Russian Technological Journal.
2022;10(6):70–77

ISSN 2782-3210 (Print)
ISSN 2500-316X (Online)

Математическое моделирование

Mathematical modeling

УДК 517.63
https://doi.org/10.32362/2500-316X-2022-10-6-70-77

CC BY

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Методы и эффективные алгоритмы решения многомерных интегральных уравнений

А.Б. Самохин

МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, 119454 Россия
@ Автор для переписки, e-mail: absamokhin@yandex.ru

Резюме

Цели. Интегральные уравнения давно и широко используются в математической физике для доказательства теорем существования и единственности решения краевых задач для дифференциальных уравнений. Однако, несмотря на то что интегральные уравнения имеют ряд преимуществ по сравнению с соответствующими краевыми задачами – все краевые условия присутствуют в ядрах уравнений, они практически не использовались для численного решения задач. Это связано с тем, что при дискретизации интегральных уравнений возникают системы уравнений с плотными матрицами, в отличие от разреженных матриц в случае дифференциальных уравнений. В последнее время, в связи с развитием вычислительной техники и методов вычислительной математики, интегральные уравнения начали использоваться при численном решении конкретных задач. В работе предложены два метода численного решения двухмерных и трехмерных интегральных уравнений, описывающих многие важные классы задач математической физики.

Методы. Для дискретизации интегральных уравнений использовался метод коллокации на неравномерной и равномерной сетках. Для численного решения получившихся систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) используются итерационные методы. Для случая равномерной сетки построен эффективный метод умножения матрицы СЛАУ на вектор.

Результаты. Построены соответствующие СЛАУ, описывающие рассматриваемые классы задач. Для решения систем уравнений, полученных с использованием равномерной сетки, предложены эффективные алгоритмы решения, использующие быстрое дискретное преобразование Фурье.

Выводы. СЛАУ с использованием неравномерной сетки имеют преимущество, связанное с хорошим описанием областей сложной конфигурации, но при этом есть существенные ограничения на размерность СЛАУ. При использовании равномерной сетки размерность СЛАУ может быть на несколько порядков больше, однако в этом случае могут возникать трудности с описанием сложной конфигурации области. Выбор того или иного метода зависит от конкретной задачи и имеющихся вычислительных ресурсов. Для многих двухмерных задач может быть предпочтительнее СЛАУ на неравномерной сетке, а для трехмерных задач – предпочтительнее СЛАУ на равномерной сетке.

Ключевые слова: интегральные уравнения, метод коллокации, быстрое преобразование Фурье

• **Поступила:** 14.12.2021 • **Доработана:** 10.01.2022 • **Принята к опубликованию:** 15.09.2022

Для цитирования: Самохин А.Б. Методы и эффективные алгоритмы решения многомерных интегральных уравнений. *Russ. Technol. J.* 2022;10(6):70–77. https://doi.org/10.32362/2500-316X-2022-10-6-70-77

Прозрачность финансовой деятельности: Автор не имеет финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

© А.Б. Самохин, 2022

RESEARCH ARTICLE

Methods and effective algorithms for solving multidimensional integral equations

Alexander B. Samokhin

MIREA – Russian Technological University, Moscow, 119454 Russia
@ Corresponding author, e-mail: absamokhin@yandex.ru

Abstract
Objectives. Integral equations have long been used in mathematical physics to demonstrate existence and uniqueness theorems for solving boundary value problems for differential equations. However, despite integral equations have a number of advantages in comparison with corresponding boundary value problems where boundary conditions are present in the kernels of equations, they are rarely used for obtaining numerical solutions of problems due to the presence of equations with dense matrices that arise that when discretizing integral equations, as opposed to sparse matrices in the case of differential equations. Recently, due to the development of computer technology and methods of computational mathematics, integral equations have been used for the numerical solution of specific problems. In the present work, two methods for numerical solution of two-dimensional and three-dimensional integral equations are proposed for describing several significant classes of problems in mathematical physics.
Methods. The method of collocation on non-uniform and uniform grids is used to discretize integral equations. To obtain a numerical solution of the resulting systems of linear algebraic equations (SLAEs), iterative methods are used. In the case of a uniform grid, an efficient method for multiplying the SLAE matrix by vector is created.
Results. Corresponding SLAEs describing the considered classes of problems are set up. Efficient solution algorithms using fast Fourier transforms are proposed for solving systems of equations obtained using a uniform grid.
Conclusions. While SLAEs using a non-uniform grid can be used to describe complex domain configurations, there are significant constraints on the dimensionality of described systems. When using a uniform grid, the dimensionality of SLAEs can be several orders of magnitude higher; however, in this case, it may be difficult to describe the complex configuration of the domain. Selection of the particular method depends on the specific problem and available computational resources. Thus, SLAEs on a non-uniform grid may be preferable for many two-dimensional problems, while systems on a uniform grid may be preferable for three-dimensional problems.

