

Математическое моделирование  
Mathematical modeling

УДК 519.857  
<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2023-11-2-72-83>



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

## Оптимизация параметров сплайна при аппроксимации многозначных функций

Д.А. Карпов,  
В.И. Струченков <sup>®</sup>

МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, 119454 Россия  
<sup>®</sup> Автор для переписки, e-mail: [str1942@mail.ru](mailto:str1942@mail.ru)

### Резюме

**Цели.** Методы сплайн-аппроксимации последовательности точек на плоскости получают все более широкое применение в различных областях. Сплайн рассматривается как однозначная функция с известным числом повторяющихся элементов. Наиболее широкое применение получили полиномиальные сплайны. Применительно к проектированию трасс линейных сооружений приходится рассматривать задачу с неизвестным числом элементов. Алгоритм решения задачи применительно к проектированию продольного профиля реализован и опубликован ранее. В этой задаче элементами сплайна являются дуги окружностей, сопрягаемые отрезками прямых, и сплайн представляет собой однозначную функцию. Однако при проектировании плана трассы в общем случае сплайн является многозначной функцией. Поэтому разработанный ранее алгоритм не пригоден для решения этой задачи, даже в случае использования тех же элементов сплайна. Цель настоящей статьи – обобщение полученных результатов на случай аппроксимации многозначных функций с учетом особенностей проектирования трасс линейных сооружений. На первом этапе работы было определено число элементов аппроксимирующего сплайна с помощью динамического программирования. В статье рассматривается следующий этап решения задачи.

**Методы.** Для оптимизации параметров сплайна используется новая математическая модель в виде модифицированной функции Лагранжа и специальный алгоритм нелинейного программирования. При этом удастся вычислять аналитически производные целевой функции по параметрам сплайна при отсутствии ее аналитического выражения через эти параметры.

**Результаты.** Разработаны математическая модель и алгоритм оптимизации параметров сплайна (как многозначной функции), состоящего из дуг окружностей, сопрягаемых отрезками прямых. Начальным приближением является сплайн, полученный на первом этапе.

**Выводы.** Двухэтапная схема сплайн-аппроксимации при неизвестном числе элементов сплайна, предложенная ранее, пригодна и для аппроксимации многозначных функций, заданных последовательностью точек на плоскости, в частности для проектирования плана трасс линейных сооружений.

**Ключевые слова:** трасса, план и продольный профиль, сплайн, нелинейное программирование, целевая функция, ограничения

• Поступила: 02.03.2022 • Доработана: 01.06.2022 • Принята к опубликованию: 26.01.2023

**Для цитирования:** Карпов Д.А., Струченков В.И. Оптимизация параметров сплайна при аппроксимации многозначных функций. *Russ. Technol. J.* 2023;11(2):72–83. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2023-11-2-72-83>

**Прозрачность финансовой деятельности:** Авторы не имеют финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## RESEARCH ARTICLE

# Optimization of spline parameters in approximation of multivalued functions

Dmitry A. Karpov,  
Valery I. Struchenkov @

MIREA – Russian Technological University, Moscow, 119454 Russia  
@ Corresponding author, e-mail: str1942@mail.ru

### Abstract

**Objectives.** Methods for spline approximation of a sequence of points in a plane are increasingly used in various disciplines. A spline is defined as a single-valued function consisting of a known number of repeating elements, of which the most widely used are polynomials. When designing the routes of linear structures, it is necessary to consider a problem with an unknown number of elements. An algorithm implemented for solving this problem when designing a longitudinal profile was published earlier. Here, since the spline elements comprise circular arcs conjugated by line segments, the spline is a single-valued function. However, when designing a route plan, the spline is generally a multivalued function. Therefore, the previously developed algorithm is unsuitable for solving this problem, even if the same spline elements are used. The aim of this work is to generalize the obtained results to the case of approximation of multivalued functions while considering various features involved in designing the routes of linear structures. The first stage of this work consisted in determining the number of elements of the approximating spline using dynamic programming. In the present paper, the next stage of solving this problem is carried out.

**Methods.** The spline parameters were optimized using a new mathematical model in the form of a modified Lagrange function and a special nonlinear programming algorithm. In this case, it is possible to analytically calculate the derivatives of the objective function with respect to the spline parameters in the absence of its analytical expression.

**Results.** A mathematical model and algorithm were developed to optimize the parameters of a spline as a multivalued function consisting of circular arcs conjugated by line segments. The initial approximation is the spline obtained at the first stage.

**Conclusions.** The previously proposed two-stage spline approximation scheme for an unknown number of spline elements is also suitable for approximating multivalued functions given by a sequence of points in a plane, in particular, for designing a plan of routes for linear structures.

**Keywords:** route, plan and longitudinal profile, spline, nonlinear programming, objective function, constraints

• Submitted: 02.03.2022 • Revised: 01.06.2022 • Accepted: 26.01.2023

**For citation:** Karpov D.A., Struchenkov V.I. Optimization of spline parameters in approximation of multivalued functions. *Russ. Technol. J.* 2023;11(2):72–83. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2023-11-2-72-83>

**Financial disclosure:** The authors have no a financial or property interest in any material or method mentioned.

The authors declare no conflicts of interest.

## ВВЕДЕНИЕ

Предложенный в [1] метод аппроксимации многозначных функций, заданных дискретно, сплайном специального вида предполагает двухэтапную схему решения задачи. Первый этап состоит в поиске числа элементов сплайна и приближенных значений его параметров с помощью динамического программирования. На втором этапе с использованием полученного на первом этапе сплайна как начального приближения, выполняется оптимизация его параметров с помощью нелинейного программирования. Первый этап рассматривался в [2]. В настоящей статье, которая является продолжением [2], рассматривается второй этап.

Сплайн состоит из повторяющейся связки «дуга окружности + отрезок прямой». На данном этапе известны начальная точка и направление касательной в ней, длины всех кривых и сопрягающих их прямых, что позволяет применить методы непрерывной оптимизации, в частности методы нелинейного программирования градиентного типа, несмотря на то что искомым сплайном является многозначной функцией.

Оптимизация параметров сплайна, полученного на первом этапе, необходима не только из-за недостаточной точности решения задачи на первом этапе, что обусловлено дискретностью поиска, но и из-за невозможности строгого выполнения на первом этапе ограничений по фиксированным точкам, т.е. исходным точкам, которые при аппроксимации не смещаются.

Возможно обычное для динамического программирования повторение расчетов с меньшими дискретами поиска для повышения точности. В данной задаче это особенно актуально, т.к. при известном числе элементов объем вычислений резко сокращается, что позволяет решать задачу с уменьшенными дискретами при увеличении их числа в приемлемое время на общедоступных компьютерах.

Задача рассматривается применительно к проектированию плана трасс линейных сооружений. Для некоторых из них, например, при проектировании траншеи для прокладки трубопроводов различного назначения сплайн рассматриваемого вида является окончательным. В проектировании трасс дорог прямые и окружности должны сопрягаться клотоидами для обеспечения непрерывности не только касательной, но и кривизны. Как показано в [2], при малых длинах клотоид их добавление в полученный сплайн

с окружностями приводит к незначительным смещениям. Однако для общего случая необходима реализация поэтапной схемы аппроксимации сплайном с повторяющимися связками «прямая + клотоида + окружность + клотоида». Решение этой задачи представляет собой предмет дальнейших исследований.

