

УДК 519.857

## КОМПЬЮТЕРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ПРОЕКТИРОВАНИИ ТРАСС ЛИНЕЙНЫХ СООРУЖЕНИЙ

**В.И. Струченков,**

*Московский технологический университет (МИРЭА), Москва, 119454 Россия*

*@Автор для переписки, e-mail: str 1942@mail.ru*

В статье рассматриваются различные подходы к созданию компьютерных программ для проектирования трасс линейных сооружений. Указываются недостатки интерактивного проектирования с заданием проектных решений проектировщиком и использованием компьютера для решения вспомогательных задач. Критически анализируется технология автоматизированного проектирования без обратных связей, как не учитывающая взаимосвязь проектных задач. Рекомендуется комплексный подход с решением проектных задач во взаимной увязке и САПР с обратными связями, в которой компьютер проектирует продольный и поперечные профили земляного полотна совместно профили по вариантам плана трассы. Излагается новый алгоритм реализации известного метода приведенного градиента, разработанный с учетом структурных особенностей системы ограничений.

**Ключевые слова:** трасса, план и продольный профиль, нелинейное программирование, целевая функция, градиент, обратная связь.

## COMPUTER TECHNOLOGIES IN LINE STRUCTURE ROUTING

**V.I. Struchenkov**

*Moscow Technological University (MIREA), Moscow, 119454 Russia*

*@Corresponding author e-mail: str 1942@mail.ru*

Under study are two approaches to creating computer programs for computer-aided design of linear structures trails.

The first approach, which realised in the existing CAD of linear structures, is not focused on the optimization of the design decisions, as the computer in these systems is used only for the decision support tasks, but all design solutions are appointed by man.

The second approach involves the use of a computer to generate design solutions based on mathematical models and optimization algorithms.

In this paper is shown how in the framework of this approach solved the problem of the joint design of longitudinal and transverse profiles of the roadbed of railways and roads. The algorithm of nonlinear programming using particular constraints of the system.

It is recommended to use an integrated approach to solving problems of design and creation of CAD with feedback.

**Keywords:** route, horizontal and vertical alignment, nonlinear programming, objective function, gradient, feedbacks.

## Введение

Линейные сооружения (дороги, трубопроводы, каналы и др.) – это сооружения, положение которых на местности определяется осью сооружения, т.е. трассой. Трасса – трехмерная кривая, которая традиционно представляется двумя плоскими кривыми: планом и продольным профилем. План трассы – это проекция трассы на горизонтальную плоскость, а продольный профиль – зависимость координаты  $Z(s)$  от длины в плане. Продольный профиль получается при развертке на плоскость вертикальной поверхности, проходящей через трассу. Пересечение этой вертикальной поверхности с поверхностью земли дает продольный профиль земли по трассе, а трасса при развертке дает проектную линию. Соответственно, проектирование трассы сводится к двум взаимосвязанным задачам: проектирование плана и проектирование продольного профиля.

На положение трассы на местности влияют различные факторы: рельеф земли, геологические, гидрологические, климатические условия, наличие других коммуникаций и запрещенных зон (например, по требованиям экологии).

В условиях равнинного рельефа особых сложностей в проектировании трасс, как правило, не возникает. Исключения могут составлять районы со сложной геологией и наличием большого числа контурных ограничений в виде запрещенных зон, развитой инфраструктурой и др. В обжитых районах положение трассы в плане практически однозначно определяется условиями землепользования, и задача поиска трехмерной кривой превращается в задачу проектирования плоской кривой, т.е. проектирования продольного профиля по одному или нескольким возможным вариантам плана трассы.

В общем случае в условиях пересеченного рельефа задача существенно усложняется из-за наличия целого ряда технических ограничений и нормативов, так как план и продольный профиль трассы должны состоять из элементов определенного вида, параметры которых ограничены. Возникает вопрос о поиске оптимального варианта трассы при проектировании плана и продольного профиля в их взаимосвязи.

Проектирование трассы предполагает решение целого ряда смежных задач. При проектировании дорог к ним относятся:

- проектирование земляного полотна (насыпей, выемок, полунасыпей-полувыемок);
- проектирование водопропускных сооружений (трубы, малые мосты);
- распределение земляных масс и выбор строительных механизмов (способов производства земляных работ) и др.

Особым случаем является наличие больших мостов и тоннелей, которые во многом определяют положение трассы в плане и в профиле.

В традиционной практике каждая из перечисленных выше проектных задач решается при уже известном положении трассы, а корректировка положения трассы производится при появлении трудностей, например, при потере устойчивости земляного полотна.

