

Математическое моделирование
Mathematical modeling

УДК 004.023+519.677
<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2022-10-4-75-85>



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Свойства целевых функций и алгоритмов поиска в задачах многокритериальной оптимизации

А.В. Смирнов[®]

МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, 119454 Россия

[®] Автор для переписки, e-mail: av_smirnov@mirea.ru

Резюме

Цели. Часто применяемый метод поиска оптимальных по Парето решений состоит в минимизации выбранного показателя качества при задании ограничений на остальные показатели, значения которых, таким образом, оказываются заранее определенными. При этом выполняется поиск глобального минимума скалярной целевой функции, в которую ограничиваемые показатели входят в виде штрафных слагаемых. Рельеф такой функции содержит участки быстрого роста, значительно затрудняющие поиск глобального минимума. В работе сравниваются результаты различных эвристических алгоритмов при решении задач этого типа. Кроме того, исследуется возможность использования алгоритма последовательного квадратичного программирования (SQP), в котором ограничения учитываются не через штрафные слагаемые, а включаются в функцию Лагранжа.

Методы. В экспериментах использовались две аналитически заданные целевые функции и две целевые функции, встречающиеся в задачах многокритериальной оптимизации характеристик аналоговых фильтров. Исследуемые алгоритмы были реализованы программами в среде *MATLAB*.

Результаты. Установлено, что единственным эвристическим алгоритмом, который нашел оптимальные решения для всех функций, оказался алгоритм роя частиц. Алгоритм SQP оказался применим для одной из аналитически определенных функций и для одной из целевых функций оптимизации фильтров, существенно превзойдя при этом эвристические алгоритмы по точности и скорости поиска решения. Но для двух других функций данный алгоритм оказался неспособным находить правильные решения.

Выводы. Актуальной является задача оценки применимости рассмотренных методов для поиска Парето-оптимальных решений на основе предварительного анализа свойств функций, определяющих показатели качества.

Ключевые слова: многокритериальная оптимизация, оптимальность по Парето, показатель качества, целевая функция, рельеф целевой функции, эвристический алгоритм, квадратичное программирование

• Поступила: 15.12.2021 • Доработана: 13.05.2022 • Принята к опубликованию: 27.06.2022

Для цитирования: Смирнов А.В. Свойства целевых функций и алгоритмов поиска в задачах многокритериальной оптимизации. *Russ. Technol. J.* 2022;10(4):75–85. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2022-10-4-75-85>

Прозрачность финансовой деятельности: Автор не имеет финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

RESEARCH ARTICLE

Properties of objective functions and search algorithms in multi-objective optimization problems

Alexander V. Smirnov [®]

MIREA – Russian Technological University, Moscow, 119454 Russia

[®] Corresponding author, e-mail: av_smirnov@mirea.ru

Abstract

Objectives. A frequently used method for obtaining Pareto-optimal solutions is to minimize a selected quality index under restrictions of the other quality indices, whose values are thus preset. For a scalar objective function, the global minimum is sought that contains the restricted indices as penalty terms. However, the landscape of such a function has steep-ascent areas, which significantly complicate the search for the global minimum. This work compared the results of various heuristic algorithms in solving problems of this type. In addition, the possibility of solving such problems using the sequential quadratic programming (SQP) method, in which the restrictions are not imposed as the penalty terms, but included into the Lagrange function, was investigated.

Methods. The experiments were conducted using two analytically defined objective functions and two objective functions that are encountered in problems of multi-objective optimization of characteristics of analog filters. The corresponding algorithms were realized in the MATLAB environment.

Results. The only heuristic algorithm shown to obtain the optimal solutions for all the functions is the particle swarm optimization algorithm. The sequential quadratic programming (SQP) algorithm was applicable to one of the analytically defined objective functions and one of the filter optimization objective functions, as well as appearing to be significantly superior to heuristic algorithms in speed and accuracy of solutions search. However, for the other two functions, this method was found to be incapable of finding correct solutions.

Conclusions. A topical problem is the estimation of the applicability of the considered methods to obtaining Pareto-optimal solutions based on preliminary analysis of properties of functions that determine the quality indices.

Keywords: multi-objective optimization, Pareto optimality, quality index, objective function, fitness landscape, heuristic algorithm, quadratic programming

• Submitted: 15.12.2021 • Revised: 13.05.2022 • Accepted: 27.06.2022

For citation: Smirnov A.V. Properties of objective functions and search algorithms in multi-objective optimization problems. *Russ. Technol. J.* 2022;10(4):75–85. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2022-10-4-75-85>

Financial disclosure: The author has no a financial or property interest in any material or method mentioned.

The author declares no conflicts of interest.

ВВЕДЕНИЕ

Для поиска глобальных экстремумов мультимодальных (имеющих много локальных экстремумов) целевых функций (ЦФ), применяют эвристические алгоритмы [1, 2]. В отличие от классических методов оптимизации [2–4], для эвристических алгоритмов отсутствует полноценный теоретический анализ. Оценку и сравнение их характеристик осуществляют экспериментально с применением наборов тестовых функций [5, 6]. При этом на разных тестовых функциях лучшие характеристики показывают разные алгоритмы, что приводит к задаче выбора наиболее подходящего алгоритма для ЦФ

с определенными свойствами. В последнее время развиваются методы автоматического анализа свойств рельефа ЦФ (exploratory landscape analysis – ELA) и машинного обучения для выбора алгоритма и/или настройки его параметров в соответствии с результатами такого анализа [7, 8]. Однако до полного решения указанной задачи еще далеко.

В радиотехнике и в других областях значительный интерес представляют задачи многокритериальной оптимизации [9]. Оптимизировать одновременно все показатели качества (ПК), как правило, невозможно, т.к. улучшение одних ПК приводит к ухудшению других. Поэтому целью многокритериальной оптимизации является множество решений,

оптимальных по Парето [1, 10]. Широко применяемый способ их поиска состоит в решении задачи

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* &= \arg \min_{\mathbf{x} \in D'} (Q_k(\mathbf{x})), \\ D' &= \left\{ \mathbf{x} \in D \mid Q_j(\mathbf{x}) \leq Q_{jt}; i = 1, \dots, M; j \neq k \right\}. \end{aligned} \quad (1)$$

где \mathbf{x} – вектор координат в пространстве поиска; D – область допустимых значений \mathbf{x} в пространстве поиска, определяемая ограничениями в виде неравенств и/или равенств; $Q_j(\mathbf{x})$ – функции, описывающие ПК; M – количество ПК; \mathbf{x}^* – вектор координат оптимального решения. Без потери общности здесь рассматривается задача минимизации всех ПК.

