

Математическое моделирование
Mathematical modeling

УДК 534-16
<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2023-11-2-92-99>



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Идентификация продольного надреза стержня по собственным частотам колебаний

И.М. Утяшев^{1, 2},
А.Ф. Фатхелисламов^{3, @}

¹ Институт механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского федерального исследовательского центра
Российской академии наук, Уфа, 450054 Россия

² Башкирский государственный аграрный университет, Уфа, 450001 Россия

³ Уфимский университет науки и технологий, Уфа, 450076 Россия

@ Автор для переписки, e-mail: alfir93@mail.ru

Резюме

Цели. Цели работы: рассмотреть прямую и обратную задачу о колебании прямоугольного стержня с продольным надрезом; исследовать закономерности поведения собственных частот и собственных форм продольных колебаний при изменении места и размера надреза; разработать метод, позволяющий однозначно идентифицировать параметры продольного надреза с помощью собственных частот продольных колебаний стержня.

Методы. Стержень с продольным надрезом моделируется как два стержня, где первый не имеет надреза, а второй – имеет. Для соединения используются условия сопряжения, в которых приравниваются продольные колебания и деформации. Решение обратной задачи основано на построении частотного уравнения в предположении, что искомые параметры входят в уравнение. При подстановке собственных частот в это уравнение получим нелинейную систему относительно неизвестных параметров. Решение последнего есть искомые параметры надреза.

Результаты. Приведены таблицы собственных частот и графики собственных форм для разных параметров надреза. Получены и проанализированы результаты для различных краевых условий. Представлен метод идентификации параметров надреза по конечному числу собственных частот. Показано, что обратная задача имеет два решения, симметричных относительно центра стержня. Для однозначного решения требуются собственные частоты той же задачи с другими граничными условиями на правом конце. Добавление дополнительных условий на концах стержня позволило решить обратную задачу с новыми краевыми условиями, дающими возможность построить точное решение и разработать алгоритм проверки однозначности решения.

Выводы. Разработанный метод позволяет решить задачу идентификации геометрических параметров различных деталей и конструкций, моделируемых стержнями.

Ключевые слова: продольные колебания, собственная частота, собственная форма, стержень, задача идентификации, прямая задача, обратная задача, задача Штурма – Лиувилля, граничные условия

• Поступила: 24.07.2022 • Доработана: 06.09.2022 • Принята к опубликованию: 22.01.2023

Для цитирования: Утяшев И.М., Фатхелисламов А.Ф. Идентификация продольного надреза стержня по собственным частотам колебаний. *Russ. Technol. J.* 2023;11(2):92–99. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2023-11-2-92-99>

Прозрачность финансовой деятельности: Авторы не имеют финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

RESEARCH ARTICLE

Identification of a longitudinal notch of a rod by natural vibration frequencies

Ilnur M. Utyashev ^{1, 2},
Alfir F. Fatkhelislamov ^{3, @}

¹ Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa Federal Research Center, Russian Academy of Sciences, Ufa, 450054 Russia

² Bashkir State Agrarian University, Ufa, 450001 Russia

³ Ufa University of Science and Technology, Ufa, 450076 Russia

@ Corresponding author, e-mail: alfir93@mail.ru

Abstract

Objectives. To study the direct and inverse problem of vibrations of a rectangular rod having a longitudinal notch, to analyze regularities of the behavior of natural frequencies and natural forms of longitudinal vibrations when changing the location and size of the notch, and to develop a method for uniquely identifying the parameters of the longitudinal notch using the natural frequencies of longitudinal vibrations of the rod.

Methods. The rod with a longitudinal notch is modeled as two rods, where the first one does not have a notch, while the second one does. For connection, conjugation conditions are used, in which longitudinal vibrations and deformations are equated. The solution of the inverse problem is based on the construction of a frequency equation under the assumption that the desired parameters are included in the equation. Substituting natural frequencies into this equation, the nonlinear system with respect to unknown parameters is derived. The solution of the latter is the desired notch parameters.

Results. Tables of eigenfrequencies and graphs of eigenforms are given for different notch parameters. The results for different boundary conditions are obtained and analyzed. A method for identifying notch parameters by a finite number of eigenfrequencies is presented. The inverse problem is shown to have two solutions, which are symmetrical about the center of the rod. The unambiguous solution requires eigenfrequencies of the same problem with different boundary conditions at the right end. By adding additional conditions at the ends of the rod, the inverse problem can be solved with new boundary conditions to construct the exact solution and develop an algorithm for checking the uniqueness of the solution.

