Russian Technological Journal.
2023;11(2):84–91

ISSN 2782-3210 (Print)
ISSN 2500-316X (Online)

УДК 519.224.22
https://doi.org/10.32362/2500-316X-2023-11-2-84-91

CC BY

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Экстремум в задаче о парных сравнениях

И.С. Пулькин [@],
А.В. Татаринцев

МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, 119454 Россия
[@] *Автор для переписки, e-mail: pulkin@mirea.ru*

Резюме
Цели. Рассмотрена задача оценки альтернатив на основе результатов экспертных парных сравнений. Важность и актуальность этой задачи обусловлены ее многочисленными применениями в самых разных областях – как в технических и естественных, так и в гуманитарных, от строительства до политики. Ставится задача вычисления вектора объективных рейтингов на основе экспертных оценок. В математической формулировке задача нахождения вектора объективных рейтингов сводится к аппроксимации матриц парных сравнений согласованными матрицами.
Методы. Используются аналитические методы анализа и высшей алгебры. Для некоторых частных случаев приведены результаты численных расчетов.
Результаты. В работе доказана теорема, утверждающая, что согласованная матрица, наилучшим образом аппроксимирующая заданную обратно-симметрическую матрицу в лог-евклидовой метрике, всегда существует и единственна. Кроме того, выведены формулы для вычисления такой согласованной матрицы. Для малых размерностей рассматриваются примеры, позволяющие сравнить результаты, полученные по выведенной формуле, с результатами для других известных способов нахождения согласованной матрицы – для вычисления собственного вектора и для минимизации невязки в лог-чебышевской метрике. Доказано, что в размерности 3 все эти способы приводят к одному и тому же результату, а уже в размерности 4 все результаты различны.
Выводы. Полученные в статье результаты позволяют вычислять вектор объективных рейтингов по данным экспертной оценки. Этот метод может быть использован в стратегическом планировании в тех случаях, когда выводы и рекомендации возможны только на основании экспертных суждений.

Ключевые слова: экспертные оценки, парные сравнения, обратно-симметрическая матрица, согласованная матрица, метрика, минимизация невязки

• **Поступила:** 08.11.2021 • **Доработана:** 29.11.2022 • **Принята к опубликованию:** 22.01.2023

Для цитирования: Пулькин И.С., Татаринцев А.В. Экстремум в задаче о парных сравнениях. *Russ. Technol. J.* 2023;11(2):84–91. https://doi.org/10.32362/2500-316X-2023-11-2-84-91

Прозрачность финансовой деятельности: Авторы не имеют финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

© И.С. Пулькин, А.В. Татаринцев, 2023

RESEARCH ARTICLE

Extremum in the problem of paired comparisons

Igor S. Pulkin @,

Andrey V. Tatarintsev

MIREA – Russian Technological University, Moscow, 119454 Russia

@ *Corresponding author, e-mail: pulkin@mirea.ru*

Abstract

Objectives. An analysis of the problem of evaluating alternatives based on the results of expert paired comparisons is presented. The importance and relevance of this task is due to its numerous applications in a variety of fields, whether in the technical and natural sciences or in the humanities, ranging from construction to politics. In such contexts, the problem frequently arises concerning how to calculate an objective ratings vector based on expert evaluations. In terms of a mathematical formulation, the problem of finding the vector of objective ratings can be reduced to approximating the matrices of paired comparisons by consistent matrices.

Methods. Analytical analysis and higher algebra methods are used. For some special cases, the results of numerical calculations are given.

Results. The theorem stating that there is always a unique and consistent matrix that optimally approximates a given inversely symmetric matrix in a log-Euclidean metric is proven. In addition, derived formulas for calculating such a consistent matrix are presented. For small dimensions, examples are considered that allow the results obtained according to the derived formula to be compared with results for other known methods of finding a consistent matrix, i.e., for calculating the eigenvector and minimizing the discrepancy in the log-Chebyshev metric. It is proven that all these methods lead to the same result in dimension 3, while in dimension 4 all results are already different.

Conclusions. The results obtained in the paper allow us to calculate the vector of objective ratings based on expert evaluation data. This method can be used in strategic planning in cases where conclusions and recommendations are possible only on the basis of expert evaluations.

