УДК 531.391

ВЛИЯНИЕ ВЗАИМНЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ПЛАНЕТ СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ НА ЭВОЛЮЦИЮ ЭКСЦЕНТРИСИТЕТОВ И НАКЛОНЕНИЙ ИХ ОРБИТ

Н.А. Акулова, магистрант
Л.А. Бузникова, магистрант
А.В. Шатина@, д.ф.-м.н., профессор кафедры Высшей математики

Московский технологический университет (МИРЭА), Москва 119454, Россия
@Автор для переписки, e-mail: shatina_av@mail.ru

Рассматривается классическая задача N тел в предположении, что масса одного тела (Солнца) много больше масс остальных взаимно тяготеющих тел. В качестве невозмущенного движения принимается движение планеты по эллиптической орбите, в одном из фокусов которой находится Солнце. Система уравнений движения выведена в барицентрической системе координат с использованием канонических переменных Делоне. На основе усредненной системы уравнений движения найдены функции, описывающие эволюцию эксцентриситета и наклонения орбиты отдельно взятой планеты, возникающие из-за сил взаимного притяжения со стороны других планет. Получены численные оценки скорости изменения эксцентриситета и наклонения орбиты для каждой из планет Солнечной системы.

Ключевые слова: задача N тел, барицентр, переменные Делоне, элементы орбиты, возмущенное движение, метод усреднения.

THE INFLUENCE OF THE GRAVITATIONAL PERTURBATIONS OF THE SOLAR SYSTEM PLANETS ON THE EVOLUTION OF THEIR ORBITS' ECCENTRICITIES AND INCLINATIONS

N.A. Akulova,
L.A. Buznikova,
A.V. Shatina@

Moscow Technological University (MIREA), Moscow 119454, Russia
@Corresponding author e-mail: shatina_av@mail.ru

In the paper the classic problem of N bodies is treated as if the mass of one body (the Sun) is much larger than the mass of the rest mutually gravitating bodies. We take as the unperturbed motion the movement of a planet in an elliptical orbit, with the Sun being in one of its foci. A set of equations of motion are derived in barycentric coordinates using the canonical Delaunay variables. Applying the motion equation averaged system we define the functions for describing the evolution of a single planet orbit's eccentricity and inclination caused by the other planets' mutual gravitation. The numerical estimations of the eccentricity and orbital inclination change rate for each of the Solar system's planets have been obtained.

Keywords: N-bodies problems, barycenter, Delaunay variables, orbit elements, perturbed motion, averaging method.

Задача N тел – это задача об определении положения N материальных точек, взаимодействующих по закону всемирного тяготения. Если одно из тел имеет массу, намного превосходящую массы остальных тел механической системы, то орбиты остальных тел будут коническими сечениями с малыми отклонениями, вызванными их взаимными гравитационными возмущениями. Для исследования динамики небесных тел используются высокоточные методы прямого численного интегрирования систем дифференциальных уравнений движения на интервалах времени порядка тысяч и десятков тысяч лет, а также аналитические и численно-аналитические методы. Последние основаны на разложении возмущающей функции в ряд Пуассона и численном интегрировании аналитически усредненных уравнений движения (см., например, обзор [1]).

В представленной статье для получения системы уравнений движения в задаче N тел в барицентрической системе координат в переменных Делоне использованы методы аналитической механики. Чтобы получить систему уравнений, описывающих эволюцию параметров орбит планет Солнечной системы, вводят малый параметр, равный отношению массы Юпитера (гигантской планеты Солнечной системы) к массе Солнца, и применяют метод усреднения. Ранее описанные методы применялись для оценок смещения перигелиев орбит планет Солнечной системы [2, 3].

Целью настоящей работы явилась оценка влияния взаимных возмущений планет Солнечной системы на эволюцию эксцентриситетов и наклонений их орбит с использованием переменных Делоне в барицентрической системе координат.

Рассмотрим модель Солнечной системы, состоящую из $(n+1)$ -ой материальной точки $P_0, P_1, \ldots, P_n$. Введем инерциальную систему координат $CXYZ$ с началом в центре масс системы. Обозначим через R_0 радиус-вектор точки P_0 (Солнца), а через $R_1, \ldots, R_n$ – радиус-векторы планет $P_1, \ldots, P_n$, координаты которых задаются в системе отсчета $CXYZ$.

