

Математическое моделирование
Mathematical modeling

УДК 519.857
<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2022-10-4-65-74>



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Сплайн-аппроксимация многозначных функций в проектировании трасс линейных сооружений

Д.А. Карпов,
В.И. Струченков @

МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, 119454 Россия
© Автор для переписки, e-mail: str1942@mail.ru

Резюме

Цели. В настоящее время наблюдается бурное развитие теории и методов сплайн-аппроксимации плоских кривых, заданных последовательностью точек. Проведенные исследования, первые результаты которых были опубликованы ранее, показали возможность применения сплайн-аппроксимации в проектировании трасс линейных сооружений, несмотря на принципиальные отличия используемых сплайнов от рассматриваемых в теории и ее приложениях. Главное отличие состоит в том, что в проектировании трасс нельзя заранее считать известным число элементов сплайна. Кроме того, в отличие от получивших широкое распространение полиномиальных сплайнов, повторяющимся элементом является связка «отрезок прямой + дуга окружности» или «отрезок прямой + дуга клотоиды + дуга окружности + дуга клотоиды». Ранее была предложена двухэтапная схема: определение числа элементов искомого сплайна, затем – оптимизация его параметров. Алгоритм решения задачи применительно к проектированию продольного профиля реализован и опубликован. Но этот алгоритм непригоден для проектирования плана трассы, т.к. план трассы, в отличие от профиля, в общем случае является многозначной функцией. Цель работы – обобщить алгоритм на случай сплайн-аппроксимации многозначных функций с учетом особенностей проектирования трасс линейных сооружений.

Методы. На первом этапе используется новая математическая модель, позволяющая применить метод динамического программирования с учетом ограничений на параметры искомого сплайна. На втором этапе используется нелинейное программирование. При этом удастся вычислять аналитически производные целевой функции по параметрам сплайна при отсутствии ее аналитического выражения через эти параметры.

Результаты. Разработаны алгоритм аппроксимации многозначных функций, заданных дискретным рядом точек, сплайном, состоящим из дуг окружностей, сопрягаемых отрезками прямых, для решения задачи на первом этапе и алгоритм нелинейного программирования для оптимизации параметров полученного сплайна как начального приближения. В настоящей статье рассматривается только первый этап, т.к. сложный алгоритм второго этапа и его обоснование требуют отдельного рассмотрения.

Выводы. Двухэтапная схема сплайн-аппроксимации при неизвестном числе элементов сплайна пригодна и для аппроксимации многозначных функций, заданных последовательностью точек на плоскости, в частности для проектирования плана трасс линейных сооружений.

Ключевые слова: трасса, план, продольный профиль, сплайн, динамическое программирование, целевая функция, ограничения

• Поступила: 27.01.2022 • Доработана: 26.05.2022 • Принята к опубликованию: 24.06.2022

Для цитирования: Карпов Д.А., Струченков В.И. Сплайн-аппроксимация многозначных функций в проектировании трасс линейных сооружений. *Russ. Technol. J.* 2022;10(4):65–74. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2022-10-4-65-74>

Прозрачность финансовой деятельности: Авторы не имеют финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

RESEARCH ARTICLE

Spline approximation of multivalued functions in linear structures routing

Dmitry A. Karpov,
Valery I. Struchenkov @

MIREA – Russian Technological University, Moscow, 119454 Russia

@ Corresponding author, e-mail: str1942@mail.ru

Abstract

Objectives. The theory and methods of spline approximation of plane curves given by a sequence of points are currently undergoing rapid development. Despite fundamental differences between used splines and those considered in the theory and its applications, results published earlier demonstrate the possibility of using spline approximation when designing routes of linear structures. The main difference here consists in the impossibility of assuming in advance the number of spline elements when designing the routes. Here, in contrast to widely used polynomial splines, the repeating element is the link “segment of a straight line + arc of a circle” or “segment of a straight line + arc of a clothoid + arc of a circle + arc of a clothoid.” Previously, a two-stage scheme consisting of a determination of the number of elements of the desired spline and subsequent optimization of its parameters was proposed. Although an algorithm for solving the problem in relation to the design of a longitudinal profile has been implemented and published, this is not suitable for designing a route plan, since, unlike a profile, a route plan is generally a multivalued function. The present paper aims to generalize the algorithm for the case of spline approximation of multivalued functions making allowance for the design features of the routes of linear structures.

Methods. At the first stage, a novel mathematical model is developed to apply the dynamic programming method taking into account the constraints on the desired spline parameters. At the second stage, nonlinear programming is used. In this case, it is possible to analytically calculate the derivatives of the objective function with respect to the spline parameters in the absence of its analytical expression through these parameters.

Results. An algorithm developed for approximating multivalued functions given by a discrete series of points using a spline consisting of arcs of circles conjugated by line segments for solving the first stage of the problem is presented. An additional nonlinear programming algorithm was also used to optimize the parameters of the resulting spline as an initial approximation. However, in the present paper, the first stage is considered only, since the complex algorithm of the second stage and its justification require separate consideration.

Conclusions. The presented two-stage spline approximation scheme with an unknown number of spline elements is also suitable for approximating multivalued functions given by a sequence of points on a plane, in particular, for designing a route plan for linear structures.

Keywords: route, plan, longitudinal profile, spline, dynamic programming, objective function, constraints

• Submitted: 27.01.2022 • Revised: 26.05.2022 • Accepted: 24.06.2022

For citation: Karpov D.A., Struchenkov V.I. Spline approximation of multivalued functions in linear structures routing. *Russ. Technol. J.* 2022;10(4):65–74. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2022-10-4-65-74>

Financial disclosure: The authors have no a financial or property interest in any material or method mentioned.