В задаче (1) задаются ограничения сверху на все ПК, кроме Q_k , который минимизируется. Если ПК конкурирующие, то минимум Q_k будет в точке \mathbf{x}^* , в которой остальные ПК достигают заданных для них ограничений Q_{jt} . Это позволяет получать решения, у которых все координаты в пространстве ПК, кроме k -й, фиксированы на целевых значениях Q_{jt} . Известно, что таким способом может быть найдено любое Парето-оптимальное решение [10].

Один из методов решения задачи (1) основан на минимизации скалярной ЦФ вида

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^M \left(W_j \cdot \max \left(\frac{(Q_j(\mathbf{x}) - Q_{jt})}{Q_{jt}^{q_j}}, 0 \right) \right), \quad (2)$$

где $Q_j(\mathbf{x})$ и Q_{jt} – текущее и целевое значения j -го ПК; W_j – весовой коэффициент j -го ПК [2, 10]. В случае, если необходимо нормировать отклонение ПК от целевого значения для приведения слагаемых в (2) к одному диапазону величин, показатель степени $q_j = 1$. Если такая нормировка не требуется, то показатель степени $q_k = 0$, Значение $\max(x, 0) = x$ при $x > 0$ и $\max(x, 0) = 0$ – в противоположном случае.

Целевое значение минимизируемого ПК Q_{kt} задается достаточно малым, например, равным его минимально возможному значению, а значение весового коэффициента устанавливается $W_k = 1$. Слагаемые, содержащие остальные ПК, являются штрафами за нарушение наложенных на них ограничений. Весовые коэффициенты в них должны удовлетворять условиям $W_j \gg 1$, чтобы обеспечить фиксацию таких ПК вблизи целевых значений.

Решение задач многокритериальной оптимизации характеристик аналоговых и цифровых фильтров с использованием метода скалярной ЦФ было предметом работ [11, 12].

Рельеф ЦФ (2) может оказаться сложным. При превышении целевых значений, фиксируемых ПК, значение ЦФ быстро нарастает, в результате чего в рельефе присутствуют участки, называемые далее

«стенами». В известных автору работах по анализу свойств ЦФ и выбору алгоритмов оптимизации такие свойства ЦФ не исследовались. Учитывая актуальность многокритериальной оптимизации, данный пробел необходимо заполнить.

Другой подход к решению задачи (1) основан на использовании методов нелинейного программирования, в которых ограничения на ПК учитываются не в виде штрафных слагаемых, а включаются в функцию Лагранжа, принимающую применительно к задаче (1) вид

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}, \lambda) &= Q_k(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{M-1} \lambda_i g_i(\mathbf{x}), \\ g_i(\mathbf{x}) &= Q_j(\mathbf{x}) - Q_{jt}, i = 1, \dots, M-1, j = 1, \dots, M, j \neq k, \quad (3) \\ \mathbf{x} &\in D, \end{aligned}$$

где λ_i – множители Лагранжа. Для поиска минимума функции (3) применяют, в частности, алгоритм последовательного квадратичного программирования (sequential quadratic programming – SQP) [3]. При этом необходимо, чтобы функция Лагранжа $L(\mathbf{x}, \lambda)$ имела непрерывные вторые частные производные.

Следует также упомянуть такую альтернативу методу скалярной ЦФ, как применение популяционных алгоритмов, позволяющих получать в одном цикле поиска аппроксимацию множества Парето, содержащую заданное количество элементов [1]. Преимуществом этих методов является существенное ускорение поиска. Однако возникают трудности с получением решений с заданными значениями части ПК. Кроме того, при увеличении количества ПК качество находимых аппроксимаций множества Парето может снижаться. Так, сравнение результатов решения задачи многокритериальной оптимизации характеристик электрических фильтров с применением популяционных алгоритмов и метода скалярной ЦФ показало, что при количестве ПК $M = 2$ популяционные алгоритмы имеют преимущество не только в скорости поиска, но и в качестве получаемых решений. В то же время при $M = 3$ они уступают по качеству аппроксимации множества Парето методу скалярной функции [13]. Перспективы применения популяционных алгоритмов многокритериальной оптимизации требуют дальнейших исследований и здесь рассматриваться не будут.

Цель данной работы – исследовать характеристики различных алгоритмов оптимизации при поиске глобального минимума скалярных ЦФ типа (2), рельеф которых характеризуется наличием «стен», и выработать рекомендации по выбору алгоритмов для решения таких задач. Кроме того, необходимо изучить возможности применения методов решения задачи (1), не использующих штрафные слагаемые.

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

В первую очередь сформируем ЦФ, обладающие нужными свойствами, т.е. наличием «стен». Первые две ЦФ заданы аналитически

$$f_1(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{ND} x_i + W_1 \cdot \max\left(\sum_{i=1}^{ND} x_i^2 - a_1, 0\right), \quad (4)$$

$$f_2(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{ND} x_i + W_2 \cdot \max\left(ND + \sum_{i=1}^{ND} (x_i^2 - \cos 2\pi x_i) - a_2, 0\right). \quad (5)$$

В этих соотношениях ND – размерность пространства поиска. Минимизируемый ПК в обеих функциях рассчитывается как сумма координат вектора \mathbf{x} . Фиксируемый ПК в функции $f_1(\mathbf{x})$ определен как сумма квадратов координат, а в функции $f_2(\mathbf{x})$ представляется известной тестовой функцией Растригина [5]. Параметры a_1 и a_2 задают целевые значения фиксируемых ПК, а параметры W_1 и W_2 – весовые коэффициенты штрафных слагаемых.

На рис. 1 приведены графики ЦФ $f_1(\mathbf{x})$ и $f_2(\mathbf{x})$ для случая $ND = 2$ при $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $W_1 = W_2 = 100$, $-2 \leq x_i \leq 2$, $i = 1, 2$. На графиках значения функций ограничены сверху на уровнях $f_1(\mathbf{x}) = 1$, $f_2(\mathbf{x}) = 2$. Рельефы обеих функций содержат выраженные «стены». Количество локальных экстремумов $f_2(\mathbf{x})$ экспоненциально растет при увеличении размерности ND .