Необходимо отметить, что, как показано в [2], такой подход существенно отличается от принятого в практике проектирования метода подбора элементов в интерактивном режиме, и от различных полуавтоматических методов поиска границ кривых на основе графиков кривизны и угловых диаграмм, и от нового эвристического метода поиска границ кривых [3] с последующим применением генетических алгоритмов [4–12]. Использование адекватных математических моделей и математически корректных алгоритмов представляется более перспективным.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ЕЕ ФОРМАЛИЗАЦИЯ

Задача состоит в том, чтобы найти сплайн заданного вида, который удовлетворяет всем ограничениям и наилучшим образом аппроксимирует заданную последовательность точек на плоскости [2, рис. 1].

Начальная точка  $A$  и направление касательной к искомому сплайну в этой точке заданы и не меняются в процессе поиска сплайна. Качество аппроксимации оценивается суммой квадратов отклонений  $h_j$  заданных точек от сплайна.

Требуется найти

$$\min F(\mathbf{h}) = \sum_1^n h_j^2. \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{h}(h_1, h_2, \dots, h_n)$  – вектор неизвестных,  $n$  – их количество. Вместо простой суммы может быть задана взвешенная сумма квадратов.

Отклонения  $h_j$  в практике проектирования в различных странах и в работах различных авторов вычисляются по-разному. Чаще отклонение точки от сплайна вычисляется по нормали к сплайну [2]. В России принято вычислять отклонение по нормали к исходной ломаной [2], т.е. по направлению к центру окружности, соединяющей три смежных точки. Если три точки лежат на одной прямой, то отклонение вычисляется по нормали к этой прямой.

Отмеченное различие в методах расчета не влияет на поиск числа элементов сплайна, поэтому на первом этапе был принят наиболее простой способ – по нормали к искомому сплайну. На втором этапе при оптимизации параметров сплайна будем использовать предварительно вычисленные нормали к исходной ломаной, т.е. фиксированные направления, которые не надо вычислять повторно в итерационном процессе. Это те самые нормали, на которых располагались точки, определяющие в динамическом программировании «состояния системы» [2, рис. 2].

Точка начала первой кривой может не совпадать с начальной точкой А, поэтому будем считать неизвестной длину начальной прямой  $L_1$  и, в отличие от первого этапа, элементы сплайна будем рассматривать в следующем порядке: «прямая + окружность». Если число таких повторяющихся связей равно  $m$ , то система ограничений выглядит следующим образом:

$$L_j^{np} \geq L_{\min}^{np}, \quad (2)$$

$$L_j^k \geq L_{\min}^k, \quad (3)$$

$$R_{\min} \leq |R_j| \leq R_{\max}, \quad j = \overline{1, m}. \quad (4)$$

Здесь, как и на первом этапе [2],  $L_j^{np}$  и  $L_j^k$  – длины прямой и кривой в  $j$ -й связке, а  $R_j$  – радиусы окружностей, знаки которых известны, что позволяет избавиться от взятия модуля в [4] и получить для каждого  $R_j$  линейное ограничение в виде двустороннего неравенства.

$$R_{\min} \leq R_j \leq R_{\max}, \quad \text{если } R_j > 0, \quad (5)$$

$$-R_{\max} \leq R_j \leq -R_{\min}, \quad \text{если } R_j < 0. \quad (6)$$

Конечная точка сплайна фиксирована, но его длина не ограничена. Если фиксировано и конечное направление, то задаются ограничения не только на  $h_n$ , но и на  $h_{n-1}$ . Кроме того, могут быть заданы ограничения на смещения отдельных точек как в форме неравенств, в т.ч. и двусторонних, вида

$$h_{\min} \leq h_m \leq h_{\max}, \quad (7)$$

так и равенств

$$h_m = h_0. \quad (8)$$

Это те самые фиксированные точки, наличие которых не удастся учесть в динамическом программировании.

В итоге получаем задачу нелинейного программирования с целевой функцией  $F(\mathbf{h})$  и ограничениями (2), (3), (5)–(8), часть из которых может отсутствовать.

## 2. ОСОБЕННОСТИ ЗАДАЧИ

Ограничения (2), (3), (5), (6) не выражаются через неизвестные смещения  $h_j$ , но, зная все длины и радиусы, мы можем вычислить все  $h_j$ . Далее будем считать все длины и радиусы основными переменными, а все  $h_j$  – промежуточными, зависящими от основных. Аналитическое выражение этих зависимостей мы не знаем и выяснять его не будем. Нет и аналитического выражения целевой функции  $F(\mathbf{h})$  через основные переменные. В итоге получаем задачу нелинейного программирования с простой системой ограничений (2), (3), (5), (6) относительно основных переменных, с несколькими ограничениями (7), (8) на промежуточные переменные и целевой функцией, выраженной через промежуточные переменные.

Алгоритмы нелинейного программирования при всем их многообразии<sup>1</sup> [13–26] сводятся к организации итерационного процесса со следующими пунктами:

- 1) построение допустимого начального приближения;
- 2) определение направления спуска из очередной итерационной точки, в частности из начальной;
- 3) проверка условий прекращения счета. Если они не выполнены, то переход к следующему пункту, иначе – окончание расчетов;
- 4) определение шага по найденному направлению из условия соблюдения ограничений и достижения точки минимума по направлению;
- 5) переход в новую точку и далее – к пункту 2.

В нашей задаче нужно многократно вычислять промежуточные переменные (смещения по нормлям) при изменении основных переменных. Для этого приходится искать точки пересечения двух прямых и прямой с окружностью (рис. 1).

Смещения исходных точек в проектное положение считаются положительными, если они осуществляются в направлении внешней нормали.

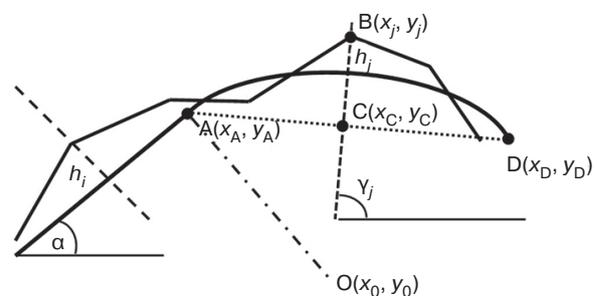


Рис. 1. Вычисление смещений по нормлям

<sup>1</sup> Пантелеев А.В., Лётова Т.А. *Методы оптимизации: учебное пособие*. М.: Логос; 2011. 424 с. ISBN 978-5-98704-540-4. [Panteleev A.V., Letova T.A. *Optimization methods: A handbook*. Moscow: Logos; 2011. 424 p. (in Russ.).]

Если обозначить координаты начала дуги окружности (точка А на рис. 1) через  $x_A$  и  $y_A$ , а угол касательной в этой точке с осью  $OX$  – через  $\alpha$ , то координаты центра окружности  $x_0 = x_A - R \sin \alpha$  и  $y_0 = y_A + R \cos \alpha$ . Здесь и далее радиус положительный при движении по кривой против часовой стрелки. Точка пересечения  $C$  с нормалью могла быть как вне, так и внутри дуги окружности. Но, не ограничивая общности, можно для точки пересечения нормали с окружностью записать  $x_C = x_j + h_j \cos \gamma_j$  и  $y_C = y_j + h_j \sin \gamma_j$ . Здесь и далее  $\gamma_j$  – угол  $j$ -й нормали с осью  $OX$ .

