

Математическое моделирование
Mathematical modeling

УДК 539.3
<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2022-10-1-68-79>



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Новые операционные соотношения для математических моделей локально-неравновесного теплообмена

Э.М. Карташов @

МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, 119454 Россия
@ Автор для переписки, e-mail: kartashov@mitht.ru

Резюме

Цели. В последние годы усилился интерес к изучению локально-неравновесных процессов в связи с развитием лазерных технологий, возможностью получения сверхвысоких температур и давлений, а также ввиду необходимости математического описания различных физических процессов в экстремальных условиях. При моделировании локально-неравновесных процессов возникает необходимость учета внутренней структуры исследуемых объектов, что приводит к существенному усложнению классических моделей переноса. Важным этапом в развитии указанной области является построение математических моделей разнообразных физических полей с учетом их пространственно-временной нелокальности. Для этих целей используются уравнения гиперболического типа для широкого класса явлений и, прежде всего, для процессов нестационарной теплопроводности на основе обобщенной феноменологии Максвелла – Каттанео – Лыкова – Вернотта. Математические модели в виде краевых задач для уравнений гиперболического типа носят название краевых задач обобщенного типа. Эти задачи значительно отличаются от классических на основе феноменологии Фурье по сложности их решения. Их специфика заключается в относительной простоте исходных математических моделей и трудности решения в аналитически замкнутом виде. Отсюда весьма незначительные успехи в нахождении точных аналитических решений такого рода задач. Наиболее приемлемый метод их решения – операционный, но он приводит к аналитическим решениям в пространстве изображений по Лапласу в виде сложных функциональных конструкций, оригиналы которых не содержатся в известных справочниках по операционному исчислению. На этом пути возникают серьезные трудности вычислительного характера. Цель работы – рассмотреть серию нестандартных изображений, возникающих при операционном решении математических моделей локально-неравновесного теплообмена и получить их оригиналы.

Методы. Используются методы и теоремы операционного исчисления, методы контурного интегрирования сложных изображений, теория специальных функций.

Результаты. Представлено развитие операционного исчисления для математических моделей локально-неравновесного теплопереноса в терминах теории нестационарной теплопроводности для уравнений гиперболического типа (волновых уравнений). Рассмотрены нестандартные операционные изображения, оригиналы которых ранее были неизвестны. Показано, что приведенные изображения являются характерными для операционных решений широкого класса обобщенных краевых задач для уравнений гиперболического типа в теории теплопроводности, диффузии, гидродинамики, колебаний, распространения электричества, термомеханики и других направлений науки и техники. Изучены частично ограниченные и конечные области. Приведены иллюстративные примеры в качестве численных экспериментов локально-неравновесного процесса теплообмена с учетом конечной скорости распространения теплоты, имеющей волновой характер. Последнее выражается наличием ступенчатой функции Хевисайда в аналитическом решении задачи. Обоснован физический смысл конечной скорости распространения теплоты; построена изохрона

для температурной функции в частично ограниченной области и показано, что на поверхности фронта идущей волны температурный профиль имеет разрыв. Это приводит к задержанию оттока теплоты за границу разрыва – характерная особенность аналитических решений волновых уравнений, к которой следует добавить возможность описания аналитического решения задачи в виде эквивалентных интегральных соотношений, существенно упрощающих числовые расчеты.

Выводы. Представлены оригиналы нестандартных операционных изображений (по Лапласу), входящие в операционные решения широкого класса задач локально-неравновесных процессов переноса (теплоты, массы, импульса), электрических цепей, гидродинамики, теории колебаний, термомеханики и других областей. Приведены иллюстративные примеры и показана возможность перехода от одной формы аналитического решения к другой эквивалентной форме. Представленные аналитические решения гиперболических моделей теплопереноса в областях канонического типа являются новыми в классической теплофизике.

Ключевые слова: нестандартные операционные изображения, оригиналы, математические модели локально-неравновесного теплопереноса, аналитические решения

• Поступила: 08.09.2021 • Доработана: 20.09.2021 • Принята к опубликованию: 27.12.2021

Для цитирования: Карташов Э.М. Новые операционные соотношения для математических моделей локально-неравновесного теплообмена. *Russ. Technol. J.* 2022;10(1):68–79. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2022-10-1-68-79>

Прозрачность финансовой деятельности: Автор не имеет финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

RESEARCH ARTICLE

New operational relations for mathematical models of local nonequilibrium heat transfer

Eduard M. Kartashov[@]

MIREA – Russian Technological University, Moscow, 119454 Russia

[@] Corresponding author, e-mail: kartashov@mitht.ru

Abstract

Objectives. Recently, interest in studying local nonequilibrium processes has increased in the context of the development of laser technologies, the possibility of reaching ultrahigh temperatures and pressures, and the need for a mathematical description of various physical processes under extreme conditions. In simulating local nonequilibrium processes, it becomes necessary to take into account the internal structure of investigation subjects, which significantly complicates the classical transport models. An important stage here is to construct mathematical models of various physical fields in which their spatiotemporal nonlocality should be taken into account. For these purposes, hyperbolic equations are used for a wide class of phenomena and, first of all, for unsteady-state heat conduction processes based on the generalized Maxwell–Cattaneo–Luikov–Vernotte phenomenology. Mathematical models in the form of boundary value problems for hyperbolic equations are called generalized boundary value problems. These problems differ significantly in solving difficulty from the classical ones based on Fourier phenomenology. The specificity of these problems is the relative simplicity of the initial mathematical models, together with the difficulty of solving them in an analytically closed form. Hence, very little success has been achieved in finding exact analytical solutions to problems of this kind. The most acceptable approach to solving them is operational calculus. However, it gives analytical solutions in the Laplace transform space as complex functional structures, the inverse transforms of

which are not available in well-known reference books on operational calculus. On this path, serious computational difficulties arise. The study aimed to analyze a set of nonstandard transforms arising from the operational solution of mathematical models of local nonequilibrium heat transfer and to obtain their inverse transforms.

Methods. Methods and theorems of operational calculus, methods of contour integration of complex transforms, and the theory of special functions were used.

Results. Operational calculus was developed for mathematical models of local nonequilibrium heat transfer in terms of the theory of unsteady-state heat conduction for hyperbolic equations (wave equations). Nonstandard operational transforms, the inverse transforms of which are unavailable in the literature, were considered. It was shown that the presented transforms are common to operational solutions of a wide class of generalized boundary value problems for hyperbolic equations in the theory of heat conduction, diffusion, hydrodynamics, vibrations, propagation of electricity, thermomechanics, and other areas of science and technology. Partially bounded and finite domains were explored. Illustrative examples were given, namely, the results of numerical experimental studies of a local nonequilibrium heat transfer process that took into account the finiteness of the heat transfer rate, which had a wave character. The latter was expressed by the presence of the Heaviside step function in the analytical solution of the problem. The physical meaning of the finiteness of the heat transfer rate was substantiated. The isochron was constructed for the temperature function in a partially bounded domain. It was shown that the temperature profile has a discontinuity on the surface of the propagating wave front. This leads to the retention of heat outflow beyond the discontinuity boundary. This is a characteristic feature of the analytical solutions of the wave equations, along with the possibility to describe the analytical solution of the problem as equivalent integral relations, which noticeably simplify numerical calculations.