Далее определим две ЦФ, получающиеся в задачах многокритериальной оптимизации

характеристик аналоговых электрических фильтров [11]. Первая из них имеет вид

$$f_3(\mathbf{x}) = \frac{DTd(\mathbf{x}) - DTd_t}{DTd_t} + WHp \cdot \max\left(\frac{DHp(\mathbf{x}) - DHp_t}{DHp_t}, 0\right) + WHs \cdot \max\left(\frac{HS_t - Hs(\mathbf{x})}{Hs_t}, 0\right) + WHt \cdot \max(DHt(\mathbf{x}) - DHt_t, 0). \quad (6)$$

Здесь DHp – неравномерность АЧХ в полосе пропускания (дБ); Hs – ослабление в полосе задерживания (дБ); DHt – превышение АЧХ над допустимым уровнем в полосе перехода от пропускания к затуханию (безразмерное); DTd – относительная неравномерность частотной характеристики задержки в полосе пропускания (%). Вектор координат \mathbf{x} состоит из действительных и мнимых координат полюсов и нулей передаточной функции (по одному из комплексно-сопряженной пары). Методы расчета перечисленных ПК изложены в [11, 14].

ЦФ $f_3(\mathbf{x})$ (6) получается в задаче минимизации ПК DTd при задании ограничений на остальные три ПК. Значение Hs должно максимизироваться, поэтому данный ПК вычитается из своего целевого значения. В экспериментах, результаты которых приведены ниже, задавались число полюсов фильтра $NP = 6$; число нулей $NZ = 0$; целевые значения ПК $DHp_t = 0.5$, $Hs_t = 40$, $DHt_t = 1$, $DTd_t = 10$; весовые коэффициенты $WHp = 20$, $WHs = 500$, $WHt = 1000$. Пространство поиска по всем координатам ограничивалось неравенствами $-3 \leq x_i \leq -0.01$.

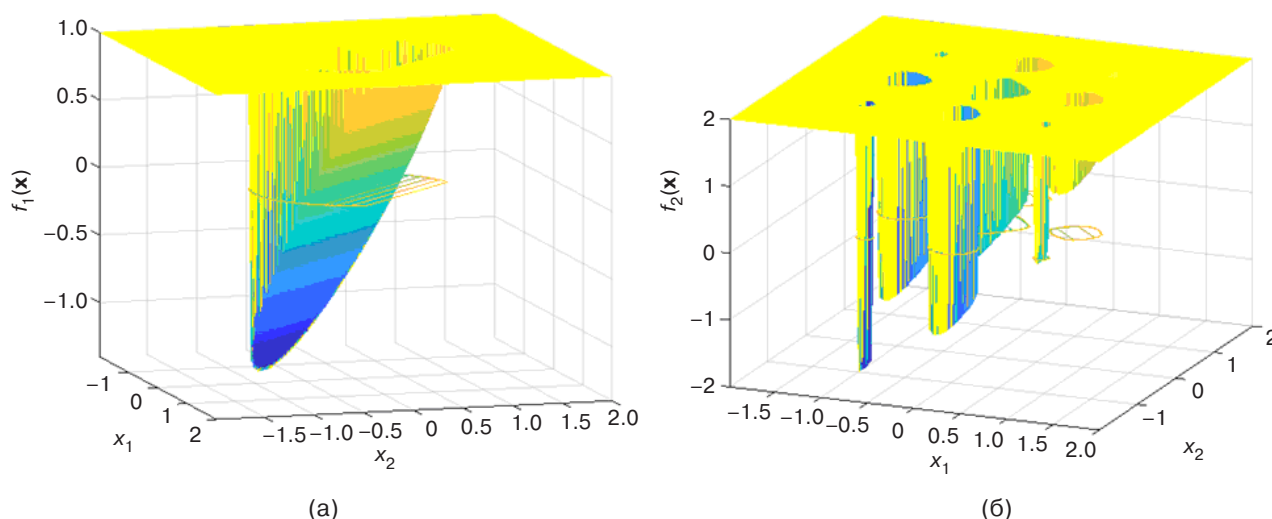


Рис. 1. Графики тестовых функций $f_1(\mathbf{x})$ (а) и $f_2(\mathbf{x})$ (б) при размерности $ND = 2$

Последняя ЦФ имеет вид

$$\begin{aligned}
 f_4(\mathbf{x}) = & \frac{Tss(\mathbf{x}) - Tss_t}{Tss_t} + \\
 & + WTfr \cdot \max\left(\frac{Tfr(\mathbf{x}) - Tfr_t}{Tfr_t}, 0\right) + \\
 & + WUm \cdot \max\left(\frac{Um(\mathbf{x}) - Um_t}{Um_t}, 0\right) + \\
 & + WHs \cdot \max\left(\frac{Hs_t - Hs(\mathbf{x})}{Hs_t}, 0\right) + \\
 & + WHt \cdot \max(DHt(\mathbf{x}) - DHt_t, 0).
 \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь Tss – длительность установления переходного процесса; Tfr – длительность нарастания фронта переходного процесса; Um – максимальное значение (выброс) напряжения переходного процесса. Интервалы времени и напряжение измеряются на нормированных шкалах и выражаются безразмерными величинами. Остальные ПК были определены выше.

ЦФ $f_4(\mathbf{x})$ (7) получается в задаче минимизации длительности установления переходного процесса Tss при задании ограничений на длительность фронта Tfr , максимальное напряжение переходного процесса Um , ослабление в полосе задерживания Hs и выброс АЧХ в полосе перехода DHt . В экспериментах задавались число полюсов $NP = 6$; число нулей $NZ = 0$; целевые значения ПК $Tss_t = 0.1$, $Tfr_t = 0.5$, $Um_t = 1.1$, $Hs_t = 40$, $DHt_t = 0$; весовые коэффициенты $WTfr = 100$, $WUm = 10$, $WHs = 100$, $WHt = 1000$. Границы пространства поиска такие же, как для $f_3(\mathbf{x})$. Сведения о методах расчета ПК также можно найти в работах [11, 14].

Так как решение задач оптимизации ЦФ (6) и (7) при $ND = 2$, т.е. для фильтров 2-го порядка, не представляет интереса, а при больших размерностях графическое представление затруднительно, графики этих ЦФ не приводятся.

Далее перечислим исследованные алгоритмы оптимизации. Все они были реализованы в программной среде *MATLAB*¹. Для каждого алгоритма введено сокращенное обозначение, которое используется в дальнейшем изложении.

SS (Step Search) – простой алгоритм покоординатного поиска с ограниченной сверху длиной шага [2, 3].

PS – функция *patternsearch*(..) из модуля *Global Optimization Toolbox* в составе *MATLAB*. Усовершенствованный покоординатный поиск

с возможностью перехода между областями притяжения локальных экстремумов [2].