Из условия принадлежности точки  $C$  окружности получаем относительно  $h_j$  квадратное уравнение, решение которого дает формулу для  $h_j$ :

$$h_j = \frac{(x_A - R \sin \alpha - x_j) \cos \gamma_j + (y_A + R \cos \alpha - y_j) \sin \gamma_j \pm \sqrt{\left( R^2 - [(x_A - R \sin \alpha - x_j) \sin \gamma_j - (y_A + R \cos \alpha - y_j) \cos \gamma_j]^2 \right)}}{2 \cos \gamma_j} \quad (9)$$

Для выбора на окружности точки, ближайшей к исходной, перед корнем берется знак «минус», если выражение перед корнем в (9) положительно, и наоборот. Отклонения  $h_j$  вычисляются последовательно от начальной точки к конечной. При этом для углов поворота дуг окружностей, больших чем  $\pi$ , имеют место особенности определения, попадает ли точка пересечения окружности и нормали (точка  $C$  на рис. 1) внутрь дуги или нет. Например, в общем случае нельзя считать, что если хорда  $AC < AD$  (рис. 1), то точка  $C$  находится в пределах дуги  $AD$  (рис. 2).

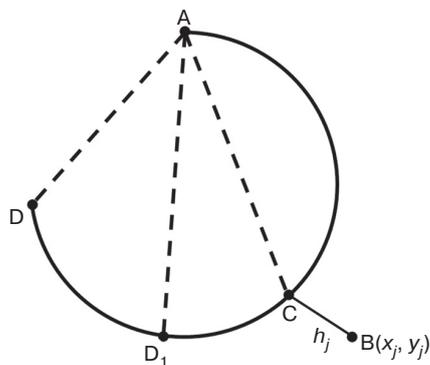


Рис. 2. Определение наличия пересечения нормали с дугой

В примере на рис. 2  $AC > AD$ , но  $AC < AD_1$ , и правило определения положения точки на дуге путем сравнения длин хорд не работает.

Положение точки  $C$  относительно хорды  $AD$  (рис. 1) определяется знаком  $d$ .

$$d = (y_C - y_A)(x_D - x_A) - (x_C - x_A)(y_D - y_A).$$

Если  $d > 0$ , то точка  $C$  находится слева от направления  $AD$ , а при  $d < 0$  – справа.

В этом легко убедиться, перейдя к системе координат с центром в точке  $A$  и направив ось  $OX$  по  $AD$ . Отсюда получаем правило: если  $Rd > 0$ , то точка  $C$  – вне дуги  $AD$ , иначе – внутри.

Еще одна особенность решаемой задачи состоит в том, что допустимая область не ограничена, т.к. неравенства (2), (3) односторонние. Однако это обстоятельство в данном случае несущественно, т.к. при поиске шага по направлению на каждой итерации можно ограничиться максимальным увеличением радиусов, длин прямых и дуг окружностей в 1 м.

Более важной усложняющей особенностью является уже отмечавшееся отсутствие аналитического выражения целевой функции через основные переменные. С другой стороны, существенным упрощением является крайне простой вид ограничений на основные переменные, что позволяет на каждой итерации при поиске направления спуска легко проверять целесообразность изменения набора активных ограничений по знаку соответствующих компонент градиента.

### 3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ ПО ОСНОВНЫМ ПЕРЕМЕННЫМ

Фактически речь идет о попытке аналитически вычислять градиент целевой функции по основным переменным, не имея ее аналитического выражения через эти переменные, с помощью пересчета производных. Оказалось, что в нашей задаче такой пересчет вполне возможен.

Будем считать, что набор основных переменных образует вектор  $x$ . Тогда формула пересчета производных имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \sum_1^n \frac{\partial F}{\partial h_j} \cdot \frac{\partial h_j}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (10)$$

где  $\frac{\partial F}{\partial h_j} = 2h_j$  в силу (1).

Все сводится к вычислению производных смещений по нормальям через основные переменные. Покажем, как это делается в нашей задаче. Для этого, опуская индексы и сохраняя для радиуса произвольной дуги окружности обозначение  $R$ , длину произвольной прямой обозначим через  $l$ , а длину дуги окружности через  $L$ .

Начнем с длины прямой и дадим ей приращение  $\delta l$ , не меняя всех остальных длин и радиусов.

Очевидно, что искомое  $\frac{\partial h_j}{\partial l} = 0$  для всех нормалей, расположенных ближе к началу сплайна, чем конец варьируемой прямой.

Если мы найдем  $\delta h_j$  – смещение точки пересечения  $j$ -й нормали со сплайном вдоль этой нормали,

вызванное изменением  $\delta l$  при неизменных значениях всех прочих переменных, то предельным переходом в  $\delta h_j / \delta l$  при  $\delta l \rightarrow 0$  получим нужную производную, не имея аналитического выражения для функции  $h_j(l)$ .

Увеличение длины прямой на  $\delta l$  при неизменных всех прочих переменных вызывает сдвиг всей последующей за ней части сплайна в направлении этой прямой на  $\delta l$ . Это простейшая вариация сплайна. Если точка пересечения сплайна и  $j$ -й нормали лежит на прямой (рис. 3), то

$$\frac{\partial h_j}{\partial l} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\gamma_j - \beta)}, \quad (11)$$

где  $\beta$  – угол этой прямой (элемент сплайна АВ на рис. 3) с осью  $OX$ ,  $\alpha$  – угол варьируемой прямой с осью  $OX$  (он задает направление сдвига) и  $\gamma_j$  – угол нормали ( $C_0C_1$  на рис. 3) с осью  $OX$ . На рис. 3 точка  $C$  – исходное положение точки пересечения нормали и сплайна, ему соответствует значение промежуточной переменной  $h_j$ . При сдвиге в направлении, определяемом углом  $\alpha$  на  $\delta l$ , АВ переходит в  $A_1B_1$ , точка  $C$  – в  $C_2$ , а точкой пересечения нормали со сплайном станет  $C_1$ . Смещение  $h_j$  получает приращение  $\delta h_j = CC_1$ .

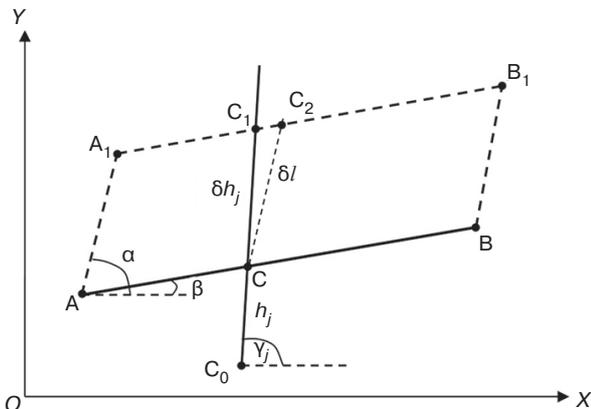


Рис. 3. Вычисление частных производных при изменении длины прямой

Формула (11) следует из теоремы синусов, если ее применить к треугольнику  $C_1CC_2$ . В этой формуле  $\sin(\gamma_j - \beta) \neq 0$ , т.к. нормаль к исходной трассе в точке  $C$  и нормаль к сплайну, т.е. к прямой АВ, близки между собой, т.е.  $\gamma_j - \beta \approx \pi/2$ . При  $\alpha = \beta$  направление сдвига совпадает с направлением прямой и поэтому  $\delta h_j = 0$ . Формула (11) верна и при  $\alpha > \pi$ .

Если точка пересечения сплайна и нормали лежит не на прямой, а на дуге окружности, то  $\beta$  – угол с осью  $OX$  касательной к дуге окружности в точке ее пересечения с нормалью, а формула (11) остается без изменений.