Накоплен значительный инженерный опыт в проектировании трасс линейных сооружений, но, строго говоря, основы технологии проектирования трасс таких сооружений, как железные и автомобильные дороги, в части выработки проектных решений те же, что и 100 лет тому назад. Речь идет о том, что комплекс взаимосвязанных проектных задач, перечисленных выше, решается последовательно: на основе опыта и интуиции

специалистов (или группы специалистов) задают варианты положения трассы в плане и в продольном профиле, а затем решаются перечисленные выше проектные задачи. Эта технология (назовем ее линейной) не ориентирована на поиск оптимальных по экономическим показателям проектных решений. Она не предусматривает обратных связей, т.е. обязательной корректировки положения трассы по мере поступления дополнительной информации о решениях по земляному полотну, водопропускным сооружениям и т.д. Поэтому линейная технология не учитывает в конечном итоге такие определяющие показатели, как объем земляных работ, затраты на строительство и эксплуатацию проектируемого объекта. Известно [1], что даже относительно малые смещения трассы могут приводить к существенным изменениям указанных показателей.

Таким образом, комплекс проектных задач должен рассматриваться в их взаимосвязи.

В идеале хотелось бы формализовать задачу поиска оптимальной трассы в математической модели, учитывающей взаимосвязь проектных задач, и решить соответствующую математическую задачу оптимизации один раз. Однако в настоящее время не существует математических моделей и алгоритмов проектирования трассы как пространственной кривой, т.е. совместного проектирования плана и продольного профиля даже при известных решениях смежных проектных задач, например, при оптимизации трассы дороги по уже готовому проекту.

Широкое распространение ЭВМ обусловило два направления в разработке и применении систем автоматизированного проектирования (САПР) трасс линейных сооружений, таких как железные и автомобильные дороги, трубопроводы, каналы и пр.

Первое направление основано на использовании программ визуализации проектных решений и комплексной автоматизации изготовления проектной документации (чертежи, сметы и т.п.); широкое применение нашли разработки фирмы AutoDesk: многократно усовершенствованный AutoCad и др. Соответствующая технология эффективна при наличии небольшого числа вариантов проектных решений, например, при проектировании зданий, но принципиально ущербна при проектировании трасс линейных сооружений. В действующих САПР линейных сооружений [2–4] варианты проектных решений назначаются человеком на основе опыта и интуиции, а компьютер и все периферийное оборудование используются для увязки этих вариантов и оформления результатов. Другими словами, автоматизированы только вспомогательные операции, но технология выработки проектных решений как по плану и продольному профилю, так и по решению смежных проектных задач принципиально та же, то есть линейная.

Второе направление предусматривает формализацию творческих проектных задач в математических моделях. При этом получаются задачи вариационного исчисления с ограничениями на искомую экстремаль (трассу) и со сложным функционалом. При переходе к дискретному представлению трассы (или продольного профиля) получаются задачи математического программирования с большим числом переменных и ограничений.

В рамках второго направления еще в 60-х годах прошлого века советскими исследователями были разработаны методы проектирования оптимального продольного профиля новых железных дорог по заданному плану трассы [5, 6]. Они были усовершенствованы в 70-х годах и, несмотря на отсутствие в то время технических средств достаточной мощности, соответствующие программы получили широкое применение при проекти-

ровании БАМа, а затем не только железных, но и автомобильных дорог [7–9]. Установлено, что оптимизация даже с использованием простых математических моделей дает существенный экономический эффект [8]. Однако, в 1990-х годах при переходе на ПЭВМ все эти разработки оказались не востребованы в силу резкого сокращения числа объектов нового строительства и отсутствия заинтересованности проектных организаций в повышении качества проектов трасс линейных сооружений и, соответственно, снижения затрат на строительство и последующую эксплуатацию.

В настоящее время имеются технические возможности в рамках второго направления разработать развитые САПР (Intelligence Systems), реализовать принципиально новые технологии проектирования трасс линейных сооружений и существенно повысить качество проектов. При этом линейная технология должна быть заменена технологией с обратными связями и компьютерной выработкой проектных решений на основе математических моделей и алгоритмов оптимизации.

Цель настоящей статьи – показать, как на новой технической базе решена задача совместного проектирования продольного и поперечных профилей земляного полотна железных и автомобильных дорог и реализована технология решения проектных задач с обратными связями. При проектировании трубопроводов и каналов взаимосвязь проектных задач не имеет особого значения с точки зрения проектирования оптимального продольного профиля. Поэтому далее рассматривается проектирование дорог, как наиболее сложных объектов.