Conclusions. The inverse transforms of nonstandard operational (Laplace) transforms were presented, which are contained in the operational solutions of a wide class of problems of local nonequilibrium (heat, mass, momentum) transfer processes, electrical circuits, hydrodynamics, oscillation theory, thermomechanics, and others. Illustrative examples were given, and the possibility of transition from one form of an analytical solution to another equivalent form was shown. The presented analytical solutions of hyperbolic heat transfer models in canonical domains are new in classical thermal physics.

Keywords: nonstandard operational transforms, inverse transforms, mathematical models of local nonequilibrium heat transfer, analytical solutions

• Submitted: 08.09.2021 • Revised: 20.09.2021 • Accepted: 27.12.2021

For citation: Kartashov E.M. New operational relations for mathematical models of local nonequilibrium heat transfer. *Russ. Technol. J.* 2022;10(1):68–79. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2022-10-1-68-79>

Financial disclosure: The author has no a financial or property interest in any material or method mentioned.

The author declares no conflicts of interest.

ВВЕДЕНИЕ

Классические модели аналитической теории переноса теплоты обязаны своим появлением линейному градиентному соотношению Фурье

$$\bar{q}(M, t) = -\lambda \text{grad} T(M, t),$$

с которым он выступил в докладе «О распространении тепла в твердом теле» в Париже в 1807 году. В законченном виде Фурье представил свою теорию в 1822 году в работе «Аналитическая теория тепла», которую Кельвин назвал «великой математической моделью» [1]. Вместе с уравнением энергии для изотропных твердых тел

$$\text{ср} \frac{\partial T(M, t)}{\partial t} = -\text{div} \bar{q}(M, t) + F(M, t)$$

закон Фурье приводит к уравнению параболического типа для нестационарного теплопереноса вида

$$\frac{\partial T(M, t)}{\partial t} = a \Delta T(M, t) + \frac{1}{\text{ср}} F(M, t), \quad M \in D, \quad t > 0, \quad (1)$$

и соответствующим для (1) краевым задачам с начальными и граничными условиями:

$$T(M, t) \Big|_{t=0} = \Phi_0(M), \quad M \in \bar{D}, \quad (2)$$

$$\beta_1 \frac{\partial T(M, t)}{\partial n} + \beta_2 T(M, t) = \beta_3 \varphi(M, t), \quad M \in S, \quad t > 0. \quad (3)$$

Здесь D – конечная или частично ограниченная выпуклая область изменения $M(x, y, z)$; S – кусочно-гладкая поверхность, ограничивающая область D ; \bar{n} – внешняя нормаль к S (вектор, непрерывный в точках S). Входящие в (1)–(3) параметры – теплофизические характеристики среды, постоянные величины в интервале температур, не выходящих за точки перехода [2]. В литературе неоднократно отмечались некоторые парадоксы при использовании модельных представлений (1)–(3): отсутствие инерционности процесса теплопроводности в законе Фурье ввиду неучета механизма переноса теплоты элементарными частицами вещества (электронами, молекулами, ионными решетками) и времени релаксации, связанного со временем свободного пробега микрочастиц и, как следствие, вытекающий из аналитических решений моделей (1)–(3) вывод о бесконечной скорости распространения теплоты;

сингулярный характер теплового потока и скорости движения изотерм в области $x > 0$, $t > 0$ при $x \rightarrow 0$ ($t \rightarrow 0$). Тем не менее, указанные обстоятельства не ограничивают область применения математических моделей (1)–(3), охватывая все новые содержательные объекты и все большее число самых разнообразных приложений [3–7].

В последние годы усилился интерес к изучению процессов, протекающих в локально-неравновесных условиях, что обусловлено широкими возможностями их практического применения [8–14]: создание новых технологий получения наноматериалов и покрытий с уникальными физико-химическими свойствами (бинарные многокомпонентные металлические сплавы, полимерные материалы, металлические полупроводниковые стекла, наножидкости, коллоидные, био- и криосистемы); оптимизация режимов лазерной обработки изделий; режимы интенсивного нагрева и охлаждения компонентов нанoeлектроники и нанотехники; нагрев, плавление и абляция вещества при воздействии сверхкоротких лазерных импульсов и др. Интенсификация тепловых процессов в этих условиях потребовала для их описания уточнения гипотезы Фурье, что и было проделано в рамках учета локальной неравновесности, заложенной в соотношении

$$\bar{q}(M, t) = -\lambda \text{grad} T(M, t) - \tau_r \frac{\partial \bar{q}(M, t)}{\partial t}, \quad (4)$$

и учитывающей конечную скорость распространения теплоты. Здесь время τ_r – мера инерции теплового потока, связанная со скоростью распространения теплоты соотношением $v_T = \sqrt{a/\tau_r}$. На необходимость учета влияния ограниченности скорости переноса теплоты (массы) указывали: Дж. Максвелл в теории газодинамики [15], А.В. Лыков при исследовании тепло- и влагопереноса в капиллярно-пористых телах [16], Каттанео [17] и Вернотт [18] в теории теплопроводности. Уравнение энергии и соотношение (4) приводят к уравнению переноса теплоты гиперболического типа

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(M, t)}{\partial t} = a \Delta T(M, t) - \tau_r \frac{\partial^2 T(M, t)}{\partial t^2} + \\ + \frac{\tau_r}{c\rho} \left[\frac{\partial F(M, t)}{\partial t} + \frac{1}{\tau_r} F(M, t) \right] \end{aligned} \quad (5)$$

и соответствующим краевым задачам нестационарной теплопроводности обобщенного типа. При математической постановке указанных задач следует применять соответствующие локально-неравновесные граничные условия. Использование стандартных локально-равновесных граничных условий (3) (что довольно часто наблюдается в публикациях по аналитической теплофизике) может привести к

физически противоречивым результатам (например, к появлению отрицательных решений для температуры [19]). Эти вопросы детально рассмотрены автором в [20]. Сформулированы корректные обобщенные граничные условия на основе соотношения (4) в интегральной и эквивалентной дифференциальной формах. Так, в первом случае для условия теплового нагрева (охлаждения) граничное условие второго рода имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_r} \int_0^t \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial n} \bigg|_{M \in S} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_r}\right) d\tau = \\ = \pm (q_0/\lambda) S_+(t), \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (6)$$

в случае нагрева средой следует записывать:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_r} \int_0^t \frac{\partial T(M, \tau)}{\partial n} \bigg|_{M \in S} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_r}\right) d\tau = \\ = h \{T(M, t)|_{M \in S} - [T_0 + S_+(t)(T_c - T_0)]\}, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь

$$S_+(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases} \quad (8)$$

При $(1/h) \rightarrow 0$ ($h \rightarrow \infty$) из (7) имеем граничное условие при температурном нагреве

$$T(M, t)|_{M \in S} = T_0 + S_+(t)(T_c - T_0), \quad t \geq 0. \quad (9)$$

Следует заметить, что гиперболическое уравнение (5) для описания локально-неравновесных процессов тепломассопереноса было получено впервые в работах И.А. Фока [21] и Б.И. Давыдова [22] на основании предположения о конечном значении скорости частиц, переносящих энергию или массу. Уравнение (5) также получил А.С. Предводителев [23], исходя из анализа скоростей перемещения изотермических поверхностей с использованием представлений Римана, то есть при полном отказе от релаксационной формулы (4).