Рассмотрим влияние приращения длины дуги окружности на  $\delta L$  при неизменных значениях всех

остальных переменных. При этом участок сплайна от начала до  $L$  включительно не изменяется, а на оставшейся части происходит сдвиг на  $\delta L$  в направлении, составляющем с осью  $OX$  угол  $\alpha$ , и поворот на угол  $\delta\alpha$  всего следующего участка плана трассы. Здесь  $\alpha$  – угол касательной в конце дуги окружности с осью  $OX$ , а  $\delta\alpha$  – его приращение при изменении длины дуги на  $\delta L$ . Центр поворота находится в конце варьируемой дуги.

Влияние сдвига учитывается по формуле (11).

Рассмотрим теперь поворот участка плана трассы на угол  $\delta\alpha$ , вызванный удлинением  $\delta L$ . Поскольку  $\delta\alpha = \delta L/R$ , то достаточно вычислить  $\frac{\partial h_j}{\partial \alpha}$ .

Для вычисления  $\frac{\partial h_j}{\partial \alpha}$  нужно по координатам конца дуги (центр поворота, точка А на рис. 4) и точки пересечения элемента сплайна (отрезка прямой или касательной к окружности) с нормалью (точка С, рис. 4) вычислить радиус поворота  $S$ .

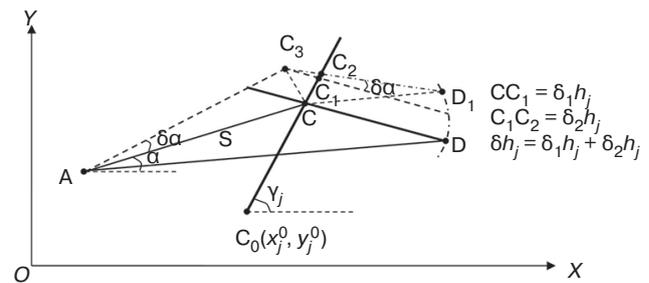


Рис. 4. Вычисление частных производных при повороте

Положение прямой CD после поворота можно найти двумя способами. Сначала поворот AC на угол  $\delta\alpha$  – получим точку  $C_3$ . Затем поворот AD на угол  $\delta\alpha$  – получим точку  $D_1$ . Пересечение прямой  $C_3D_1$  с нормалью дает искомое  $\delta h_j = CC_2$ . Но мы не можем выразить  $CC_2$  аналитически через известные углы и координаты.

Можно выполнить параллельный сдвиг CD по направлению  $CC_3$  (получим точку  $C_1$  на пересечении с нормалью), а затем поворот с центром в  $C_3$  на угол  $\delta\alpha$ . Получим те же точки  $D_1$ , а затем  $C_2$ .

Приращение  $\delta h_j$  представим в виде суммы  $\delta h_j = \delta_1 h_j + \delta_2 h_j$ . Приращение  $\delta_1 h_j = CC_1$  вызвано поворотом точки  $C$  вокруг точки А (она переходит в точку  $C_3$ ) и параллельным смещением в направлении  $CC_3$ . Поскольку мы хотим вычислить частные производные, то при малых углах поворота длины хорды, дуги и касательной являются величинами одного порядка, поэтому принимаем  $CC_3 = S\delta\alpha$ . Величины  $CC_3$ ,  $CC_1$  и  $C_1C_3$  имеют порядок  $\delta\alpha$ , а приращение  $\delta_2 h_j = C_1C_2$  вызвано поворотом вокруг точки  $C_3$  радиусом, имеющим первый порядок, на угол  $\delta\alpha$ .

и, следовательно, имеет более высокий порядок малости, чем  $\delta_1 h_j$ . Поэтому точка  $C_2$  вообще не нужна.

Приращение  $\delta_1 h_j$  вычисляем, как и ранее, в соответствии с (11), т.е. учитываем сдвиг на величину  $S\delta\alpha$  в направлении по нормали к АС, которое составляет с осью  $OX$  угол  $\alpha + \pi/2$ .

По формуле (11):

$$\delta_1 h_j = \frac{S\delta\alpha \sin(\pi/2 + \alpha - \beta)}{\sin(\gamma_j - \beta)},$$

где  $\beta$  – угол смещаемой прямой  $CD$  с осью  $OX$ .

Отсюда 
$$\frac{\delta_1 h_j}{\delta\alpha} = \frac{S \cos(\alpha - \beta)}{\sin(\gamma_j - \beta)}.$$

Обозначив координаты центра вращения через  $x_A, y_A$  и точки пересечения с нормалью – через  $x_C, y_C$ , получаем производную

$$\frac{\delta_1 h_j}{\delta\alpha} = \frac{(x_C - x_A) \cos \beta + (y_C - y_A) \sin \beta}{\sin(\gamma_j - \beta)}. \quad (12)$$

Как и ранее,  $\beta$  – угол с осью  $OX$  касательной к сплайну в точке пересечения с  $j$ -й нормалью,  $\gamma_j$  – угол этой нормали с осью  $OX$ .

Здесь выражение  $S \cos(\alpha - \beta)$  заменено на  $(x_C - x_A) \cos \beta + (y_C - y_A) \sin \beta$ .

С учетом сдвига по касательной (11) и поворота (12), который сводится к сдвигу на  $S\delta\alpha$ , для искомой производной смещения  $h_j$  по длине дуги окружности  $L_i^k$  с учетом  $\delta\alpha = \delta L_i^k / R_i$ , где  $R_i$  – радиус варьируемой круговой кривой, получаем формулу:

$$\frac{\partial h_j}{\partial L_i^k} = \frac{\sin(\alpha - \beta) + \frac{(x_C - x_A) \cos \beta + (y_C - y_A) \sin \beta}{R_i}}{\sin(\gamma_j - \beta)}. \quad (13)$$

Формулы (11)–(13) можно применять, если нормаль пересекается не с прямой, а с дугой окружности. В этом случае  $\beta$  – угол с осью  $OX$  касательной к окружности в точке пересечения.

Переходим к вычислению частных производных промежуточных переменных по радиусам.

На рис. 5 АС – исходное положение дуги, АС<sub>1</sub> – положение этой дуги при изменении радиуса, но с сохранением начальной точки А( $x_A, y_A$ ),  $\alpha$  – угла касательной с осью  $OX$  и длины  $L$  всей дуги АС. Вместо точки В на нормали получаем точку В<sub>1</sub>. Смещение по нормали  $\partial h_j = BB_1$ , но новое положение точки В – это не В<sub>1</sub> (рис. 3 и 5), т.к. точка В уходит с нормали.

Зная координаты точек А( $x_A, y_A$ ) и В( $x_B, y_B$ ), углы касательной в этих точках с осью  $OX$  ( $\alpha$  и  $\beta$  соответственно),  $L$  – длину дуги АВ и угол  $\gamma$  нормали с осью  $OX$ , вычислим производную смещения по

нормали  $\partial h / \partial R$  (индексы нормали и кривой опускаем, т.к. точка В – произвольная точка произвольной дуги).

$$x_B - x_A = R(\sin \beta - \sin \alpha).$$

Здесь  $x_A$  не изменяется, а  $x_B$  и  $\beta$  зависят от  $R$ . Отсюда следует

$$\frac{\partial x_B}{\partial R} = \sin \beta - \sin \alpha + R \cos \beta \cdot \frac{\partial \beta}{\partial R}.$$

Далее  $\beta - \alpha = \frac{L}{R}$ .  $L$  и  $\alpha$  фиксированы и  $\frac{\partial \beta}{\partial R} = -\frac{L}{R^2}$ .

