

УДК 621.3.09  
<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2022-10-4-38-43>



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

## Параметризация пользовательских функций в цифровой обработке сигналов для получения углового сверхразрешения

А.А. Щукин<sup>®</sup>, А.Е. Павлов

МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, 119454 Россия  
<sup>®</sup> Автор для переписки, [shchukin.a.a@edu.mirea.ru](mailto:shchukin.a.a@edu.mirea.ru)

### Резюме

**Цели.** Одна из важнейших задач развития угломерных систем – улучшение разрешающей способности по угловым координатам. Этого можно добиться двумя способами: во-первых, увеличением апертуры такой системы, что весьма дорого и часто технически трудно выполнимо; во-вторых, с помощью методов цифровой обработки сигналов. Если регистрируемые источники сигнала расположены близко друг к другу и не разрешаются по критерию Рэлея, то невозможно определить их количество, расположение и характеристики отражения. Цель работы – разработка алгоритма цифровой обработки сигналов для получения углового сверхразрешения.

**Методы.** Используются математические методы решения обратных задач. Эти методы позволяют преодолеть критерий Рэлея, т.е. дают возможность получить угловое сверхразрешение. Данные задачи обладают неустойчивостью. Существует бесконечное количество приближенных решений, возможно возникновение ложных целей. Поиск оптимального решения проводится путем минимизации среднеквадратического отклонения.

**Результаты.** В статье приведено описание математической модели работы угломерной системы. На основе существующих методов разработан алгоритм обработки сигнала, использующий принцип параметризации пользовательских функций. Представлены результаты численных экспериментов по достижению сверхразрешения алгебраическими методами. Проведена оценка устойчивости решения. Измерены точность и соответствие амплитуды полученных объектов начальным параметрам. Проведена оценка степени превышения критерия Рэлея полученным решением.

**Выводы.** Показано, что алгебраические методы позволяют получать устойчивые решения с угловым сверхразрешением. Получаемые результаты правильно отражают расположение объектов с незначительной ошибкой. Ошибки в распределении амплитуды сигнала невелики, появляющиеся ложные цели имеют пренебрежимо малую амплитуду.

**Ключевые слова:** компьютерное моделирование, сверхразрешение, поиск объектов, имитационная модель

• Поступила: 15.12.2021 • Доработана: 17.05.2022 • Принята к опубликованию: 24.06.2022

**Для цитирования:** Щукин А.А., Павлов А.Е. Параметризация пользовательских функций в цифровой обработке сигналов для получения углового сверхразрешения. *Russ. Technol. J.* 2022;10(4):38–43. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2022-10-4-38-43>

**Прозрачность финансовой деятельности:** Авторы не имеют финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

RESEARCH ARTICLE

# Parameterization of user functions in digital signal processing for obtaining angular superresolution

Andrey A. Shchukin<sup>®</sup>, Aleksandr E. Pavlov

MIREA – Russian Technological University, Moscow, 119454 Russia

<sup>®</sup> Corresponding author, e-mail: shchukin.a.a@edu.mirea.ru

## Abstract

**Objectives.** One of the most important tasks in the development of goniometric systems is improving resolution in terms of angular coordinates. This can be achieved in two ways: firstly, by increasing the aperture, which is very expensive and often technically challenging to implement; secondly, with the help of digital signal processing methods. If the recorded signal sources are located close to each other and not resolved by the Rayleigh criterion, it can be impossible to determine their number, location and reflection characteristics. The aim of the present work is to develop a digital signal processing algorithm for obtaining angular superresolution.

**Methods.** Mathematical methods for solving inverse problems are used to overcome the Rayleigh criterion, i.e., obtain angular superresolution. These problems are unstable, since there is an infinite number of approximate solutions and false targets may occur. The search for the optimal solution is carried out by minimizing the standard deviation.

**Results.** A description of a mathematical model for a goniometric system is presented. A signal processing algorithm is developed based on existing methods according to the principle of parameterization of user functions. Results of numerical experiments for achieving superresolution by algebraic methods are given along with an estimation of solution stability. The accuracy and correspondence of the amplitude of the obtained objects to the initial parameters are measured. The degree of excess of the Rayleigh criterion by the obtained solution is estimated.

**Conclusions.** Algebraic methods can be used to obtain stable solutions with angular superresolution. The results obtained correctly reflect the location of objects with a minor error. Errors in the distribution of the signal amplitude are small, appearing false targets have negligible amplitude.