Keywords: integral equations, collocation method, fast Fourier transform

• **Submitted:** 14.12.2021 • **Revised:** 10.01.2022 • **Accepted:** 15.09.2022

For citation: Samokhin A.B. Methods and effective algorithms for solving multidimensional integral equations. *Russ. Technol. J.* 2022;10(6):70–77. https://doi.org/10.32362/2500-316X-2022-10-6-70-77

Financial disclosure: The author has no a financial or property interest in any material or method mentioned.

The author declares no conflicts of interest.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть в евклидовом пространстве E_n, где $n = 2, 3$, задана ограниченная область Q. Это значит, что Q является фигурой на плоскости ($n = 2$) или в пространстве ($n = 3$). Будем рассматривать следующее интегральное уравнение в области Q

$$(1+\alpha\eta(x))u(x)+\int_Q \frac{K(x-y)}{R^m}\eta(y)u(y)dy = u^0(x),\ x\in Q,\ m\le n. \qquad (1)$$

В (1) $R = |x - y|$; $x = (x_1, \ldots, x_n)$; $y = (y_1, \ldots, y_n)$; α, η, K, u^0 – известные функции, причем $K(x - y)$ – дифференцируемая функция координат; u – неизвестная функция.

Уравнение вида (1) описывает многие практически важные классы задач. Опишем некоторые задачи математической физики, которые сводятся к уравнению (1):

- рассеяние акустических волн на прозрачном неоднородном препятствии [1]. В этом случае $m < n$, $\alpha = 0$, а остальные функции, входящие в уравнение (1), являются скалярными. Тогда уравнение является классическим интегральным уравнением Фредгольма 2-го рода;

- рассеяние электромагнитных волн на неоднородном, в общем случае анизотропном, диэлектрическом теле [2, 3]. В этом случае $m = n$ и поэтому интегральный оператор в (1) будет сингулярным; u, u^0 будут векторными функциями; а η и K – тензорными. Величина α определяет внеинтегральный член сингулярного оператора и зависит от формы выделяемой особенности и ее центра. Например, если выделяемая особенность – шар ($n = 3$) или круг ($n = 2$), то $\alpha = 1/n$ [4, 5].

С помощью интегральных уравнений могут быть описаны и другие классы задач математической физики [6–8].

Ниже будем полагать, что уравнение (1) имеет единственное решение в соответствующем функциональном пространстве. Для решения (1), которое описывает реальные задачи, возможно использование только численных методов. Тогда уравнение (1), с использованием метода Галеркина или метода коллокации, аппроксимируется системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с плотной матрицей. При этом, в силу многомерности уравнения, размерность N получающихся систем, как правило, очень велика ($N >> 1000$).

Основными критериями эффективности численного алгоритма являются: число арифметических операций T, которое требуется выполнить для получения решения исходной задачи; объем требуемой памяти компьютера M для реализации алгоритма. При использовании прямого метода Гаусса для решения СЛАУ необходимо выполнить $T \sim N^3$ арифметических операций и хранить в памяти компьютера порядка $M \sim N^2$ чисел. Ясно, что для решения рассматриваемых задач требуются значительные вычислительные ресурсы. Для итерационных методов указанные характеристики алгоритмов оцениваются формулами [9]:

$$T \sim LT_A,\ M \sim M_A, \tag{2}$$

где T_A – число арифметических операций, которое требуется для умножения матрицы СЛАУ на вектор; L – количество итераций, необходимое для получения решения с заданной точностью; M_A – число различных элементов матрицы.