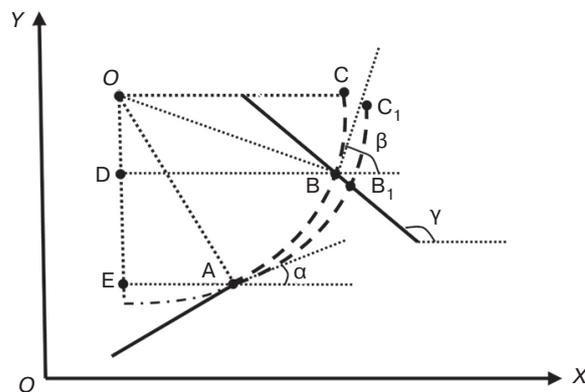


Рис. 5. Вычисление производных смещений внутри дуги при изменении радиуса

В итоге получаем

$$\frac{\partial x_B}{\partial R} = \sin \beta - \sin \alpha - (\beta - \alpha) \cos \beta. \quad (14)$$

Аналогично получим

$$\frac{\partial y_B}{\partial R} = \cos \alpha - \cos \beta - (\beta - \alpha) \sin \beta. \quad (15)$$

Приращение радиуса  $\delta R$  дает линейную часть приращения координат точки В

$$\delta x_B = \frac{\partial x_B}{\partial R} \delta R \text{ и } \delta y_B = \frac{\partial y_B}{\partial R} \delta R. \quad (16)$$

Смещение по нормали  $\delta h_j$  получаем как результат сдвига касательной в точке В по оси  $OX$  на  $\delta x_B$ , а затем по оси  $OY$  – на  $\delta y_B$ . В первом случае направление сдвига в формуле (11) угол  $\alpha = 0$ , а во втором  $\alpha = \pi/2$ .

В итоге для точек внутри кривой получаем линейную часть смещения по нормали:

$$\delta h_j = \frac{\delta y_B \cos \beta - \delta x_B \sin \beta}{\sin(\gamma - \beta)}.$$

Используя (14)–(16), получаем производную

$$\frac{\delta h_j}{\delta R} = \frac{(\cos \alpha - \cos \beta - (\beta - \alpha) \sin \beta) \cos \beta}{\sin(\gamma - \beta)} - \frac{(\sin \beta - \sin \alpha - (\beta - \alpha) \cos \beta) \sin \beta}{\sin(\gamma - \beta)} = \frac{\cos(\beta - \alpha) - 1}{\sin(\gamma - \beta)}. \quad (17)$$

Применяя формулы (14), (15) к конечной точке кривой С, получим линейную часть приращений ее координат:

$$\delta x_C = \left( \sin \beta - \sin \alpha - \frac{L}{R} \cos \beta \right) \delta R,$$

$$\delta y_C = \left( \cos \alpha - \cos \beta - \frac{L}{R} \sin \beta \right) \delta R.$$

Здесь и далее  $\alpha$  и  $\beta$  – углы касательных в начальной и конечной точках дуги с осью  $OX$ .

Такие же приращения получают и все последующие точки сплайна (сдвиг в том же направлении). Поэтому для линейной части смещения по нормали точки пересечения со сплайном получаем

$$\delta_1 h_j = \frac{\delta y_C \cos \beta_k - \delta x_C \sin \beta_k}{\sin(\gamma_j - \beta_k)} \delta R. \quad (18)$$

Здесь и далее  $\beta_k$  – угол прямой или касательной к окружности с осью  $OX$  в точке пересечения  $j$ -й нормали,  $\gamma_j$  – угол нормали с осью  $OX$ .

Формула (18) после упрощений примет вид:

$$\delta_1 h_j = \frac{\cos(\beta_k - \alpha) - \cos(\beta_k - \beta) + (\beta - \alpha) \sin(\beta_k - \beta)}{\sin(\gamma_j - \beta_k)} \delta R. \quad (19)$$

Это только следствие сдвига из-за изменения радиуса. Нужно учесть также поворот касательной в конце дуги (точка С на рис. 5) при изменении радиуса и, как следствие, поворот всех последующих точек сплайна с центром в конце дуги (точка С на рис. 5) на угол  $\delta\varphi = -\frac{L}{R^2} \delta R$ , где  $L$  – длина дуги АС.

Как и при учете поворота из-за изменения длины кривой (12) линейная часть смещения  $\delta_2 h_j$  учитывается сдвигом по нормали к прямой (или касательной с окружностью) в точке D пересечения с нормалью на  $S\delta\varphi$ . Здесь  $S = CD$  – радиус поворота.

В соответствии с (12)  $\frac{\delta_2 h_j}{\delta\varphi} = \frac{S \cos(\varphi - \beta_k)}{\sin(\gamma_j - \beta_k)}$ . Здесь углы с осью  $OX$ :  $\varphi$  – прямой CD,  $\beta_k$  – прямой (или касательной),  $\gamma_j$  – пересекаемой нормали.

В итоге получаем

$$\frac{\delta_2 h_j}{\delta\varphi} = \frac{(x_D - x_C) \cos \beta_k + (y_D - y_C) \sin \beta_k}{\sin(\gamma_j - \beta_k)}.$$

Далее:

$$\delta_2 h_j = -\frac{(x_D - x_C) \cos \beta_k + (y_D - y_C) \sin \beta_k}{\sin(\gamma_j - \beta_k) R^2} L \delta R. \quad (20)$$

С учетом (19) и (20) для производной смещения по нормали по радиусу получаем

$$\frac{\partial h_j}{\partial R} = \frac{\cos(\beta_k - \alpha) - \cos(\beta_k - \beta) + (\beta - \alpha) \sin(\beta_k - \beta)}{\sin(\gamma_j - \beta_k)} - \frac{(x_D - x_C) \cos \beta_k + (y_D - y_C) \sin \beta_k}{\sin(\gamma_j - \beta_k) R^2} L. \quad (21)$$

Формулы (13), (17) и (21) можно применять к любой нормали и ко всем элементам сплайна, предшествующим ей. Это означает, что можно вычислить градиент целевой функции (1), не имея ее аналитического выражения через основные переменные.

#### 4. ПОСТРОЕНИЕ И ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОЙ ФУНКЦИИ ЛАГРАНЖА

Рассмотрим вопрос учета ограничений (7), (8) на промежуточные переменные.

Ограничения (7), (8) относительно основных переменных нелинейны, и мы не имеем их конкретных выражений. Но умея вычислять производные промежуточных переменных по основным переменным, можно использовать метод штрафных функций [19, 24], т.е. добавить в целевую функцию слагаемое – штраф за нарушение ограничений. Другими словами, вместо исходной целевой функции строится модифицированная функция Лагранжа (МФЛ), которая учитывает как ограничения равенства, так и не равенства.

Существует несколько вариантов метода, отличающихся видом штрафной функции и методами изменения ее параметров [18, 19, 23, 24].

При решении практических задач хорошие результаты были получены по алгоритму Пауэлла (Powell M.J.D.), в котором для поиска минимума исходной целевой функции  $F(\mathbf{x})$  при ограничениях  $c_j(\mathbf{x}) \leq 0$ ,  $j = \overline{1, m}$  используется функция

$$\Phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\theta}) = F(\mathbf{x}) + 1/2 \sum_1^m \sigma_j \left( c_j(\mathbf{x}) + \theta_j \right)_+^2.$$

Здесь  $\mathbf{x}$  – вектор неизвестных,  $F(\mathbf{x})$  – исходная целевая функция. В нашей задаче компоненты вектора  $\mathbf{x}$  – это длины элементов сплайна и радиусы (основные переменные),  $c_j(\mathbf{x})$  – неявные функции от  $\mathbf{x}$ , но от промежуточных переменных  $\mathbf{h}$  они зависят явно (7), (8), и мы умеем вычислять их частные производные. Ограничения (7), (8) всегда можно представить в виде односторонних неравенств.