**Keywords:** computer simulation, super resolution, object search, simulation model

• Submitted: 15.12.2021 • Revised: 17.05.2022 • Accepted: 24.06.2022

**For citation:** Shchukin A.A., Pavlov A.E. Parameterization of user functions in digital signal processing for obtaining angular superresolution. *Russ. Technol. J.* 2022;10(4):38–43. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2022-10-4-38-43>

**Financial disclosure:** The authors have no a financial or property interest in any material or method mentioned.

The authors declare no conflicts of interest.

## ВВЕДЕНИЕ

Угломерные системы имеют множество областей применения. Определяющими критериями при реализации такой системы являются точность и быстродействие. Существуют различные способы получения углового сверхразрешения – метод Кейпона, метод теплового шума, MUSIC (Multiple Signal Classification), ESPRIT (Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariant Techniques) и др. Такие методы, как MUSIC и ESPRIT, используют узкополосные сигналы и неэффективны при

использовании широкополосных и сверхширокополосных сигналов (СШП, UWB – Ultra-Wide Band). Многие из этих методов не являются достаточно эффективными и универсальными, т.к. при отношении сигнал/шум менее 20 дБ возникают ошибки в решении [1–8]. Кроме того, далеко не все перечисленные методы позволяют решать двумерные задачи [9–11].

В данном исследовании разработан алгоритм приближенного определения углового расположения близкорасположенных целей. Рассматриваемые в статье алгебраические методы дают возможность получить решение с низкими вычислительными

затратами. Представленный алгоритм имеет высокое быстродействие, что позволяет использовать его в режиме реального времени. Для оценки качества работы метода измеряется степень превышения критерия Рэлея полученным решением.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Модель принимаемого системой наблюдения сигнала представляет собой двумерный интеграл (1):

$$U(x, y) := \int_{\Omega} F(x - q, y - r) I(q, r) drdq, \quad (1)$$

где  $F(x, y)$  – диаграмма направленности (ДН) системы наблюдения;  $\Omega$  – двумерная область расположения источника;  $I(q, r)$  – угловое распределение амплитуды источника сигнала, которое подлежит определению [12, 13].

Целью исследования является разработка алгоритма цифровой обработки сигналов для получения углового сверхразрешения.

Задача исследования – восстановить угловые распределения амплитуды отраженного сигнала по измененному сигналу  $U(x, y)$  и известным характеристикам угломерной системы. Для этого необходимо получить приближенное решение линейного интегрального уравнения Фредгольма первого рода типа свертки (1).

Получение углового сверхразрешения с помощью цифровой обработки сигнала  $U(x, y)$  представляет собой решение обратной задачи.

### МЕТОД РЕШЕНИЯ

Поиск решения обратной задачи проводится на основе параметризации [14, 15], когда вместо неизвестной функции  $I(q, r)$  используется разложение искомого распределения амплитуд по задаваемой системе ортогональных функций. Тогда решение может быть представлено в виде:

$$I(q, r) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i g_i(q, r) \approx \sum_{i=1}^N a_i g_i(q, r), \quad (2)$$

где  $a_i$  – неизвестные коэффициенты;  $g_i(q, r)$  – функции, задаваемые пользователем. Коэффициенты  $a_i$  могут быть найдены путем минимизации среднеквадратичного отклонения решения в области  $\theta > \Omega$  от исходного сигнала:

$$\delta^2 = \int_{\theta} \left[ U(x, y) - \sum_{i=1}^{\infty} a_i \int_{\Omega} F(x - q, y - r) g_i(q, r) drdq \right]^2 dydx, \quad (3)$$

где  $\theta$  – двумерная область сканирования.

Для этого приравниваются нулю частные производные  $\delta^2$  по  $a_i$ . В итоге получается система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) из  $N$  уравнений:

$$a = GV, \quad (4)$$

где

$$G_{j,i} := \int_{\theta} \psi_j(x, y) \psi_i(x, y) dydx, \quad (5)$$

$$\psi_i = \int_{\Omega} F(x - q, y - r) g_i(q, r) drdq,$$

$$V_j := \int_{\theta} U(x, y) \psi_j(x, y) dydx. \quad (6)$$

Угловое сверхразрешение увеличивается при использовании большего количества функций  $g_i(q, r)$ , однако с увеличением их количества также возрастает размерность СЛАУ и, следовательно, неустойчивость решения. Она проявляется в виде ложных источников сигнала и искажений в полученном решении. Это связано с особенностью обратных задач, которая состоит в том, что незначительные изменения исходных данных, например, случайные величины (шумы) могут привести к значительным ошибкам, т.е. к неустойчивости. Если в корректно поставленных задачах небольшие шумы приводят к небольшим ошибкам в решении, то в обратных задачах полученное решение может отличаться от истинного на несколько порядков.

### РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Получаемые решения обратных задач исследовались в ходе численных экспериментов на математических моделях. Исходные объекты и принимаемый сигнал представлены на рис. 1, где  $\theta_{0.5}$  – полуширина ДН. Были заданы три точечных объекта. Все объекты расположены достаточно близко друг к другу и не разрешаются по критерию Рэлея.

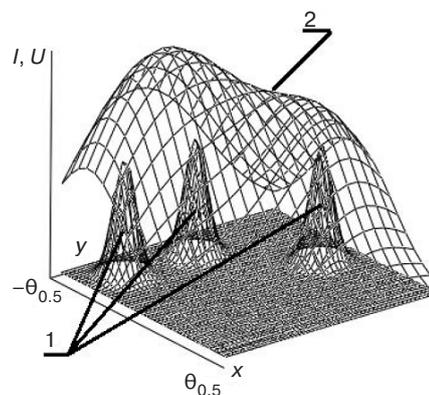


Рис. 1. Модель принимаемого сигнала и исходные объекты: 1 – исходные объекты; 2 – принимаемый сигнал

Вид сигнала  $U(x, y)$  не позволяет отдельно наблюдать объекты, в частности, три исходных объекта сливаются в один (сетчатая поверхность 2).

Для поиска решения задаются девять функций  $g_i(q, r)$ , покрывающих всю исследуемую область  $\Omega$ , три из которых представлены на рис. 2.

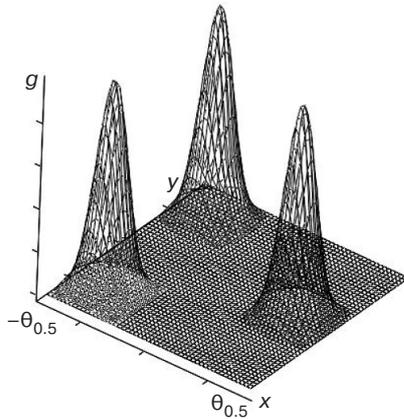


Рис. 2. Вид трех пользовательских функций

Результат решения системы СЛАУ (4)–(6) и исходные объекты представлены на рис. 3.

В результате эксперимента было получено устойчивое решение с угловым сверхразрешением. Угловые координаты всех трех объектов определены с хорошей точностью, найденные амплитуды центрального и правого объекта близки к исходной (около 80% от исходной), амплитуда левого объекта несколько ниже исходной (около 60% от исходной). Полученное угловое сверхразрешение существенно превышает критерий Рэля (угловое расстояние между объектами составляет  $0.3\theta$ ).

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе показано, что алгебраические методы позволяют получать устойчивые решения обратных задач с угловым сверхразрешением, которые отражают расположение исходных объектов с незначительной ошибкой (координаты исходных объектов и полученного решения совпадают). Ошибки в распределении амплитуды сигнала невелики (амплитуда полученного решения составляет от 60% до 80% от амплитуды исходных объектов). Между

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Леховицкий Д.И. Статистический анализ сверхразрешающих методов пеленгации источников шумовых излучений при конечном объеме обучающей выборки. *Прикладная радиоэлектроника*. 2009;8(4):526–541.

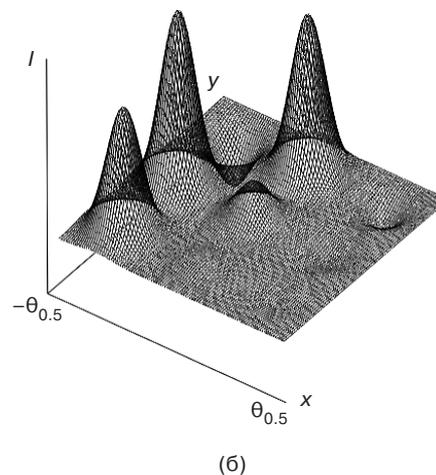
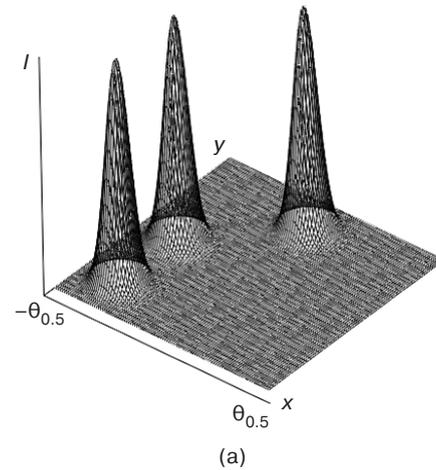


Рис. 3. Исходные объекты (а) и полученный результат (б)

центральным и правым объектом появляется ложная цель, но с пренебрежимо малой амплитудой, менее 10% от амплитуды истинных объектов (рис. 3б, в центре области).