Обозначим через m_s массу Солнца, а массы планет через M_k ($k = 1, \ldots, n$). Введем малый параметр ε, равный отношению массы Юпитера к массе Солнца: $\varepsilon = M_5 m_s^{-1}$.

Тогда массы планет можно представить в виде:

$$M_k = \varepsilon m_k, \; k = 1, \ldots, n \; ,$$

где $m_k = M_k \; M_5^{-1} m_s, \; m_k \leq m_s$.

Так как начало инерциальной системы координат совпадает с барицентром, то имеет место равенство:

$$m_s \mathbf{R}_0 + \varepsilon \sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{R}_k = 0 . \tag{1}$$

Кинетическая энергия системы с учетом введенных обозначений для масс имеет вид:

$$T = \frac{1}{2} m_s \dot{\mathbf{R}}_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \varepsilon m_k \dot{\mathbf{R}}_k^2 . \tag{2}$$

С учетом соотношения (1) кинетическая энергия (2) преобразуется следующим образом:

$$T = \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=1}^{n} m_k \dot{\mathbf{R}}_k^2 + \frac{\varepsilon^2}{2m_s} \left(\sum_{k=1}^{n} m_k \dot{\mathbf{R}}_k \right)^2 .$$

Потенциальная энергия гравитационных сил имеет вид:

$$\Pi = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon f_0 m_k}{\left[(\mathbf{R}_0 - \mathbf{R}_k)^2 \right]^{1/2}} - \sum_{\substack{i,j=1,\\ i<j}}^{n} \frac{\varepsilon^2 f m_i m_j}{R_{ij}} , \tag{3}$$

где f – универсальная гравитационная постоянная;

$f_0 = f m_s$;

$R_{ij} = \left| \mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j \right|$.

Преобразуем выражение (3) с учетом равенства (1), сохраняя члены не выше второго порядка по ε:

$$\Pi = -\varepsilon \sum_{k=1}^{n} \frac{f_0 m_k}{R_k} - \varepsilon^2 \sum_{\substack{i,j=1,\\ i<j}}^{n} \frac{f m_i m_j}{R_{ij}} + \varepsilon^2 \sum_{i,k=1}^{n} \frac{f m_i m_k (\mathbf{R}_i, \mathbf{R}_k)}{R_k^3} ,$$

$$R_k = \left| \mathbf{R}_k \right| .$$

Уравнения движения механической системы выпишем в канонической форме, используя канонические переменные Делоне L_k, G_k, H_k, l_k, g_k, h_k ($k = 1, \ldots, n$) [4, 5].

Радиус-вектор k-ой планеты можно представить в виде:

$$\mathbf{R}_k = R_k \boldsymbol{\xi}_k ,$$

где $R_k = \left| \mathbf{R}_k \right|$, $\boldsymbol{\xi}_k = \mathbf{R}_k / R_k$.

В переменных Делоне модуль радиус-вектора k-ой планеты имеет вид:

$$R_k = \frac{G_k^2}{f_0 m_k^2 (1 + e_k \cos \vartheta_k)} ,$$

где e_k – эксцентриситет орбиты k-ой планеты;

ϑ_k – истинная аномалия.

Зависимость эксцентриситета от переменных Делоне выражается равенством

$$e_k = \sqrt{1 - \frac{G_k^2}{L_k^2}} .$$

Истинная аномалия неявным образом зависит от переменных Делоне l_k, L_k, G_k посредством соотношений:

$$\cos w_k = \frac{e_k + \cos\vartheta_k}{1 + e_k \cos\vartheta_k},\ l_k = w_k - e_k \sin w_k \cdot$$

Последнее уравнение, связывающее среднюю аномалию l_k с эксцентрической аномалией w_k, называется уравнением Кеплера.