Векторы  $\boldsymbol{\sigma}$  и  $\boldsymbol{\theta}$  имеют по  $m$  компонент и представляют собой набор параметров штрафной функции, по два параметра на каждое ограничение. Их начальные значения задаются пользователем. Знак «+» означает, что в сумму включаются только те слагаемые, для которых  $c_j(\mathbf{x}) + \theta_j > 0$ . Здесь  $\theta_j > 0$  – «запас» в  $j$ -м ограничении, т.е. штрафуются не только настоящее нарушение при  $c_j(\mathbf{x}) > 0$ , но и  $c_j(\mathbf{x}) > -\theta_j$ .

Если в системе ограничений были равенства, то соответствующие им слагаемые всегда присутствуют в сумме. Если взять  $\theta_j = 0$  и  $\sigma_j = k_n$  ( $k_n$  задается пользователем),  $j = \overline{1, m}$ , штрафная функция проще, но ее вторые производные по  $x_j$  разрывны на границе допустимой области, причем разрывы тем больше, чем больше  $k_n$ , который приходится увеличивать в каждом новом итерационном цикле минимизации, чтобы уменьшить невязки в ограничениях. Иное дело, когда  $\sigma_j$  постоянны, а варьируются только  $\theta_j$ . В этом случае поверхности разрывов вторых производных удалены от точек минимума, определяемых при решении задач в каждом цикле оптимизации [19].

Начальные значения параметров  $\theta_j > 0$  и  $\sigma_j > 0$  следует выбирать, ориентируясь на смысл и важность соответствующих ограничений и величины невязок в ограничениях в точке начального приближения. В нашей задаче решение начиналось с  $\theta_j = 0.1$  и  $\sigma_j = 1$  для всех  $j$ .

Затем решалась задача на минимум  $\Phi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\theta})$  при простых ограничениях на основные переменные (2), (3), (5), (6) и проверялись ограничения (7), (8). Если были нарушения, то параметры  $\boldsymbol{\sigma}$  и  $\boldsymbol{\theta}$  менялись по следующему правилу: если  $j$ -е ограничение выполнено с «запасом», т.е.  $c_j(\mathbf{x}) > -\theta_j$ , то новое значение  $\theta_j^1 = 0$ , а если нет, то  $\theta_j^1 = \theta_j + c_j(\mathbf{x})$ . Такая замена была проведена для всех ограничений. Для пересчета  $\sigma_j$  применялось другое правило: если в  $j$ -м ограничении в результате решения задачи невязка уменьшается быстро, то  $\sigma_j$  не меняется, а если медленно, то увеличивается. Использовались такие константы: если невязка уменьшилась меньше, чем в 4 раза, то соответствующее  $\sigma_j$  умножается на 10, и  $\theta_j$  делится на 2.

После пересчета параметров процесс повторяется, т.е. делается очередная внешняя итерация. Счет прекращается в следующих случаях:

1. Получено решение с приемлемыми невязками.

При этом можно для контроля сделать еще одну

внешнюю итерацию и убедиться, что решение практически не изменилось.

2. После исчерпания заданного лимита внешних итераций решение не получено. При этом есть все основания усомниться в совместности системы ограничений и, следовательно, в существовании решения исходной задачи. Такие ситуации возникали при задании фиксированных точек, через которые невозможно пройти с заданными минимальными значениями длин элементов и радиусов.

## 5. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Начальное приближение искомого сплайна, полученное с помощью динамического программирования, используется для расчета параметров задачи оптимизации сплайна. Для этого выполняются следующие действия:

1. Последовательно строятся внешние нормали к исходной ломаной в исходных точках и запоминаются их углы с осью  $OX$ .
2. Определяются и запоминаются точки пересечения нормалей со сплайном. При этом при больших углах поворота одна нормаль может пересекаться со сплайном в двух точках. В таком случае выбирается точка пересечения, ближайшая к исходной точке.
3. Вычисляются значения всех промежуточных переменных.
4. В каждой точке пересечения нормалей с элементом сплайна (прямой или окружности) вычисляется и запоминается угол с осью  $OX$  прямой или касательной к окружности.

Полученных в результате расчетов данных достаточно для расчета градиента МФЛ.

Простой вид ограничений по основным переменным позволяет использовать различные градиентные методы и даже простой метод покоординатного спуска [18, 19]. Так, при использовании метода проекции градиента компоненты градиента, соответствующие переменным, принимающим предельные значения (так называемый активный набор), обнуляются, и применяется стандартный алгоритм [19]. Экспериментально установлено, что при наличии штрафных функций такой метод не гарантирует получение точных решений.

Известно, что наиболее эффективными являются методы второго порядка [19], но для их применения нужно обращать матрицу вторых производных (матрицу Гессе), которую в нашей задаче вычислить не удастся. Поэтому используется метод переменной метрики, так называемая DFP (Дэвидон – Флетчер – Пауэлл) оптимизация. Смысл метода в том, чтобы получить в процессе спуска все более точные

приближения матриц  $\mathbf{H}_i$  к обратной матрице Гессе  $\mathbf{G}^{-1}$ , используя градиенты целевой функции в уже пройденных итерационных точках [23].

В соответствии с [23, 24], если обозначить:  $\mathbf{x}_i$  – итерационную точку,  $\mathbf{g}_i$  – градиент,  $\mathbf{p}_i$  – направление спуска на  $i$ -й итерации и  $\mathbf{z}_i = \mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i$ ,  $\mathbf{y}_i = \mathbf{g}_{i+1} - \mathbf{g}_i$ , то  $\mathbf{H}_0 = \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{p}_i = -\mathbf{H}_i \mathbf{g}_i$ . При отсутствии ограничений:

$$\mathbf{H}_{i+1} = \mathbf{H}_i + \mathbf{z}_i \mathbf{z}_i^T / (\mathbf{z}_i, \mathbf{y}_i) - \mathbf{H}_i \mathbf{y}_i \mathbf{y}_i^T \mathbf{H}_i / (\mathbf{H}_i \mathbf{y}_i, \mathbf{y}_i^T). \quad (22)$$

Эта формула применима для задач без ограничений. Но в нашей задаче остались ограничения на основные переменные (2), (3), (5), (6). Если в начальном приближении есть предельные длины или радиусы, то нельзя начинать с единичной матрицы  $\mathbf{E}$ . Вместо нее должна быть матрица проектирования, которая в нашей задаче строится просто: в  $\mathbf{E}$  вместо 1 ставится 0 в тех строках, номера которых совпадают с номерами переменных, принявших предельные значения (активный набор).

При изменении набора активных ограничений матрицу  $\mathbf{H}_i$  нужно модифицировать [24], прежде чем вычислять направление спуска. Это происходит как при включении ограничения в активный набор, так и при исключении ограничения из активного набора. Простой вид ограничений позволил существенно упростить соответствующие формулы из [24] за счет отмеченного простого способа построения матрицы проектирования.

DFP оптимизация хорошо работает (в смысле приближения к обратной матрице Гессе) для точек, близких к экстремуму [19, 23, 24]. Поэтому использовалась комбинация методов: простой метод проекции градиента (дает спуск в «овраг») и далее – DFP оптимизация.