MS – функция *fminsearch*(..) из модуля *Optimization Toolbox*. Поиск минимума ЦФ с применением симплексного алгоритма Нелдера – Мида (Nelder–Mead) [2].

SA – функция *simulannealbnd*(..) из модуля *Global Optimization Toolbox*. Поиск глобального минимума ЦФ с применением алгоритма имитации процесса отжига [1, 2].

GA – функция *ga*(..) из модуля *Global Optimization Toolbox*. Поиск глобального минимума ЦФ с помощью генетического алгоритма [1, 2].

PSO – функция *particleswarm*(..) из модуля *Global Optimization Toolbox*. Поиск глобального минимума ЦФ с применением алгоритма роя частиц [1, 2].

CS – функция, реализующая алгоритм поиска глобального минимума ЦФ Cuckoo Search (алгоритм кукушек) [1]. Функция не входит в состав модулей *MATLAB* и написана на основе примера, приведенного в [15].

MC1 – функция *fmincon*(..) из модуля *Optimization Toolbox*, реализующая алгоритм SQP. В этом варианте минимизируется ЦФ со штрафами (4)–(7), а ограничения накладываются только на координаты пространства поиска.

MC2 – также функция *fmincon*(..) из модуля *Optimization Toolbox*. Но в этом варианте минимизируется выбранный ПК, а функции, по которым рассчитываются фиксируемые ПК, вводятся в состав аргументов *fmincon*(..) как ограничения в виде неравенств.

Каждый алгоритм запускался $NT = 100$ раз для функций $f_1(\mathbf{x})$ и $f_2(\mathbf{x})$ и $NT = 40$ раз для $f_3(\mathbf{x})$ и $f_4(\mathbf{x})$. Стартовые точки в пространстве поиска для каждого запуска непопуляционных алгоритмов задавались с применением функции формирования Латинского гиперкуба *lhsdesign*(NT , ND), а случайные стартовые положения агентов популяционных алгоритмов GA, PSO и CS задавались реализующими их функциями. Настройки алгоритмов, входящих в модули *MATLAB*, устанавливались по умолчанию. Условием окончания поиска было отсутствие изменений минимизируемой функции, превышающих порог DGF_{min} , значение которого является одной из настроек и, как указано выше, принималось равным значению по умолчанию. Для алгоритма CS были заданы размер популяции $Npop = 20$ и число поколений $maxgenN = 400$. Поиск заканчивался после отработки всех поколений.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Результаты экспериментов с ЦФ $f_1(\mathbf{x})$ приведены в табл. 1, где даны минимальные и максимальные значения найденных решений по 100 циклам поиска

¹ <http://www.mathworks.com>, дата обращения 14.12.2021. <http://www.mathworks.com>. Accessed December 14, 2021.]

Таблица 1. Результаты экспериментов с ЦФ $f_1(\mathbf{x})$

Алгоритм	$ND = 2, \min(f_1) = -1.414$			$ND = 4, \min(f_1) = -2.000$			$ND = 8, \min(f_1) = -2.828$		
	$\min(f_1)$	$\max(f_1)$	<i>Neval</i>	$\min(f_1)$	$\max(f_1)$	<i>Neval</i>	$\min(f_1)$	$\max(f_1)$	<i>Neval</i>
SS	-1.414	-1.017	84844	-2.000	-1.396	320100	-2.717	-2.327	1280948
PS	-1.414	-1.126	14503	-1.998	-1.540	30330	-2.780	-1.833	70876
MS	-1.414	-1.052	23623	-2.000	0.053	60650	-2.806	1.010	147627
SA	-1.414	-1.386	192039	-1.998	-1.873	381223	-2.782	-2.340	752386
GA	-1.414	-1.372	631387	-2.000	-1.946	1456566	-2.827	-2.821	5748740
PSO	-1.414	-1.412	187060	-2.000	-1.996	541760	-2.828	-2.821	1508800
CS	-1.414	-1.413	1677900	-2.000	-1.984	1677900	-2.825	-2.793	1677900
MC1	-1.414	-0.756	29340	-1.999	-0.542	72418	-2.828	-0.440	100494
MC2	-1.414	-1.414	3465	-2.000	-2.000	7201	-2.828	-2.828	16211

для размерностей $ND = 2, 4$ и 8 . В третьих столбцах приведены количества *Neval* вычислений ЦФ в процессе поиска. В верхней строке даны точные значения глобального минимума, найденные аналитически.

Дополнительную информацию о работе алгоритмов дают карты положений стартовых точек циклов поиска, соединенных отрезками прямых с соответствующими конечными точками, примеры которых даны на рис. 2. Для популяционных алгоритмов, в частности для PSO, показаны только положения найденных оптимальных решений, т.к. каждый агент в популяции имеет свое стартовое положение.

Непопуляционные алгоритмы SS, PS, MS, MC1 движутся по направлению к точке минимума, пока не достигнут «стен». Их результаты по циклам поиска имеют значительный разброс. Существенно лучшими оказываются популяционные алгоритмы PSO и CS. Большинство найденных ими решений находятся в ближайшей окрестности глобального минимума, поэтому для получения хорошего результата не нужно много повторений поиска. Лучшие результаты показал алгоритм MC2. Это объяснимо, т.к. $f_1(\mathbf{x})$ не имеет локальных минимумов. При этом как минимизируемый, так и ограничиваемый ПК

описываются дважды дифференцируемыми функциями. В таких условиях алгоритм SQP быстро и точно находит оптимальное решение в каждом запуске для всех размерностей пространства поиска.

Результаты экспериментов с ЦФ $f_2(\mathbf{x})$ приведены в табл. 2. Предположительные значения глобального минимума в верхней строке получены путем дополнительного поиска в ограниченных окрестностях лучших из найденных решений. Примеры карт положений стартовых и конечных точек поиска приведены на рис. 3. Примеры гистограмм значений найденных оптимальных решений для случая $ND = 8$ показаны на рис. 4.

Алгоритмы SS, MS и MC1 заканчивают поиски в ближайшем к стартовой точке локальном минимуме (рис. 3). Для попадания в глобальный или хотя бы близкий к нему минимум необходимо выполнить значительное количество циклов поиска. В то же время алгоритмы SA, GA, PSO и CS все циклы поиска заканчивают или в глобальном минимуме, или в двух ближайших к нему локальных. Это и следовало ожидать, т.к. эти алгоритмы предназначены именно для глобальной оптимизации.

При размерности $ND = 8$ точное значение глобального минимума находит только алгоритм PSO.