The authors declare no conflicts of interest.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая статья является продолжением [1], где рассматривалась задача аппроксимации функций, заданных последовательностью точек на плоскости, сплайном специального вида. Элементами сплайна являлись дуги окружностей, сопрягаемых отрезками прямых. Задача рассматривалась применительно к проектированию продольного профиля трасс линейных сооружений (железные и автомобильные дороги, трубопроводы различного назначения и др.) Поскольку трасса – это пространственная кривая, ее план – это ее проекция на плоскость XOY , а продольный профиль – функция $Z(s)$, где s – длина дуги в плане от заданного начала, то продольный профиль – это плоская кривая, являющаяся графиком однозначной функции. Данное обстоятельство использовалось при разработке алгоритма сплайн-аппроксимации, о котором шла речь в [1]. План трассы может как быть, так и не быть графиком однозначной функции. В общем случае алгоритмы, реализованные ранее, для многозначных функций оказываются непригодны. Нужны другие математические модели и методы.

Первоначально в теории сплайнов, возникшей в конце 1960-х гг. [2], рассматривалась задача интерполяции заданных точек (узлов) некоторой кривой, состоящей из элементов одного и того же заданного вида, которые в узлах сплайна имели бы общую ординату и, как правило, общую касательную.

В дальнейшем фиксировались только абсциссы узлов и вместо интерполяции перешли к решению задач сплайн-аппроксимации. Потом стали решать задачи сплайн-аппроксимации при варьировании не только ординатами, но и абсциссами узлов. При этом число элементов сплайна считалось известным. Наибольшее применение получили полиномиальные, в частности, кубические сплайны [3].

Задачи сплайн-аппроксимации, которые возникают при проектировании трасс железных и автомобильных дорог и других линейных сооружений, отличаются тем, что повторяющимися элементами сплайна являются связки элементов: при проектировании плана трассы это «прямая + клотоида +

+ окружность + клотоида и т.д.». Поиск числа элементов сплайна представляет собой отдельную, достаточно сложную задачу, как и оптимизация параметров сплайна, определяющих его положение на плоскости.

Как отмечает в статье [4] профессор Хао Пу, в Китае функционирует более 120 000 км железных дорог, и около 20 000 км существующих железных дорог должны быть реконструированы до 2025 г. Он утверждает, что проектировщики в Китае очень заинтересованы в появлении автоматического и точного метода проектирования плана трассы.

В СССР в 1970-х гг. при проектировании Байкало-Амурской магистрали (БАМ) использовались только что созданные первые программы проектирования продольного профиля на всех трех ЭВМ БЭСМ-4, имевшихся в распоряжении проектных институтов Минтрансстроя в Москве, Ленинграде и Новосибирске [5]. Из-за крайне ограниченных технических возможностей этой лучшей из доступных в то время ЭВМ (оперативная память 4 096 ячеек, быстроедействие 40 000 операций в секунду), отсутствия средств визуализации, сложностей ввода исходных данных (перфокарты) не было достигнуто существенного снижения затрат в проектировании. Но на различных участках БАМ были получены результаты, доказавшие эффективность применения математически корректных методов оптимизации прежде всего за счет повышения качества проектных решений [5]. В 1980-х гг. на ЭВМ ЕС была создана отечественная система автоматизированного проектирования (САПР) новых железных дорог, в которой использовались проектирующие программы, но не было визуализации исходных данных и результатов. Поэтому при переходе на персональные компьютеры широкое распространение получили импортные системы, в которых такие средства и программы были и есть, но методы оптимизации не используются. С тех пор утвердился миф о том, что оптимизация и не нужна, т.к. проектировщик в интерактивном режиме получает оптимальные решения. Однако постепенно, в т.ч. и под влиянием работ таких авторов, как Хао Пу и других, приходит понимание, что это далеко не так.

В настоящее время в действующих САПР^{1, 2, 3, 4, 5}, как и в прошлом веке, задача оптимизации параметров сплайна решается в интерактивном режиме: проектировщик задает информацию, однозначно определяющую искомый проектный сплайн. По существу, это метод подбора элементов в графическом режиме с визуальным контролем. Компьютер используется вместо лекала и линейки, математические методы оптимизации не применяются. Качество полученных результатов зависит от опыта, интуиции и мотивации проектировщика. Это «ползание по экрану» представляет собой достаточно трудоемкий процесс, что оправдывает исследования по формализации задачи в математических моделях и применение математически корректных алгоритмов оптимизации. Вместо этого в России и за рубежом предлагались разного рода эвристические алгоритмы. Заданные точки соединялись отрезками прямых, получалась ломаная линия (сплайн первого порядка), которую требовалось заменить сплайном с окружностями, сопрягаемыми прямыми или клотоидами и прямыми, при наименьшем (в определенном смысле) отклонении от исходного сплайна (ломаной). При этом на параметры искомого сплайна накладывались технические ограничения для обеспечения нормальной эксплуатации проектируемого нового или реконструируемого сооружения.

В первых работах по проектированию плана трассы рассматривались графики кривизны [6–8], на основе которых пытались определить прямые вставки. Эта идея не получила дальнейшего развития, т.к. в сложных случаях при обычной съемке точек через 20 м крайне затруднительно на сбитой трассе, даже визуально, найти прямую вставку длиной 30–35 м, особенно при сопряжении кривых одного знака.

Далее разработчики программ перешли к построению угловых диаграмм [9], т.е. графиков зависимости угла текущего элемента ломаной с осью OX от расстояния (длины ломаной) от начальной точки. На таких

графиках прямой в плане трассы соответствует горизонтальная прямая, окружности – наклонная прямая, а клотоиде – парабола второй степени. Ставилась задача определить границы элементов и выполнить расчет сплайна.

