic heat-conduction models. *J. Eng. Phys. Thermophy.* 2014;87(5):1116–1125. <https://doi.org/10.1007/s10891-014-1113-2>
[Original Russian Text: Kartashov E.M. Analytical solutions of hyperbolic heat-conduction models. *Inzhenerno-Fizicheskii Zhurnal*. 2014;87(5):1072–1081 (in Russ.).]
17. Kartashov E.M., Kudinov V.A. *Analiticheskaya teoriya teploprovodnosti i prikladnoi termouprugosti (Analytical theory of thermal conductivity and applied thermoelasticity)*. Moscow: URSS; 2012. 670 p. (in Russ.). ISBN 978-5-397-02750-2

Об авторе

Карташов Эдуард Михайлович, д.ф.-м.н., Заслуженный деятель науки РФ, Почетный работник высшего профессионального образования РФ, Почетный работник науки и техники РФ, Почетный профессор МИТХТ им. М.В. Ломоносова, Лауреат Золотой медали АН Беларуси по теплофизике, профессор, кафедра высшей и прикладной математики Института тонких химических технологий им. М.В. Ломоносова ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119571, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 86). E-mail: professor.kartashov@gmail.com. Scopus Author ID 7004134344, ResearcherID Q-9572-2016, <https://orcid.org/0000-0002-7808-4246>

About the author

Eduard M. Kartashov, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Honored Scientist of the Russian Federation, Honorary Worker of Higher Professional Education of the Russian Federation, Honorary Worker of Science and Technology of the Russian Federation, Honorary Professor of the Lomonosov Moscow State University of Fine Chemical Technology, Laureate of the Golden Medal of the Academy of Sciences of Belarus in Thermophysics, Professor, Department of Higher and Applied Mathematics, M.V. Lomonosov Institute of Fine Chemical Technologies, MIREA – Russian Technological University (86, Vernadskogo pr., Moscow, 119571 Russia). E-mail: professor.kartashov@gmail.com. Scopus Author ID 7004134344, ResearcherID Q-9572-2016, <https://orcid.org/0000-0002-7808-4246>