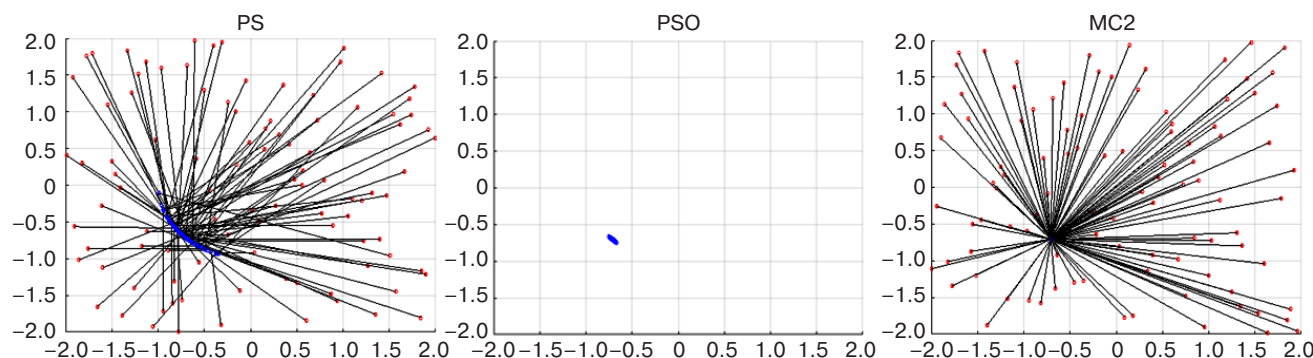


Рис. 2. Стартовые точки поиска и положения решений (синие) для $f_1(\mathbf{x})$ при $ND = 2$

Таблица 2. Результаты экспериментов с ЦФ $f_2(\mathbf{x})$

Алгоритм	$ND = 2, \min(f_2) = -2.000$			$ND = 4, \min(f_2) = -2.040$			$ND = 8, \min(f_2) = -2.097$		
	$\min(f_2)$	$\max(f_2)$	<i>Neval</i>	$\min(f_2)$	$\max(f_2)$	<i>Neval</i>	$\min(f_2)$	$\max(f_2)$	<i>Neval</i>
SS	-2.000	560.2	24313	-2.016	1036.3	94421	86.4	1892.6	376213
PS	-1.999	-0.475	15173	-2.034	-0.545	34606	-1.559	-0.690	87668
MS	-2.000	564.0	10383	-1.998	1042.0	20267	-2.082	1896.4	88995
SA	-2.000	-0.924	190021	-2.039	1.765	455552	-2.089	372.8	819478
GA	-2.000	-1.269	535649	-2.040	-0.633	1400355	-1.593	-0.895	6594051
PSO	-2.000	-1.277	208501	-2.040	-0.647	593081	-2.097	0.304	1603361
CS	-2.000	-1.279	31960	-2.040	-1.404	31960	-2.091	-1.566	31960
MC1	-1.998	278.1	15445	-2.036	942.1	20946	-0.609	1608.6	36057
MC2	-2.848	1.897	130078	-5.696	5.696	329294	-11.386	5.701	577958

Но, как видно из гистограммы на рис. 4, это значение найдено один раз из ста попыток. В то же время алгоритм CS многократно заканчивал поиск вблизи глобального минимума, а в остальных случаях попадал в локальные минимумы, ближайшие к глобальному.

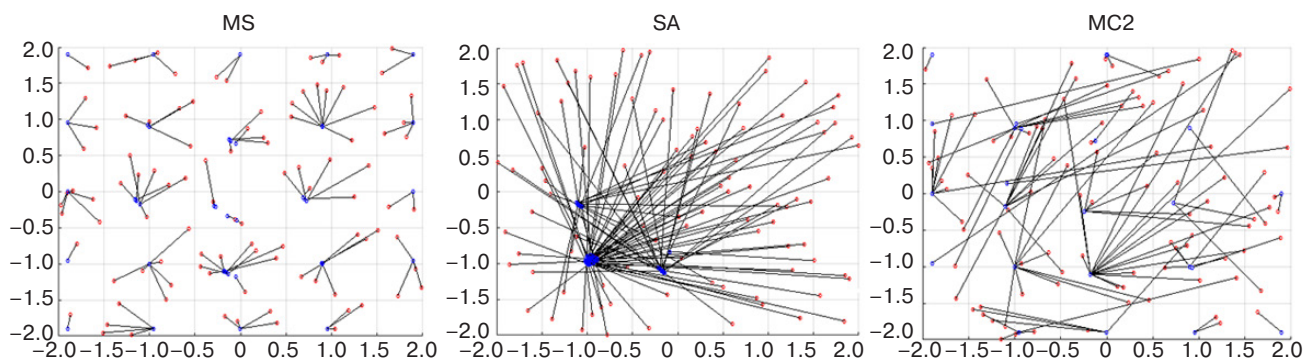
Обратим внимание на результаты алгоритма MC2. Среди них много значений, существенно меньших, чем глобальный минимум $f_2(\mathbf{x})$ (рис. 4). Проверка показывает, что в этих решениях нарушены ограничения на фиксируемый ПК. Таким образом, алгоритм MC2 оказался непригодным для оптимизации данной функции, хотя в окрестностях любого из ее локальных минимумов оба ПК описываются дважды дифференцируемыми функциями.

Перейдем к результатам оптимизации ЦФ $f_3(\mathbf{x})$ (6) и $f_4(\mathbf{x})$ (7). Данные задачи относятся к задачам Black Box Optimization, для которых ни точные решения, ни какая-либо информация о свойствах ЦФ до начала поиска не известны. Лучшие решения для каждого алгоритма приведены в табл. 3 и 4 соответственно. Курсивом отмечены существенные нарушения ограничений на ПК. Жирным шрифтом выделены лучшие результаты. Примеры гистограмм значений ЦФ для найденных решений показаны на рис. 5 и рис. 6. Для алгоритма MC2 шкала горизонтальной

оси содержит значения минимизируемого ПК, а не скалярной ЦФ.

Задача оптимизации $f_3(\mathbf{x})$ заключалась в минимизации ПК Dtd при ограничениях $DHp \leq 0.5$ дБ, $Hs \geq 40$ дБ, $DHt \leq 0$. Эти ограничения выполнены всеми алгоритмами, кроме CS. При этом минимальное значение Dtd найдено методом MC2, который также превзошел другие алгоритмы по количеству решений, совпадающих с лучшим (рис. 5). Но в то же время среди результатов поиска данным методом есть несколько решений, в которых нарушены ограничения. За счет этого ПК Dtd оказался меньше правильного оптимального значения.