НОВЫЕ ОПЕРАЦИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Обобщенные задачи переноса для уравнения (5) значительно отличаются от классических (1)–(3), являясь более сложными при нахождении аналитических решений. Специфика указанных задач заключается в относительной простоте исходных математических моделей и трудности их решения в аналитически замкнутом виде. Отсюда весьма незначительные успехи в нахождении их точных аналитических решений и, в основном, для частично

ограниченных областей. Основной метод решения указанных задач – операционный, но здесь возникают две основные проблемы. Если нахождение операционного решения задачи не составляет особого труда, то переход к оригиналам затрудняется ввиду их отсутствия в таблицах по операционному исчислению. Формальное применение теорем операционного исчисления при нахождении оригиналов может привести к ошибочным результатам, так как искомые оригиналы должны содержать ступенчатую функцию Хевисайда [24], появление которой формально не всегда удается реализовать. Естественный выход из этой ситуации – развитие искусственных приемов или сложный переход к оригиналам с помощью контурного интегрирования изображений [24].

Частично ограниченная область

Рассмотрим операционное решение однородного уравнения (5) в области $\Omega = \{M(z, t): z \geq 0, t \geq 0\}$ в безразмерных переменных

$$\xi = v_p z / a, \tau = v_p^2 t / a, \beta = v_p / v_T,$$

$$W(\xi, \tau) = [T(z, t) - T_0] / (T_c - T_0), v_T = \sqrt{a / \tau_T},$$

$v_p = \sqrt{2G(1 - \nu) / [\rho(1 - 2\nu)]}$ – скорость распространения волны расширения в упругой среде (G – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона, ρ – плотность). Задача имеет вид:

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} - \beta^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2}, \xi > 0, \tau > 0, \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} W(\xi, \tau) \Big|_{\tau=0} &= \frac{\partial W(\xi, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0, \xi \geq 0, \\ |W(\xi, \tau)| &< \infty, \xi \geq 0, \tau \geq 0 \end{aligned} \right\}. \quad (11)$$

Пусть $\bar{W}(\xi, p) = \int_0^\infty \exp(-p\tau) W(\xi, \tau) d\tau$ – изображение Лапласа функции $W(\xi, \tau)$. Из уравнения (10) находим

$$\bar{W}(\xi, p) = \bar{f}(p) \exp\left(-\xi \sqrt{\beta^2 p^2 + p}\right).$$

Записанное для $\bar{W}(\xi, p)$ изображение определяет дальнейшую цель исследования – получить оригиналы для серии изображений вида $\bar{f}(p) \exp\left[-\xi \sqrt{(p + 2\alpha)(p + 2\beta)}\right] = \bar{f}(p) \exp[-\xi \bar{\mu}(p)]$, $\bar{\mu}(p) = \sqrt{(p + 2\alpha)(p + 2\beta)}$ при различных $\bar{f}(p)$ со ступенчатой функцией Хевисайда.

Подчеркнем еще раз особенности предстоящих вычислений. Как показали первые публикации в 70-х годах прошлого столетия [25, 26] по простейшим

гиперболическим моделям переноса, особенностью процесса теплопроводности в рамках математических моделей для уравнения (5) является волновой характер, что выражается наличием ступенчатой функции $\eta(\tau - \xi)$ в аналитическом решении первой краевой задачи (10), (11) при $W(0, \tau) = 1, \tau > 0$. В любой момент времени существует область теплового следа $\xi < \tau$ и невозмущенная область $\xi > \tau$ (рис. 1) (в точках области более чем $\xi = \tau$ изменение температуры не происходит и ее значение равно начальному). На поверхности фронта распространяющейся волны $\xi = \tau$ и на фронте температурный профиль имеет разрыв, амплитуда которого быстро затухает с увеличением времени прогрева. Именно в области за фронтом тепловой волны наблюдается существенное различие между решениями уравнений гиперболического (5) и параболического (1) типов (в последнем случае решения являются гладкими, существенно большими начального значения). Указанные особенности как раз и объясняются наличием в аналитическом решении тепловой задачи ступенчатой функции.

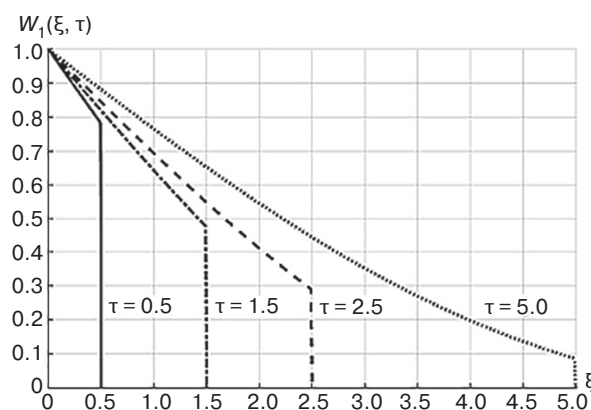


Рис. 1. Изохрона области, рассчитанная по формуле (29) ($\beta = 1$)

В дальнейшем будут рассматриваться только соотношения операционного исчисления, поэтому вернемся (как это и принято) к обозначению временной переменной t .

Рассмотрим функцию $\varphi(x) = x^{-m/2} I_m(x^{1/2})$, где $I_m(x^{1/2})$ – модифицированная функция Бесселя. Из теории функций Бесселя известно соотношение

$$\frac{d^n}{dx^n} [\varphi(x)] = \frac{1}{2^n} x^{-\frac{m+n}{2}} I_{m+n}\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad (12)$$

позволяющее записать ряд Маклорена для $\varphi(x + x_0)$:

$$\begin{aligned} \varphi(x + x_0) &= (x + x_0)^{-\frac{1}{2}m} I_m\left[(x + x_0)^{\frac{1}{2}}\right] = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_0^n}{n!} \frac{1}{2^n} x^{-\frac{m+n}{2}} I_{m+n}\left(\frac{1}{x^2}\right). \end{aligned} \quad (13)$$

Положим в (13) $x_0 = 2\kappa t$, $x = t^2$, $m = 0$. Получим:

$$\varphi(t) = I_0 \left[\sqrt{t(t+2\kappa)} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\kappa^n}{n!} I_n(t).$$

Применим преобразование Лапласа, используя таблицы [27]:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(p) &= \int_0^{\infty} \exp(-pt) I_0 \left[\sqrt{t(t+2\kappa)} \right] dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{p^2-1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\kappa^n}{n!} \left(p - \sqrt{p^2-1} \right)^n = \\ &= \frac{1}{\sqrt{p^2-1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\kappa p - \kappa \sqrt{p^2-1})^n}{n!} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{p^2-1}} \exp(\kappa p - \kappa \sqrt{p^2-1}). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\bar{\varphi}(p) \exp(-\kappa p) = \frac{1}{\sqrt{p^2-1}} \exp(-\kappa \sqrt{p^2-1})$$

и далее

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{p^2-1}} \exp(-\kappa \sqrt{p^2-1}) &\leftarrow \varphi(t-\kappa) \eta(t-\kappa) = \\ &= I_0(\sqrt{t^2-\kappa^2}) \eta(t-\kappa). \end{aligned} \quad (14)$$