Keywords: expert estimates, paired comparisons, inversely symmetric matrix, consistent matrix, metric, discrepancy minimization

• **Submitted:** 08.11.2021 • **Revised:** 29.11.2022 • **Accepted:** 22.01.2023

For citation: Pulkin I.S., Tatarintsev A.V. Extremum in the problem of paired comparisons. *Russ. Technol. J.* 2023;11(2):84–91. https://doi.org/10.32362/2500-316X-2023-11-2-84-91

Financial disclosure: The authors have no a financial or property interest in any material or method mentioned.

The authors declare no conflicts of interest.

ВВЕДЕНИЕ

При принятии решений человек не всегда обладает полной информацией, поэтому решения могут приниматься на основании некоторых, не всегда объективных, критериев. В ситуациях, когда необходимо учесть огромное количество факторов, ошибка может привести к катастрофическим последствиям. К таким ситуациям относятся, например, вопросы стратегического планирования, в частности, в строительстве, медицине, политике, экономике и во многих других областях человеческой деятельности.

Науку, занимающуюся вопросами выбора стратегии при неполной информации, а также вопросами обоснования такого выбора, принято называть теорией принятия решений. Такие исследования привлекают пристальное внимание специалистов в различных областях [1, 2]. Многие аспекты обсуждаются в книгах Т. Саати [3, 4] – одного из основоположников этой теории.

Есть и еще как минимум одна серьезная причина, позволяющая уверенно спрогнозировать рост числа исследований в этом направлении. Это возможность применения методов теории принятия решений в машинном обучении. По сути экспертные оценки – противоречивые и неточные, но при использовании в большом количестве они позволяют получить нужную информацию и построить верный прогноз – ничем не отличаются от ситуаций, возникающих, например, в обучении нейронных сетей или в построении ансамбля решающих деревьев – случайного леса (random forest) [5].

В последнее время появились многочисленные исследования, в которых техника сравнения разнородных активов применяется к различным задачам из области информационных технологий, в частности, для выбора форматов хранения больших данных (big data) для различных вычислительных комплексов, как локальных, так и распределенных. Этой тематике посвящены, например, работы [6–11].

Достаточно распространена ситуация, когда для построения прогноза и принятия решения не известны ни априорные распределения, ни предшествующая статистика, а известны только прогнозы и рекомендации экспертов. Поэтому задаче обработки экспертных суждений следует придать математическую формулировку.

Пусть мы имеем дело с экспертными суждениями. Например, эксперт сравнивает яблоко (Я), апельсин (А) и банан (Б). При этом он сравнивает фрукты попарно. Допустим, высказаны такие мнения:

- банан в три раза лучше яблока;
- апельсин в пять раз лучше яблока;
- апельсин в два раза лучше банана.

По этим суждениям можно построить матрицу сравнений, в которой первый столбец и первая строка соответствуют яблоку, вторые – банану, а третьи – апельсину:

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1/3 & 1 & 2 \\ 1/5 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

На пересечении i-го столбца и j-й строки стоит число, равное отношению ценностей i-го и j-го фрукта. Такая матрица называется положительной обратно-симметрической матрицей: все ее элементы строго положительны и выполнено соотношение:

$$a_{ij} = a_{ji}^{-1}.$$

Эта матрица, однако, не согласована. Если А лучше Я в 5 раз и А лучше Б в 3 раза, то уместно было бы предположить, что Б должен быть лучше Я в 5/3 раза, а не в 2 раза.

Такая ситуация для экспертных оценок – не редкость. Более того, существуют и нетранзитивные оценки: когда А лучше Б, Б лучше В, но В лучше А. Такая ситуация встречается, например, в турнирах, когда А выигрывает у Б, Б выигрывает у В и В выигрывает у А.

Для того, чтобы построить объективную оценку, мы предположим, что для оцениваемых предметов существуют объективные рейтинги w_1, w_2, w_3, а экспертные оценки представляют собой эти же рейтинги, искаженные случайными ошибками. Возникает задача: по данным экспертным оценкам восстановить эти рейтинги.