Задача оптимизации $f_4(\mathbf{x})$ состояла в минимизации ПК Tss при выполнении ограничений $Hs \geq 40$ дБ, $DHt \leq 0$, $Tfr \leq 0.5$, $Um_t \leq 1.1$. С приемлемой точностью ограничения выполнены только популяционными алгоритмами GA и PSO (табл. 4), лучшие результаты поиска минимума Tss у которых одинаковы. По статистике результатов эти два алгоритма также эквивалентны (рис. 6), а по требуемому объему вычислительных операций алгоритм PSO оказался заметно лучше GA. Отметим, что алгоритм MC2 для решения данной задачи оказался совсем непригодным.

**Рис. 3.** Стартовые точки поиска и положения решений (синие) для $f_2(\mathbf{x})$ при $ND = 2$

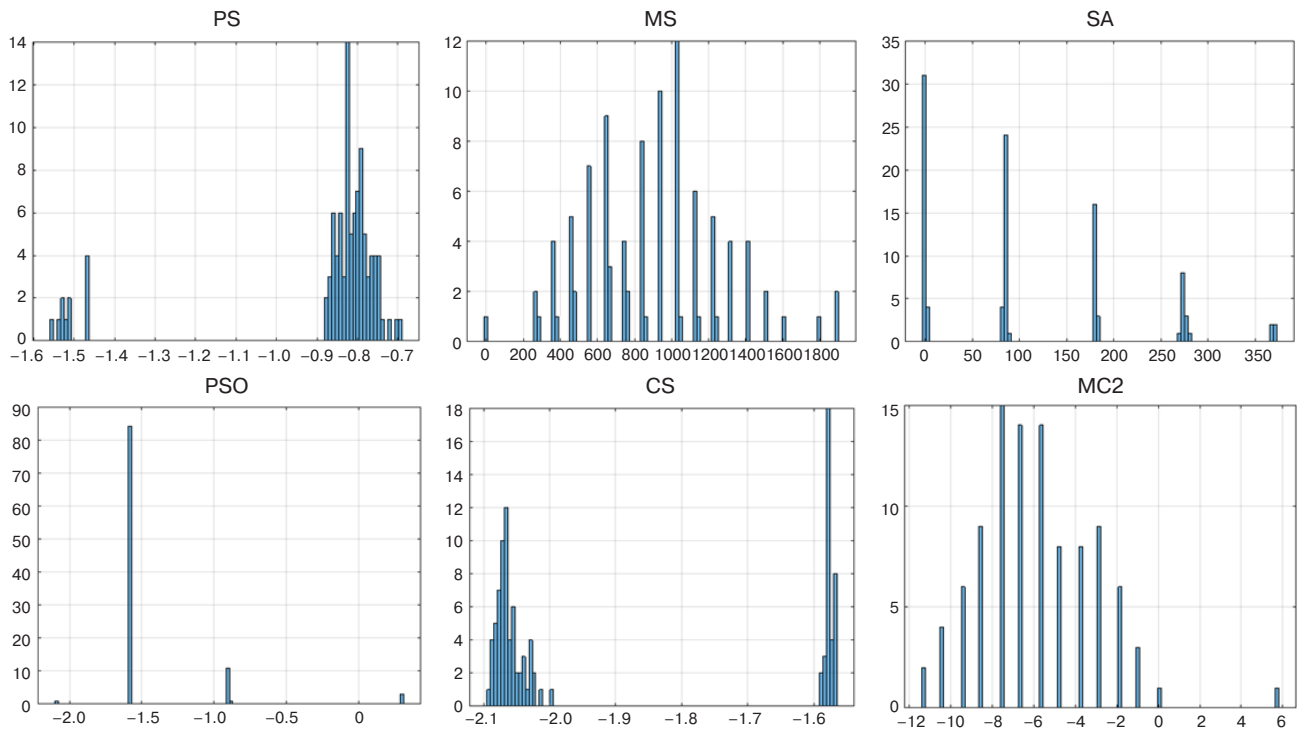


Рис. 4. Гистограммы значений найденных решений для $f_2(\mathbf{x})$ при $ND = 8$

Таблица 3. Результаты экспериментов с ЦФ $f_3(\mathbf{x})$

Алгоритм	$\min(GF)$	DH_p , дБ	H_s , дБ	DH_t	$DTd\%$	$Neval$
SS	5.070	0.500	40.040	0.000	60.699	332488
PS	5.615	0.510	40.000	0.000	62.103	46699
MS	6.708	0.500	40.000	0.000	77.084	33887
SA	2.552	0.500	40.009	0.000	35.515	280390
GA	2.253	0.500	40.881	0.000	32.530	3009450
PSO	2.127	0.500	40.000	0.000	31.266	1211160
CS	62.124	1.752	39.559	0.000	75.268	1278400
MC1	2.913	0.500	40.533	0.000	39.128	40771
MC2	31.126	0.500	40.000	0.000	31.126	39828