Заменим в (14) κ на δ , а t на σt и проведем преобразования, используя теорему подобия [2]; затем введем обозначение $\xi = \delta/\sigma$. Находим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{p^2-\sigma^2}} \exp(-\xi \sqrt{p^2-\sigma^2}) &\leftarrow \\ &\leftarrow I_0(\sigma \sqrt{t^2-\xi^2}) \eta(t-\xi). \end{aligned} \quad (15)$$

Положим слева в (15) $p \rightarrow p + \rho$ и применим теорему сдвига:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{(p+\rho+\sigma)(p+\rho-\sigma)}} \exp \left[-\xi \sqrt{(p+\rho+\sigma)(p+\rho-\sigma)} \right] &\leftarrow \\ &\leftarrow \exp(-\rho t) I_0 \left(\sigma \sqrt{t^2-\xi^2} \right) \eta(t-\xi). \end{aligned}$$

Введем обозначения: $p + \sigma = 2\alpha$, $p - \sigma = 2\beta$, откуда $p = \alpha + \beta$, $\sigma = \alpha - \beta$. Теперь окончательно приходим к нужному результату:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{(p+2\alpha)(p+2\beta)}} \exp \left[-\xi \sqrt{(p+2\alpha)(p+2\beta)} \right] &= \\ &= \frac{1}{\bar{\mu}(p)} \exp \left[-\xi \bar{\mu}(p) \right] \leftarrow \\ &\leftarrow \exp(-\rho t) I_0 \left(\sigma \sqrt{t^2-\xi^2} \right) \eta(t-\xi). \end{aligned} \quad (16)$$

Из (16) находим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p \bar{\mu}(p)} \exp \left[-\xi \bar{\mu}(p) \right] &\leftarrow \\ &\leftarrow \left[\int_{\xi}^t \exp(-\rho t) I_0 \left(\sigma \sqrt{t^2-\xi^2} \right) dt \right] \eta(t-\xi). \end{aligned} \quad (17)$$

Применяя к (16) теорему о свертке, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{\mu}(p)} \exp \left[-\xi \bar{\mu}(p) \right] \bar{f}(p) &\leftarrow \\ &\leftarrow \left[\int_{\xi}^t f(t-\tau) \exp(-\rho \tau) I_0 \left(\sigma \sqrt{t^2-\xi^2} \right) d\tau \right] \eta(t-\xi). \end{aligned} \quad (18)$$

Дифференцируя (18) по ξ , получаем:

$$\begin{aligned} \exp \left[-\xi \bar{\mu}(p) \right] \bar{f}(p) &\leftarrow f(t-\xi) \exp(-\rho \xi) + \\ &+ \sigma \xi \int_{\xi}^t f(t-\tau) \exp(-\rho \tau) \frac{I_1(\sigma \sqrt{\tau^2-\xi^2})}{\sqrt{\tau^2-\xi^2}} d\tau, \quad t > \xi, 0, t < \xi. \end{aligned} \quad (19)$$

Положим в (19) $\bar{f}(p) = 1$, откуда $f(t) = \delta(t)$ – функция Дирака и (19) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \exp \left[-\xi \bar{\mu}(p) \right] &\leftarrow \\ &\leftarrow \left[\exp(-\rho \xi) \delta(t-\xi) + \sigma \xi \exp(-\rho t) \frac{I_1(\sigma \sqrt{t^2-\xi^2})}{\sqrt{t^2-\xi^2}} \right] \times \\ &\times \eta(t-\xi). \end{aligned} \quad (20)$$

Пусть теперь в (19) $\bar{f}(p) = \frac{1}{p}$, тогда $f(t) = 1$ и оригинал будет:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \exp \left[-\xi \bar{\mu}(p) \right] &\leftarrow \\ &\leftarrow \left[\exp(-\rho \xi) + \sigma \xi \int_{\xi}^t \exp(-\rho \tau) \frac{I_1(\sigma \sqrt{\tau^2-\xi^2})}{\sqrt{\tau^2-\xi^2}} d\tau \right] \times \\ &\times \eta(t-\xi). \end{aligned} \quad (21)$$

Ряд проблем в теории теплового удара [2] приводят к изображению вида

$$\frac{1}{p \sqrt{p+2\beta}} \exp \left[-\xi \bar{\mu}(p) \right].$$

Найдем оригинал. Из (17) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p \sqrt{(p+2\alpha)(p+2\beta)}} \exp \left[-\xi \bar{\mu}(p) \right] &\leftarrow \\ &\leftarrow \int_{\xi}^t \exp(-\rho \tau) I_0 \left(\sigma \sqrt{\tau^2-\xi^2} \right) d\tau, \quad t > \xi. \end{aligned} \quad (22)$$

Умножим (22) на 2β и сложим почленно с (16).
Получим:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p} \sqrt{\frac{p+2\beta}{p+2\alpha}} \exp[-\xi \bar{\mu}(p)] \leftarrow \\ & \leftarrow \exp(-\rho t) I_0(\sigma \sqrt{t^2 - \xi^2}) + \\ & + 2\beta \int_{\xi}^t \exp(-\rho \tau) I_0(\sigma \sqrt{\tau^2 - \xi^2}) d\tau, t > \xi. \end{aligned} \quad (23)$$

Преобразуем (23), используя соотношения (d/dx)
 $I_0(x) = I_1(x)$, $I_0(0) = 1$.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p} \sqrt{\frac{p+2\beta}{p+2\alpha}} \exp[-\xi \bar{\mu}(p)] \leftarrow \exp(-\rho \xi) + \\ & + \int_{\xi}^t \exp(-\rho \tau) \left[\frac{\sigma \tau I_1(\sigma \sqrt{\tau^2 - \xi^2})}{\sqrt{\tau^2 - \xi^2}} - \sigma I_0(\sigma \sqrt{\tau^2 - \xi^2}) \right] d\tau, \\ & t > \xi. \end{aligned} \quad (24)$$

С помощью приведенных соотношений и теорем
операционного исчисления запишем важный для
приложений оригинал более общего изображения:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{p+2\beta}{p+2\alpha}} \exp[-\xi \bar{\mu}(p)] \bar{f}(p) \leftarrow \\ & \leftarrow f(t - \xi) \exp(-\rho \xi) + \int_{\xi}^t f(t - \tau) \exp(-\rho \tau) \times \\ & \times \left[\frac{\sigma \tau I_1(\sigma \sqrt{\tau^2 - \xi^2})}{\sqrt{\tau^2 - \xi^2}} - \sigma I_0(\sigma \sqrt{\tau^2 - \xi^2}) \right] d\tau, t > \xi. \end{aligned} \quad (25)$$

Выражение (25) содержит ряд практических
частных случаев при заданных $f(t) \rightarrow \bar{f}(p)$.