Если найдены рейтинги w_i, то элементы матрицы сравнений равны

$$x_{ij} = \frac{w_i}{w_j}.$$

Обозначим эту матрицу $\mathbf{W}_0$. Ее ранг равен 1. Такая матрица называется согласованной.

Таким образом, задача обработки экспертных суждений сведена к задаче поиска согласованной матрицы $\mathbf{W}_0$, наилучшим образом аппроксимирующей обратно-симметрическую матрицу $\mathbf{W}$. И здесь выясняется, что ответ существенно меняется в зависимости от того, в какой метрике вычисляется различие между этими матрицами.

В статье Н.К. Кривулина и его учеников [12] предлагается вычислять это различие в лог-чебышевской метрике. Здесь, в частности, отмечается, что это приводит к тому, что задача обработки экспертных оценок становится задачей из области так называемой идемпотентной или тропической математики [13] – нового бурно развивающегося направления в современной математике. Однако там же отмечается, что эта метрика в высоких размерностях приводит к неединственности решения.

В работах Т. Саати [3, 4] предлагается считать искомым вектором рейтингов соответствующим образом нормированный собственный вектор матрицы $\mathbf{A}$, отвечающий ее максимальному собственному значению. Существует известная теорема Перрона – Фробениуса [14], утверждающая, что у любой положительной (состоящей только из положительных чисел) матрицы существует единственное максимальное по модулю собственное значение, оно строго положительно и кратность его равна 1. В этих работах, впрочем, не указывается, в какой метрике полученное решение оптимально.

Настоящая работа посвящена нахождению оптимального решения в лог-евклидовой метрике.

ВЫВОД ОПТИМАЛЬНОЙ ОЦЕНКИ

Рассмотрим матрицу сравнения произвольной размерности ($n \times n$). Невязка исходной матрицы сравнения $\mathbf{W} = (a_{ij})$ и ее согласованного аналога $\mathbf{W}_0 = (x_{ij})$ в лог-евклидовой метрике, которую мы в данный момент рассматриваем, вычисляется как:

$$\Phi = \sum_{i,j=1}^{n} \log^2\left(\frac{x_{ij}}{a_{ij}}\right).$$

Если учесть, что элементы согласованной матрицы выражаются через компоненты собственного вектора матрицы в виде $x_{ij} = w_i/w_j$, то функция Φ зависит от n переменных:

$$\Phi(w_1, ..., w_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \log^2\left(\frac{w_i}{w_j a_{ij}}\right).$$

Условия равенства нулю производной функции невязки по k-й компоненте собственного вектора w_k дадут систему уравнений:

$$n \log w_k - \sum_{\beta=1}^{n} \log w_\beta = \sum_{\beta=1}^{n} \log a_{k\beta}.$$

Решением этой системы уравнений будет:

$$w_k = N \prod_{\beta=1}^{n} (a_{k\beta})^{1/n}.$$

Здесь N – произвольный нормировочный коэффициент и учтено, что произведение всех элементов исходной обратно-симметрической матрицы сравнений равно единице

$$\prod_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta} = 1.$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема. Пусть задана обратно-симметрическая матрица (a_{ij}). Тогда компоненты согласованной матрицы (x_{ij}), минимизирующей функцию невязки для лог-евклидовой метрики, имеют вид:

$$x_{ij} = \frac{w_i}{w_j} = \prod_{\beta=1}^{n} (a_{i\beta} \cdot a_{\beta j})^{1/n}.$$

Иными словами, элемент согласованной матрицы x_{ij} равен произведению среднего геометрического элементов i-й строки и j-го столбца исходной матрицы.

Для примера рассмотрим обратно-симметрические матрицы малых размерностей.

Пусть $\mathbf{W} = (a_{ij})$ – трехмерная матрица экспертных сравнений:

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 1/a & 1 & c \\ 1/b & 1/c & 1 \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы положительны $a_{ij} > 0$ и обратно-симметричны $a_{ij} = a_{ji}^{-1}$. Отметим, что матрица называется согласованной, если для ее элементов a, b, $c > 0$ выполняется условие $c = b/a$ или $ac/b = 1$. Для аналогичного параметра в работе [12] было использовано название «тропический радиус» и использовалось обозначение $R=(ac/b)^{1/3}$, которое мы будем также использовать и в этой работе.