### Содержательная постановка задачи

Оптимальному варианту трассы должен соответствовать минимум взвешенной суммы затрат на строительство и последующую эксплуатацию дороги. Следовательно, трасса – это экстремаль некоторого функционала, и задача поиска оптимальной трассы может рассматриваться как задача вариационного исчисления. Прежде всего, отметим, что в явном виде не удается выразить функционал, или записать уравнение трассы, т.е. формализовать задачу.

Требования к трассе железной дороги включают:

1. *В плане:* элементами плана трассы являются отрезки прямых и окружностей, сопрягаемые клотоидами. При этом длины элементов должны быть не менее заданных величин, радиусы кривых и параметры клотоид тоже ограничены. Соответствующие ограничения на план трассы выражаются нелинейными неравенствами относительно переменных, определяющих план [10]. Принципиальных отличий плана трассы железных и автомобильных дорог нет.

2. *В продольном профиле* ситуация иная: элементы продольного профиля железных дорог – это отрезки прямых, так что проектная линия ломаная, на ее элементы также накладываются ограничения. В углы ломаной вписываются окружности. При малых радиусах возникающими отклонениями от ломаной можно пренебречь в силу их малости [10], но при проектировании трасс высокоскоростных железных дорог радиусы вертикальных кривых существенно больше, и эти отклонения важны.

Продольный профиль автомобильной дороги может проектироваться подобным же образом, но чаще в качестве элементов проектной линии используют параболы второй

степени, в частности, отрезки прямых. На стыках элементы имеют общую точку и общую касательную: так называемый параболический сплайн.

Принципиальная особенность рассматриваемой задачи состоит в том, что в каждом конкретном случае неизвестно и число элементов плана, и число элементов профиля, т.е. размерность задачи, что затрудняет использование теории нелинейного программирования. Отметим, что поиск трассы как пространственной кривой сводится к многоэкстремальной задаче нелинейного программирования с нелинейной системой ограничений [10, 11].

В силу отмеченных трудностей и по ряду других причин для поиска оптимальной трассы как пространственной кривой пока не созданы приемлемые для практических целей математические модели и алгоритмы проектирования. В этой связи в качестве первого шага нами решена задача проектирования продольного профиля по заданному варианту плана трассы. При разработке первых программ, проектирующих продольный профиль, в 70-х годах прошлого века [8] в силу ограниченных технических возможностей использовались простые математические модели, основанные на следующих допущениях:

- поперечные профили земли задавались показателями косогорности, они принимались односкатными;
- не было совместного проектирования продольного и поперечных профилей земляного полотна;
- не учитывалось наличие нескольких слоев грунта;
- для уменьшения размерности задачи продольный профиль земли сглаживался.

Задача сводилась к виду: найти  $\min \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{c})$  при  $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ ,

где  $\mathbf{x}$  – вектор неизвестных;

$\mathbf{c}$  – вектор параметров;

матрица  $\mathbf{A}$  и вектор  $\mathbf{b}$  – определяют систему линейных ограничений.

Новые технические возможности позволили создать систему совместного проектирования продольного и поперечных профилей новых железных дорог в пределах перегона и ее аналог для проектирования автодорог. Формально решается задача того же вида, но используются новые математические модели и алгоритм оптимизации.

### Формализация задачи

Если обозначить профиль земли  $H(s)$ , а проектную линию  $Z(s)$ , то в первом приближении по заданной  $H(s)$  надо найти такую ломаную  $Z(s)$ , которая удовлетворяет всем ограничениям, и обеспечен

$$\min \int_0^{S_0} F(Z(s), H(s), s) ds \quad (1)$$

где  $S_0$  – длина трассы в плане, а функция  $F$  моделирует строительные затраты на элемент длины. При этом учитываются затраты на водопропускные и другие искусственные сооружения, распределение земляных масс, выбор строительных механизмов.

Задача вариационного исчисления (1) сводится к задаче нелинейного программирования, обладающей интересными особенностями независимо от конкретного вида функции  $F$ . Поскольку число элементов искомой ломаной неизвестно, то приходится считать,



что переломы профиля земли и проектной линии (т.е. профиля трассы) имеют одни и те же абсциссы. Профиль земли при использовании цифровых моделей рельефа получается в виде ломаной с неравномерным шагом, и совпадение абсцисс позволяет задать число элементов  $n$  (размерность задачи) и их длины  $s_i$  (в плане). Получится ломаная линия, число звеньев которой больше, чем нужно, но при соблюдении ограничений на ее параметры отклонения от окончательной  $Z(s)$  невелики [8]. Идея в том, чтобы найти эту ломаную путем решения задачи оптимизации, затем преобразовать ее в ломаную с элементами, длины которых не менее допустимой, определив тем самым реальную размерность задачи и начальное приближение. На последнем этапе следует выполнить оптимизацию при всех ограничениях и необходимых уточнениях целевой функции. Такой многоэтапный процесс с уточнением математической модели и ее параметров является обычным для решения сложных проектных задач творческого характера.