Conclusions. The developed method can be used to solve the problem of identification of geometric parameters of various parts and structures modeled by rods.

Keywords: longitudinal vibrations, natural frequency, eigenform, rod, identification problem, direct problem, inverse problem, Sturm–Liouville problem, boundary conditions

• Submitted: 24.07.2022 • Revised: 06.09.2022 • Accepted: 22.01.2023

For citation: Utyashev I.M., Fatkhelislamov A.F. Identification of a longitudinal notch of a rod by natural vibration frequencies. *Russ. Technol. J.* 2023;11(2):92–99. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2023-11-2-92-99>

Financial disclosure: The authors have no a financial or property interest in any material or method mentioned.

The authors declare no conflicts of interest.

ВВЕДЕНИЕ

Колебания являются одной из наиболее распространенных форм движения. Изучение колебаний имеет важное практическое значение, т.к. позволяет использовать их положительные свойства в технике и технологии, избежать нежелательных последствий колебаний путем ограничения их уровня. Лишь на базе глубокого изучения различных видов колебаний могут быть решены важные практические проблемы динамики сооружений [1]. Изучение собственных частот колебаний представляет большой научный и прикладной интерес во многих инженерных задачах.

Идентификации трещин посвящено большое число работ [2–14]. Поперечные раскрытые трещины, начиная с работ [3–5], как правило, моделируются условиями сопряжения пружины. В современной литературе предлагаются и другие условия сопряжения для моделирования поперечных трещин [2, 6, 7]. Однако продольная трещина не может быть смоделирована условиями сопряжения. В работе [2] предложено решить задачу идентификации стержня, основываясь на изменении в месте надреза моментов инерции вокруг осей и площадей поперечного сечения. Работа [8] приводит простейшую модель продольных колебаний стержня с зарождающимися поперечными трещинами, в ней определяются собственные частоты колебаний, а также координаты и размеры трещин по экспериментальным значениям собственных частот. В работе [9] рассмотрен стержень с жестко закрепленным левым концом, закрепление на правом конце может быть либо свободным, либо упругим или жестким. Приведены первые три собственные частоты для различных профилей сечения. Наиболее близкая по постановке задача приведена в работе [10], где рассматривается эволюция характеристик собственных продольных колебаний и собственных форм круглого стержня

при увеличении дефекта его поперечного сечения. Работа [14] посвящена методу решения обратных задач дефектоскопии для стержней, совершающих продольные колебания. С помощью численного моделирования показано, что для удовлетворительного определения свойств дефекта достаточно использовать несколько низших частот. В [15] проведено сравнение экспериментальных данных с различными теоретическими моделями для описания продольных колебаний стержня. В настоящей работе получен результат для случая, когда продольный надрез проходит не по всей длине прямоугольного стержня. Результаты исследования могут найти применение в акустической диагностике различных стержней, таких, как двутавровая балка, рельсы, каркасные мосты, и т.д.

Результаты работы показали, что с помощью собственных частот продольных колебаний можно найти место начала продольного надреза стержня, его глубину и ширину. Изучение графиков собственных форм колебаний позволяет изучить зависимость выходных данных задачи от входных.

ПРЯМАЯ ЗАДАЧА

Рассматривается однородный изотропный прямоугольный стержень длиной $L = 1$, плотностью ρ и площадью поперечного сечения F (см. рис. 1). Краевые условия: стержень заделан на левом конце и свободен на правом. Поперечное сечение стержня имеет высоту H и ширину B . От точки x_c до правого конца расположен прямоугольный надрез глубиной h и шириной b .

Требуется определить собственные частоты продольных колебаний стержня, определить влияние размеров и места начала надреза на эти частоты. Для наглядности решения построим собственные формы колебаний.