МЕТОД КОЛЛОКАЦИИ

Для аппроксимации интегрального уравнения (1) будем использовать метод коллокации [3, 10, 11]. Отметим важное отличие многомерных задач от одномерных, рассматриваемых на отрезке [*a, b*]. Для таких одномерных задач при численном решении не возникает проблем, связанных с описанием границы области. Для двумерных и, тем более, трехмерных задач возникают определенные сложности при дискретизации интегральных уравнений, определенных в областях сложной формы.

Представим область Q в виде объединения N_Q ячеек $\Omega(i)$, $i = 1, \ldots, N_Q$. Узловые точки в этих ячейках будем выбирать в их центрах, которые определяются формулами [12]:

$$x_l^c = \frac{\int_\Omega x_l dx}{mes\,\Omega},\ l = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

где $dx = dx_1dx_2$ для двумерных задач, $dx = dx_1dx_2dx_3$ для трехмерных задач, $x^c = (x_1^c, \ldots, x_n^c)$ – центр ячейки Ω, а $mes\ \Omega$ – ее объем ($n = 3$) или площадь ($n = 2$).

Если в области Ω определена дифференцируемая функция своих аргументов $f(x)$, то справедливо приближенное равенство:

$$\int_\Omega f(x)dx \approx f(x^c) mes\,\Omega. \tag{4}$$

Выражение (4) будет точным равенством, если $f(x)$ – линейная функция аргументов.

Если в качестве ячеек рассматриваются тетраэдры ($n = 3$) или треугольники ($n = 2$) произвольной формы, то можно достаточно точно описать многие сложные конфигурации области Q. Центр соответствующих ячеек определяется простой формулой:

$$x_l^c = \frac{\sum_{k=1}^{n+1} x_l^{(k)}}{n+1},\ l = 1, \ldots, n, \tag{5}$$

где $(x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$ – декартовы координаты k-й вершины ячейки.

Будем аппроксимировать интегральное уравнение (1) СЛАУ размерности $\sim N_Q$ относительно значений неизвестной функции в узловых точках области Q, находящихся в центрах x^{ci} ячеек $\Omega(i)$, $i = 1, \ldots, N_Q$. Размеры ячеек будем выбирать так, чтобы в пределах ячейки искомая функция слабо менялась. Тогда соответствующую СЛАУ можно представить в следующем виде [3, 13]:

$$\gamma(i)u(i) + \sum_{j=1}^{N_Q} A(i,j)\eta(j)u(j) = u^0(i),$$
$$i = 1, .., N_Q,\ \gamma(i) = 1 + \alpha(i)\eta(i),$$

$$A(i,j)=\int\limits_{\Omega(j)}\frac{K(x^{ci}-y)}{\left|x^{ci}-y\right|^{m}}\,dy,\, i\neq j,\quad A(i,i)=0,$$

$$u(i)=u(x^{ci}),\, u^0(i)=u^0(x^{ci}),\, \eta(i)=\eta(x^{ci}). \qquad (6)$$

Для векторных задач тензор $\alpha(i)$ определяется формой ячейки $\Omega(i)$ и ее центром.

Для вычисления интегралов в (6) можно использовать приближенную формулу (5) либо более точные алгоритмы численного интегрирования. Отметим, что, поскольку узловые точки находятся в центре ячеек, точность аппроксимации интегральных операторов $\sim h^2$, где h – максимальный диаметр ячеек (диаметром ячейки называем максимальное расстояние между точками границы). Для относительно небольших значений $N_Q \leq 10\ 000$ можно решать систему уравнений (6) прямыми или итерационными методами. Ниже изложим эффективные алгоритмы, которые с использованием итерационных методов позволяют решать систему (6) со значительно большей размерностью.

МЕТОД КОЛЛОКАЦИИ НА РАВНОМЕРНОЙ СЕТКЕ

В ядре интегрального уравнении (1) присутствует член, зависящий от разности декартовых координат точек x и y. Однако это обстоятельство никак не использовалось при построении СЛАУ (6). Ниже, используя равномерную сетку и алгоритмы дискретного преобразования Фурье, построим эффективный численный метод решения уравнения (1).