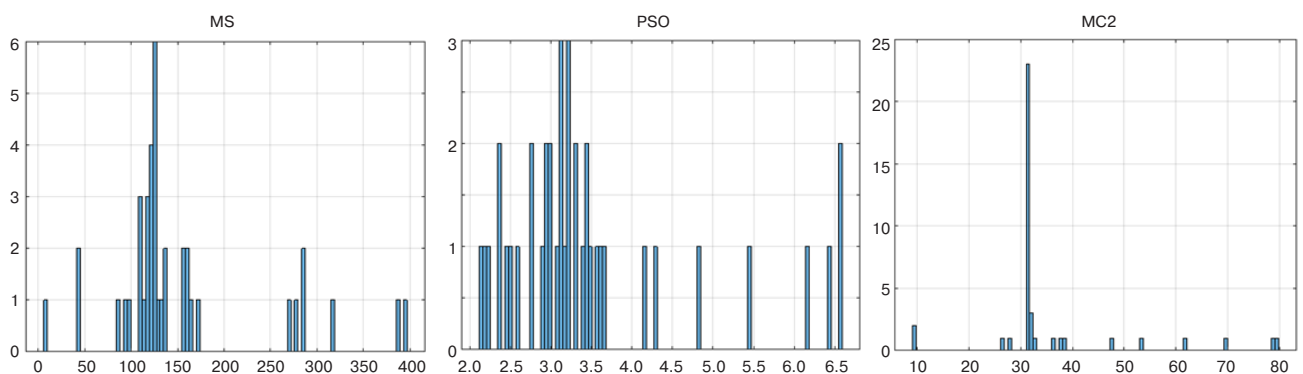
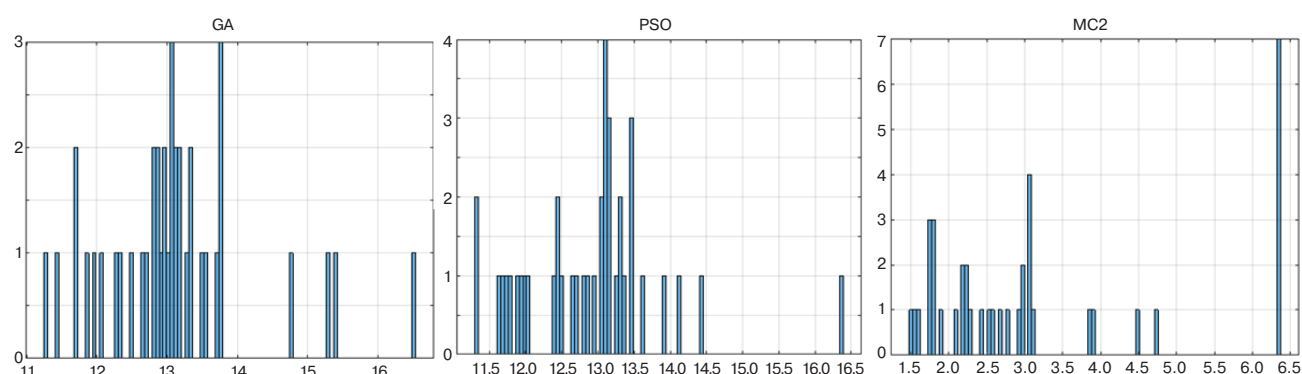


Рис. 5. Гистограммы значений найденных решений для $f_3(\mathbf{x})$

Таблица 4. Результаты экспериментов с ЦФ $f_4(\mathbf{x})$

Алгоритм	$\min(GF)$	H_s , дБ	DHt	Tfr	Tss	Um	$Neval$
SS	38.283	33.821	0.000	0.528	1.681	1.235	75904
PS	11.888	40.247	0.000	0.500	1.273	1.116	41477
MS	16.378	40.000	0.000	0.500	1.569	1.269	30440
SA	12.747	40.003	0.000	0.500	1.324	1.151	227064
GA	11.287	40.001	0.000	0.500	1.229	1.100	1512630
PSO	11.301	40.000	0.000	0.500	1.229	1.101	548280
CS	20.796	35.942	0.000	0.500	1.165	1.080	1278400
MC1	33.355	40.267	0.000	0.551	2.391	1.132	15107
MC2	1.480	43.663	0.000	1.044	1.480	1.006	19902

Рис. 6. Гистограммы значений найденных решений для $f_4(\mathbf{x})$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные результаты показывают, что поиск Парето-оптимальных решений путем решения задачи (1) может осуществляться разными методами, выбирать из которых следует в зависимости от свойств функций, входящих в (1). Из рассмотренных алгоритмов лучшие решения для всех функций нашел только эвристический алгоритм PSO. Поэтому его можно рекомендовать как основной метод для решения задач типа (1).

Для функций $f_1(\mathbf{x})$ и $f_3(\mathbf{x})$ применимым оказался алгоритм MC2, относящийся к методам нелинейного программирования. Для указанных функций данный метод находит оптимальное решение в большинстве циклов поиска и требует для поиска значительно меньшего объема вычислений, чем эвристические алгоритмы, оптимизирующие скалярную ЦФ (2). Однако для функций $f_2(\mathbf{x})$ и $f_4(\mathbf{x})$ алгоритм MC2 оказался непригодным. В случае функции $f_2(\mathbf{x})$ это можно объяснить ее мультимодальностью. В случае функции $f_4(\mathbf{x})$ объяснение пока отсутствует, т.к. о свойствах функций, входящих в соотношения (7), ничего сказать нельзя.

Один из путей оценки применимости методов нелинейного программирования типа MC2 для

решения задачи (1) состоит в предварительном исследовании свойств функций, определяющих значения входящих в (1) ПК. Но и на этом пути возникают проблемы. Например, как проверить мультимодальность ЦФ? Обычно применяемый подход основан на многократном поиске локальных экстремумов из равномерно распределенных стартовых точек. При этом рекомендуется применять алгоритм Нелдера – Мида (выше обозначен MS) [7]. Однако при наличии в рельефе ЦФ «оврагов» – областей, в которых скорость изменения функции по одному направлению значительно меньше, чем по другим, алгоритмы локального поиска будут останавливаться в различных точках дна «оврага», которые не являются локальными минимумами [10]. Методы обнаружения в рельефе ЦФ «стен», «оврагов», «плато» и поиска экстремумов при наличии таких участков пока мало разработаны.

Таким образом, вопрос оценки применимости алгоритмов нелинейного программирования типа MC2 для решения задачи (1) требует дополнительных исследований. Пока же можно предложить следующий порядок действий. Сначала выполнить некоторое количество циклов поиска решения задачи (1) методом MC2. Если большинство решений оказываются близким друг к другу и в них не нарушаются

ограничения, то лучшее из этих решений можно принять за искомый оптимум. Если же решения имеют значительный разброс и в большинстве из них