Следует отметить одну из последних работ по автоматизации проектирования плана трасс реконструируемых железных дорог, выполненную китайским профессором Хао Пу и его соавторами [4]. В статье представлен анализ работ в этой области и сделан вывод о том, что существующие методы не позволяют решать задачу автоматически и могут генерировать только локально оптимизированное решение с учетом нескольких ограничений. Кроме того, в [4] отмечено, что автоматическое определение числа кривых, длин окружностей, клотоид и прямых вставок представляет собой сложную задачу. Поэтому предложено на первом этапе осуществлять поиск числа элементов сплайна (круговых кривых, без учета наличия клотоид) с помощью эвристического алгоритма с дальнейшей оптимизацией результата с применением генетических алгоритмов [10–19]. В соответствии с [4] предварительно по угловой диаграмме определяются приближенно границы прямых и предлагается эвристический алгоритм, называемый *swing iteration*, для переклассификации размещения точек и определения более точно положения прямых, а затем – круговых и переходных кривых. В итерации качания граница сегмента геометрического элемента многократно изменяется слева направо, затем справа налево и, наконец, стабилизируется. Как следует из [4], на реальной задаче именно генетические алгоритмы позволили существенно улучшить результат первого этапа.

Представляется более надежной такая же двух-этапная схема решения задачи, но с применением математически корректных алгоритмов: на первом этапе – алгоритмов динамического программирования для определения числа элементов и приближенных значений их параметров, а на втором этапе – алгоритмов нелинейного программирования для оптимизации полученных параметров сплайна. Такая схема была успешно использована при проектировании продольного профиля железных и автомобильных дорог. При проектировании железных дорог первоначально использовался сплайн в виде ломаной линии [20], а при переходе к проектированию высокоскоростных дорог пришлось перейти к сплайну, состоящему из вертикальных круговых кривых, сопрягаемых прямыми [1]. При проектировании продольного профиля автодорог использовался сплайн, элементами которого были параболы второй степени [21].

Для компьютерного проектирования плана трассы актуальной является задача сплайн-аппроксимации многозначных функций, т.к. в общем

¹ Bentley Rail Track. URL: <https://www.bentley.com/-media/1EA2B937CB5B42BEA5EAE802620C0BA3.ashx>, дата обращения 15.01.2022. [Bentley Rail Track. URL: <https://www.bentley.com/-media/1EA2B937CB5B42BEA5EAE802620C0BA3.ashx>. Accessed January 15, 2022.]

² CARD/1. URL: <http://card-1.ru/>, дата обращения 15.01.2022. [CARD/1. URL: <http://card-1.ru/>. Accessed January 15, 2022 (in Russ.).]

³ Autodesk. URL: <https://www.architect-design.ru/autodesk/autocad/>, дата обращения 15.01.2022. [Autodesk. URL: <https://www.architect-design.ru/autodesk/autocad/>. Accessed January 15, 2022 (in Russ.).]

⁴ Topomatic Robur. URL: <http://www.topomatic.ru/>, дата обращения 15.01.2022. [Topomatic Robur. URL: <http://www.topomatic.ru/>. Accessed January 15, 2022 (in Russ.).]

⁵ Credo-Dialog. URL: <https://credo-dialogue.ru/>, дата обращения 15.01.2022. [Credo-Dialog. URL: <https://credo-dialogue.ru/>. Accessed January 15, 2022 (in Russ.).]

случае план трассы является графиком именно такой функции.

Сплайн становится многозначной функцией не только при наличии кривых с углами поворота касательной с осью OX большими 90° , но и при наличии нескольких кривых одного знака с малыми величинами углов поворота, но при большом суммарном угле поворота. В общем случае приходится рассматривать и кривые с углами поворота большими 180° .

Цель настоящей статьи состоит в изложении особенностей применения динамического программирования для решения этой задачи. Сначала рассматривается сплайн, состоящий из дуг окружностей, сопрягаемых прямыми, который является многозначной функцией. Эта задача имеет самостоятельное значение, т.к. при проектировании плана трассы некоторых линейных сооружений, например, траншей для прокладки трубопроводов различного назначения, кривые переменной кривизны, в т.ч. клотоиды, не используются. Эта задача существенно проще и требует значительно меньшего объема вычислений на первом этапе, чем при использовании сплайна с клотоидами. Кроме того, при использовании клотоид малой длины и больших радиусов круговых кривых вставка клотоид приводит к незначительным сдвигам полученного сплайна с окружностями, т.к. отклонение p окружности радиуса R от стороны угла, в который она вписывается с клотоидой длиной l , вычисляется по известной формуле: $p = l^2/(24R)$. Так при $l = 30$ м и $R = 500$ м выполняется $p < 0.08$ м.

Поэтому сплайн с окружностями, как правило, можно рассматривать как начальное приближение для второго этапа. В любом случае число кривых в дальнейшем не изменится и можно повторить первый этап при известном числе элементов для поиска сплайна с клотоидами.

При этом резко сокращается объем вычислений с использованием динамического программирования, т.к. при известном числе элементов не нужно рассматривать возможность замены двух кривых одной.

Оптимизация параметров сплайна как многозначной функции с применением нелинейного программирования представляет собой сложную задачу, решению которой будет посвящена отдельная статья.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ЕЕ ФОРМАЛИЗАЦИЯ

Для заданной последовательности точек на плоскости (рис. 1) найти такой сплайн, состоящий из дуг окружностей, сопрягаемых отрезками прямых, параметры которого удовлетворяют системе ограничений, а сумма квадратов отклонений заданных точек от сплайна минимальна. Если есть участки,

на которых наиболее важно получить небольшие отклонения, то вместо простой суммы квадратов может использоваться взвешенная. Более того, можно задать и ограничения в виде неравенств на отклонения в отдельных точках. К сожалению, на данном этапе нельзя зафиксировать точку в пределах дискрета поиска.