Сначала дадим некоторые вспомогательные формулы, использующие дискретное преобразование Фурье. Рассмотрим комплексную функцию $f(n)$ дискретного аргумента $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Будем полагать, что $f(n)$ – периодическая функция с периодом N, т.е. $f(n \pm N) = f(n)$ для любых n.

Дискретное преобразование Фурье от функции $f(n)$ определяется известной формулой

$$F[f]=f^{\mathrm{F}}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\exp\left(i\frac{2\pi}{N}kn\right)f(n),\; k=\overline{0,N-1}, \quad (7)$$

где, очевидно, Фурье-трансформанта $f^{\mathrm{F}}(k)$ – также периодическая функция с периодом N.

Если мы знаем Фурье-трансформанту $f^{\mathrm{F}}(k)$, то можно восстановить исходную функцию $f(n)$, используя обратное дискретное преобразование Фурье

$$F^{-1}[f^{\mathrm{F}}]=f(n)= \\ =\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\exp\left(-i\frac{2\pi}{N}kn\right)f^{\mathrm{F}}(k),\; n=\overline{0,N-1}. \qquad (8)$$

В общем случае число арифметических операций $T_{\mathrm{F}}(N)$, которое требуется для вычисления дискретного преобразования Фурье, без затрат на вычисление функций вида $\exp\left(i\frac{2\pi}{N}kn\right)$, оценивается формулой

$$T_{\mathrm{F}}(N) \sim N^2. \qquad (9)$$

При использовании алгоритмов быстрого дискретного преобразования Фурье (БПФ), число требуемых арифметических операций оценивается формулой [3]

$$T_{\mathrm{FF}}(N) \sim N\,\mathrm{LOG}(N), \qquad (10)$$

где $\mathrm{LOG}(N)$ – целочисленный логарифм, т.е. сумма всех простых делителей числа N. Если N является степенью двойки, то $T_{\mathrm{FF}}(N) \sim N \log_2(N)$.

Пусть $A(l)$ – периодическая функция дискретного аргумента с периодом N. Рассмотрим суммы следующего вида:

$$v(n)=\sum_{m=0}^{N-1}A(n-m)u(m),\quad n=\overline{0,N-1}. \qquad (11)$$

Суммы (11) возникают при умножении циркулянтных матриц на вектор. Применим дискретное преобразование Фурье с периодом N к обеим частям (11). Несложно показать, что

$$v^{\mathrm{F}}(k)=A^{\mathrm{F}}(k)u^{\mathrm{F}}(k),\quad k=\overline{0,N-1}. \qquad (12)$$

Используя (12) и алгоритмы БПФ, можно эффективно умножать циркулянтные матрицы на вектор. Однако циркулянтные матрицы редко появляются в реальных задачах. Но во многих задачах, в частности, рассматриваемых ниже, требуется вычислять суммы вида (11), в которых функция $A(l)$, $-(N-1) \leq l \leq (N-1)$, является произвольной в указанном диапазоне. Подобные суммы возникают при умножении теплицевых матриц на вектор [14, 15]. Указанная функция $A(l)$ определена в $(2N-1)$ целочисленной точке. Доопределим функцию $A(l)$ нулем в точке $l = N$ и продолжим ее на все целочисленные значения с периодом $2N$. Далее функцию дискретного аргумента $u(m)$, $m = 0, \ldots, N-1$, определим нулем в точках $m = N, \ldots, 2N-1$. Теперь рассмотрим суммы следующего вида:

$$v(n)=\sum_{m=0}^{2N-1}A(n-m)u(m),\; n=\overline{0,2N-1}. \qquad (13)$$

Из вышеизложенного следует, что при $n = 0, \ldots, N-1$ функция $v(n)$ из (13) совпадает со значениями $v(n)$ из (11). Далее для быстрого вычисления сумм (13) будем использовать формулу

$$v^{\mathrm{F}}(k) = A^{\mathrm{F}}(k)u^{\mathrm{F}}(k), \quad k = \overline{0, 2N-1}. \tag{14}$$