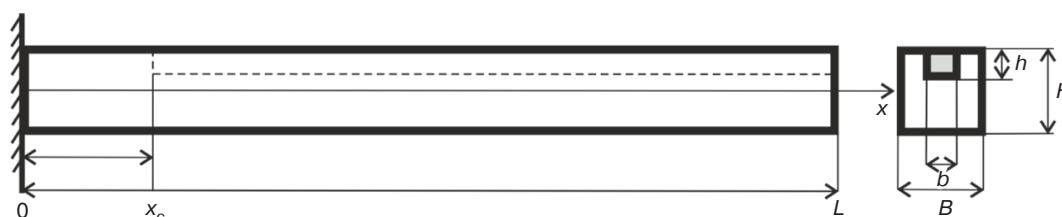


Рис. 1. Изображение стержня с надрезом

Уравнение продольных колебаний описывается следующим уравнением [11, с. 189]:

$$EF \frac{d^2 U(x, t)}{dx^2} + \rho F \frac{d^2 U(x, t)}{dt^2} = 0, \quad (1)$$

где $U = U(x, t)$ – продольное смещение, EF – изгибная жесткость стержня, ρ – плотность стержня, F – площадь поперечного сечения стержня.

Решение уравнения (1) ищем в виде $U(x, t) = y(x) \cos \omega t$. Тогда (1) сводится к следующему уравнению:

$$y'' + \lambda^2 y = 0, \quad (2)$$

где спектральный параметр $\lambda^2 = \frac{\rho F \omega^2}{E}$. Поскольку стержень слева и справа от точки x_c имеет разную форму поперечного сечения, то уравнения продольных колебаний слева и справа от точки x_c запишутся в следующей форме:

$$y''_- + \lambda^2 y_- = 0, \quad y''_+ + \lambda^2 y_+ = 0, \quad (3)$$

где y_- , y_+ – продольные смещения левее и правее точки x_c .

Условие сопряжения в точке x_c для участков стержня запишется так:

$$EF_- \frac{dy_-}{dx} = EF_+ \frac{dy_+}{dx}. \quad (4)$$

Обозначим отношение площадей $\frac{F_+}{F_-}$ через P :

$$F_+ = BH - bh, \quad F_- = BH, \quad P = \frac{F_+}{F_-}. \quad (5)$$

Условия сопряжения с помощью P запишутся так:

$$y_-(x_c) = y_+(x_c), \quad y'_-(x_c) = y'_+(x_c)P. \quad (6)$$

Так как стержень заделан на левом конце и свободен на правом, то краевые условия запишутся в следующей форме:

$$y_-(0) = 0, \quad y'_+(1) = 0. \quad (7)$$

Общее решение уравнений (3) есть:

$$\begin{aligned} y_- &= C_1^- \cos \lambda x + C_2^- \frac{\sin \lambda x}{\lambda}, \\ y_+ &= C_1^+ \cos \lambda x + C_2^+ \frac{\sin \lambda x}{\lambda}. \end{aligned} \quad (8)$$

Уравнения (8) подставим в (6), (7) и получим следующие уравнение:

$$y_-(0) = C_1^- + C_2^- = 0. \quad (9)$$

Из уравнения (9) следует $C_1^- = 0$.

$$y'_+(1) = -\lambda C_1^+ \sin \lambda + C_2^+ \cos \lambda = 0. \quad (10)$$

$$C_1^- + C_2^- \frac{\sin \lambda x_c}{\lambda} - C_1^+ \cos \lambda x_c - C_2^+ \frac{\sin \lambda x_c}{\lambda} = 0. \quad (11)$$

$$\begin{aligned} &-\lambda C_1^- + C_2^- \cos \lambda x_c - \\ &-P(-\lambda C_1^+ \sin \lambda x_c + C_2^+ \cos \lambda x_c) = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Система уравнений (10)–(12) для нахождения констант C_1^+ , C_2^+ , C_2^- имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда равен нулю определитель системы

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -\lambda \sin \lambda & \cos \lambda \\ \frac{\sin \lambda x_c}{\lambda} & -\cos \lambda x_c & -\frac{\sin \lambda x_c}{\lambda} \\ \cos \lambda x_c & P \lambda \sin \lambda x_c & -P \cos \lambda x_c \end{vmatrix} = 0. \quad (13)$$

В результате получаем следующее уравнение для нахождения собственных значений (собственных частот):

$$\begin{aligned} D &= -\lambda \sin \lambda \cos \lambda x_c \sin \lambda x_c P + \cos \lambda \sin^2 \lambda x_c + \\ &+ \sin \lambda \cos \lambda x_c \sin \lambda x_c + \cos^2 \lambda x_c \cos \lambda = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

На основе этого уравнения можно решать два вида задач – прямую и обратную.