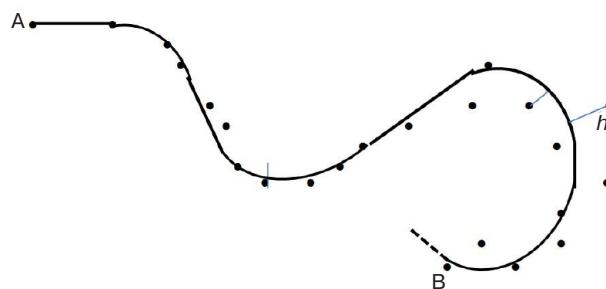


Рис. 1. Исходные точки и аппроксимирующий сплайн

Начальная A и конечная B точки и направления в них заданы и не меняются в процессе поиска сплайна. Они могут как совпадать, так и не совпадать с исходными точками.

Отклонения вычисляются по нормали к сплайну. Если число точек равно n , а отклонения их от сплайна — h_i ($i = 1, 2, \dots, n$), то сумма $\sum_{i=1}^n h_i^2$ должна быть

минимальна при выполнении следующих ограничений на параметры сплайна: длины отрезков прямых и дуг окружностей не должны быть меньше заданных величин, радиусы круговых кривых должны быть в заданных пределах.

На первом этапе элементы удобно рассматривать в следующем порядке: «кривая + прямая» и т.д. Если число таких связей равно k , длины прямых L_j^{np} , длины кривых L_j^k , а радиусы R_j , то ограничения на параметры сплайна формализуются системой неравенств:

$$L_j^{np} \geq L_{\min}^{np}, \quad (1)$$

$$L_j^k \geq L_{\min}^k, \quad (2)$$

$$R_{\min} \leq |R_j| \leq R_{\max} \quad (j = 1, 2, \dots, k). \quad (3)$$

Радиусы кривых положительны при движении против часовой стрелки и отрицательны в противном случае. Все предельные значения L_{\min}^{np} , L_{\min}^k , R_{\min} и R_{\max} заданы.

Очевидно, что для определения положения сплайна на плоскости достаточно найти координаты точки начала каждой кривой и направления касательной в ней. Начало первой кривой считается заданным. Это может быть точка A (рис. 1) или другая точка на касательной, проведенной из точки A .

Если же на данном этапе считать неизвестной длину начальной прямой, то, как станет ясно из дальнейшего, задача существенно усложняется. Однако можно избежать существенных усложнений, задавая несколько возможных точек начала первой кривой и тем самым – длины начальной прямой. Аналогично можно поступить и с конечной точкой. Более того, можно задать и несколько начальных и конечных направлений.

Основное понятие в динамическом программировании – «состояние системы» – определим как совокупность точки начала очередной кривой и направления касательной к кривой в этой точке. Для этого в исходных точках построим нормали к заданной ломаной. Нормаль – это прямая, соединяющая данную точку с центром окружности, проведенной через три смежные точки, если они не лежат на одной прямой, или нормаль к этой прямой в противном случае (рис. 2). Нет необходимости строить нормали в начале и конце трассы на участках длиной $L_{\min} = L_{\min}^{\text{пр}} + L_{\min}^{\text{к}}$ от начальной и конечной точек соответственно, т.к. на этих участках не могут располагаться искомые точки начала кривых из-за ограничений (1)–(3).

Поскольку начальное направление задано, то, двигаясь от начала к концу в каждой точке, можно определить направление внешней нормали и соответственно касательной, так чтобы они составляли правую тройку. Углы внешних нормалей с осью OX (γ_j на рис. 2) вычисляются предварительно. Направление касательной определяется углом $(\gamma_j - \pi/2)$ с осью OX . Координаты исходной точки и направление касательной определяют на каждой нормали одно «состояние системы». Поскольку начало кривой не обязано совпадать с исходной точкой, то на каждой из нормалей зададим несколько точек с шагом Δ (рис. 2) и в каждой точке на каждой нормали несколько возможных направлений касательной (стороны угла, в который будет вписываться окружность).

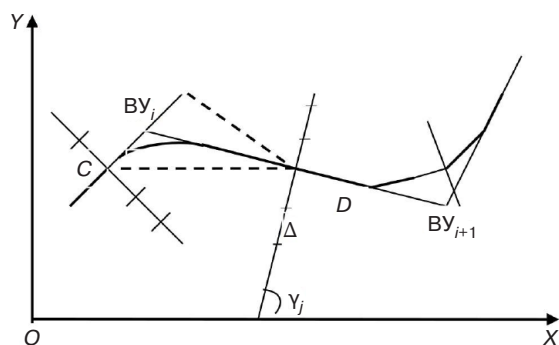


Рис. 2. Задание нормалей и множества «состояний системы»

Таким образом строится множество возможных состояний. Поиск сплайна сводится к задаче

динамического программирования: построить траекторию (последовательность состояний) для перевода «системы» из начального состояния в конечное с минимальными затратами (при минимуме целевой функции). Последовательные состояния должны выбираться с соблюдением ограничений (1)–(3) и ограничений на смещения в отдельных точках, если они заданы.

ПОСТРОЕНИЕ СПЛАЙНА ПО МЕТОДУ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

При построении траектории из начальной точки в конечную в соответствии с принципом оптимальности Р. Беллмана [22] рассматриваются и сравниваются варианты достижения одного и того же состояния разными допустимыми по ограничениям путями, и в каждом состоянии в итоге остается один вариант с меньшим значением целевой функции.