При этом в обратном преобразовании Фурье для нас имеют значение только компоненты $v(n),\ n = \overline{0, N-1}.$ Таким образом, из (10) следует, что число арифметических операций для вычисления (11) оценивается формулой

$$T_{\mathrm{A}} \sim 2N\,\mathrm{LOG}(2N). \tag{15}$$

При этом в памяти компьютера необходимо хранить массив с числом элементов

$$M_{\mathrm{A}} \sim 2N. \tag{16}$$

Перейдем к дискретизации интегрального уравнения (1). Сначала будем рассматривать трехмерные задачи. В прямоугольной декартовой системе координат определим параллелепипед П, внутри которого находится область Q. Ребра параллелепипеда параллельны осям координат, а длины ребер равны $N_l h_l$, $l = 1, 2, 3$, где h_l – шаги сетки по декартовым координатам. Тогда параллелепипед П можно представить как объединение ячеек (элементарных параллелепипедов) П(p), $p = (p_1, p_2, p_3)$, $p_l = 0, \ldots, N_l - 1$. Определим область $\tilde{\mathrm{Q}}$ как объединение N_{Q} ячеек, центры которых лежат внутри области Q. Узловые точки, в которых определяются значения функций, будем задавать в центрах ячеек и обозначать как $x(p)$, а значения функций в этих точках – как $f(p)$.

Интегральное уравнение (1) будем аппроксимировать, аналогично (6), используя СЛАУ следующего вида [5]:

$$\gamma(p)u(p) + \sum_{y(q)\in \mathrm{Q}} A(p-q)\eta(q)u(q) = u^0(p),\ x(p) \in \mathrm{Q},$$

$$A(p-q) = \int\limits_{\Pi(q)} \frac{K(x(p)-y)}{|x(p)-y|^m}\,dy,\ p \neq q,\ A(0) = 0,$$

$$\gamma(p) = 1 + \alpha(p)\eta(p). \tag{17}$$

Поскольку узловые точки находятся в центре ячеек, точность аппроксимации интегрального оператора $\sim h^2$, $h = \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}$.

Из (17) следует, что основные вычислительные затраты при умножении матрицы СЛАУ на вектор (выполнение одной итерации) связаны с вычислением сумм вида

$$W(p) = \sum_{y(q)\in \mathrm{Q}} A(p-q)V(q), \quad x(p) \in \mathrm{Q}. \tag{18}$$

Для вычисления $W(p)$ в узловых точках $x(p) \in \mathrm{Q}$ требуется выполнить $\sim N_{\mathrm{Q}}^2$ арифметических операций, где N_{Q} – число узловых точек в области Q. Для уменьшения числа арифметических операций будем применять технику быстрого умножения теплицевых матриц на вектор, изложенную выше.

Доопределим функцию $V(q)$ нулем в точках $x(q)$ параллелепипеда П, не принадлежащих области Q. Рассмотрим следующие суммы:

$$W(p_1, p_2, p_3) =$$
$$= \sum_{q_1=0}^{N_1-1}\sum_{q_2=0}^{N_2-1}\sum_{q_3=0}^{N_3-1} A(p_1-q_1, p_2-q_2, p_3-q_3)V(q_1, q_2, q_3). \tag{19}$$

Очевидно, что при $x(p) \in \mathrm{Q}$ значения $W(p)$ из (18) и (19) совпадают. В (19) матричная функция дискретного аргумента $A(p)$ определена для значений

$$-(N_1-1) \le p_1 \le (N_1-1),\ -(N_2-1) \le p_2 \le (N_2-1),$$
$$-(N_3-1) \le p_3 \le (N_3-1).$$

Обозначим через Π_2 параллелепипед со сторонами $2N_1h_1$, $2N_2h_2$ и $2N_3h_3$. Продолжим матричную функцию дискретного аргумента $A(p_1, p_2, p_3)$ на все целочисленные значения p_1, p_2, p_3, полагая ее периодической по каждой переменной с периодами, соответственно $2N_1$, $2N_2$, $2N_3$. При этом доопределим функцию $A(p_1, p_2, p_3)$ нулем в точках, где она не определена. Далее доопределим функцию дискретного аргумента $V(p_1, p_2, p_3)$ нулем во всех узловых точках Π_2, не принадлежащих П, и продолжим ее на все целочисленные значения p_1, p_2, p_3, полагая ее периодической по каждой переменной с периодами, соответственно $2N_1$, $2N_2$, $2N_3$.