Решение прямой задачи с различными начальными данными позволяет сделать анализ зависимости собственных частот колебаний от параметров стержня, а также сделать основные выводы по решению поставленной задачи. Поэтому следующим этапом работы является анализ результатов прямой задачи.

Величины измерения обезразмерены для удобного выполнения расчетов.

Начальные данные: $H = B = 0.1$; $h = b = 0.01$.

Необходимо найти собственные частоты продольных колебаний.

Рассмотрим зависимость первых пяти собственных частот от положения начала надреза стержня.

В значениях x_c , равноудаленных от середины (1, 2, 5, 7 в табл. 1), можно увидеть одинаковые значения частот продольных колебаний. Отсюда следует, что решение обратной задачи двойственно, т.е. существуют два решения симметрично середине

стержня. Наглядно посмотреть двойственность решения можно, построив первые три собственные формы функции (рис. 2–4).

Таблица 1. Значения собственных частот продольных колебаний при изменении места надреза

№	Положение x_c	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
1	0.1	1.57389	4.72052	7.86408	11.00378	14.14031
2	0.25	1.57791	4.71956	7.84681	10.98846	14.14428
3	0.3	1.57895	4.71552	7.84388	10.99868	14.14536
4	0.5	1.58090	4.70229	7.86408	10.98547	14.14727
5	0.75	1.57791	4.71956	7.84681	10.98846	14.14428
6	0.8	1.57670	4.72201	7.85398	10.98595	14.13126
7	0.9	1.57389	4.72052	7.86408	11.00378	14.14031

Примечание: λ_n – собственные частоты продольных колебаний стержня, которые найдены численно в программе Maple¹.

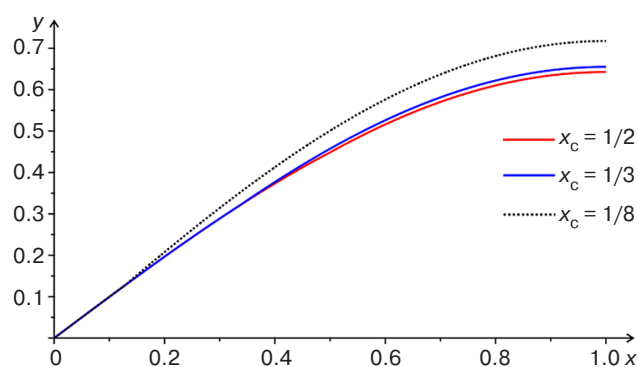


Рис. 2. Первая собственная форма

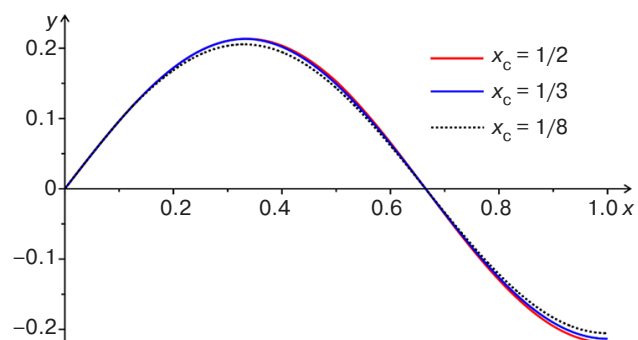


Рис. 3. Вторая собственная форма

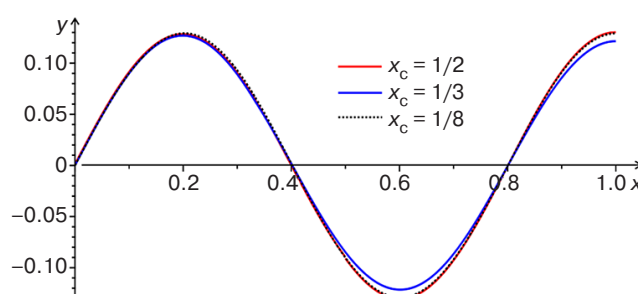


Рис. 4. Третья собственная форма

Из графиков собственных форм (рис. 2–4) видно, что задача идентификации точки начала надреза неустойчива, сильно зависит от погрешности входных данных.

Рассмотрим изменения собственной частоты от высоты h и ширины b надреза стержня.