Для реализации этого правила нам требуется задать еще несколько параметров: уже упоминавшиеся дискреты по нормальям Δ и углам φ и их количества на нормали, $maxrix$ – максимальное допустимое отклонение сплайна от точек съемки и L_{\max} – максимальную длину связки «окружность + прямая», т.е. максимальное расстояние (по исходной ломаной) между двумя последовательными состояниями (началами кривых). Обычно $L_{\max} = (3-4)L_{\min}$, но при наличии длинных кривых может быть и больше. В силу простоты алгоритма (малого объема вычислений) целесообразно задавать L_{\max} «с запасом» и ограничивать длину связки, если на L_{\max} уже построены две кривых разного знака, т.к. такие кривые не могут быть заменены одной связкой с допустимыми отклонениями. Величина $maxrix$ задает область поиска на плоскости относительно исходной ломаной. Эта величина также должна задаваться осмысленно при анализе конкретных данных. Если задать малые значения, то из-за ограничений решение в соответствующей области может отсутствовать. Задание больших величин $maxrix$ не влияет на точность поиска, но приводит к увеличению объема вычислений, что в данном случае не очень существенно.

Первый шаг алгоритма

Для начальной точки А, а если начальных точек задано несколько, то последовательно для каждой из них, рассматриваем нормали в интервале от L_{\min} до L_{\max} (точки С и D на рис. 3). Для каждой точки на каждой нормали и каждого направления касательной в этой точке определяем соответствующую вершину угла поворота (далее – ВУ) при пересечении с начальным направлением. На рис. 3 это точки V_1 и V_2 . Некоторые другие направления показаны пунктиром.

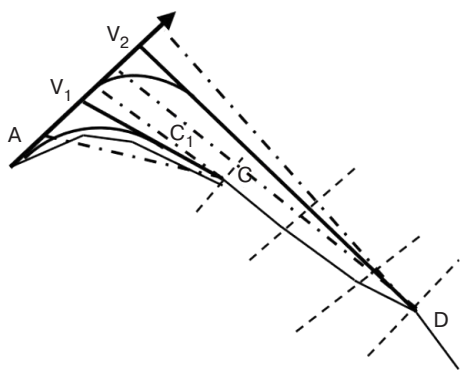


Рис. 3. Построение вариантов на первом шаге алгоритма

Для каждой ВУ определяем расстояния от нее до начальной точки и до точки на нормали. Применительно к первой вершине это расстояния AV_1 и V_1C_1 соответственно. Если выполняется $AV_1 > V_1C_1 - L_{\min}^{pp}$, то этот вариант выбора начальных точек отбраковывается. В противном случае на стороне угла V_1C_1 находим точку C_1 такую, что $AV_1 = V_1C_1$.

Расстояние CC_1 – это длина прямой в искомой связке «окружность + прямая».

$$AV_1 = R \operatorname{tg}(\alpha/2),$$

где α – угол поворота, т.е. разность углов сторон угла с осью OX . Отсюда находим R , а затем и центр окружности, используя точку A и нормаль к начальному направлению. Никакого перебора значений радиуса не требуется. Именно для этого мы фиксировали точку начала кривой и вместо ее поиска предпочли рассмотреть несколько заданных вариантов. Если не выполняется ограничение (3) (по радиусу) или ограничение (2) (по длине кривой), то переходим к рассмотрению следующего состояния. Отметим, что при нарушении ограничений многие состояния исключаются из рассмотрения.

Если ограничения (1)–(3) выполнены, то для исходных точек на рассматриваемом интервале (AC на рис. 3) находим последовательно расстояния h_i до дуги окружности (до выхода за пределы дуги), а затем расстояния до прямой вставки для оставшихся точек. Если $h_i > \max r_i$, или нарушены ограничения на смещение некоторых точек, то остальные расстояния не вычисляются, и этот вариант расположения точек начала кривых отбраковывается. В противном случае вычисляется и запоминается значение целевой функции и вся информация, необходимая для восстановления сплайна в дальнейшем (радиус, координаты конца дуги C_1 и др.).

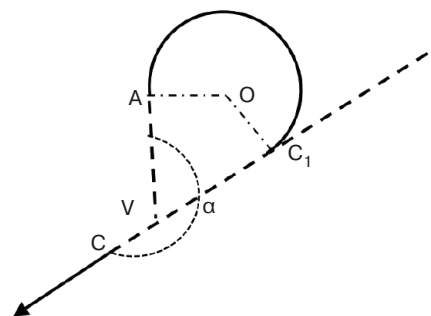


Рис. 4. Расчет при углах поворота больше π

Если угол поворота $\alpha > \pi$ (рис. 4), то особых сложностей не возникает. В этом случае $AV = R |\operatorname{tg}(\pi - \alpha/2)| = R |\operatorname{tg}(\alpha/2)|$, прямая вставка – CC_1 , а длина дуги $L = R\alpha$. Следовательно, проверка ограничений (1)–(3) выполняется так же, как и при малых углах поворота. В теоретически возможном случае $\alpha = \pi$ (рис. 5) вершины угла нет, радиус равен половине расстояния между параллельными прямыми, длина дуги $L = \pi R$. Прямая вставка CC_1 , величины R и L могут оказаться недопустимыми. Вычисление отклонений от точек съемки выполняется также, как и ранее.

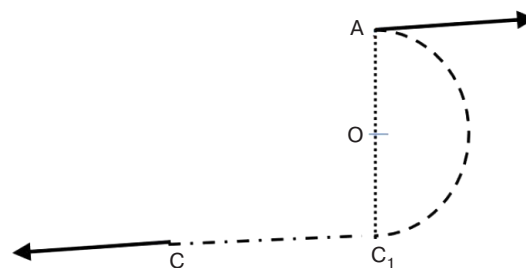


Рис. 5. Расчет при параллельных прямых

Отметим, что сравнения вариантов и их отбраковки по значению целевой функции на первом шаге нет.