Единичные векторы ξ_k в инерциальной системе координат в переменных Делоне имеют вид:

$$\xi_k = \left(\xi_{kx}, \xi_{ky}, \xi_{kz}\right),$$

$$\xi_{kx} = \cos\left(g_k + \vartheta_k\right)\cos h_k - \sin\left(g_k + \vartheta_k\right)\cos i_k \sin h_k ,$$

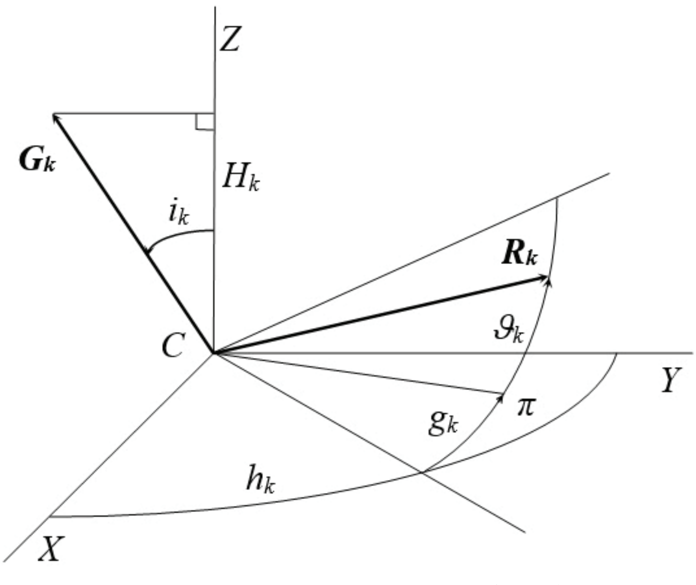
$$\xi_{ky} = \cos\left(g_k + \vartheta_k\right)\sin h_k + \sin\left(g_k + \vartheta_k\right)\cos i_k \cos h_k ,$$

$$\xi_{kz} = \sin\left(g_k + \vartheta_k\right)\sin i_k ,$$

где i_k – наклонение орбиты k-ой планеты;

$$\cos i_k = H_k / G_k ;$$

g_k – долгота перигелия от восходящего узла;
h_k – долгота восходящего узла (рисунок).



Переменные Делоне и элементы орбиты k-го тела.

Гамильтониан рассматриваемой задачи в первом приближении по малому параметру представляется в виде [2]:

$$\mathcal{H}_1 = -\sum_{k=1}^{n} \frac{f_0^2 m_k^3}{2L_k^2} + \varepsilon \mathcal{H}_1 ,$$

$$\varepsilon \mathcal{H}_1 = -\frac{1}{2m_s} \sum_{k,i=1}^{n} (\mathbf{p}_k , \mathbf{p}_i) - \sum_{\substack{i,j=1,\\ i<j}}^{n} \frac{f m_i m_j}{R_{ij}} + \sum_{i,k=1}^{n} \frac{f m_i m_k (\mathbf{R}_i , \mathbf{R}_k)}{R_k^3} .$$

Векторные импульсы $\mathbf{p}_k$ ($k = 1, ..., n$), входящие в выражение для гамильтониана задачи, выражаются через переменные Делоне следующим образом:

$$\mathbf{p}_k = f_0 m_k^2 G_k^{-1} \left\{ e_k \sin \vartheta_k \, \boldsymbol{\xi}_k + \frac{\cos i_k (1 + e_k \cos \vartheta_k)}{1 - \sin^2 (g_k + \vartheta_k) \sin^2 i_k} \boldsymbol{\eta}_k + \right.$$

$$\left. + \frac{\sin i_k \cos(g_k + \vartheta_k)(1 + e_k \cos \vartheta_k)}{\sqrt{1 - \sin^2 (g_k + \vartheta_k) \sin^2 i_k}} \boldsymbol{\zeta}_k \right\},$$

где $\boldsymbol{\eta}_k = (-\xi_{ky}, \xi_{kx}, 0)$, $\boldsymbol{\zeta}_k = \left(\frac{\xi_{kx}\xi_{kz}}{\sqrt{1-\xi_{kz}^2}}, \frac{\xi_{ky}\xi_{kz}}{\sqrt{1-\xi_{kz}^2}}, -\sqrt{1-\xi_{kz}^2} \right)$.