Рассмотрим выражение

$$W(p_1, p_2, p_3) =$$
$$= \sum_{q_1=0}^{2N_1-1}\sum_{q_2=0}^{2N_2-1}\sum_{q_3=0}^{2N_3-1} A(p_1-q_1, p_2-q_2, p_3-q_3)V(q_1, q_2, q_3). \tag{20}$$

Учитывая изложенное, ясно, что при $x(p) \in \mathrm{Q}$ функция $W(p_1, p_2, p_3)$ из (20) совпадает со значениями $W(p_1, p_2, p_3)$ из (18). Ниже через П и Π_2 будем обозначать целочисленные параллелепипеды с числом дискретных аргументов по каждой оси N_1, N_2, N_3 и $2N_1$, $2N_2$, $2N_3$, соответственно. Теперь, проводя дискретное преобразование Фурье по каждой переменной от обеих частей (20), получим следующее равенство:

$$W^{\mathrm{F}}(k_1,k_2,k_3)=A^{\mathrm{F}}\left(k_1,k_2,k_3\right)V^{\mathrm{F}}(k_1,k_2,k_3),\ k\in\Pi_2. \quad (21)$$

Таким образом, для выполнения одной итерации при решении СЛАУ (17) необходимо выполнить прямое преобразование Фурье функции $V(p_1, p_2, p_3)$ по каждой переменной и обратное преобразование функции $W^{\mathrm{F}}(k_1, k_2, k_3)$, т.к. преобразование функции $A(p_1, p_2, p_3)$ выполняется один раз до начала итерационной процедуры. Число арифметических операций и объем требуемой памяти для выполнения одной итерации оценивается формулами

$$T_{\mathrm{A}} \sim 10N\,\mathrm{LOG}(N),\ M_{\mathrm{A}} \sim 10N,\ N=N_1N_2N_3. \quad (22)$$

Для двумерных задач в декартовой системе координат определяется прямоугольник, внутри которого находится область Q. Дальнейшие рассуждения и выкладки с очевидными изменениями повторяют рассмотренный случай. Значения M_{A} и T_{A} оцениваются формулами (22), в которых $N_3 = 1$.

При выборе шагов сетки и значений N_1, N_2, N_3 (трехмерные задачи) или N_1, N_2 (двумерные задачи) необходимо руководствоваться следующими критериями: во-первых, в пределах ячеек искомая функция мало меняется; во-вторых, область $\tilde{\mathrm{Q}}$ состоит из ячеек, центры которых находятся внутри Q и достаточно хорошо описывают Q.

Далее, при использовании алгоритмов БПФ обычно выбираются значения N, кратные степени числа два. Однако при дискретизации интегральных уравнений это во многих случаях может привести к значительным дополнительным вычислительным затратам, поскольку скважность чисел степени 2 весьма велика. Поясним это на примере.

Пусть $N_1=N_2=N_3=N_0$, т.е. П – куб. Предположим, что для аппроксимации решения с требуемой точностью достаточно взять значение $N_0 = 150$. Ближайшие степени двойки – числа 128 и 256. Значение 128 не удовлетворяет требованию аппроксимации решения, поэтому, если мы хотим воспользоваться стандартным БПФ, то необходимо брать значение $N_0 = 256$. Пусть $T(N_0)$ – число арифметических операций, которое требуется для умножения матрицы СЛАУ на вектор, в зависимости от значений N_0. Тогда из (22) имеем

$$\frac{T(256)}{T(150)} \approx \frac{256^3\log_2(256)}{150^3\,\mathrm{LOG}(150)} \approx 2.5.$$

Объем памяти для хранения матрицы СЛАУ при $N_0 = 256$ также в несколько раз больше, чем при $N_0 = 150$. Значит использование БПФ для значения $N_0 = 150$ значительно более эффективно, чем использование БПФ со степенью двойки.