Общий шаг алгоритма

На последующих шагах рассматриваются все нормали в интервале от $2L_{\min}$ до $S - L_{\min}$, где S – длина исходной ломаной. Для каждой такой нормали анализируются возможности построения связки «окружность + прямая», точка начала которой принадлежит предшествующей нормали, отстоящей от рассматриваемой не менее чем на L_{\min} и не более чем на L_{\max} . Отличие от первого шага алгоритма в том, что теперь для каждой точки и направления на рассматриваемой нормали есть много вариантов левой стороны угла вместо одного. Все допустимые варианты перехода в рассматриваемое состояние из предшествующих состояний сравниваются по целевой функции, и наилучший из них запоминается.

При этом запоминается и соответствующее состояние начала построенной связки. Другими словами, происходит отбраковка не только недопустимых по ограничениям, но и неэффективных переходов. Может оказаться, что в одно и то же состояние приводят два допустимых пути, состоящих из разного числа связок. Это означает, что в процессе динамического программирования рассматриваются траектории с различным числом элементов, и в итоге определяется число элементов аппроксимирующего сплайна, которое было неизвестно.

На последнем шаге выполняются те же действия для конечного состояния или нескольких таких состояний, если они заданы. В итоге сравнения получается значение целевой функции для лучшего варианта траектории. Траектория, т.е. искомый сплайн, определяется обычным для динамического программирования обратным разворотом из найденного конечного наилучшего состояния по цепочке связей, так как для каждого состояния запоминали соответствующее ему начало кривой [20, 21].

СОКРАЩЕНИЕ ПЕРЕБОРА ВАРИАНТОВ

Для рассматриваемой задачи и алгоритма динамического программирования характерно, что наличие ограничений не только не усложняет задачу, но и дает возможность резкого сокращения перебора вариантов. При неудачной попытке построить связку «дуга окружности + отрезок прямой» из-за нарушения ограничений многие переходы в другое состояние (смещение по правой нормали или повороты касательной, рис. 3) оказываются заведомо нецелесообразными, т.к. при таком переходе ограничения останутся нарушенными. Например, при вписывании в угол нарушено ограничение по минимальному радиусу. Очевидно, что при неизменном угле поворота α нельзя уменьшать тангенту T (расстояние от точки касания до ВУ), т.к. $R = T/\text{tg}(\alpha/2)$. Соответственно оказываются недопустимыми смещения по правой нормали, например, влево от точки C , уменьшающие T .

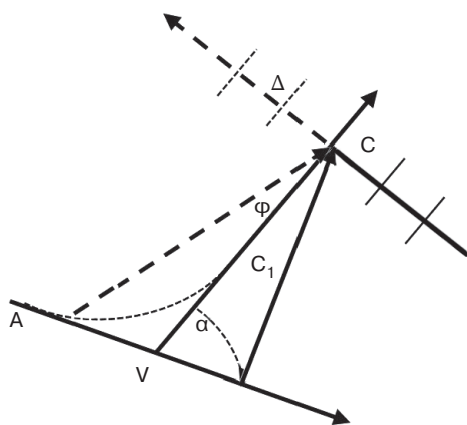


Рис. 6. Отбраковка переходов при нарушении ограничений

На рис. 6 $T = AV$. Ненужные при $R < R_{\min}$ переходы в новое состояние из точки C (смещения по нормали и повороты касательной) показаны пунктиром. Если же прямая вставка C_1C меньше допустимой, ограничения по радиусам и длине кривой выполнены, то, наоборот, только отмеченные пунктиром смещения и повороты дают ее увеличение. Однако при этом уменьшаются тангента AV и длина кривой, поэтому «запаса» по этим параметрам может не хватить.

При любом расположении нормалей и различных углах поворота каждое нарушенное ограничение дает информацию о том, в какие состояния на данной нормали переход нецелесообразен. Такой анализ несколько усложняет алгоритм построения сплайна, что вполне окупается сокращением перебора вариантов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложенный способ аппроксимации последовательности точек на плоскости сплайном с окружностями и прямыми может использоваться не только в проектировании трасс линейных сооружений, но и вообще при обработке данных любого типа при построении траекторий. Что касается его практического применения в проектировании трасс линейных сооружений, то как и в случае с другими проектирующими программами, вопрос остается открытым и упирается в отсутствие заинтересованных потребителей.

В будущем в России возможно увеличение объемов проектных работ в рамках нового строительства и реконструкции трасс железных и автомобильных дорог. Следствием этого будет повышение заинтересованности соответствующих инстанций в снижении затрат в строительстве за счет оптимизации проектных решений, что делает актуальным разработку новых проектирующих алгоритмов и программ.

Для их создания нужны теоретические и экспериментальные исследования специализированными научными подразделениями, как это было до 1990-х гг. Первые российские разработки в области оптимизации проектных решений существенно опережали зарубежные. Однако и в настоящее время зарубежные авторы предлагают в основном разного рода эвристические алгоритмы, не используя достижения современной математики. Представленная статья и ее продолжение – оптимизация сплайнов с дугами окружностей и прямыми при аппроксимации многозначных функций с использованием нелинейного программирования – открывает путь к решению более сложной и более важной с теоретической и практической точек зрения задачи аппроксимации многозначных функций составными сплайнами с клотоидами. Это актуальная задача дальнейших исследований в данной области.

Вклад авторов. Все авторы в равной степени внесли свой вклад в исследовательскую работу.