Из таблиц 2 и 3 видно, что изменение размеров надреза ведет к более существенному изменению собственных частот колебаний, чем изменение места надреза.

Таблица 2. Изменение значения частоты собственных колебаний от увеличения высоты надреза

№	Высота h	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
1	0.01	1.57582	4.70736	7.85901	10.9905	14.14219
2	0.02	1.58090	4.70229	7.86408	10.9854	14.14727
3	0.04	1.59120	4.69198	7.87439	10.9752	14.15758
4	0.05	1.59644	4.68675	7.87963	10.9699	14.16281
5	0.06	1.60173	4.68146	7.88491	10.9646	14.16810
6	0.08	1.61247	4.67071	7.89566	10.9539	14.17884
7	0.09	1.61793	4.66525	7.90112	10.9484	14.18430

Таблица 3. Изменение частоты продольных колебаний от положения и высоты надреза стержня

№	Положение x_c	Высота h	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
1	0.9	0.09	1.58485	4.74968	7.90108	11.03455	14.15227
2	0.1	0.01	1.57234	4.71644	7.85901	10.99965	14.13873
3	0.5	0.05	1.59644	4.68675	7.87963	10.96993	14.16281

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА

Рассмотрим обратную задачу, когда по конечному числу собственных частот необходимо найти начало надреза, расположенного не в середине стержня.

Пусть известны собственные значения $\lambda_1 = 1.57952$, $\lambda_2 = 4.71238$, $\lambda_3 = 7.84524$, длина стержня $L = 1$, ширина и высота $H = 0.1$, $B = 0.1$, ширина и глубина надреза $b = 0.01$, $h = 0.01$ соответственно. Необходимо найти точку начала надреза x_c .

Подставив отношение площадей (5) и известные значения в частотное уравнение (14), получим

$$D = -\lambda_n \sin \lambda_n \cos \lambda_n x_c \sin \lambda_n x_c P + \\ + \cos \lambda_n \sin^2 \lambda_n x_c + \sin \lambda_n \cos \lambda_n x_c \sin \lambda_n x_c + (15) \\ + \cos^2 \lambda_n x_c \cos \lambda_n = 0.$$

Уравнение (15) дает два действительных решения (рис. 5), симметричных относительно середины отрезка L :

$$x_{c1} = 0.25, x_{c2} = 0.75.$$

¹ <https://www.maplesoft.com/>. Дата обращения: 12.01.2023. / Accessed January 01, 2023.

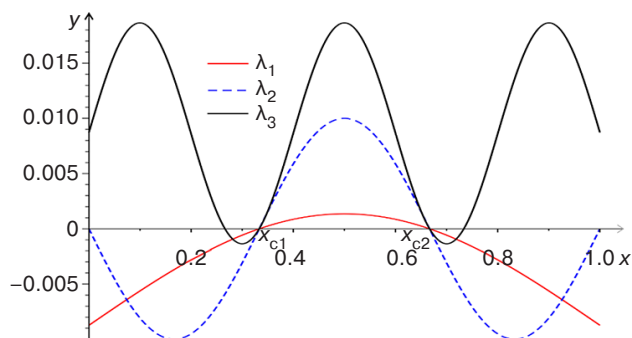


Рис. 5. Решение обратной задачи

Из решения обратной задачи следует, что идентификация стержня только с помощью продольных колебаний не дает однозначного решения. Для получения точного решения необходимо добавить дополнительные условия. Например, поменять краевое условие на одном из его концов.

Добавим упругий элемент на правый конец стержня. Соответственно, появится условие Робена.

Граничные условия (условия Робена) для стержня единичной длины ($L = 1$) имеют вид:

$$y'_x(1) - Ky(1) = 0, \quad (16)$$

где K – жесткость пружины на конце.