Канонические уравнения движения механической системы имеют вид:

$$\dot{L}_k = -\varepsilon \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial l_k}, \; \dot{G}_k = -\varepsilon \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial g_k}, \dot{H}_k = -\varepsilon \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial h_k},$$

$$\dot{l}_k = \omega_k + \varepsilon \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial L_k}, \; \dot{g}_k = \varepsilon \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial G_k}, \; \dot{h}_k = \varepsilon \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial H_k}, \; \omega_k = \frac{f_0^2 m_k^3}{L_k^3} \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{4}$$

Правые части системы уравнений (4) зависят от канонических переменных Делоне и содержат n быстрых угловых переменных $l_1, ..., l_n$, по которым функция $\mathcal{H}_1$ является 2π-периодической. Остальные переменные являются медленными. Предположим, что в системе отсутствуют резонансы, т.е. $k_1\omega_1 + \ldots + k_n\omega_n \neq 0$, каков бы ни был нетривиальный набор целых чисел $k_1, ..., k_n$, и применим метод усреднения по быстрым угловым переменным. Операция усреднения состоит в вычислении интеграла

$$\langle (*) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} (*) dl_1 \ldots dl_n = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} (*) \frac{\partial l_1}{\partial \vartheta_1} \ldots \frac{\partial l_n}{\partial \vartheta_n} d\vartheta_1 \ldots d\vartheta_n ,$$

где $\dfrac{\partial l_k}{\partial \vartheta_k} = \dfrac{\left(1-e_k^2\right)^{3/2}}{\left(1+e_k\cos\vartheta_k\right)^2}, k = 1,\ldots,n$.

Остановимся более подробно на уравнениях, описывающих эволюцию эксцентриситета e_1 и наклонения i_1 ближайшей к Солнцу планеты (Меркурия). Получим производные по времени этих величин в силу системы уравнений движения (4):

$$\dot{e}_1 = \frac{\varepsilon\sqrt{1-e_1^2}}{e_1 L_1}\left(\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial g_1} - \sqrt{1-e_1^2}\,\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial l_1}\right), \quad \frac{di_1}{dt} = \frac{\varepsilon}{G_1 \sin i_1}\left(\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial h_1} - \cos i_1 \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial g_1}\right).$$

Учитывая в $\mathcal{H}_1$ только те слагаемые, которые зависят от g_1, l_1, h_1, и отбрасывая слагаемые, обращающиеся в ноль при усреднении, получим:

$$\left\langle \frac{de_1}{dt} \right\rangle = -\sum_{k=2}^{n} E_{1k}^{(p)} - \sum_{k=2}^{n} E_{1k}^{(R)}, \quad \left\langle \frac{di_1}{dt} \right\rangle = \sum_{k=2}^{n} I_{1k}^{(p)} + \sum_{k=2}^{n} I_{1k}^{(R)}, \tag{5}$$

где

$$E_{1k}^{(p)} = \left\langle \frac{\varepsilon\sqrt{1-e_1^2}}{e_1 L_1 m_s}\frac{\partial}{\partial g_1}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_k) \right\rangle, \quad E_{1k}^{(R)} = \left\langle \frac{\varepsilon\sqrt{1-e_1^2}}{e_1 L_1}\frac{\partial}{\partial g_1}\left(\frac{f m_1 m_k}{R_{1k}}\right) \right\rangle,$$

$$I_{1k}^{(p)} = \left\langle \frac{\varepsilon \cos i_1}{G_1 m_s \sin i_1}\frac{\partial}{\partial g_1}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_k) - \frac{\varepsilon}{G_1 m_s \sin i_1}\frac{\partial}{\partial h_1}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_k) \right\rangle, \tag{6}$$

$$I_{1k}^{(R)} = \left\langle \frac{\varepsilon \cos i_1}{G_1 \sin i_1}\frac{\partial}{\partial g_1}\left(\frac{f m_1 m_k}{R_{1k}}\right) - \frac{\varepsilon}{G_1 \sin i_1}\frac{\partial}{\partial h_1}\left(\frac{f m_1 m_k}{R_{1k}}\right) \right\rangle.$$