Authors' contribution. All authors equally contributed to the research work.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карпов Д.А., Струченков В.И. Двухэтапная сплайн-аппроксимация в компьютерном проектировании трасс линейных сооружений. *Российский технологический журнал*. 2021;9(5):45–56. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2021-9-5-45-56>
2. Альберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. *Теория сплайнов и ее приложения*: пер. с англ. М.: Мир; 1972. 312 с.
3. Хакимов Б.В. *Моделирование корреляционных зависимостей сплайнами на примерах в геологии и экологии*. СПб.: Нева; 2003. 144 с. ISBN 5-7654-2951-3
4. Pu H., Li W., Schonfeld P., et al. A method for automatically recreating the horizontal alignment geometry of existing railways. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*. 2019;34(1):71–94. <https://doi.org/10.1111/mice.12392>
5. Струченков В.И., Баранов М.А., Рабинович В.С. Использование математических методов оптимизации и ЭВМ при проектировании продольного профиля железных дорог; под ред. Малявского Б.К. Серия: *Труды Всесоюзного научно-исследовательского института транспортного строительства*. Вып. 101. М.: Транспорт; 1977. 169 с.
6. Price M. Under construction: building and calculating turn radii. *ArcUser Magazine*. 2010;13(1):50–56. URL: <https://www.esri.com/news/arcuser/0110/turning.html>
7. Bosurgi G., D'Andrea A. A polynomial parametric curve (PPC-curve) for the design of horizontal geometry of highways. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*. 2012;27(4):303–312. <https://doi.org/10.1111/j.1467-8667.2011.00750.x>
8. Imran M., Hassan Y., Patterson D. GPS-GIS-based procedure for tracking vehicle path on horizontal alignments. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*. 2006;21(5):383–394. <https://doi.org/10.1111/j.1467-8667.2006.00444.x>
9. Othman S., Thomson R., Lanner G. Using naturalistic field operational test data to identify horizontal curves. *J. Transport. Eng.* 2012;138(9):1151–1160. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)te.1943-5436.0000408](https://doi.org/10.1061/(asce)te.1943-5436.0000408)
10. Vázquez-Méndez M.E., Casal G., Castro A. An algorithm for random generation of admissible horizontal alignments for optimum layout design. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*. 2021;36(8):1056–1072. <https://doi.org/10.1111/mice.12682>
11. Jha M.K., McCall C., Schonfeld P. Using GIS, genetic algorithms, and visualization in highway development. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*. 2001;16(6):399–414. <https://doi.org/10.1111/0885-9507.00242>
12. Jha M.K., Schonfeld P. A highway alignment optimization model using geographic information systems. *Transportation Research Part A: Policy and Practice*. 2004;38(6):455–481. <https://doi.org/10.1016/j.tra.2004.04.001>
13. Jong J.C., Jha M.K., Schonfeld P. Preliminary highway design with genetic algorithms and geographic information systems. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*. 2000;15(4):261–271. <https://doi.org/10.1111/0885-9507.00190>

REFERENCES

1. Karpov D.A., Struchenkov V.I. Two-stage spline approximation in linear structure routing. *Russian Technological Journal*. 2021;9(5):45–56 (in Russ.). <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2021-9-5-45-56>
2. Ahlberg J.H., Nilson E.N., Walsh J.L. *The theory of splines and their applications*. Academic press; 1967. 296 p. [Ahlberg J., Nilson E., Walsh J. *Teoriya splainov i ee prilozheniya (The theory of splines and their applications)*: transl. from Engl. Moscow: Mir; 1972. 312 p. (in Russ.).]
3. Khakimov B.V. *Modelirovanie korrelyatsionnykh zavisimostei splainami na primerakh v geologii i ekologii (Modeling of correlation dependences by splines on examples in geology and ecology)*. St. Petersburg: Neva; 2003. 144 p. (in Russ.). ISBN 5-7654-2951-3.
4. Pu H., Li W., Schonfeld P., et al. A method for automatically recreating the horizontal alignment geometry of existing railways. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*. 2019;34(1):71–94. <https://doi.org/10.1111/mice.12392>
5. Struchenkov V.I., Baranov M.A., Rabinovich V.S. The use of mathematical optimization methods and a computer in the design of the longitudinal profile of railways. Malyavskii B.K. (Ed.). *Seriya: Trudy Vsesoyuznogo nauchno-issledovatel'skogo instituta transportnogo stroitel'stva = Series: Proceedings of the All Union Scientific Research Institute of Transport Construction*. Iss. 101. Moscow: Transport; 1977. 169 p. (in Russ.).
6. Price M. Under construction: building and calculating turn radii. *ArcUser Magazine*. 2010;13(1):50–56. Available from URL: <https://www.esri.com/news/arcuser/0110/turning.html>
7. Bosurgi G., D'Andrea A. A polynomial parametric curve (PPC-curve) for the design of horizontal geometry of highways. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*. 2012;27(4):303–312. <https://doi.org/10.1111/j.1467-8667.2011.00750.x>
8. Imran M., Hassan Y., Patterson D. GPS-GIS-based procedure for tracking vehicle path on horizontal alignments. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*. 2006;21(5):383–394. <https://doi.org/10.1111/j.1467-8667.2006.00444.x>
9. Othman S., Thomson R., Lanner G. Using naturalistic field operational test data to identify horizontal curves. *J. Transport. Eng.* 2012;138(9):1151–1160. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)te.1943-5436.0000408](https://doi.org/10.1061/(asce)te.1943-5436.0000408)
10. Vázquez-Méndez M.E., Casal G., Castro A. An algorithm for random generation of admissible horizontal alignments for optimum layout design. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*. 2021;36(8):1056–1072. <https://doi.org/10.1111/mice.12682>
11. Jha M.K., McCall C., Schonfeld P. Using GIS, genetic algorithms, and visualization in highway development. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*. 2001;16(6):399–414. <https://doi.org/10.1111/0885-9507.00242>
12. Jha M.K., Schonfeld P. A highway alignment optimization model using geographic information systems. *Transportation Research Part A: Policy and Practice*. 2004;38(6):455–481. <https://doi.org/10.1016/j.tra.2004.04.001>