Поставив общее решение (8) в (16), получим

$$M = \begin{vmatrix} 0 & K \cos \lambda_n - \lambda_n \sin \lambda_n & \cos \lambda_n + \frac{\sin \lambda_n}{\lambda_n} K \\ \frac{\sin \lambda_n x_c}{\lambda_n} & -\cos \lambda_n x_c & -\frac{\sin \lambda_n x_c}{\lambda_n} \\ \cos \lambda_n x_c & P \lambda_n \sin \lambda_n x_c & -P \cos \lambda_n x_c \end{vmatrix} = 0.$$

Находим определитель

$$D = \frac{1}{\lambda_n} (K \cos \lambda_n \cos(\lambda_n x_c) \sin(\lambda_n x_c) P + K \sin \lambda_n \sin(\lambda_n x_c)^2 P + \cos \lambda_n \sin(\lambda_n x_c)^2 P \lambda_n - \sin \lambda_n \cos(\lambda_n x_c) \sin(\lambda_n x_c) P \lambda_n - K \cos(\lambda_n x_c) \sin(\lambda_n x_c) + K \sin(\lambda_n) \cos(\lambda_n x_c)^2 + \lambda_n \cos(\lambda_n x_c)^2 \cos \lambda_n + \sin(\lambda_n) \cos(\lambda_n x_c) \sin(\lambda_n x_c) \lambda_n) = 0. \quad (17)$$

Решение (17) дает собственные значения λ_n .

Решим обратную задачу и построим графические решения уравнения.

Пусть известны первые три собственные частоты $\lambda_1 = 2.2972263$, $\lambda_2 = 5.0846367$, $\lambda_3 = 8.0885773$, отношение площадей поперечного сечения $P = 0.98$ и коэффициент жесткости пружины $K = 2$. Необходимо найти место надреза x_c . Подставим по порядку собственные частоты продольных колебаний в (17). Решение уравнения представлено на рис. 6.

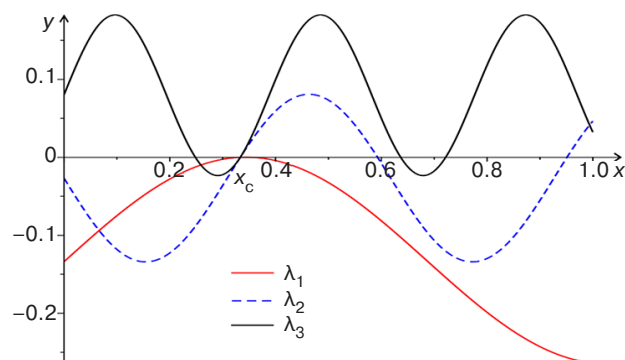


Рис. 6. Решение задачи с упругим закреплением

Из рис. 6 видно, что при условии упругого закрепления задача имеет точное решение в точке $x_c = 0.25$. Из этого следует, что для однозначного решения обратной задачи требуется применить упругое закрепление на одном из концов стержня.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С граничными условиями (7) решение обратной задачи идентификации продольного надреза по собственным частотам продольных колебаний неустойчиво, т.к. собственные формы близки друг к другу в точках, симметричных от середины надреза, и, чтобы решить задачу однозначно, необходимо заменить условие закрепления одного из концов стержня на упругое. Построенные графики и приведенные таблицы решения прямой задачи показали зависимость собственных частот от начальных данных. Приведен пример решения обратной задачи, из которого видно, что для однозначного определения начала надреза достаточно двух собственных частот, полученных для различных граничных условий. Данный метод возможно применять при решении задач по идентификации геометрических параметров деталей, смоделированных стержнем.

Вклад авторов. Все авторы в равной степени внесли свой вклад в исследовательскую работу.