### Вклад авторов

**А.А. Щукин** – подготовка статьи, алгоритмов, графического материала.

**А.Е. Павлов** – подготовка статьи, алгоритмов, графического материала.

### Authors' contributions

**A.A. Shchukin** – preparing algorithms and graphic materials, writing the text of the article.

**A.E. Pavlov** – preparing algorithms and graphic materials, writing the text of the article.

### REFERENCES

1. Lekhovitskii D.I. Statistical analysis of superresolution methods for direction finding of noise sources with a finite volume of training sample. *Prikladnaya radioelektronika*. 2009;8(4):526–541 (in Russ.).

2. Bhaskar D. Rao, Hari K.V.S. Weighted subspace methods and spatial smoothing: analysis and comparison. *IEEE Transaction. Signal Process.* 1993;41(2):788–803. <https://doi.org/10.1109/78.193218>
3. Хачатуров В.Р., Федоркин Ю.А., Коновальчик А.С. Влияние случайных фазовых ошибок приемных каналов антенной решетки на качество разрешения источников внешнего излучения. *Антенны.* 2000;2:55–59.
4. Ратынский М.В. Анализ характеристик алгоритмов пеленгации со сверхразрешением. *Радиотехника.* 1992;(10–11):63–66.
5. Roy R., Kailath T. ESPRIT-estimation of signal parameters via rotational invariance techniques. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing.* 1989;37(7):984–995. <https://doi.org/10.1109/29.32276>
6. Rao B.D., Hari K.V.S. Performance analysis of Root-Music. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing.* 1989;37(12):1939–1949. <https://doi.org/10.1109/29.45540>
7. Stoica P., Nehorai A. Performance comparison of subspace rotation and MUSIC methods for direction estimation. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing.* 1991;39(2):446–453. <https://doi.org/10.1109/78.80828>
8. Трифонов А.П., Шинаков Ю.С. *Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех.* М.: Радио и связь; 1986. 264 с.
9. Lagovsky B., Samokhin A., Shestopalov Y. Increasing effective angular resolution measuring systems based on antenna arrays. In: *2016 URSI International Symposium on Electromagnetic Theory (EMTS).* 2016. P. 432–434. <https://doi.org/10.1109/URSI-EMTS.2016.7571418>
10. Lagovsky B.A., Samokhin A.B. Superresolution in signal processing using a priori information. In: *Proceedings of the 2017 19th International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA).* 2017. P. 779–783. <https://doi.org/10.1109/ICEAA.2017.8065365>
11. Lagovsky B.A., Chikhina A.G. Superresolution in signal processing using a priori information. In: *Progress in Electromagnetics Research Symposium (PIERS).* 2017. P. 944–947. <https://doi.org/10.1109/PIERS.2017.8261879>
12. Lagovsky B.A., Samokhin A.B., Shestopalov Y.V. Creating two-dimensional images of objects with high angular resolution. In: *2018 IEEE Asia-Pacific Conference on Antennas and Propagation (APCAP).* 2018. P. 114–115. <https://doi.org/10.1109/APCAP.2018.8538220>
13. Lagovsky B., Samokhin A., Shestopalov Y. Angular superresolution based on a priori information. *Radio Science.* 2021;56(1):e2020RS007100. <https://doi.org/10.1029/2020RS007100>
14. Лаговский Б.А., Самохин А.Б. Достижение углового сверхразрешения на основе априори известной информации. *Физические основы приборостроения.* 2019;8(4–34):16–22. <https://doi.org/10.25210/jfop-1904-016022>
15. Лаговский Б.А., Чикина А.Г. Регрессионные методы получения сверхразрешения для групповой цели. *Успехи современной радиоэлектроники.* 2020;1:69–76.
2. Bhaskar D. Rao, Hari K.V.S. Weighted subspace methods and spatial smoothing: analysis and comparison. *IEEE Transaction. Signal Process.* 1993;41(2):788–803. <https://doi.org/10.1109/78.193218>
3. Khachaturov V.R., Fedorkin Yu.A., Konoval'chik A.S. Influence of random phase errors of the receiving channels of the antenna array on the quality of resolution of external radiation sources. *Antenny = J. Antennas.* 2000;2:55–59 (in Russ.).