В работе [15] установлено, что собственные значения матрицы сравнений для $n = 3$:

$$\lambda_1 = 1 + \left(R + \frac{1}{R}\right);$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 1 - \frac{1}{2}\left(R + \frac{1}{R}\right) \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}\left(R - \frac{1}{R}\right).$$

Один из корней характеристического уравнения действительный, пара других – комплексно-сопряженные. Действительный корень имеет наибольшее по абсолютной величине значение. Для согласованной матрицы $R = 1$ и собственные значения равны $\lambda_1 = 3$; $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Наибольшее ненулевое собственное значение совпадает в общем случае с размерностью матрицы сравнения.

Нетрудно найти и собственный вектор исходной матрицы сравнений для первого собственного значения. Он будет иметь вид (в нормировке $w_1 = 1$):

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ R/a \\ 1/bR \end{pmatrix}.$$

Элементы согласованной матрицы в этом случае находятся следующим образом: $\mathbf{W}_0 = (x_{ij}) = w_i/w_j$ и, следовательно:

$$\mathbf{W}_0 = \begin{pmatrix} 1 & a/R & bR \\ R/a & 1 & c/R \\ 1/bR & R/c & 1 \end{pmatrix}.$$

Найденный собственный вектор исходной матрицы будет собственным и для согласованной матрицы. Он соответствует собственному значению этой матрицы, равному размерности $\lambda = 3$.

Для трехмерной матрицы сравнений и соответствующей ей согласованной матрицы:

$$\mathbf{W} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 1/a & 1 & c \\ 1/b & 1/c & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{W}_0 = (x_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 1/x & 1 & y/x \\ 1/y & x/y & 1 \end{pmatrix}$$

в лог-евклидовой метрике задача сводится к нахождению минимума функции невязки $\Phi(x, y)$ двух переменных, входящих в согласованную матрицу:

$$\Phi(x, y) = \sum_{i,j=1}^{3} (\log a_{ij} - \log x_{ij})^2,$$

которая с учетом явного вида матриц может быть записана в виде:

$$\Phi(x, y) = 2\log^2\left(\frac{x}{a}\right) + 2\log^2\left(\frac{y}{b}\right) + 2\log^2\left(\frac{y}{cx}\right).$$

Экстремум функции (минимум) достигается в точке $x = a/R$, $y = bR$. Минимальное значение функции $\min\Phi = 6\log^2 R$ зависит от рассогласованности исходной матрицы экспертных суждений.

Результаты для трехмерного случая можно получить и другим способом.

Как и ранее, обратно-симметрическая матрица в трехмерном случае равна

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 1/a & 1 & c \\ 1/b & 1/c & 1 \end{pmatrix}.$$

При логарифмировании она становится кососимметрической

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & u & v \\ -u & 0 & w \\ -v & w & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь обозначено $u = \log a$, $v = \log b$, $w = \log c$. Согласованная матрица имеет вид

$$\mathbf{W}_0 = \begin{pmatrix} w_1/w_1 & w_2/w_1 & w_3/w_1 \\ w_1/w_2 & w_2/w_2 & w_3/w_2 \\ w_1/w_3 & w_2/w_3 & w_3/w_3 \end{pmatrix}.$$

После логарифмирования она примет вид:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & y_1 & y_2 \\ -y_1 & 0 & y_3 \\ -y_2 & -y_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь обозначено:

$$y_1 = \log w_2 - \log w_1, \qquad y_2 = \log w_3 - \log w_1,$$

$$y_3 = \log w_3 - \log w_2.$$

При этом выполнено условие $y_1 - y_2 + y_3 = 0$. Таким образом, задача свелась к нахождению точки $\mathbf{Q}$ на плоскости $y_1 - y_2 + y_3 = 0$, ближайшей к заданной точке $\mathbf{P}(u, v, w) \in \mathrm{R}^3$. Решение этой задачи зависит от метрики.