Authors' contribution. All authors equally contributed to the research work.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шакирзянов Р.А., Шакирзянов Ф.Р. *Динамика и устойчивость сооружений*: учебное пособие. М.: Ай Пи Ар Медиа; 2022. 119 с. ISBN 978-5-4497-1379-7
2. Ахтямов А.М., Ильгамов М.А. Модель изгиба балки с надрезом: прямая и обратная задачи. *Прикладная механика и техническая физика*. 2013;54(1):152–162.
3. Rice J.R., Levy N. The part through surface crack in an elastic plate. *J. Appl. Mech.* 1972;39(1):185–194. <https://doi.org/10.1115/1.3422609>
4. Freund L.B., Herrmann G. Dynamic fracture of a beam or plate in plane bending. *J. Appl. Mech.* 1976;43(1):112–116. <https://doi.org/10.1115/1.3423760>
5. Narkis Y. Identification of crack location in vibrating simply-supported beams. *J. Sound Vib.* 1994;172(4):549–558. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1994.1195>
6. Ватульян А.О., Осипов А.В. Поперечные колебания балки с локализованными неоднородностями. *Вестник Донского государственного технического университета*. 2012;12(8):34–40.
7. Ильгамов М.А., Хакимов А.Г. Диагностика повреждений консольной балки с надрезом. *Дефектоскопия*. 2009;6:83–89.
8. Ильгамов М.А. Продольные колебания стержня с зарождающимися поперечными трещинами. *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 2017;1:23–31.
9. Утяшев И.М. Продольные колебания стержня с переменным сечением. *Многофазные системы*. 2019;14(2):138–141. <https://doi.org/10.21662/mfs2019.2.019>
10. Акуленко Л.Д., Байдулов В.Г., Георгиевский Д.В., Нестеров С.В. Эволюция собственных частот продольных колебаний стержня при увеличении дефекта поперечного сечения. *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 2017;6:136–144.
11. Болотин В.В. (ред.). *Вибрации в технике*: справочник в 6 т. Т. 1. *Колебания линейных систем*. М.: Машиностроение; 1978. 352 с.
12. Narkis Y. Identification of crack location in vibrating simply-supported beams. *J. Sound Vib.* 1994;172(2):549–558. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1994.1195>
13. Ахтямов А.М., Фатхелисламов А.Ф. Идентификация местоположения надреза стержня по собственной частоте. *Доклады Башкирского университета*. 2017;2(2):204–208.
14. Акуленко Л.Д., Гавриков А.А., Нестеров С.В. Идентификация дефектов поперечного сечения стержня по собственным частотам и особенностям формы продольных колебаний. *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 2019;6:98–107. <https://doi.org/10.1134/S0572329919060023>
15. Попов А.Л., Садовский С.А. О соответствии теоретических моделей продольных колебаний стержня экспериментальным данным. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия*. 2021;8(2):270–281. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.207>

REFERENCES

1. Shakirzyanov R.A., Shakirzyanov F.R. *Dinamika i ustoychivost' sooruzhenii: uchebnoe posobie (Dynamics and stability of structures: textbook)*. Moscow: IPR Media; 2022. 119 p. (in Russ.). ISBN 978-5-4497-1379-7
2. Akhtyamov A.M., Il'gamov M.A. Flexural model for a notched beam: Direct and inverse problems. *J. Appl. Mech. Tech. Phy.* 2013;54(1):132–141. <https://doi.org/10.1134/S0021894413010161>
[Original Russian Text: Akhtyamov A.M., Il'gamov M.A. Flexural model for a notched beam: Direct and inverse problems. *Prikladnaya Mekhanika i Tekhnicheskaya Fizika*. 2013;54(1):132–141 (in Russ.).]
3. Rice J.R., Levy N. The part through surface crack in an elastic plate. *J. Appl. Mech.* 1972;39(1):185–194. <https://doi.org/10.1115/1.3422609>
4. Freund L.B., Herrmann G. Dynamic fracture of a beam or plate in plane bending. *J. Appl. Mech.* 1976;43(1):112–116. <https://doi.org/10.1115/1.3423760>
5. Narkis Y. Identification of crack location in vibrating simply-supported beams. *J. Sound Vib.* 1994;172(4):549–558. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1994.1195>
6. Vatul'yan A.O., Osipov A.V. Transverse vibrations of beam with localized heterogeneities. *Vestnik Donskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta = Vestnik of Don State Technical University (Advanced Engineering Research)*. 2012;12(8):34–40 (in Russ.).
7. Il'gamov M.A., Khakimov A.G. Diagnosis of damage of a cantilever beam with a notch. *Russ. J. Nondestruct. Test.* 2009;45(6):430–435. <https://doi.org/10.1134/S1061830909060072>
[Original Russian Text: Ilgamov M.A., Khakimov A.G. Diagnosis of damage of a cantilever beam with a notch. *Defektoskopiya*. 2009;45(6):83–89 (in Russ.).]
8. Il'gamov M.A. Longitudinal vibrations of a bar with incipient transverse cracks. *Mech. Solids*. 2017;52(1):18–24. <https://doi.org/10.3103/S0025654417010034>
[Original Russian Text: Il'gamov M.A. Longitudinal vibrations of a bar with incipient transverse cracks. *Izvestiya Akademii Nauk. Mekhanika Tverdogo Tela*. 2017;1:23–31 (in Russ.).]
9. Utyashev I.M. Longitudinal oscillation of a rod with a variable cross section *Mnogofaznye sistemy = Multiphase Systems*. 2019;14(2):138–141 (in Russ.). <https://doi.org/10.21662/mfs2019.2.019>
10. Akulenko L.D., Baidulov V.G., Georgievskii D.V., Nesterov S.V. Evolution of natural frequencies of longitudinal vibrations of a bar as its cross-section defect increases. *Mech. Solids*. 2017;52(6):708–714. <https://doi.org/10.3103/S0025654417060103>
[Original Russian Text: Akulenko L.D., Baidulov V.G., Georgievskii D.V., Nesterov S.V. Evolution of natural frequencies of longitudinal vibrations of a bar as its cross-section defect increases. *Izvestiya Akademii Nauk. Mekhanika Tverdogo Tela*. 2017;6:136–144 (in Russ.).]
11. Bolotin V.V. (Ed.). *Vibratsii v tekhnike: Spravochnik v 6 t. T. 1. Kolebaniya lineinykh sistem (Vibrations in Technology: in 6 v. V. 1. Oscillations of Linear Systems)*. Moscow: Mashinostroenie; 1978. 352 p. (in Russ.).