### Система ограничений

Зная число и длины элементов искомой ломаной, можно аналитически выразить все ограничения на  $Z(s)$ , если принять в качестве неизвестных  $z_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) ее ординаты в точках перелома. Ограничения делятся на три группы:

1. Ординаты в отдельных точках  $z_i \leq z_i^{max}$  или  $z_i \geq z_i^{min}$ .
2. Уклоны элементов профиля

$$a_i \leq (z_{i+1} - z_i)/s_i \leq b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

здесь  $s_i$  – длины элементов.

Эти ограничения являются дискретным аналогом ограничения на первую производную.

3. Разности уклонов смежных элементов:

$$c_i \leq (z_{i+2} - z_{i+1})/s_{i+1} - (z_{i+1} - z_i)/s_i \leq d_i$$

Данные ограничения являются дискретным аналогом ограничения на кривизну.

В силу малости проектных уклонов длина элемента и его проекции на ось абсцисс практически совпадают. Система ограничений имеет четко выраженную структуру. Ограничениям первой группы соответствует матрица, у которой в каждой строке все элементы равны нулю, кроме одного, который равен 1 или -1, а в каждом столбце не более двух ненулевых элементов. Ограничениям второй группы соответствует двухдиагональная матрица (два блока с разными знаками), а ограничениям третьей группы – трехдиагональная матрица (два блока с разными знаками). Именно эта структура позволила разработать новый алгоритм и решить в приемлемое время на общедоступных компьютерах возникающую задачу нелинейного программирования, размерность которой при проектировании реальных объектов достигает 1000 переменных и, соответственно, более 4000 ограничений.

Оставляя пока вопрос о конкретных моделях целевой функции и, соответственно, об алгоритме вычисления ее градиента, рассмотрим, как в новом алгоритме используется структура системы ограничений.

Широко известные алгоритмы нелинейного программирования с линейной системой ограничений [12, 13] представляют собой итерационный процесс, состоящий из следующих шагов:

1. Вычисление допустимого начального приближения  $z^0$ ;
2. Вычисление градиента целевой функции  $f^0$ ;
3. Определение множества активных ограничений (активного набора);
4. Построение направления спуска  $p^0$  в граничном линейном многообразии;
5. Проверка условий прекращения счета и, если они выполнены, то окончание процесса, иначе следующий шаг;
6. Вычисление шага  $\lambda$  и новой итерационной точки  $z^{k+1} = z^k + \lambda p^k$  и переход к пункту 2.

Эти алгоритмы отличаются способом построения вектора спуска. Если в качестве направления спуска используется проекция  $p$  антиградиента  $-\mathbf{f}$ , то стандартный алгоритм для вычисления проекции требует на каждой итерации решать систему линейных уравнений.

Так, по формуле Розена [12]

$$\mathbf{p} = -(\mathbf{E} - \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A})\mathbf{f} \quad (2)$$

Здесь  $\mathbf{E}$  – единичная матрица,  $\mathbf{A}$  – матрица активных на данной итерации ограничений, верхний индекс  $T$  означает транспонирование.

При большой размерности задачи это приводит к неприемлемым затратам машинного времени.

В использовавшейся ранее программе для вычисления проекции антиградиента на каждой итерации вместо систем с матрицей  $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$  решались системы линейных уравнений малой размерности [8]. Однако наличие структурных особенностей системы ограничений позволяет при любой комбинации активных ограничений построить базис в соответствующем граничном линейном многообразии и определять направление спуска вообще без решения каких-либо систем линейных уравнений. На этом основан новый алгоритм.