Аналогичные уравнения можно получить для остальных планет Солнечной системы. Используя математический пакет *Mathematica*, параметры элементов орбит, соответствующие эпохе J2000 [6], а также соотношение

$$G_k = \sqrt{f_0 m_k^2 a_k \left(1-e_k^2\right)}, \; k = 1,\ldots,n,$$

где a_k – большая полуось орбиты *k*-ой планеты, получим, согласно равенствам (5) и (6), численные значения скоростей эволюции эксцентриситетов и наклонений орбит для восьми планет Солнечной системы. Компоненты $E_{1k}^{(R)}, I_{1k}^{(R)}$ отвечают за гравитационные возмущения со стороны других планет, как это было бы в случае неподвижного Солнца, т.е. в гелиоцентрической системе координат. Компоненты $E_{1k}^{(p)}, I_{1k}^{(p)}$ возникают из-за того, что задача решается в барицентрической системе координат. Результаты вычислений представлены в табл. 1—4.

Таблица 1. Эволюция эксцентриситетов орбит планет. Компоненты $E_{1k}^{(R)}\left(\times 10^{-7}\ год^{-1}\right)$

Источник воздействия	Объекты воздействия							
	Меркурий	Венера	Земля-Луна	Марс	Юпитер	Сатурн	Уран	Нептун
Меркурий	–	-0.783022	-0.070715	0.020287	0.000062	-0.000001	-0.000000	0.00000
Венера	1.328080	–	0.638042	0.039099	0.000204	0.000009	-0.000000	0.000000
Земля-Луна	0.559437	-2.316986	–	1.032038	0.001919	0.000022	-0.000005	0.000001
Марс	-0.029465	-0.097741	-0.764290	–	-0.002764	-0.000234	0.000003	-0.000001
Юпитер	0.157511	-1.525645	-3.977577	7.704433	–	-27.73456	-0.300393	-0.045455
Сатурн	0.025526	-0.031494	-0.020833	0.296361	12.62799	–	-2.161380	0.156918
Уран	0.000469	0.000259	0.000839	-0.000726	0.025818	0.403998	–	0.396040
Нептун	0.000160	-0.000014	-0.000030	0.000032	0.001065	-0.007877	-0.103052	–
$\sum E_{1k}^{(R)}$	2.041718	-4.754643	-4.194564	9.091525	12.654294	-27.33864	-2.564827	0.507503

Таблица 2. Эволюция эксцентриситетов орбит планет. Компоненты $E_{1k}^{(p)}\left(\times 10^{-9}\ год^{-1}\right)$

Источник воздействия	Объекты воздействия							
	Меркурий	Венера	Земля-Луна	Марс	Юпитер	Сатурн	Уран	Нептун
Меркурий	–	2.431511	0.000029	-0.733769	-0.158342	-0.059859	0.025218	-0.037234
Венера	0.619727	–	0.000003	-0.084320	-0.018197	-0.006878	0.002898	-0.004279
Земля-Луна	-0.000017	-0.000008	–	0.000002	0.000000	0.000000	-0.000000	0.000000
Марс	0.208328	0.093825	0.000001	–	-0.006107	-0.002307	0.000973	-0.001436
Юпитер	31.511022	14.197001	0.000169	-4.278790	–	-0.348394	0.147152	-0.217398
Сатурн	188.764986	85.078969	0.001011	-25.660887	-5.539169	–	0.882131	-1.302752
Уран	-0.691155	-0.311389	-0.000004	0.093892	0.020271	0.007653	–	0.004771
Нептун	0.131270	0.059301	0.000001	-0.017882	0.003863	-0.001454	0.000615	–
$\sum E_{1k}^{(p)}$	220,54416	101.54921	0,001210	-30,681754	-5,697681	-0,411239	1,058987	-1,558328

Таблица 3. Эволюция эксцентриситетов орбит планет. Компоненты $I_{1k}^{(R)}(''/100 лет)$