Приведенные операционные соотношения закры-
вают проблему нахождения аналитических решений
уравнения (10) с обобщенными граничными условиями.
Однако указанная проблема имеет интересное продол-
жение, состоящее в возможности представления одного
и того же аналитического решения в виде различных
функциональных конструкций. Существенно при этом,
что некоторая громоздкость аналитической записи ре-
шений может быть упрощена с использованием специ-
альных преобразований, приводящих к новым анали-
тическим решениям, неизвестным ранее. Покажем это
на примере первой краевой задачи для уравнения (10)
(краевые условия приведены выше). Аналитическое ре-
шение задачи на основе соотношения (21) имеет вид:

$$\begin{aligned} & W(\xi, \tau) = \\ & = \left[\exp\left(-\frac{\xi}{2\beta}\right) + \frac{\xi}{2\beta} \int_{\xi}^{\tau/\beta} \exp\left(-\frac{x}{2\beta}\right) \frac{I_1\left(\frac{1}{2\beta} \sqrt{x^2 - \xi^2}\right)}{\sqrt{x^2 - \xi^2}} dx \right] \times \\ & \times \eta(\tau - \xi\beta) = \Psi_1(\xi, \tau) \eta(\tau - \xi\beta). \end{aligned} \quad (26)$$

Изображение искомой функции (26) имеет вид

$$\bar{W}(\xi, p) = (1/p) \exp\left[-\beta \xi \sqrt{p(p+1/\beta^2)}\right],$$

оригинал которого можно записать через интеграл
Римана – Меллина следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p} \exp\left[-\beta \xi \sqrt{p(p+1/\beta^2)}\right] \leftarrow \\ & \leftarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{1}{p} \exp\left[p\tau - \beta \xi \sqrt{p(p+1/\beta^2)}\right] dp = \\ & = \Psi_2(\xi, \tau). \end{aligned} \quad (27)$$

Подынтегральная функция в (27) удовлетворяет
условиям леммы Жордано [2], имеет две точки вет-
вления. Вычисляя контурный интеграл (27), находим:

$$\Psi_2(\xi, \tau) = 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^{1/\beta^2} \exp(-\rho \tau) \frac{\sin \xi \beta \sqrt{\rho\left(\frac{1}{\beta^2} - \rho\right)}}{\rho} d\rho. \quad (28)$$

Теперь покажем, что аналитические решения пер-
вой краевой задачи в виде $W(\xi, \tau) = \Psi_1(\xi, \tau) \eta(\tau - \xi\beta)$
и $W(\xi, \tau) = \Psi_2(\xi, \tau) \eta(\tau - \xi\beta)$ эквивалентны, то есть
 $\Psi_1(\xi, \tau) = \Psi_2(\xi, \tau)$. Имеем:

$$\Psi_1(\xi, \tau) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[- \int_{\xi}^{\tau/\beta} \exp\left(-\frac{x}{2\beta}\right) I_0\left(\frac{1}{2\beta} \sqrt{x^2 - \xi^2}\right) dx \right].$$

Продифференцируем обе части по τ :

$$\begin{aligned} & [\Psi_1]_{\tau}' = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[- \frac{1}{\beta} \exp\left(-\frac{\tau}{2\beta^2}\right) I_0\left(\frac{1}{2\beta} \sqrt{\frac{\tau^2}{\beta^2} - \xi^2}\right) \right] = \\ & = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[- \frac{1}{\beta} \exp\left(-\frac{\tau}{2\beta^2}\right) J_0\left(\frac{1}{2\beta^2} \sqrt{(\beta \xi)^2 - \tau^2}\right) \right]. \end{aligned}$$

Воспользуемся далее интегралом (достаточно
редким)

$$\begin{aligned} & \int_0^a \frac{\exp(-py)}{\sqrt{ay - y^2}} \cos c \sqrt{ay - y^2} dy = \\ & = \pi \exp\left(-\frac{ap}{2}\right) J_0\left(\frac{a}{2} \sqrt{c^2 - p^2}\right). \end{aligned}$$

Находим:

$$\begin{aligned} & [\Psi_1(\xi, \tau)]_{\tau}' = \\ & = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[- \frac{1}{\beta \pi} \int_0^{1/\beta^2} \frac{\exp(-\rho \tau)}{\sqrt{\rho\left(\frac{1}{\beta^2} - \rho\right)}} \cos(\beta \xi \sqrt{\rho\left(\frac{1}{\beta^2} - \rho\right)}) d\rho \right] = \\ & = \frac{1}{\pi} \int_0^{1/\beta^2} \exp(-\rho \tau) \sin \beta \xi \sqrt{\rho\left(\frac{1}{\beta^2} - \rho\right)} d\rho. \end{aligned}$$

Проинтегрируем по τ :

$$\Psi_1(\xi, \tau) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{1/\beta^2} \exp(-\rho\tau) \frac{\sin \beta \xi \sqrt{\rho \left(\frac{1}{\beta^2} - \rho \right)}}{\rho} d\rho + C.$$

Так как по условию задачи $\Psi_1(0, \tau) = 1$, то $C = 1$ и окончательно получаем:

$$\begin{aligned} \Psi_1(\xi, \tau) &= \\ &= 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^{1/\beta^2} \exp(-\rho\tau) \frac{\sin \beta \xi \sqrt{\rho \left(\frac{1}{\beta^2} - \rho \right)}}{\rho} d\rho = \\ &= \Psi_2(\xi, \tau). \end{aligned}$$

Таким образом, показано, что

$$W(\xi, \tau) = \Psi_1(\xi, \tau)\eta(\tau - \xi\beta) = \Psi_2(\xi, \tau)\eta(\tau - \xi\beta). \quad (29)$$

На рис. 2 приведен график кривых $W(\xi, \tau)$ в сечении $\xi = 2$; обе кривые, вычисленные по формулам (29), практически совпали. Приведенные рассуждения могут быть распространены также на вторую и третью краевые задачи с обобщенными граничными условиями, что подчеркивает особенность гиперболических моделей переноса.

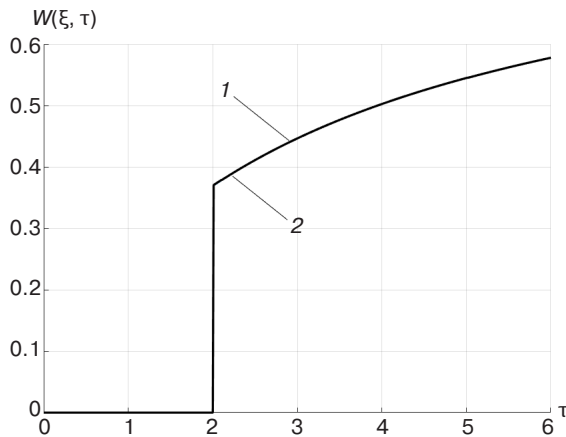


Рис. 2. Результаты вычислений функции $W(\xi, \tau)$ в сечении $\xi = 2$ ($\beta = 1$):
1 — по (26), 2 — по (28)

Конечные области канонического типа

Математические модели для уравнения (10) в области $\xi \in [0, \xi_0]$, $\tau \geq 0$ с обобщенными граничными условиями практически не располагают в полной мере необходимым аппаратом операционного исчисления, что существенно затрудняет нахождение их точных аналитических решений. Рассмотрим ряд операционных соотношений, характерных для указанного случая. Найдем оригинал изображения

$$\frac{(H - \beta p)^n}{(H + \beta p)^{n+1}}. \quad (30)$$

Воспользуемся справочной формулой [27]:

$$\begin{aligned} \frac{(1-p)^n}{p^{n+1}} &= \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k p^{k-n-1} = \\ &= (-1)^n \sum_{m=0}^n (-1)^m C_n^m p^{-(m+1)} \leftarrow \\ &\leftarrow (-1)^n \sum_{m=0}^n (-1)^m C_n^m \frac{1}{m!} t^m = \\ &= (-1)^n L_n(t), \end{aligned}$$

где $L_n(t) = \frac{1}{n!} \exp(t) \frac{d^n}{dt^n} [t^n \exp(-t)]$ — полином Лагерра [27].