Для евклидовой метрики следует провести через точку $\mathbf{P}$ прямую, перпендикулярную плоскости, и найти точку пересечения:

$$(u + t) - (v - t) + (w + t) = 0.$$

Получим:

$$t = -\frac{1}{3}(u - v + w).$$

Следовательно:

$$y_1 = u + t = \frac{2}{3}u + \frac{1}{3}v - \frac{1}{3}w, \quad y_2 = v - t = \frac{1}{3}u + \frac{2}{3}v + \frac{1}{3}w,$$

$$y_3 = w + t = -\frac{1}{3}u + \frac{1}{3}v + \frac{2}{3}w.$$

Положим без ограничения общности $w_1 = 1$. Тогда

$$w_2 = \mathrm{e}^{y_1} = a^{2/3}b^{1/3}c^{-1/3},$$
$$w_3 = \mathrm{e}^{y_2} = a^{1/3}b^{2/3}c^{1/3}.$$

Это элементы первой строки согласованной матрицы. В первом столбце стоят обратные им элементы. Первый столбец равен

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 \\ a^{-2/3}b^{-1/3}c^{1/3} \\ a^{-1/3}b^{-2/3}c^{-1/3} \end{pmatrix},$$

что совпадает с результатом, полученным ранее

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 \\ R/a \\ 1/bR \end{pmatrix}.$$

Этот столбец (как и два других) является собственным вектором исходной матрицы **A.** Это нетрудно проверить прямой выкладкой. К сожалению, такой способ расчета не обобщается на более высокие размерности.

Рассмотрим также другие метрики. Наиболее естественным представляется рассмотреть самые употребительные: лог-манхеттенскую и лог-чебышевскую метрики.

Нетрудно проиллюстрировать, что в лог-манхеттенской метрике решение не является единственным даже в размерности 3. Действительно, геометрически решение задачи о минимальном расстоянии от точки до плоскости сводится к построению шара с центром в этой точке, касающегося этой плоскости. Однако в манхеттенской метрике «шаром» является октаэдр, одна из граней которого лежит как раз на плоскости $y_1 - y_2 + y_3 = 0$. Все точки этой грани и будут решениями. К этому можно добавить, что решение в евклидовой метрике будет принадлежать этой же грани, т.е. будет одним из решений в манхеттенской.

В чебышевской метрике в размерности 3 решение единственно и совпадает с решением в евклидовой. Действительно, «шаром» в этой метрике является куб. Вектор **PQ** имеет координаты $(t, -t, t)$ и является половиной диагонали куба, поэтому куб также касается плоскости в единственной точке – точке **Q**.

В работе [12] также было получено другим способом, что в размерности 3 собственный вектор минимизирует невязку в лог-чебышевской метрике.

Таким образом, в размерности 3 все описанные способы вычисления согласованной матрицы – вычисление собственного вектора и вычисление вектора, минимизирующего невязку – приводят к одному и тому же результату (хотя в лог-манхеттенской метрике это решение не будет единственным).

В размерности 4 эти решения уже отличаются.

В работе [12] для размерности 4 рассматривается численный пример с такой матрицей:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1/2 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/4 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

В указанной работе доказывается, что оптимальным в лог-чебышевской метрике будет любой вектор, принадлежащий отрезку **AB**, где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/4 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \text{ и } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/3 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в лог-чебышевской метрике в размерности 4 решение, вообще говоря, не единственно.

Другой способ – вычисление собственного вектора – приводит к такому результату: собственное значение равно $\lambda_{max} = 4.5056$, а собственный вектор в той нормировке, когда его первая координата равна 1, равен

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 0.2837 \\ 0.5818 \\ 0.6110 \end{pmatrix}.$$

Вычисление решения, дающего минимальную невязку в лог-евклидовой метрике, в соответствии с доказанной выше теоремой, приводит к такому результату:

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 0.3195 \\ 0.5946 \\ 0.6580 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, уже в размерности 4 описанные выше способы вычисления вектора рейтингов приводят к различным результатам.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для обработки экспертных мнений и приведения их к виду рейтингового списка можно использовать доказанную в статье теорему. Установлено, что она дает наилучшую оценку в лог-евклидовой метрике. На примерах показано, что эта оценка в высоких размерностях может не совпадать с оценками, полученными другими способами. Выбор нужного способа, по-видимому, должен быть связан со спецификой рассматриваемой задачи.