4. Ratynskii M.V. Characteristics analysis of super resolution direction finding algorithms. *Radiotekhnika = J. Radioengineering.* 1992;(10–11):63–66 (in Russ.).
5. Roy R., Kailath T. ESPRIT-estimation of signal parameters via rotational invariance techniques. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing.* 1989;37(7):984–995. <https://doi.org/10.1109/29.32276>
6. Rao B.D., Hari K.V.S. Performance analysis of Root-Music. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing.* 1989;37(12):1939–1949. <https://doi.org/10.1109/29.45540>
7. Stoica P., Nehorai A. Performance comparison of subspace rotation and MUSIC methods for direction estimation. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing.* 1991;39(2):446–453. <https://doi.org/10.1109/78.80828>
8. Trifonov A.P., Shinakov Yu.S. *Sovmestnoe razlichenie signalov i otsenka ikh parametrov na fone pomekh (Joint discrimination of signals and estimation of their parameters on the background of interference).* Moscow: Radio i svyaz'; 1986. 264 p. (in Russ.).
9. Lagovsky B., Samokhin A., Shestopalov Y. Increasing effective angular resolution measuring systems based on antenna arrays. In: *2016 URSI International Symposium on Electromagnetic Theory (EMTS).* 2016. P. 432–434. <https://doi.org/10.1109/URSI-EMTS.2016.7571418>
10. Lagovsky B.A., Samokhin A.B. Superresolution in signal processing using a priori information. In: *Proceedings of the 2017 19th International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA).* 2017. P. 779–783. <https://doi.org/10.1109/ICEAA.2017.8065365>
11. Lagovsky B.A., Chikhina A.G. Superresolution in signal processing using a priori information. In: *Progress in Electromagnetics Research Symposium (PIERS).* 2017. P. 944–947. <https://doi.org/10.1109/PIERS.2017.8261879>
12. Lagovsky B.A., Samokhin A.B., Shestopalov Y.V. Creating two-dimensional images of objects with high angular resolution. In: *2018 IEEE Asia-Pacific Conference on Antennas and Propagation (APCAP).* 2018. P. 114–115. <https://doi.org/10.1109/APCAP.2018.8538220>
13. Lagovsky B., Samokhin A., Shestopalov Y. Angular superresolution based on a priori information. *Radio Science.* 2021;56(1):e2020RS007100. <https://doi.org/10.1029/2020RS007100>
14. Lagovsky B.A., Samokhin A.B. Achievement of angular superresolution based on the priority of known information. *Fizicheskie osnovy priborostroeniya = Physical Bases of instrumentation.* 2019;8(4–34):16–22 (in Russ.). <https://doi.org/10.25210/jfop-1904-016022>
15. Lagovsky B.A., Chikhina A.G. Regression methods for obtaining a super resolution for a group goal. *Uspekhi sovremennoi radioelektroniki = Achievements of modern Radioelectronics.* 2020;1:69–76 (in Russ.).

### Об авторах

**Щукин Андрей Алексеевич**, аспирант кафедры «Прикладная математика» Института информационных технологий ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: shchukin.a.a@edu.mirea.ru. ResearcherID CAG-1481-2022, <http://orcid.org/0000-0003-2849-0710>

**Павлов Александр Евгеньевич**, аспирант кафедры «Прикладная математика» Института информационных технологий ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: pavlov.a.e@edu.mirea.ru. ResearcherID CAG-1509-2022, <http://orcid.org/0000-0001-5967-9036>

### About the authors

**Andrey A. Shchukin**, Postgraduate Student, Applied Mathematics Department, Institute of Information Technology, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: shchukin.a.a@edu.mirea.ru. ResearcherID CAG-1481-2022, <http://orcid.org/0000-0003-2849-0710>

**Aleksandr E. Pavlov**, Postgraduate Student, Applied Mathematics Department, Institute of Information Technology, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: pavlov.a.e@edu.mirea.ru. ResearcherID CAG-1509-2022, <http://orcid.org/0000-0001-5967-9036>