14. Kang M.W., Schonfeld P., Yang N. Prescreening and repairing in a genetic algorithm for highway alignment optimization. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*. 2009;24(2):109–119. <https://doi.org/10.1111/j.1467-8667.2008.00574.x>
15. Pushak Y., Hare W., Lucet Y. Multiple-path selection for new highway alignments using discrete algorithms. *Eur. J. Operational Res.* 2016;248(2):415–427. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2015.07.039>
16. Sarma K.C., Adeli H. Bilevel parallel genetic algorithms for optimization of large steel structures. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*. 2001;16(5):295–304. <https://doi.org/10.1111/0885-9507.00234>
17. Shafahi Y., Bagherian M. A customized particle swarm method to solve highway alignment optimization problem. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*. 2013;28(1):52–67. <https://doi.org/10.1111/j.1467-8667.2012.00769.x>
18. Audet C., Hare W. *Derivative-Free and Blackbox Optimization*. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Springer International Publishing; 2017. 302 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-68913-5>
19. Cerf R. The quasispecies regime for the simple genetic algorithm with roulette wheel Selection. *Advances in Applied Probability*. 2017;49(3):903–926. <https://doi.org/10.1017/apr.2017.26>
20. Струченков В.И. *Методы оптимизации трасс в САПР линейных сооружений*. М.: Солон- Пресс; 2014. 272 с. ISBN 978-5-91359-139-5
21. Struchenkov V.I. Piecewise parabolic approximation of plane curves with restrictions in computer-aided design of road routes. *Transaction Machine Learning and Artificial Intelligence*. 2013;1(1):16–26. URL: <http://scholarpublishing.org/index.php/TMLAI/article/view/10/TMLAI-13-1015>
22. Вентцель Е.С. *Исследование операций: задачи, принципы, методология*. М.: КноРус; 2010. 198 с. ISBN 978-5-406-00682-5
13. Jong J.C., Jha M.K., Schonfeld P. Preliminary highway design with genetic algorithms and geographic information systems. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*. 2000;15(4):261–271. <https://doi.org/10.1111/0885-9507.00190>
14. Kang M.W., Schonfeld P., Yang N. Prescreening and repairing in a genetic algorithm for highway alignment optimization. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*. 2009;24(2):109–119. <https://doi.org/10.1111/j.1467-8667.2008.00574.x>
15. Pushak Y., Hare W., Lucet Y. Multiple-path selection for new highway alignments using discrete algorithms. *Eur. J. Operational Res.* 2016;248(2):415–427. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2015.07.039>
16. Sarma K.C., Adeli H. Bilevel parallel genetic algorithms for optimization of large steel structures. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*. 2001;16(5):295–304. <https://doi.org/10.1111/0885-9507.00234>
17. Shafahi Y., Bagherian M. A customized particle swarm method to solve highway alignment optimization problem. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*. 2013;28(1):52–67. <https://doi.org/10.1111/j.1467-8667.2012.00769.x>
18. Audet C., Hare W. *Derivative-Free and Blackbox Optimization*. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Springer International Publishing; 2017. 302 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-68913-5>
19. Cerf R. The quasispecies regime for the simple genetic algorithm with roulette wheel Selection. *Advances in Applied Probability*. 2017;49(3):903–926. <https://doi.org/10.1017/apr.2017.26>
20. Struchenkov V.I. *Metody optimizatsii trass v SAPR lineinykh sooruzhenii (Methods for route optimization in CAD of linear structures)*. Moscow: Solon-Press; 2014. 272 p. (in Russ.). ISBN 8-5-91359-139-5
21. Struchenkov V.I. Piecewise parabolic approximation of plane curves with restrictions in computer-aided design of road routes. *Transaction Machine Learning and Artificial Intelligence*. 2013;1(1):16–26. Available from URL: <http://scholarpublishing.org/index.php/TMLAI/article/view/10/TMLAI-13-1015>
22. Venttsel' E.S. *Issledovanie operatsii: zadachi, printsipy, metodologiya (Operations Research: Objectives, Principles, Methodology)*. Moscow: KnoRus; 2010. 198 p. (in Russ.). ISBN 978-5-406-00682-5

Об авторах

Карпов Дмитрий Анатольевич, к.т.н., заведующий кафедрой общей информатики Института искусственного интеллекта, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: karpov@mirea.ru. SPIN-код РИНЦ 2619-7100, <https://orcid.org/0000-0003-3734-7182>

Струченков Валерий Иванович, д.т.н., профессор кафедры общей информатики Института искусственного интеллекта, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: str1942@mail.ru. SPIN-код РИНЦ 4581-4698, <https://orcid.org/0000-0002-9801-7454>

About the authors

Dmitry A. Karpov, Cand. Sci. (Eng.), Head of the General Informatics Department, Institute of Artificial Intelligence, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: karpov@mirea.ru. RSCI SPIN-code 2619-7100, <https://orcid.org/0000-0003-3734-7182>

Valery I. Struchenkov, Dr. Sci. (Eng.), Professor, General Informatics Department, Institute of Artificial Intelligence, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: str1942@mail.ru. RSCI SPIN-code 4581-4698, <https://orcid.org/0000-0002-9801-7454>