Действительно, пусть мы знаем этот базис, и его столбцы составляют матрицу  $\mathbf{C}$ . В качестве направления спуска принят  $\mathbf{p}^* = -\mathbf{C}\mathbf{C}^T\mathbf{f}$ , то есть приведенный антиградиент [12, 13]. Для его вычисления достаточно построить только базисные векторы, вычислить  $\mathbf{C}^T\mathbf{f}$ , а потом умножить  $\mathbf{C}$  на результат. Поскольку  $(\mathbf{p}^*, -\mathbf{f}) = (-\mathbf{C}\mathbf{C}^T\mathbf{f}, -\mathbf{f}) = (\mathbf{C}^T\mathbf{f}, \mathbf{C}^T\mathbf{f}) > 0$ , то при  $\mathbf{f} \neq 0$  вектор  $\mathbf{p}^*$  – это направление спуска, которое можно использовать вместо проекции антиградиента. Но для решения задачи нужен еще и способ проверки возможности исключения ограничений из активного набора. В методе проекции градиента [13, 14] для этого используется формула

$$\mathbf{u} = -(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}\mathbf{f},$$

где  $\mathbf{u}$  – вектор разложения  $\mathbf{f}-\mathbf{p}$  по нормальям, то есть  $-\mathbf{f} - \mathbf{p} = \mathbf{A}^T\mathbf{u}$ .

Эта формула опять-таки требует вычисления  $(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^{-1}$ , т.е. решения системы линейных уравнений).

Вектор  $\mathbf{n}^* = -\mathbf{f} - \mathbf{p}^*$  не является нормалью к граничному многообразию и не может быть представлен в виде  $\mathbf{A}^T\mathbf{u}^*$ .

Один из путей решения вопроса об исключении ограничений из активного набора состоит в построении векторов, каждый из которых нарушает *одно и только одно* ограничение. Эти векторы (матрица  $\mathbf{B}$ ) образуют базис в ортогональном дополнении к нуль-пространству матрицы  $\mathbf{A}$  и в совокупности с векторами из  $\mathbf{C}$  дают полный базис. В

этом базисе матрица активных ограничений диагональная, что упрощает задачу. Например, для  $i$ -ого ограничения построен такой вектор  $\mathbf{d}_i$ . Поскольку скалярное произведение  $(\mathbf{a}_i^T, \mathbf{d}_i) > 0$ , то это ограничение можно исключить из активного набора при  $(\mathbf{d}_i, \mathbf{f}) > 0$  [12]. Здесь  $\mathbf{a}_i$  –  $i$ -ая строка матрицы активных ограничений, а  $\mathbf{f}$  – градиент целевой функции.

Данное правило надо применять ко всем векторам, каждый из которых нарушает одно и только одно ограничение. Как только будет найдено ограничение, которое можно исключить, дальнейший поиск можно прекратить, добавить вектор  $\mathbf{b}_i$  в матрицу  $\mathbf{C}$ , перевычислить приведенный антиградиент и продолжить процесс оптимизации. Характерно, что перевычисление приведенного антиградиента не требует работы с матрицами и сводится к вычитанию из каждой  $j$ -ой компоненты имеющегося приведенного антиградиента величины  $d_j^i(\mathbf{d}_i, \mathbf{f})$ . Это не сложно, тем более, что  $(\mathbf{d}_i, \mathbf{f})$  уже вычислен при анализе возможности исключения ограничения из числа активных.

При таком выборе дополнительных базисных векторов можно исключать из активного набора не одно, а сразу несколько ограничений, чтобы быстрее сформировать окончательный набор активных ограничений и сократить время счета, если принять меры по предотвращению «зигзагов» [13].

Вернемся к анализу системы ограничений и покажем, как строить базис и исключать ограничения из активного набора.

Пусть активный набор составлен из ограничений группы 2, т.е. на некотором участке трасса идет предельным уклоном  $z_{i+1} - z_i = s_i b_i$  ( $i = 1, 2, \dots, r-1$ ). В данном случае размерность нуль-пространства  $\mathbf{M}$  матрицы активных ограничений равна единице. У базисного вектора  $\mathbf{c} \in \mathbf{M}$  все компоненты равны между собой. Принимаем  $c_i = 1$  ( $i = 1, \dots, r$ ). Это участок сдвига.

Следовательно, если  $\mathbf{p}$  приведенный градиент, то  $p_j = \sum_{i=1}^r f_i$ , но если  $\mathbf{p}$  – проекция градиента, то  $p_j = \sum_{i=1}^r f_i / r$  ( $j = 1, 2, \dots, r$ ). И проекция антиградиента, и приведенный антиградиент задают одно и то же направление, хотя и отличаются множителем  $1/r$ . Базисный вектор в ортогональном дополнении к нуль-пространству матрицы  $\mathbf{A}$ , нарушающий только ограничение  $z_{k+1} - z_k = s_k b_k$ , имеет нулевые компоненты с номерами от 1 до  $k$  включительно, а все остальные его компоненты равны единице. Сумма компонент антиградиента с  $(k+1)$ -ой по последнюю равна скалярному произведению базисного вектора на антиградиент, и если она положительна, то рассматриваемое ограничение из числа активных можно исключить.