Используя далее последовательно операционные теоремы $(1/k)\bar{f}(pk) \leftarrow f(kt)$, $\bar{f}(p-k) \leftarrow \exp(kt)f(t)$, $\bar{f}(p)\exp(-pt_0) \leftarrow f(t-t_0)\eta(t-t_0)$, находим искомым оригинал:

$$\frac{(H - \beta p)^n}{(H + \beta p)^{n+1}} \leftarrow \frac{(-1)^n}{\beta} \exp\left(-\frac{H}{\beta}t\right) L_n\left(2\frac{H}{\beta}t\right). \quad (31)$$

Аналогичными рассуждениями можно показать:

$$\frac{(H + \beta p)^n}{(H - \beta p)^{n+1}} \leftarrow \frac{1}{\beta} \exp\left(\frac{H}{\beta}t\right) L_n^*\left(2\frac{H}{\beta}t\right), \quad (32)$$

где $L_n^*(t) = (-1)^{n+1} \sum_{m=0}^n C_n^m \frac{1}{m!} t^m$ — полином Карташова.

Найдем оригинал изображения $\bar{f}(\sqrt{(p+a)^2 - b^2})$, если $\bar{f}(p) \leftarrow f(t)$. Используем для этих целей теорему Эфроса:

$$\begin{aligned} \bar{f}[\bar{\Phi}_1(p)]\bar{\Phi}_2(p) &\leftarrow \int_0^t f(\tau)\Psi(\tau, t)d\tau, \\ \Psi(\tau, t) &\rightarrow \exp[-\tau\bar{\Phi}_1(p)]\bar{\Phi}_2(p). \end{aligned} \quad (33)$$

Находим:

$$\begin{aligned} \bar{f}(\sqrt{(p+a)^2 - b^2}) &\leftarrow \exp(-at) \times \\ &\times \left[f(t) + b \int_0^t y f(y) \frac{I_1(b\sqrt{t^2 - y^2})}{\sqrt{t^2 - y^2}} dy \right]. \end{aligned} \quad (34)$$

Аналогично находим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \bar{f}(\sqrt{(p+a)^2 - b^2}) \exp[-\gamma\sqrt{(p+a)^2 - b^2}] &\leftarrow \\ \leftarrow \int_{\gamma}^t f(\tau - \gamma) \left[\exp(-a\tau) + b \int_{\tau}^t \exp(-ay) \frac{I_1(b\sqrt{y^2 - \tau^2})}{\sqrt{y^2 - \tau^2}} dy \right] d\tau. \end{aligned} \quad (35)$$

Выражение (35) включает ряд частных случаев, в частности, важное в практическом плане соотношение

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{p} \bar{f}(\sqrt{\beta^2 p^2 + p}) \exp(-\gamma \sqrt{\beta^2 p^2 + p}) \leftarrow \\ & \leftarrow \int_0^t \exp\left(-\frac{\tau}{2\beta^2}\right) \varphi(\gamma, \tau) d\tau, \\ & \varphi(\gamma, t) = f^*(t - \gamma\beta) + \\ & + \frac{1}{2\beta^2} \int_0^t y f^*(y - \gamma\beta) \frac{I_1\left(\frac{1}{2\beta^2} \sqrt{t^2 - y^2}\right)}{\sqrt{t^2 - y^2}} dy, \\ & f^*(t) = \frac{1}{\beta} f(t/\beta) \eta(t). \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Пусть теперь $\bar{S}(p) = \sqrt{\beta^2 p^2 + p}$. Из предыдущих соотношений находим:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{[H - \bar{S}(p)]^n}{[H + \bar{S}(p)]^{n+1}} \exp[-\gamma \bar{S}(p)] \leftarrow \\ & \leftarrow \exp\left(-\frac{t}{2\beta^2}\right) [f(t - \gamma\beta) + \\ & + \frac{1}{2\beta^2} \int_0^t f(\tau - \gamma\beta) \frac{\tau I_1\left(\frac{1}{2\beta^2} \sqrt{t^2 - \tau^2}\right)}{\sqrt{t^2 - \tau^2}} d\tau, \\ & f(t) = \frac{(-1)^n}{\beta} \exp\left(-\frac{H}{\beta} t\right) L_n\left(\frac{2H}{\beta} t\right) \eta(t) \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

В качестве приложения полученных результатов рассмотрим две характерные для теплового удара модели:

$$\frac{\partial W_i}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 W_i}{\partial \xi^2} - \beta^2 \frac{\partial^2 W_i}{\partial \tau^2}, \quad 0 < \xi < \xi_0, \quad \tau > 0, \quad (i = 1, 2), \quad (38)$$

$$W_i|_{\tau=0} = (\partial W_i / \partial \tau)|_{\tau=0} = 0, \quad 0 \leq \xi \leq \xi_0,$$

$$W_1|_{\xi=0} = 1, \quad W_1|_{\xi=\xi_0} = 0, \quad \tau > 0, \quad (39)$$

$$W_2|_{\xi=0} = 1, \quad (\partial W_2 / \partial \xi)|_{\xi=\xi_0} = 0, \quad \tau > 0. \quad (40)$$

Находим в пространстве изображений по Лапласу:

$$\bar{W}_1(\xi, p) = \frac{1}{p} \frac{\text{sh}[(\xi_0 - \xi)\bar{S}(p)]}{\text{sh}[\xi_0 \bar{S}(p)]},$$

$$\bar{W}_2(\xi, p) = \frac{1}{p} \frac{\text{ch}[(\xi - \xi_0)\bar{S}(p)]}{\text{ch}[\xi_0 \bar{S}(p)]}.$$

Раскроем дроби:

$$\bar{W}_1(\xi, p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p} \left\{ \exp[-\gamma_{1k} \bar{S}(p)] - \exp[-\gamma_{2k} \bar{S}(p)] \right\},$$

$$\bar{W}_2(\xi, p) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{p} \left\{ \exp[-\gamma_{1k} \bar{S}(p)] + \exp[-\gamma_{2k} \bar{S}(p)] \right\},$$

где

$$\gamma_{1k} = 2k\xi_0 + \xi, \quad \gamma_{2k} = 2(k+1)\xi_0 + \xi, \quad \bar{S}(p) = \sqrt{\beta^2 p^2 + p}.$$

Переходя к оригиналам по приведенным выше соотношениям, находим:

$$W_1(\xi, \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \Psi[\gamma_{1k}(\xi), \tau] - \Psi[\gamma_{2k}(\xi), \tau] \right\}, \quad (41)$$

$$W_2(\xi, \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left\{ \Psi[\gamma_{1k}(\xi), \tau] + \Psi[\gamma_{2k}(\xi), \tau] \right\}, \quad (42)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi(\gamma_{ik}, \tau) = & \left[\exp\left(-\frac{\gamma_{ik}}{2\beta}\right) + \frac{\gamma_{ik}}{2\beta} \int_{\gamma_{ik}/2\beta}^{\tau/2\beta^2} \exp(-y) \frac{I_1\left(\sqrt{y^2 - (\gamma_{ik}/2\beta)^2}\right)}{\sqrt{y^2 - (\gamma_{ik}/2\beta)^2}} dy \right] \times \\ & \times \eta(\tau - \gamma_{ik}\beta). \end{aligned} \quad (43)$$