12. Narkis Y. Identification of crack location in vibrating simply-supported beames. *J. Sound Vib.* 1994;172(2): 549–558. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1994.1195>
13. Akhtyamov A.M., Fatkhelislamov A.F. Identification of location of a cut of the rod on natural frequency. *Doklady Bashkirskogo Universiteta* 2017;2(2):204–208 (in Russ.)
14. Akulenko L.D., Gavrikov A.A., Nesterov S.V. Identification of cross-section defects of the rod by using eigenfrequencies and features of the shape of longitudinal oscillations. *Mech. Solids.* 2019;54(8): 1208–1215. <https://doi.org/10.3103/S0025654419080119> [Original Russian Text: Akulenko L.D., Gavrikov A.A., Nesterov S.V. Identification of cross-section defects of the rod by using eigenfrequencies and features of the shape of longitudinal oscillations. *Izvestiya Akademii Nauk. Mekhanika Tverdogo Tela.* 2019;6:98–107 (in Russ.).]
15. Popov A.L., Sadovsky S.A. Correspondence of theoretical models of longitudinal rod vibrations to experimental data. *Vestnik St. Peterb. Univ. Math.* 2021;54(2):162–170. <https://doi.org/10.1134/S1063454121020114> [Popov A.L., Sadovsky S.A. Correspondence of theoretical models of longitudinal rod vibrations to experimental data. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Astronomiya.* 2021;54(2):270–281 (in Russ.). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.207>]

Об авторах

Утяшев Ильнур Мирзович, к.ф.-м.н., научный сотрудник, Институт механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук (450054, Россия, Республика Башкортостан, Уфа, пр. Октября, д. 71); доцент кафедры математики, Башкирский государственный аграрный университет (450001, Россия, Республика Башкортостан, Уфа, ул. 50-летия Октября, д. 34). E-mail: utyashevim@mail.ru. Scopus Author ID 56966700200, ResearcherID J-1064-2018, SPIN-код РИНЦ 7856-5351, <https://orcid.org/0000-0002-2342-0492>

Фатхелисламов Альфир Фирдависович, старший преподаватель кафедры управления информационной безопасностью, Уфимский университет науки и технологий (450076, Россия, Республика Башкортостан, Уфа, ул. Заки Валиди, д. 32). E-mail: alfir93@mail.ru. SPIN-код РИНЦ 5470-4819

About the authors

Ilnur M. Utyashev, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Researcher, Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa Federal Research Center, Russian Academy of Sciences (71, Oktyabrya pr., Ufa, Republic of Bashkortostan, 450054 Russia); Assistant Professor, Department of Mathematics, Bashkir State Agrarian University (34, 50-Letiya Oktyabrya ul., Ufa, Republic of Bashkortostan, 450001 Russia). E-mail: utyashevim@mail.ru. Scopus Author ID 56966700200, ResearcherID J-1064-2018, RSCI SPIN-code 7856-5351, <https://orcid.org/0000-0002-2342-0492>

Alfir F. Fatkhelislamov, Senior Lecturer, Department of Information Security Management, Ufa University of Science and Technology (32, Zaki Validi ul., Ufa, Republic of Bashkortostan, 450076 Russia). E-mail: alfir93@mail.ru. RSCI SPIN-code 5470-4819