Отметим, что для решения СЛАУ (17) с помощью рассмотренного алгоритма можно использовать только итерационные методы. Это связано с тем, что в основе итерационных алгоритмов лежит умножение матрицы СЛАУ на вектор. Число арифметических операций и объем требуемой памяти для решения СЛАУ (17) оцениваются формулами (2), (22). При этом количество итераций, требуемое для получения решения, как правило, значительно меньше размерности СЛАУ. Таким образом, возможно численное решение интегрального уравнения (1), которое сводится к СЛАУ огромной размерности $N_{\mathrm{Q}} > 10^6$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложены два метода численного решения двухмерных и трехмерных интегральных уравнений, описывающих многие важные классы задач математической физики. Для дискретизации уравнений использовался метод коллокации на неравномерной и равномерной сетках, построены соответствующие СЛАУ. СЛАУ с использованием неравномерной сетки имеют преимущество, связанное с хорошим описанием областей сложной конфигурации. При этом существуют существенные ограничения на размерность СЛАУ. При использовании равномерной сетки размерность СЛАУ может быть на несколько порядков больше. Однако в этом случае могут возникать трудности с описанием сложной конфигурации области. Выбор того или иного метода зависит от конкретной задачи и имеющихся вычислительных ресурсов. На взгляд автора, для многих двухмерных задач может быть предпочтительнее СЛАУ на неравномерной сетке, а для трехмерных задач – предпочтительнее СЛАУ на равномерной сетке.

БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 20-07-00006.

ACKNOWLEDGMENTS

The study was supported by the Russian Foundation for Basic Research, grant No. 20-07-00006.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Colton D., Kress R. *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*. Applied Mathematical Sciences. Book series. (AMS, V. 93). 4th ed. Springer; 2019. 535 p. ISBN 978-3030-303-50-1
2. Самохин А.Б. *Интегральные уравнения и итерационные методы в электромагнитном рассеянии*. М.: Радио и связь; 1998. 160 с. ISBN 5-256-01405-6
3. Самохин А.Б. *Объемные сингулярные интегральные уравнения электродинамики*. М.: Техносфера; 2021. 218 с. ISBN 978-5-94836-618-0
4. Michlin S., Prössdorf S. *Singular Integral Operators*. Berlin-New York: Akademie-Verlag; 1986. 528 p.
5. Самохин А.Б., Самохина А.С., Шестопалов Ю.В. Методы дискретизации объемных сингулярных интегральных уравнений электромагнетизма. *Дифференциальные уравнения*. 2018;54(9):1251–1261. https://doi.org/10.1134/S0374064118090108
6. Васильев Е.Н. *Возбуждение тел вращения*. М.: Радио и связь; 1987. 270 с.
7. Дмитриев В.И., Захаров Е.В. *Интегральные уравнения в краевых задачах электродинамики*. М.: Изд-во МГУ; 1987. 165 с.
8. Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г. *Математические модели электродинамики*. М.: Высшая школа; 1991. 222 с.
9. Самохин А.Б., Тыртышников Е.Е. Численный метод решения объемных интегральных уравнений на неравномерной сетке. *Журн. вычисл. матем. и матем. физ*. 2021;61(5):878–884. https://doi.org/10.31857/S0044466921050161
10. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. *Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения*. СПб.: Лань; 2021. 400 с. ISBN 978-58114-0799-6
11. Кудряшова Н.Ю., Грунина Т.В. *Граничные интегральные уравнения*. Пенза: Изд-во ПГУ; 2018. 72 с. ISBN 978-5-907-102-47-7
12. Нурутдинова И.Н., Пожарский Д.А. *Интегральное исчисление. Дифференциальные уравнения. Ряды*. Ростов-на-Дону: Донской ГТУ; 2021. 96 с.
13. Самарский А.А., Гулин А.В. *Численные методы*. М.: Наука; 1989. 432 с. ISBN 5-02-102-013996-3
14. Воеводин В.В., Тыртышников Е.Е. *Вычислительные процессы с теплицевыми матрицами*. М.: Наука; 1987. 319 с.
15. Тыртышников Е.Е. *Методы численного анализа*. М.: Академия; 2007. 317 с. ISBN 978-5-7695-3925-1