Для ограничений вида 3 (по разности уклонов) размерность нуль-пространства матрицы  $\mathbf{A}$  равна 2. Это участок поворота.

В качестве базисных векторов можно взять векторы, соответствующие повороту проектной линии с центром в начальной и конечной точках соответствующего участка. При этом все уклоны получают равные приращения, а их разности не изменятся. Задав это приращение уклонов  $\delta$  (например,  $\delta = 1$ ), последовательно вычисляем компоненты базисного вектора  $\mathbf{c}$ :

$$c_1 = 0; c_2 = \delta s_1; c_3 = \delta(s_1 + s_2); \dots; c_r = \delta(s_1 + s_2 + \dots + s_{r-1}).$$

Здесь нумерация условная: реально первый номер соответствует началу участка предельной кривизны, аналогично и для второго вектора, т.е. поворота с центром в конце



участка.

Реально возможны и комбинации активных ограничений из трех групп. Например, на участке, где активны ограничения группы 2 (трасса идет предельным уклоном), одновременно активно одно ограничение группы 1. Если это ограничение остается активным, то нельзя изменить соответствующее  $z_i$ . Становится очевидным, что все компоненты вектора спуска для рассматриваемого участка должны быть равны нулю.

Далее, наличие одного активного ограничения группы 2 на участке, где активны все ограничения группы 3, приводит к тому, что все компоненты вектора спуска на этом участке должны быть равны между собой (участок сдвига). Только при таком условии сохраняют активность все ограничения. Указанные изменения проектной линии при соответствующей комбинации активных ограничений находят отражение в структуре базисных векторов.

Возможны и более сложные комбинации активных ограничений. Так, при наличии активного высотного ограничения (группа 1) на участке поворота остается один базисный вектор, соответствующий повороту с центром в соответствующей точке. Наличие двух таких точек фиксирует весь участок, равно как наличие одной такой точки на участке сдвига.

Начальное приближение для этого процесса строится следующим образом.

1. Берется прямая, соединяющая начальную и конечную точки профиля, которые заданы.

2. Если заданы уклоны примыкания слева (в начале) или справа (в конце трассы), то с использованием предельных разностей уклонов изменяются последовательно уклоны в начале и в конце проектной линии, так что в итоге все ограничения по уклонам и разностям смежных уклонов выполнены.

3. В качестве целевой функции берется сумма квадратов невязок в высотных ограничениях (группа 1) и запускается процесс оптимизации линии, полученной в пункте 2.

В итоге имеем или допустимое по всем ограничениям, включая высотные, начальное приближение, или сообщение о невозможности решения задачи.

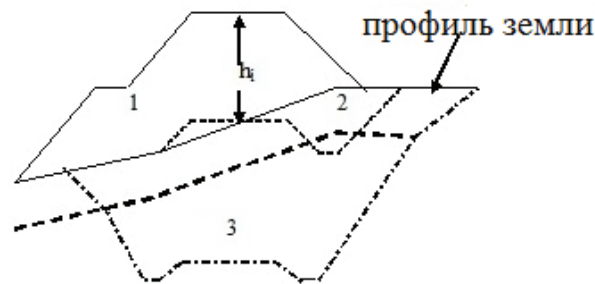
Остается рассмотреть, как строится модель целевой функции.

### Математические модели целевой функции

Если задача решается на минимум объемов земляных работ, то подынтегральная функция в выражении (1) – это площадь поперечного сечения земляного полотна, которая зависит от поперечного профиля земли и конструкции проектного поперечного профиля.

Поскольку в целевой функции (1)  $Z(s)$  и  $H(s)$  представлены *ломаными с совпадающими абсциссами переломов*, то можно выразить аналитически объемы земляных работ при заданных конструкциях поперечных профилей земляного полотна [10]. В общем случае для поперечников земли в виде ломаных (рисунки) получаем кусочно-квадратические зависимости площади  $F_i$  от рабочей отметки по оси:

$$h_i = z_i - H_i. \quad (3)$$



Поперечные профили: 1 – насыпь; 2 – полунасыпь-полувыемка; 3 – выемка.

Объем земляных работ вычисляется через площади по формулам численного интегрирования (в действующей программе по формуле трапеций). На  $i$ -ом элементе объем

$$V_i = (F_i(h_i) + F_{i+1}(h_{i+1})) \cdot s_i / 2.$$

Следовательно, для  $i = 2, \dots, n-1$

$$\frac{\partial V}{\partial h_i} = \frac{\partial F_i}{\partial h_i} (s_{i-1} + s_i) / 2 \quad (4)$$

Если  $h_i$  не фиксирована, то при  $i = 1$  принимаем в (4)  $s_0 = 0$ , аналогично для  $i = n$  принимаем  $s_n = 0$ .