Заметим, что решения (41)–(43) в аналитической теплофизике ранее были неизвестны. Аналогично могут быть рассмотрены все 9 граничных условий для $W(\xi, \tau)$ в области $\xi \in [0, \xi_0]$, $\tau \geq 0$ и, таким образом, указанная проблема для ограниченной области может считаться закрытой. В то же время следует заметить, что здесь также, как и выше, можно получить аналитические решения в виде других функциональных конструкций, эквивалентных приведенным. Последнее составляет одну из особенностей гиперболических моделей переноса. Численная реализация полученных соотношений не вызывает принципиальных трудностей, учитывая возможность существующего программного обеспечения для целей аналитической теплофизики.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлены оригиналы нестандартных операционных изображений (по Лапласу), входящие в операционные решения широкого класса задач локально неравновесных процессов переноса (теплоты, массы, импульса), электрических цепей, гидродинамики, теории колебаний, термомеханики

и других областей. Приведены иллюстративные примеры и показана возможность построения аналитических решений краевых задач нестационарной теплопроводности в частично ограниченной области в виде различных функциональных конструкций, для которых доказана эквивалентность.

Представленные аналитические решения в областях канонического типа являются новыми в аналитической теплофизике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зудин Ю.Б., Уртенев Д.С., Устинов В.С. Анализ сопряженной задачи испарение-теплопроводность. *Изв. РАН. Энергетика*. 2020;1:138–158. <https://doi.org/10.31857/S0002331019060153>
2. Карташов Э.М. *Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел*. М.: Высшая школа; 2001. 540 с. ISBN 5-06-004091-7
3. Карташов Э.М., Кудинов В.А. *Аналитические методы теории теплопроводности и ее приложений*. М.: URSS; 2012. 1080 с. ISBN 978-5-9710-4994-4
4. Лыков А.В. *Теория теплопроводности*. М.: Высшая школа; 1967. 600 с.
5. Зарубин В.С. *Инженерные методы решения задач теплопроводности*. М.: Энергоатомиздат; 1983. 328 с.
6. Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики*. М.: Изд-во МГУ; 1999. 799 с. ISBN 5-211-04138-0
7. Формалев В.Ф. *Уравнения математической физики*. М.: URSS; 2021. 648 с. ISBN 978-5-9710-8380-1
8. Sobolev S.L. On hyperbolic heat-mass transfer equation. *Int. J. Heat Mass Tran.* 2018;122:629–630. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2018.02.022>
9. Кудинов И.В., Кудинов В.А. Математическая модель локально-неравновесного теплопереноса с учетом пространственно-временной нелокальности. *Инженерно-физ. журн.* 2015;88(2):393–408.
10. Кудинов В.А., Еремин А.В., Кудинов И.В. Разработка и исследование сильно неравновесной модели теплообмена в жидкости с учетом пространственно-временной нелокальности. *Теплофизика и аэромеханика*. 2017;24(6):929–935.
11. Кирсанов Ю.А., Кирсанов А.Ю. Об измерении времени тепловой релаксации твердых тел. *Изв. РАН. Энергетика*. 2015;1:113–122.
12. Карташов Э.М. Модельные представления теплового удара в динамической термоупругости. *Российский технологический журнал*. 2020;8(2):85–108. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2020-8-2-85-108>
13. Карташов Э.М. Теория теплового удара на основе обобщенной модели динамической термоупругости. *Тонкие химические технологии*. 2012;7(1):69–72.
14. Синкевич О.А., Семенов А.М. Решение уравнения Больцмана методом разложения функции распределения в ряд Энскога по параметру Кнудсена в случае наличия нескольких масштабов зависимости функции распределения от времени и координат. *Журн. техн. физики*. 2003;73(10):1–5.
15. Maxwell J.C. On the Dynamical Theory of Gases. *Phil. Trans. Royal. Soc. London*. 1867;157(1):49–88. <https://doi.org/10.1098/rstl.1867.0004>

REFERENCES

1. Zudin Yu.B., Urtenov D.S., Ustinov V.S. Analysis of the “evaporation-thermal conductivity” conjugate problem. *Izvestiya RAN. Energetika*. 2020;1:138–158 (in Russ.). <https://doi.org/10.31857/S0002331019060153>
2. Kartashov E.M. *Analytical methods in the theory of thermal conductivity of solids*. Moscow: Vysshaya shkola; 2001. 540 p. (in Russ.). ISBN 5-06-004091-7
3. Kartashov E.M., Kudinov V.A. *Analytical methods of the theory of heat conduction and its applications*. Moscow: URSS; 2012. 1080 p. (in Russ.). ISBN 978-5-9710-4994-4
4. Lykov A.V. *Teoriya teploprovodnosti (Theory of heat conduction)*. Moscow: Vysshaya shkola; 1967. 600 p. (in Russ.).
5. Zarubin V.S. *Inzhenernye metody resheniya zadach teploprovodnosti (Engineering methods for solving problems of heat conduction)*. Moscow: Energoatomizdat; 1983. 328 p. (in Russ.).
6. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. *Uravneniya matematicheskoi fiziki (Equations of mathematical physics)*. Moscow: Izdatel'stvo MGU; 1999. 799 p. (in Russ.). ISBN 5-211-04138-0
7. Formalev V.F. *Uravneniya matematicheskoi fiziki (Equations of mathematical physics)*. Moscow: URSS; 2021. 648 p. (in Russ.). ISBN 978-5-9710-8380-1
8. Sobolev S.L. On hyperbolic heat-mass transfer equation. *Int. J. Heat Mass Tran.* 2018;122:629–630. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2018.02.022>
9. Kudinov I.V., Kudinov V.A. Mathematical simulation of locally nonequilibrium heat transfer in a body with account for its nonlocality in space and time. *J. Eng. Physics and Thermophy.* 2015;88(2):406–422. <https://doi.org/10.1007/s10891-015-1206-6> [Original Russian Text: Kudinov I.V., Kudinov V.A. Mathematical simulation of locally nonequilibrium heat transfer in a body with account for its nonlocality in space and time. *Inzhenerno-Fizicheskii Zhurnal*. 2015;88(2):393–408 (in Russ.).]
10. Kudinov V.A., Eremin A.V., Kudinov I.V. The development and investigation of a strongly non-equilibrium model of heat transfer in fluid with allowance for the spatial and temporal non-locality and energy dissipation. *Thermophys. Aeromech.* 2017;24(6):901–907. <https://doi.org/10.1134/S0869864317060087> [Original Russian Text: Kudinov V.A., Eremin A.V., Kudinov I.V. The development and investigation of a strongly non-equilibrium model of heat transfer in fluid with allowance for the spatial and temporal non-locality and energy dissipation. *Teplofizika i aeromekhanika*. 2017;24(6):929–935 (in Russ.).]