ограничения нарушены, то следует перейти к оптимизации скалярной ЦФ (2) с помощью алгоритма PSO.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карпенко А.П. *Современные алгоритмы поисковой оптимизации. Алгоритмы, вдохновленные природой*. М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана; 2021. 448 с. ISBN 978-5-7038-5563-8
2. Arora J.S. *Introduction to Optimum Design*. 4th edition. Elsevier; 2017. 945 p.
3. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. *Практическая оптимизация*: пер. с англ. М.: Мир; 1985. 509 с.
4. Нинул А.С. *Оптимизация целевых функций. Аналитика. Численные методы. Планирование эксперимента*. М.: Изд-во Физико-математической литературы; 2009. 336 с.
5. Jamil M., Yang X. A literature survey of benchmark functions for global optimization problems. *Int. Journal of Mathematical Modelling and Numerical Optimization*. 2013;4(2):150–194. <http://doi.org/10.1504/IJMMNO.2013.055204>
6. Liu S., Lin Q., Tan K.Ch., Li Q. *Benchmark problems for CEC2021 competition on evolutionary transfer multiobjective optimization*. Technical report. 2021. URL: <https://arxiv.org/pdf/2110.08033v1>
7. Mersmann O., Bischl B., Trautmann H., Preuss M., Weihs C., Rudolf G. Exploratory landscape analysis. In: *GECCO'11, 2011: Proceedings 13th Annual Genetic and Evolutionary Computation Conference*. 2011. P. 829–836. <https://doi.org/10.1145/2001576.2001690>
8. Trajanov R., Dimeski S., Popovski M., Korosec P., Eftimov T. *Explainable landscape-aware optimization performance prediction*. Preprint. October 22, 2021. URL: <https://arxiv.org/pdf/2110.11633v1>
9. Гуткин Л.С. *Оптимизация радиоэлектронных устройств по совокупности показателей качества*. М.: Советское радио; 1975. 368 с.
10. Чернолучский И.Г. *Методы оптимизации в теории управления*. СПб.: Питер; 2004. 256 с.
11. Смирнов А.В. Метод одновременной оптимизации характеристик электрических фильтров в частотной и временной областях. *Российский технологический журнал*. 2018;6(6):13–27. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2018-6-6-13-27>
12. Смирнов А.В. Оптимизация характеристик цифровых фильтров одновременно в частотной и временной областях. *Российский технологический журнал*. 2020;8(6):63–77. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2020-8-6-63-77>
13. Смирнов А.В. Применение популяционных алгоритмов в задачах многокритериальной оптимизации характеристик электрических фильтров. *Моделирование, оптимизация и информационные технологии*. 2021;9(3):29. <https://doi.org/10.26102/2310-6018/2021.34.3.015>

REFERENCES

1. Karpenko A.P. *Sovremennye algoritmy poiskovoi optimizatsii. Algoritmy, vdokhnovlennnye prirodoi (Modern Search Optimization Algorithms. Nature-Inspired Optimization Algorithms)*. Moscow: Baumanpress; 2021. 448 p. (in Russ.). ISBN 978-5-7038-5563-8
2. Arora J.S. *Introduction to Optimum Design*. 4th edition. Elsevier; 2017. 945 p.
3. Gill Ph.E., Murray W., Wright M.H. *Practical Optimization*. London: Academic Press; 1981. 402 p. [Gill F., Myurrei U., Rait M. *Prakticheskaya optimizatsiya (Practical Optimization)*: transl. from Engl. Moscow: Mir; 1985. 509 p. (in Russ.).]
4. Ninul A.S. *Optimizatsiya tselevykh funktsii. Analitika. Chislennye metody. Planirovanie eksperimenta (Optimization of Objective Functions. Analytics. Numerical Methods. Design of Experiments)*. Moscow: Fizmatizdat; 2009. 336 p. (in Russ.).
5. Jamil M., Yang X. A literature survey of benchmark functions for global optimization problems. *Int. Journal of Mathematical Modelling and Numerical Optimization*. 2013;4(2):150–194. <http://doi.org/10.1504/IJMMNO.2013.055204>
6. Liu S., Lin Q., Tan K.Ch., Li Q. *Benchmark problems for CEC2021 competition on evolutionary transfer multiobjective optimization*. Technical report. 2021. Available from URL: <https://arxiv.org/pdf/2110.08033v1>
7. Mersmann O., Bischl B., Trautmann H., Preuss M., Weihs C., Rudolf G. Exploratory Landscape Analysis. In: *GECCO'11, 2011: Proceedings 13th Annual Genetic and Evolutionary Computation Conference*. 2011. P. 829–836. <https://doi.org/10.1145/2001576.2001690>
8. Trajanov R., Dimeski S., Popovski M., Korosec P., Eftimov T. *Explainable landscape-aware optimization performance prediction*. Preprint. October 22, 2021. Available from URL: <https://arxiv.org/pdf/2110.11633v1>
9. Gutkin L.S. *Optimizatsiya radioelektronnykh ustroystv po sovokupnosti pokazatelei kachestva (Optimization of Radio Electronic Devices with Aggregation of Quality Indexes)*. Moscow: Sovetskoe Radio; 1975. 368 p. (in Russ.).
10. Chernorutskii I.G. *Metody optimizatsii v teorii upravleniya (Optimization Methods in Control Theory)*. St. Petersburg: Piter; 2004. 256 p. (in Russ.).
11. Smirnov A.V. Method of simultaneous optimization of radio devices performance in frequency and time domains. *Rossiiskii tekhnologicheskii zhurnal = Russian Technological Journal*. 2018;6(6): 13–27 (in Russ.). <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2018-6-6-13-27>

14. Смирнов А.В. *Многокритериальная оптимизация характеристик радиотехнических устройств с применением технологий искусственного интеллекта*. М.: МИРЭА – Российский технологический университет; 2020. 140 с.
15. Lindfeld G., Penny J. *Introduction to Nature-Inspired Optimization*. Academic Press; 2017. 256 p.
12. Smirnov A.V. Optimization of digital filters performances simultaneously in frequency and time domains. *Rossiiskii tekhnologicheskii zhurnal = Russian Technological Journal*. 2020;8(6):63–77 (in Russ.). <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2020-8-6-63-77>
13. Smirnov A.V. Application of population algorithms in the problems of multiobjective optimization of electrical filters characteristics. *Modelirovanie, optimizatsiya i informatsionnye tekhnologii = Modeling, Optimization and Information Technology (MOIT)*. 2021;9(3):29 (in Russ.). <https://doi.org/10.26102/2310-6018/2021.34.3.015>
14. Smirnov A.V. *Mnogokriterial'naya optimizatsiya kharakteristik radiotekhnicheskikh ustroystv s primeneniem tekhnologii iskusstvennogo intellekta (Multi-objective optimization of radio engineering devices parameters using of artificial intellect technologies)*. Moscow: MIREA; 2020. 140 p. (in Russ.).
15. Lindfeld G., Penny J. *Introduction to Nature-Inspired Optimization*. Academic Press; 2017. 256 p.

Об авторе

Смирнов Александр Витальевич, к.т.н., доцент, профессор кафедры телекоммуникаций Института радиоэлектроники и информатики систем ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: av_smirnov@mirea.ru. Scopus Author ID 56380930700, <https://orcid.org/0000-0002-2696-8592>

About the author

Alexander V. Smirnov, Cand. Sci. (Eng.), Professor, Department of Telecommunications, Institute of Radio Electronics and Informatics, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: av_smirnov@mirea.ru. Scopus Author ID 56380930700, <https://orcid.org/0000-0002-2696-8592>