Вклад авторов. Все авторы в равной степени внесли свой вклад в исследовательскую работу.

Authors' contribution. All authors equally contributed to the research work.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коробов В.Б. *Теория и практика экспертных методов*. М.: ИНФРА-М; 2019. 279 с. ISBN 978-5-16-015053-6. https://doi.org/10.12737/monography_5caee0067f1835.43206494
2. Андрейчиков А.В., Андрейчикова О.Н. *Анализ, синтез, планирование решений в экономике*. М.: Финансы и статистика; 2004. 467 с. ISBN 5-279-02901-7
3. Саати Т. *Принятие решений. Метод анализа иерархий*. М.: Радио и связь; 1993. 314 с. ISBN 5-256-00443-3

REFERENCES

1. Korobov V.B. *Teoriya i praktika ekspertnykh metodov* (*Theory and Practice of Expert Methods*). Moscow: INFRA-M; 2019. 279 p. (in Russ.). ISBN 978-5-16-015053-6. https://doi.org/10.12737/monography_5caee0067f1835.43206494
2. Andreichikov A.V., Andreichikova O.N. *Analiz, sintez, planirovanie reshenii v ekonomike* (*Analysis, Synthesis, Planning of Decisions in the Economy*). Moscow: Finansy i statistika; 2004. 467 p. (in Russ.). ISBN 5-279-02901-7

4. Саати Т. *Принятие решений при зависимостях и обратных связях: аналитические сети*. М.: URSS; 2010. 357 с. ISBN 978-5-397-01622-3
5. Breiman L. Random forests. *Machine Learning*. 2001;45(1): 5–32. https://doi.org/10.1023/A:1010933404324
6. Belov V., Tatarintsev A., Nikulchev E. Comparative characteristics of big data storage formats. *J. Phys.: Conf. Ser.* 2021;1727(1):012005. http://doi.org/10.1088/1742-6596/1727/1/012005
7. Belov V., Tatarintsev A., Nikulchev E. Choosing a data storage format in the Apache Hadoop system based on experimental evaluation using Apache Spark. *Symmetry.* 2021;13(2):195. https://doi.org/10.3390/sym13020195
8. Moro Visconti R., Morea D. Big data for the sustainability of healthcare project financing. *Sustainability*. 2019;11(13):3748. https://doi.org/10.3390/su11133748
9. Gusev A., Ilin D., Nikulchev E. The dataset of the experimental evaluation of software components for application design selection directed by the artificial bee colony algorithm. *Data*. 2020;5(3):59. https://doi.org/10.3390/data5030059
10. Munir R.F., Abelló A., Romero O., Thiele M., Lehner W. A cost-based storage format selector for materialized results in big data frameworks. *Distrib. Parallel Databases*. 2020;38(3):335–364. https://doi.org/10.1007/s10619-019-07271-0
11. Gusev A., Ilin D., Kolyasnikov P., Nikulchev E. Effective selection of software components based on experimental evaluations of quality of operation. *Eng. Lett*. 2020;28(2):420–427.
12. Кривулин Н.К., Агеев В.А., Гладких И.В. Применение методов тропической оптимизации для оценки альтернатив на основе парных сравнений. *Вестник СПбГУ. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления*. 2017;13(1):27–41. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2017.103
13. Литвинов Г.Л. Деквантование Маслова, идемпотентная и тропическая математика: краткое введение. *Записки научных семинаров Санкт-Петербургского отделения математического института им. В.А. Стеклова РАН* (*Записки научных семинаров ПОМИ*). 2005;326(13):145–182.
14. Гантмахер Ф Р. *Теория матриц*. М.: Физматлит; 2004. 560 с. ISBN 5-9221-0524-8
15. Евсеева О.А., Пулькин И.С., Татаринцев А.В. О задаче обработки экспертных суждений. *Инновационные технологии в электронике и приборостроении*: сборник трудов конференции. М.: РТУ МИРЭА; 2021. Т. 1. С. 355–359.