16. Лыков А.В. *Теплопроводность и диффузия в производстве кожи, заменителей и других материалов*. М.: Гизлегпром; 1941. 196 с.
17. Cattaneo C. Sulla Conduzione del Calore. *Atti del Seminario Matematico e Fisico della Università di Modena*. 1948;3:83–101.
18. Vernotte P. Les paradoxes de la theorie continue de l'equation de la chaleur. *Comptes Rendus. Acad. Sci. Paris*. 1958;246(22):3154–3155.
19. Кирсанов Ю.А. *Циклические тепловые процессы и теория теплопроводности в регенеративных воздухоподогревателях*. М.: Физматлит; 2007. 240 с. ISBN 978-5-9221-0831-7
20. Карташов Э.М. Аналитические решения гиперболических моделей теплопроводности. *Инженерно-физ. журн.* 2014;87(5):1072–1081.
21. Фок И.А. Решение задачи теории диффузии методом конечных разностей и приложение его к диффузии света. *Труды государственного оптического института*. 1926;4(34). 32 с.
22. Давыдов Б.И. Диффузионное уравнение с учетом молекулярной скорости. *ДАН СССР*. 1935;2:474–475.
23. Предводителев А.С. Учение о теплоте и римановы многообразия. В кн.: *Проблемы тепло- и массопереноса*. М.: Энергия; 1970. С. 151–192.
24. Карслоу Х., Егер Д. *Операционные методы в прикладной математике*: пер с англ. М.: ИЛ; 1948. 292 с.
25. Baumeister K., Hamill T.D. Hyperbolic heat-conduction equation. A Solution for the semi-infinite body problem. *J. Heat Transfer*. 1969;91(1):543–548. <https://doi.org/10.1115/1.3449749>
26. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. *Обобщенная термомеханика*. Киев: Наукова Думка; 1976. 310 с.
27. Диткин В.А., Прудников А.П. *Справочник по операционному исчислению*. М.: Высшая школа; 1966. 466 с.
11. Kirsanov Yu.A., Kirsanov A.Yu. About measuring the thermal relaxation time of solid body. *Izvestiya RAN. Energetika*. 2015;1:113–122 (in Russ.).
12. Kartashov E.M. Model representations of heat shock in dynamic thermal elasticity. *Rossiiskii tekhnologicheskii zhurnal = Russian Technological Journal*. 2020;8(2):85–108 (in Russ.).
13. Kartashov E.M. Theory of thermal shock based on the generalized dynamic thermoelasticity model. *Tonkie khimicheskie tekhnologii = Fine Chemical Technologies*. 2012;7(1):69–72 (in Russ.).
14. Sinkevich O.A., Semenov A.M. Solution of the Boltzmann equation by expanding the distribution function with several time and coordinate scales in the Enskog series in Knudsen parameter. *Tech. Phys.* 2003;48(10):1221–1225. <https://doi.org/10.1134/1.1620111>
[Original Russian Text: Sinkevich O.A., Semenov A.M. Solution of the Boltzmann equation by expanding the distribution function with several time and coordinate scales in the Enskog series in Knudsen parameter. *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki*. 2003;73(10):1–5 (in Russ.).]
15. Maxwell J.C. On the Dynamical Theory of Gases. *Phil. Trans. Royal. Soc. London*. 1867;157(1):49–88. <https://doi.org/10.1098/rstl.1867.0004>
16. Lykov A.V. *Teploprovodnost' i diffuziya v proizvodstve kozhi, zamenitelei i drugikh materialov (Thermal conductivity and diffusion in the production of leather, substitutes and other materials)*. Moscow: Gizlegprom; 1941. 196 p. (in Russ.).
17. Cattaneo C. Sulla Conduzione del Calore. *Atti del Seminario Matematico e Fisico della Università di Modena*. 1948;3:83–101.
18. Vernotte P. Les paradoxes de la theorie continue de l'equation de la chaleur. *Comptes Rendus. Acad. Sci. Paris*. 1958;246 (22):3154–3155.
19. Kirsanov Yu.A. *Tsiklicheskie teplovyte protsessy i teoriya teploprovodnosti v regenerativnykh vozdukhopodogrevatelyakh (Cyclic thermal processes and the theory of thermal conductivity in regenerative air heaters)*. Moscow: Fizmatlit; 2007. 240 p. (in Russ.). ISBN 978-5-9221-0831-7
20. Kartashov E.M. Analytical solutions of hyperbolic heat-conduction models. *J. Eng. Physics and Thermophys.* 2014;87(5):1116–1125.
[Original Russian Text: Kartashov E.M. Analytical solutions of hyperbolic heat-conduction models. *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal*. 2014;87(5):1072–1081 (in Russ.).]
21. Fok I.A. Solution of the problem of the theory of diffusion by the method of finite difference and its application for light scattering. *Trudy gosudarstvennogo opticheskogo instituta*. 1926;4(34). 32 p. (in Russ.).
22. Davydov B.I. Diffusion equation with molecular velocity. *Doklady Akademii Nauk*. 1935;2:474–475 (in Russ.).
23. Predvoditelev A.S. Heat theory and Riemannian manifolds. In: *Problemy teplo- i massopere-nosa (Problems of Heat and Mass Transfer)*. Moscow: Energiya; 1970. P. 151–192. (in Russ.).
24. Carslow H.S., Jaeger J.C. *Operatsionnye metody v prikladnoi matematike (Operational Methods in Applied Mathematics)*: transl. from Eng. Moscow: M.: IL; 1948. 292 p. (in Russ.).
[Carslow H.S., Jaeger J.C. *Operational Methods in Applied Mathematics*. Oxford University Press; 1941. 286 p.]

25. Baumeister K., Hamill T.D. Hyperbolic heat-conduction equation. A Solution for the semi-infinite body problem. *J. Heat Transfer*. 1969;91(1):543–548. <https://doi.org/10.1115/1.3449749>
26. Podstrigach Ya.S., Kolyano Yu.M. *Obobshchennaya termomekhanika (Generalized thermomechanics)*. Kiev: Naukova Dumka; 1976. 310 p. (in Russ).
27. Ditkin V.A., Prudnikov A.P. *Spravochnik po operatsionnomu ischisleniyu (Operational calculus handbook)*. Moscow: Vysshaya shkola; 1966. 466 p. (in Russ).

Об авторе

Карташов Эдуард Михайлович, д.ф.-м.н., заслуженный деятель науки РФ, Почетный работник высшего профессионального образования РФ, Почетный работник науки и техники РФ, почетный профессор МИТХТ им. М.В. Ломоносова, Лауреат Золотой медали АН Белоруси по теплофизике, профессор кафедры высшей и прикладной математики Института тонких химических технологий им. М.В. Ломоносова ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119571, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 86). E-mail: kartashov@mitht.ru. Scopus Author ID 7004134344, ResearcherID Q-9572-2016, <https://orcid.org/0000-0002-7808-4246>

About the author

Eduard M. Kartashov, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Honored Scientist of the Russian Federation, Honorary Worker of Higher Professional Education of the Russian Federation, Honorary Worker of Science and Technology of the Russian Federation, Honorary Professor of the Lomonosov Moscow State University of Fine Chemical Technology, Laureate of the Golden Medal of the Academy of Sciences of Belarus in Thermophysics, Professor, Department of Higher and Applied Mathematics, M.V. Lomonosov Institute of Fine Chemical Technologies, MIREA – Russian Technological University (86, Vernadskogo pr., Moscow, 119571 Russia). E-mail: kartashov@mitht.ru. Scopus Author ID 7004134344, ResearcherID Q-9572-2016, <https://orcid.org/0000-0002-7808-4246>