Источник воздействия	Объекты воздействия							
	Меркурий	Венера	Земля-Луна	Марс	Юпитер	Сатурн	Уран	Нептун
Меркурий	–	1.172138	-0.325615	0.008461	0.000803	0.000109	0.000005	0.000002
Венера	-14.663488	–	-29.383198	-1.290451	0.009673	0.001684	-0.000010	0.000041
Земля-Луна	-1.415048	0.003882	–	0.045987	-0.000012	0.000001	0.000000	0.000000
Марс	-0.029383	0.132660	-0.838736	–	0.006788	0.000832	0.000032	0.000016
Юпитер	-4.896067	-3.887613	-15.008367	-25.663523	–	9.148163	-0.959814	0.209319
Сатурн	-0.419523	-0.521889	-1.164833	-2.465018	-7.286861	–	-3.958236	0.277589
Уран	-0.002420	0.000212	-0.008108	-0.006128	0.049295	0.276639	–	0.314546
Нептун	-0.002022	-0.002866	-0.003426	-0.010507	-0.036923	-0.063540	-1.91839	–
$\sum I_{1k}^{(R)}$	-21.427951	-3.103476	-46.732283	-29.381179	-7.257237	9.363888	-6.009862	0.801513

Суммарные численные значения для скоростей изменения эксцентриситетов и наклонений согласуются с численными результатами скоростей изменения элементов орбит, рекомендуемыми на интервале времени 1800–2050 гг. [6].

Так как большая полуось орбиты k-ой планеты является функцией только одной переменной Делоне L_k, а при усреднении правые части уравнений (4) для L_k обращаются в ноль, то большие полуоси орбит планет не эволюционируют.

Таблица 4. Эволюция эксцентриситетов орбит планет. Компоненты $I_{1k}^{(p)}(''/100\,лет)$

Источник воздействия	Объекты воздействия							
	Меркурий	Венера	Земля-Луна	Марс	Юпитер	Сатурн	Уран	Нептун
Меркурий	–	-0.005727	-0.011456	0.044154	0.006953	0.001547	-0.001830	0.000213
Венера	-0.022339	–	-0.001317	0.005074	0.000799	0.000178	-0.000210	0.000025
Земля-Луна	0.000001	0.000000	–	-0.000000	-0.000000	-0.000000	0.000000	-0.000000
Марс	-0.007522	-0.000221	-0.000442	–	0.000268	0.000060	-0.000071	0.000008
Юпитер	-1.136946	-0.033451	-0.066861	0.257251	–	0.008978	-0.010677	0.001247
Сатурн	-6.808252	-0.200428	-0.400754	1.543668	0.000243	–	-0.064012	0.007471
Уран	0.024941	0.000734	0.001466	-0.005648	-0.000890	-0.000198	–	-0.000027
Нептун	-0.004717	-0.000140	-0.00080	0.000001	0.000169	0.000037	-0.000045	–
$\sum I_{1k}^{(p)}$	-7.954834	-0.239233		1.844500	0.007542	0.010602	-0.076845	0.008937

Таким образом, предлагаемый в данной работе подход к решению задачи позволяет выполнить численные оценки скоростей эволюции элементов орбит планет без численного интегрирования системы дифференциальных уравнений движения высокого порядка на длительном промежутке времени. Кроме того, полученные формулы (5), (6) позволяют для каждой планеты Солнечной системы оценить вклад каждой из остальных планет в общую эволюцию ее эксцентриситета и наклонения орбиты.

Литература:

1. Холшевников К.В., Кузнецов Э.Д. Обзор работ по орбитальной эволюции больших планет Солнечной системы // Астрономический вестник. 2007. Т. 41. № 4. С. 291–329.

2. Вильке В.Г., Шатина А.В., Шатина Л.С. Изменение долготы перигелия орбиты Меркурия // Сб. науч.-метод. статей. Теоретическая механика. Вып. 29 [под ред. В.А. Самсонова]. М.: Изд-во Московского университета, 2015. С. 17–32.

3. Вильке В.Г., Шатина А.В., Шатина Л.С. Влияние взаимных гравитационных возмущений планет Солнечной системы на эволюцию перигелиев их орбит // LI Всерос. конф. по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники: тез. докл. Москва, РУДН, 12–15 мая 2015 г. М.: РУДН, 2015. С. 148–152.

5. Вильке В.Г. Механика систем материальных точек и твердых тел. М.: Физматлит, 2013. 268 с.

6. Мюррей К., Дермотт С. Динамика Солнечной системы. М.: Физматлит, 2010. 588 с.