3. Saaty T. *Prinyatie reshenii. Metod analiza ierarkhii* (*Decision Making. Hierarchy Analysis Method*). Moscow: Radio i svyaz’; 1993. 341 p. (in Russ.). ISBN 5-256-00443-3
4. Saaty T. *Prinyatie reshenii pri zavisimostyakh i obratnykh svyazyakh: analiticheskie seti* (*Decision Making with Dependencies and Feedbacks: Analytical Networks*). Moscow: URSS; 2010. 357 p. (in Russ.). ISBN 978-5-397-01622-3
5. Breiman L. Random forests. *Machine Learning*. 2001;45(1): 5–32. https://doi.org/10.1023/A:1010933404324
6. Belov V., Tatarintsev A., Nikulchev E. Comparative characteristics of big data storage formats. *J. Phys.: Conf. Ser.* 2021;1727(1):012005. http://doi.org/10.1088/1742-6596/1727/1/012005
7. Belov V., Tatarintsev A., Nikulchev E. Choosing a data storage format in the Apache Hadoop system based on experimental evaluation using Apache Spark. *Symmetry.* 2021;13(2):195. https://doi.org/10.3390/sym13020195
8. Moro Visconti R., Morea D. Big data for the sustainability of healthcare project financing. *Sustainability*. 2019;11(13):3748. https://doi.org/10.3390/su11133748
9. Gusev A., Ilin D., Nikulchev E. The dataset of the experimental evaluation of software components for application design selection directed by the artificial bee colony algorithm. *Data*. 2020;5(3):59. https://doi.org/10.3390/data5030059
10. Munir R.F., Abelló A., Romero O., Thiele M., Lehner W. A cost-based storage format selector for materialized results in big data frameworks. *Distrib. Parallel Databases*. 2020;38(3):335–364. https://doi.org/10.1007/s10619-019-07271-0
11. Gusev A., Ilin D., Kolyasnikov P., Nikulchev E. Effective selection of software components based on experimental evaluations of quality of operation. *Eng. Lett*. 2020;28(2):420–427.
12. Krivulin N.K., Ageev V.A., Gladkikh I.V. Application of methods of tropical optimization for evaluating alternatives based on pairwise comparisons. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Prikladnaya matematika. Informatika. Protsessy upravleniya = Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes.* 2017;13(1):27–41. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2017.103
13. Litvinov G.L. The Maslov dequantization, idempotent and tropical mathematics: a briff introduction. *Zapiski nauchnykh seminarov Sankt-Peterburgskogo otdeleniya matematicheskogo instituta im. V.A. Steklova RAN* (*Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI*). 2005;326(13):145–182 (in Russ.).
14. Gantmakher F R. *Teoriya matrits* (*Matrix Theory*). Moscow: Fizmatlit; 2004. 560 p. (in Russ.). ISBN 5-9221-0524-8
15. Evseeva O.A., Pulkin I.S., Tatarintsev A.V. On the problem of processing expert judgments. In: *Innovatsionnye tekhnologii v elektronike i priborostroenii:* sbornik trudov konferentsii (*Innovative technologies in electronics and instrumentation:* collection of conference proceedings). Moscow: MIREA; 2021. V. 1. P. 355–359 (in Russ.).

Об авторах

Пулькин Игорь Сергеевич, к.ф.-м.н., доцент кафедры высшей математики Института искусственного интеллекта, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: pulkin@mirea.ru. SPIN-код РИНЦ 3381-669, https://orcid.org/0000-0002-5907-2151

Татаринцев Андрей Владимирович, к.ф.-м.н., доцент кафедры высшей математики и программирования Института перспективных технологий и индустриального программирования, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). Scopus Author ID 57221996001, 7004076246, https://orcid.org/0000-0003-2969-8740

About the authors

Igor S. Pulkin, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor, Higher Mathematics Department, Institute of Artificial Intelligence, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: pulkin@mirea.ru. RSCI SPIN-code 3381-669, https://orcid.org/0000-0002-5907-2151

Andrey V. Tatarintsev, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor, Department of Higher Mathematics and Programming, Institute of Advanced Technologies and Industrial Programming, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). Scopus Author ID 57221996001, 7004076246, https://orcid.org/0000-0003-2969-8740