Формулы (3) и (4) позволяют вычислить градиент. Расчет выполняется поэтапно. На первом этапе проектные поперечные профили в насыпях и в выемках принимаются в виде трапеций. Полученная линия рассматривается как ось зоны поиска для дальнейших уточнений.

Реальные конструкции поперечных профилей земляного полотна зависят от геологии. В системе проектирования есть библиотека типовых конструкций, для которых в зоне поиска с заданным шагом  $\Delta$  изменения рабочей отметки на каждом переломе продольного профиля земли вычисляются площади насыпей и выемок. Приближенные зависимости  $F_i(h)$  получаются параболической аппроксимацией полученных значений и используются для продолжения оптимизации. При необходимости расчет повторяется при сужении зоны поиска и уменьшении шага  $\Delta$ . Если целевая функция соответствует строительным затратам, то грунты выемок подразделяются на 4 вида соответственно возможности их применения при сооружении насыпей:

- 1) непригодные;
- 2) обыкновенные;
- 3) дренирующие нескальные;
- 4) скальные.

Площади и объемы для грунтов каждого вида вычисляются отдельно.

Дополнительно для каждого вида грунтов задаются в расчете на  $1 \text{ м}^3$ :

$q_1$  – затраты на сооружение насыпи из выемки;

$q_2$  – то же при сооружении насыпи из грунта карьеров (резервов);

$q_3$  – затраты на удаление непригодного или неиспользуемого грунта выемок в отвал. Эти данные могут отличаться на различных участках проектируемого перегона.

Строительные расходы по сооружению земляного полотна  $K$  через объемы насыпей  $v_f$  и выемок  $v_c$  в зависимости от соотношения объемов вычисляются следующим образом.

1. Если  $v_f > v_c$ , то  $K = q_1 v_c + q_2 (v_f - v_c) = q_2 v_f + (q_1 - q_2) v_c$

2. Если  $v_f \leq v_c$ , то  $K = q_1 v_f + q_3 (v_c - v_f) = (q_1 - q_3) v_f + q_3 v_c$

Наличие непригодного грунта учитывается отдельно.

Характерно, что коэффициенты при  $v_f$ ,  $v_c$  (приведенные единичные стоимости) меняются от итерации к итерации, если меняется соотношение объемов. Поэтому на каждой итерации вычисляются площади и объемы по каждому участку, на котором насыпи и выемки сооружаются совместно, затем определяются приведенные единичные стоимости и далее – градиент целевой функции. Тем самым учитывается взаимосвязь элементов проектной линии в насыпях и выемках, которые сооружаются совместно. Именно эта взаимосвязь не позволяет использовать динамическое программирование, но учитывается в математической модели при использовании нелинейного программирования.

В математической модели учтены и затраты на искусственные сооружения (при известных зависимостях их стоимостей от рабочих отметок). Эти зависимости уточняются в процессе проектирования так же, как и типы сооружений. При этом неизбежно многократное повторение расчетов при уточнении параметров целевой функции.

Целесообразность включения в целевую функцию при проектировании продольного профиля железных дорог эксплуатационных затрат по передвижению поездов или автомобилей сомнительна по следующим причинам:

- эти затраты зависят от размеров движения, прогнозировать которые на расчетный период эксплуатации в условиях нестабильной экономики не представляется возможным;

- использование моделей целевой функции с включением в нее данного вида затрат, вычисляемых по равновесным скоростям движения, показало, что они дают изменения проектной линии в пределах 0.2 м. При вариациях проектной линии в пределах 0.2 м изменения этого вида затрат находятся в пределах точности их расчета.

Полученная в результате оптимизации проектная линия не удовлетворяет ограничениям по минимальной длине элемента. При ее преобразовании к окончательному виду возможны отклонения, которые при действующих нормах проектирования железных дорог не превышают 0.4 м [10]. Это преобразование в заданной полосе отклонений с шагом 0.02 м выполняется с помощью алгоритма динамического программирования [10]. Целевая функция при этом соответствует объемам земляных работ.

Полученная в результате оптимизации ломаная линия нужна только как начальное приближение. И все проведенные расчеты были нужны только для установления числа элементов (размерность задачи) и построения начального приближения для последнего этапа оптимизации с использованием алгоритма нелинейного программирования.