REFERENCES

1. Colton D., Kress R. *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*. Applied Mathematical Sciences. book series. (AMS, V. 93). 4th ed. Springer; 2019. 535 p. ISBN 978-3030-303-50-1
2. Samokhin A.B. *Integral'nye uravneniya i iteratsionnye metody v elektromagnitnom rasseyanii* (*Integral Equations and Iteration Methods in Electromagnetic Scattering*). Moscow: Radio i svyaz'; 1998. 160 p. (in Russ.). ISBN 5-256-01405-6
3. Samokhin A.B. *Ob"emnye singulyarnye integral'nye uravneniya elektrodinamiki* (*Volume Singular Integral Equations of Electromagnetics*). Moscow: Tekhnosfera; 2021. 218 p. (in Russ.). ISBN 978-5-94836-618-0
4. Michlin S., Prössdorf S. *Singular Integral Operators*. Berlin-New York: Akademie-Verlag; 1986. 528 p.
5. Samokhin A.B., Samokhina A.S., Shestopalov Yu.V. Discretization methods for three-dimensional singular integral equations of electromagnetism. *Differential Equations*. 2018;54(9):1225–1235. https://doi.org/10.1134/S0012266118090100
6. Vasil'ev E.N. *Vozbuzhdenie tel vrashcheniya* (*Excitation of Bodies of Rotation*). Moscow: Radio i svyaz'; 1987. 270 p. (in Russ.).
7. Dmitriev V.I., Zakharov E.V. *Integral'nye uravneniya v kraevykh zadachakh elektrodinamiki* (*Integral Equations for Boundary Problems of Electromagnetics*). Moscow: MGU; 1987. 165 p. (in Russ.).
8. Il'inskii A.S., Kravtsov V.V., Sveshnikov A.G. *Matematicheskie modeli elektrodinamiki* (*Mathematical Models of Electrodynamics*). Moscow: Vysshaya shkola; 1991. 222 p. (in Russ.).
9. Samokhin A.B., Tyrtyshnikov E.E. Numerical method for solving volume integral equations on a nonuniform grid. *Comput. Math. Math. Phys*. 2021;61(5):847–853. https://doi.org/10.1134/S0965542521050158
[Original Russian Text: Samokhin A.B., Tyrtyshnikov E.E. Numerical method for solving volume integral equations on a nonuniform grid. *Zhurnal vychislitel'nyi matematiki i matematicheskoi fiziki*. 2021;61(5):878–884 (in Russ.). https://doi.org/10.31857/S0044466921050161]
10. Demidovich B.P., Maron I.A., Shuvalova E.Z. *Chislennye metody analiza. Priblizhenie funktsii, differentsial'nye i integral'nye uravneniya* (*Numerical Methods of Analysis. Approximation, Differential and Integral Equations*). St. Petersburg: Lan'; 2021. 400 p. (in Russ.). ISBN 978-58114-0799-6
11. Kudryashova N.Yu., Grunina T.V. *Granichnye integral'nye uravneniya* (*Boundary Integral Equations*). Penza: PGU; 2018. 72 p. (in Russ.). ISBN 978-5-907-102-47-7.
12. Nurutdinova I.N., Pozharskii D.A. *Integral'noe ischislenie*. *Differentsial'nye uravneniya*. *Ryady* (*Integral Calculus*. *Differential Equations*. *Rows*). Rostov-on-Don: Donskoi GTU; 2021. 96 p. (in Russ.).
13. Samarskii A.A., Gulin A.V. *Chislennye metody* (*Numerical Methods*). Moscow: Nauka; 1989. 432 p. (in Russ). ISBN 5-02-102-013996-3
14. Voevodin V.V., Tyrtyshnikov E.E. *Vychislitel'nye protsessy s teplitsevymi matritsami* (*Computational Processes with Toeplitz Matrices*). Moscow: Nauka; 1987. 319 p. (in Russ.).
15. Tyrtyshnikov E.E. *Metody chislennogo analiza* (*Methods of Numerical Analysis*). Moscow: Akademiya; 2007. 317 p. (in Russ). ISBN 978-5-7695-3925-1

Об авторе

Самохин Александр Борисович, д.ф.-м.н., профессор, Заслуженный деятель науки РФ, профессор кафедры «Прикладная математика» Института информационных технологий ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: absamokhin@yandex.ru. Scopus Author ID 7005200099, SPIN-код РИНЦ 6302-0596, http://orcid.org/0000-0003-1328-6725

About the author

Alexander B. Samokhin, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Applied Mathematics Department, Institute of Information Technology, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: absamokhin@yandex.ru. Scopus Author ID 7005200099, RSCI SPIN-code 6302-0596, http://orcid.org/0000-0003-1328-6725