## 6. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ЗАДАЧИ ДАЛЬНЕЙШИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Основной результат работы состоит в том, что задача оптимизации последовательности точек на плоскости сплайном, не являющимся однозначной функцией, решена не эвристическими, а математически корректными методами (динамическое и нелинейное программирование). Многообразие методов нелинейного программирования не позволяет утверждать, что в расчетах использован наиболее эффективный из них. Интерес представляет использование «овражных» алгоритмов [23]. Как утверждает в [23], «овражный» метод сопряженных градиентов, в котором  $\mathbf{p}_0 = -\mathbf{g}_0$ ,  $\mathbf{p}_{i+1} = -\mathbf{g}_{i+1} + b_i \mathbf{p}_i$ ,  $b_i = (\mathbf{g}_{i+1} - \mathbf{g}_i, \mathbf{g}_i) / (\mathbf{p}_i, \mathbf{g}_i)$  имеет преимущества при неточной одномерной минимизации и при изгибах «оврага».

В нашей задаче вместо градиента нужно использовать его проекцию и начинать с обновления, т.е. с шага по проекции антиградиента при изменении активного набора.

Есть и более сложные алгоритмы, чем DFP. Например, метод Бройдена, Флетчера, Голдфарба и Шанно [23], в котором в формуле (22) для вычисления матрицы  $\mathbf{H}$  добавлено слагаемое  $\mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T$ , где вектор  $\mathbf{v}_i = (\mathbf{y}_i, \mathbf{H}_i)^{1/2} [\mathbf{z}_i / (\mathbf{z}_i, \mathbf{y}_i) - \mathbf{H}_i \mathbf{y}_i / (\mathbf{y}_i, \mathbf{H}_i \mathbf{y}_i)]$ .

Целесообразность использования более сложных методов можно установить только экспериментально.

Необходимо отметить, что градиентные методы дают локальный минимум целевой функции. Поэтому для получения начального приближения в нашей задаче особенно важно применение динамического программирования (возможно с повторением расчетов при уменьшении дискретов поиска), т.к. динамическое программирование дает глобальный минимум, если не считать влияние дискретности.

Для борьбы с локальными минимумами использовалась идея спуска из разных точек. После окончания процесса оптимизации выполняется проверка полученного решения. Процесс начинается заново так, как если бы полученное решение было начальным приближением. Все коэффициенты МФЛ принимают исходные значения. На первых итерациях за счет нарушения ограничений по промежуточным переменным их сумма квадратов принимает меньшее значение, но затем меняются коэффициенты МФЛ и исчезают нарушения ограничений. В экспериментальных расчетах в итоге получалось практически то же решение. Конечно, это не гарантия достижения глобального минимума, но это реальный шанс уйти из точки локального минимума. Для выбора наиболее эффективного метода нелинейного программирования при решении рассматриваемой задачи нужны дополнительные экспериментальные исследования.

Основное направление дальнейших исследований состоит в обобщении результатов, полученных для сплайна с окружностями, на более сложную задачу аппроксимации сплайном с клотоидами. Прежде всего предстоит получить формулы для вычисления производных при отсутствии аналитического выражения целевой функции через параметры клотоиды дополнительно к изложенным в настоящей статье формулам для прямых и дуг окружностей.

**Вклад авторов.** Все авторы в равной степени внесли свой вклад в исследовательскую работу.

**Authors' contribution.** All authors equally contributed to the research work.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

**REFERENCES**

1. Карпов Д.А., Струченков В.И. Двухэтапная сплайн-аппроксимация в компьютерном проектировании трасс линейных сооружений. *Russ. Technol. J.* 2021;9(5): 45–56. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2021-9-5-45-56>
2. Карпов Д.А., Струченков В.И. Сплайн-аппроксимация многозначных функций в проектировании трасс линейных сооружений. *Russ. Technol. J.* 2022;10(4):65–74. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2022-10-4-65-74>
3. Li W., Pu H., Schonfeld P., et al. A method for automatically recreating the horizontal alignment geometry of existing railways. *Comput.-Aided Civ. Inf.* 2019;34(1):71–94. <https://doi.org/10.1111/mice.12392>
4. Jha M.K., McCall C., Schonfeld P. Using GIS, genetic algorithms, and visualization in highway development. *Comput.-Aided Civ. Inf.* 2001;16(6):399–414. <https://doi.org/10.1111/0885-9507.00242>
5. Jha M.K., Schonfeld P. A highway alignment optimization model using geographic information systems. *Transportation Research Part A: Policy and Practice.* 2004;38(6):455–481. <https://doi.org/10.1016/j.tra.2004.04.001>
6. Jong J.C., Jha M.K., Schonfeld P. Preliminary highway design with genetic algorithms and geographic information systems. *Comput.-Aided Civ. Inf.* 2000;15(4):261–271. <https://doi.org/10.1111/0885-9507.00190>
7. Kang M.W., Schonfeld P., Yang N. Prescreening and repairing in a genetic algorithm for highway alignment optimization. *Comput.-Aided Civ. Inf.* 2009;24(2): 109–119. <https://doi.org/10.1111/j.1467-8667.2008.00574.x>
8. Pushak Y., Hare W., Lucet Y. Multiple-path selection for new highway alignments using discrete algorithms. *Eur. J. Oper. Res.* 2016;248(2):415–27. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2015.07.039>
9. Sarma K.C., Adeli H. Bilevel parallel genetic algorithms for optimization of large steel structures. *Comput.-Aided Civ. Inf.* 2001;16(5):295–304. <https://doi.org/10.1111/0885-9507.00234>
10. Shafahi Y., Bagherian M. A customized particle swarm method to solve highway alignment optimization problem. *Comput.-Aided Civ. Inf.* 2013;28(1):52–67. <https://doi.org/10.1111/j.1467-8667.2012.00769.x>
11. Bosurgi G., D’Andrea A. A polynomial parametric curve (PPC-curve) for the design of horizontal geometry of highways. *Comput.-Aided Civ. Inf.* 2012;27(4):303–312. <https://doi.org/10.1111/j.1467-8667.2011.00750.x>
12. Cerf R. The quasispecies regime for the simple genetic algorithm with roulette wheel selection. *Adv. Appl. Probability.* 2017;49(3):903–926. <https://doi.org/10.1017/apr.2017.26>
13. Бородакий Ю.В., Загребаев А.М., Крицына Н.А., Кулябичев Ю.П., Шумилов Ю.Ю. *Нелинейное программирование в современных задачах оптимизации.* М.: НИЯУ МИФИ; 2011. 244 с. ISBN 987-5-7262-1451-1
14. Bazaraa M., Sherali Y., Shetty C. *Nonlinear programming. Theory and algorithms.* 3rd ed. Hoboken, NJ: Wiley; 2006. 872 p. ISBN 978-0-471-48600-8
15. Betts J.T. *Practical methods for optimal control using nonlinear programming.* Ser. Advances in Design and Control. Philadelphia: SIAM; 2001. 190 p.
1. Karpov D.A., Struchenkov V.I. Two-stage spline approximation in linear structure routing. *Russ. Technol. J.* 2021;9(5):45–56 (in Russ.). <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2021-9-5-45-56>
2. Karpov D.A., Struchenkov V.I. Spline approximation of multivalued function in leaner structures routing. *Russ. Technol. J.* 2022;10(4):65–74 (in Russ.). <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2022-10-4-65-74>
3. Li W., Pu H., Schonfeld P., et al. A method for automatically recreating the horizontal alignment geometry of existing railways. *Comput.-Aided Civ. Inf.* 2019;34(1):71–94. <https://doi.org/10.1111/mice.12392>
4. Jha M.K., McCall C., Schonfeld P. Using GIS, genetic algorithms, and visualization in highway development. *Comput.-Aided Civ. Inf.* 2001;16(6):399–414. <https://doi.org/10.1111/0885-9507.00242>
5. Jha M.K., Schonfeld P. A highway alignment optimization model using geographic information systems. *Transportation Research Part A: Policy and Practice.* 2004;38(6):455–481. <https://doi.org/10.1016/j.tra.2004.04.001>
6. Jong J.C., Jha M.K., Schonfeld P. Preliminary highway design with genetic algorithms and geographic information systems. *Comput.-Aided Civ. Inf.* 2000;15(4):261–271. <https://doi.org/10.1111/0885-9507.00190>
7. Kang M.W., Schonfeld P., Yang N. Prescreening and repairing in a genetic algorithm for highway alignment optimization. *Comput.-Aided Civ. Inf.* 2009;24(2): 109–119. <https://doi.org/10.1111/j.1467-8667.2008.00574.x>
8. Pushak Y., Hare W., Lucet Y. Multiple-path selection for new highway alignments using discrete algorithms. *Eur. J. Oper. Res.* 2016;248(2):415–27. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2015.07.039>
9. Sarma K.C., Adeli H. Bilevel parallel genetic algorithms for optimization of large steel structures. *Comput.-Aided Civ. Inf.* 2001;16(5):295–304. <https://doi.org/10.1111/0885-9507.00234>
10. Shafahi Y., Bagherian M. A customized particle swarm method to solve highway alignment optimization problem. *Comput.-Aided Civ. Inf.* 2013;28(1):52–67. <https://doi.org/10.1111/j.1467-8667.2012.00769.x>
11. Bosurgi G., D’Andrea A. A polynomial parametric curve (PPC-curve) for the design of horizontal geometry of highways. *Comput.-Aided Civ. Inf.* 2012;27(4):303–312. <https://doi.org/10.1111/j.1467-8667.2011.00750.x>
12. Cerf R. The quasispecies regime for the simple genetic algorithm with roulette wheel selection. *Adv. Appl. Probability.* 2017;49(3):903–926. <https://doi.org/10.1017/apr.2017.26>
13. Borodakii Yu.V., Zagrebaev A.M., Kritsyna N.A., Kulyabichev Yu.P., Shumilov Yu.Yu. *Nelineinoe programmirovaniye v sovremennykh zadachakh optimizatsii (Nonlinear Programming in Modern Optimization Problem).* Moscow: NIYAU MEFPI; 2008. 244 p. (in Russ.).
14. Bazaraa M., Sherali Y., Shetty C. *Nonlinear programming. Theory and algorithms.* 3rd ed. Hoboken, NJ: Wiley; 2006. 872 p. ISBN 978-0-471-48600-8