Если речь идет о проектировании продольного профиля для сравнения вариантов плана трассы, то это сравнение может выполняться с использованием уже полученных результатов. Для получения окончательного варианта проектной линии проводится еще

один этап расчетов. На этом этапе при проектировании железных дорог новыми переменными являются проектные отметки переломов проектной линии, через которые, в силу линейности элементов, легко вычисляются отметки во всех точках перелома профиля земли (старые переменные). Новых переменных примерно на порядок меньше, чем старых. Практически используются те же программы оптимизации, добавлен только пересчет производных целевой функции по новым переменным через производные по старым переменным с поправками на вертикальные кривые.

Применительно к проектированию автодорог полученная ломаная линия преобразуется в параболический сплайн. Рассмотрение алгоритма такого преобразования и последующей оптимизации параметров сплайна при известном числе его элементов является предметом отдельной статьи.

### Выводы

Усовершенствованные математические модели и новый алгоритм оптимизации позволяют решать задачу комплексно с использованием иерархии математических моделей оптимизации при наличии данных различной полноты и детальности. Новые модели и алгоритм совместного проектирования продольного и поперечных профилей являются основой соответствующей САПР нового поколения. Они могут использоваться как для проектирования реальных объектов, так и в исследовательских целях.

Расчеты на персональном компьютере с тактовой частотой 2 ГГц и ОЗУ 512 Мб позволили сделать следующие выводы

1. Время счета при длине проектируемого объекта 25-30 км составляет 2-3 мин, при последующих расчетах существенно меньше, что вполне приемлемо, тем более что на более мощных компьютерах вместо минут время счета составляет секунды.
2. Наибольшее влияние на результат оказывают данные по грунтам и соответствующие единичные стоимости по земляным работам.
3. Нельзя пренебречь влиянием затрат на искусственные сооружения.
4. Уточнение типовых конструкций поперечных профилей земляного полотна, а также уточнение типов искусственных сооружений не столь существенно, как изменение данных по грунтам и единичным стоимостям.

Переход к новой технологии компьютерного проектирования трасс линейных сооружений с применением методов оптимизации и проектирующих программ связан с преодолением существенных трудностей организационного порядка. Однако в будущем этот переход к интеллектуальным системам неизбежен.

### Литература:

1. Shafahi Yousef, Shahbazi M.J. Optimum railway alignment [http://www.uic.org/cdrom/2001/wcrr2001/pdf/sp/2\\_1\\_1/210.pdf](http://www.uic.org/cdrom/2001/wcrr2001/pdf/sp/2_1_1/210.pdf)
2. Bentley Rail Track. <http://www.bentley.com/>
3. CARD/1. URL: <http://www.card-1.com/en/home/>
4. Topomatic Robur. URL: <http://www.topomatic.ru>
5. Ляховский В.Н., Михалевич В.С., Быков В.И. Определение на ЭВМ наивыгодней-

шего положения красной линии продольного профиля на вольном ходу // Транспортное строительство. 1962. № 4. С. 41–43.

6. Михалевич В.С., Шор Н.З. Математические основы решения задачи выбора оптимального очертания продольного профиля // Труды Всесоюзного НИИ транспортного строительства. 1964. Вып. 51. С. 14–27.

7. Космин В.В., Струченков В.И., Фрадков Е.Б. Проектирование продольного профиля дороги на ЭВМ // Транспортное строительство. 1971. № 4.

8. Использование математических методов оптимизации и ЭВМ при проектировании продольного профиля железных дорог / под ред. Б.К. Малявского // Труды Всесоюзного НИИ транспортного строительства. М.: Транспорт, 1977. Вып. 101. 169 с.

9. Струченков В.И., Карих Ю.С., Шварц П.С. Математические методы оптимизации в системе автоматизированного проектирования дорог // Автомобильные дороги. 1980. № 12. С. 23–24.

10. Струченков В.И. Методы оптимизации трасс в САПР линейных сооружений. М: СолонПресс, 2014. 272 с.

11. Struchenkov V.I. Mathematical Models and Optimization in Line Structure Routing: Survey and Advanced Results // International Journal Communications, Network and System Sciences. Special Issue: Models and Algorithms for Application. 2012. № 5. P. 631–637.

12. Численные методы условной оптимизации / под ред. Ф. Гилл и У. Мюррей: пер. с англ. М.: Мир. 1977. 296 с.

13. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация: пер. с англ. М: Мир, 1985. 509 с.

14. Аоки М. Введение в методы оптимизации: пер. с англ. М.: Наука, 1977. 334 с.