16. Lee J., Leyffer S. *Mixed integer nonlinear programming*. NY: Springer; 2011. 707 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-1927-3>
17. Sun W., Yuan Y.-X. *Optimization theory and methods. Nonlinear programming*. NY: Springer; 2006. 688 p. <https://doi.org/10.1007/b106451>
18. Струченков В.И. *Методы оптимизации трасс в САПР линейных сооружений*. М.: СОЛОН-Пресс; 2015. 271 с. ISBN 978-5-91359-139-5
19. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. *Практическая оптимизация*: пер. с англ. М.: Мир; 1985. 509 с.
20. Audet C., Hare W. *Derivative-free and blackbox optimization*. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Springer; 2017. 302 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-68913-5>
21. Кохендерфер М.Д., Уилер Т.А. *Алгоритмы оптимизации*. М.: Вильямс; 2020. 528 с.
22. Черноруцкий И.Г. *Методы оптимизации. Компьютерные технологии*. СПб.: БХВ-Петербург; 2011. 329 с.
23. Ларичев О.И., Горвиц Г.Г. *Методы поиска локальных экстремумов овражных функций*. М.: Наука; 1990. 96 с.
24. Гилл Ф., Мюррей У. *Численные методы условной оптимизации*: пер. с англ. М.: Мир; 1977. 296 с.
15. Betts J.T. *Practical methods for optimal control using nonlinear programming*. Ser. Advances in Design and Control. Philadelphia: SIAM; 2001. 190 p.
16. Lee J., Leyffer S. *Mixed integer nonlinear programming*. NY: Springer; 2011. 707 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-1927-3>
17. Sun W., Yuan Y.-X. *Optimization theory and methods. Nonlinear programming*. NY: Springer; 2006. 688 p. <https://doi.org/10.1007/b106451>
18. Struchenkov V.I. *Metody optimizatsii trass v SAPR lineinykh sooruzhenii (Methods for route optimization in CAD of linear structures)*. Moscow: SOLON-Press; 2014. 271 p. (in Russ.). ISBN 978-5-91359-139-5
19. Gill F., Myurrei U., Rait M. *Prakticheskaya optimizatsiya (Practical Optimization)*: transl. from Engl. Moscow: Mir; 1985. 509 p. (in Russ.). [Gill Ph.E., Murray W., Wright M.H. *Practical Optimization*. London: Academic Press; 1981. 402 p.]
20. Audet C., Hare W. *Derivative-free and blackbox optimization*. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Springer International Publishing; 2017. 302p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-68913-5>
21. Kochenderfer M.D., Uiler T.A. *Algoritmy optimizatsii (Algorithms for Optimization)*. Moscow: Vil'yams; 2020. 528 p. (in Russ.). [Kochenderfer M.D., Wheeler T.A. *Algorithms for Optimization*. London; The MIT Press; 2019. 520 p.]
22. Chernorutskii I.G. *Metody optimizatsii. Komp'yuternye tekhnologii (Methods of optimization. Computer technologies)*. St. Petersburg: BHV-Petersburg; 2011. 329 p. (in Russ.).
23. Larichev O.I., Gorvits G.G. *Metody poiska lokal'nykh ekstremumov ovrazhnykh funktsii (Methods for Finding Local Extrema of Ravine Functions)*. Moscow: Nauka; 1990. 96 p. (in Russ.).
24. Gill F., Myurrei U. *Chislennyye metody uslovnoi optimizatsii (Numerical methods of conditional optimization)*: transl. from Engl. Moscow: Mir; 1977. 296 p. (in Russ.). [Gill Ph.E., Murray W. *Numerical methods for constrained optimization*. London: Academic Press; 1974. 283 p.]

#### Об авторах

**Карпов Дмитрий Анатольевич**, к.т.н., заведующий кафедрой общей информатики Института искусственного интеллекта, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: [karpov@mirea.ru](mailto:karpov@mirea.ru). SPIN-код РИНЦ 2619-7100, <https://orcid.org/0000-0003-3734-7182>

**Струченков Валерий Иванович**, д.т.н., профессор, профессор кафедры общей информатики Института искусственного интеллекта, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: [str1942@mail.ru](mailto:str1942@mail.ru). SPIN-код РИНЦ 4581-4698, <https://orcid.org/0000-0002-9801-7454>

#### About the authors

**Dmitry A. Karpov**, Cand. Sci. (Eng.), Head of the General Informatics Department, Institute of Artificial Intelligence, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: [karpov@mirea.ru](mailto:karpov@mirea.ru). RSCI SPIN-code 2619-7100, <https://orcid.org/0000-0003-3734-7182>

**Valery I. Struchenkov**, Dr. Sci. (Eng.), Professor, General Informatics Department, Institute of Artificial Intelligence, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: [str1942@mail.ru](mailto:str1942@mail.ru). RSCI SPIN-code 4581-4698, <https://orcid.org/0000-0002-9801-7454>