

Математическое моделирование
Mathematical modeling

УДК 004.9:539.17
<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2022-10-1-60-67>



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Моделирование двумерных вихревых течений в цилиндрическом канале с помощью параллельных вычислений на суперкомпьютере

И.Г. Лебо[@],
И.В. Обручев

МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, 119454 Россия
[@] Автор для переписки, e-mail: lebo@mirea.ru

Резюме

Цели. Изучается эволюция вихревых структур, формирующихся при взаимодействии падающей и отраженной под углом ударных волн в цилиндрическом канале. Сама ударная волна задается с помощью соотношений Гюгонио, позволяющих определить параметры газа за фронтом ударной волны по заданному числу Маха и значениям газодинамических параметров перед скачком давления. Моделировалось распространение сильной ударной волны (число Маха равнялось 20) в инертном газе аргоне.

Методы. Используются методы математического моделирования. Разработан параллельный алгоритм решения двумерных уравнений газовой динамики в цилиндрических координатах (r, z, t) и создана новая версия программы *NUTCY_ps*. Расчеты выполнены на суперкомпьютере МВС-100К.

Результаты. Рассмотрены две методики распараллеливания процессов при решении системы уравнений. На примере конкретной задачи проведено сравнение эффективности этих методик. Разработан параллельный алгоритм и модернизирована программа для решения двумерных уравнений газовой динамики в цилиндрических координатах $(r, z - \text{пространственные координаты}, t - \text{время})$. Проведены численные расчеты, моделирующие: 1) падение и отражение ударной волны от металлического экрана; 2) прохождение ударной волны через отверстие в экране; 3) прохождение ударной волны через цилиндрический канал и ее отражение от дна канала, взаимодействие с падающей волной. Представлены результаты тестовых решений на параллельном суперкомпьютере с использованием различного числа процессоров. Показано, что при использовании 16 процессоров удается приблизительно в 12 раз сократить время расчета тестовой задачи.

Выводы. Показано, что при взаимодействии падающей и отраженной под углом ударными волнами формируются области с пониженной и повышенной плотностью газа, а также вихревые течения. Область взаимодействия вихрей (зона турбулентности) приобретает сложную форму. В статье обсуждается возможность проведения натурных экспериментов на ударных трубах или с помощью лазерной ударной трубы. Такие исследования позволили бы сравнить экспериментальные данные с результатами численных расчетов и на их основе развить более совершенные модели турбулентных движений.

Ключевые слова: численное моделирование, сверхзвуковые течения, вихри, двумерная газовая динамика в цилиндрических координатах

• Поступила: 15.07.2021 • Доработана: 03.08.2021 • Принята к опубликованию: 13.12.2021

Для цитирования: Лебо И.Г., Обручев И.В. Моделирование двумерных вихревых течений в цилиндрическом канале с помощью параллельных вычислений на суперкомпьютере. *Russ. Technol. J.* 2022;10(1):60–67. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2022-10-1-60-67>

Прозрачность финансовой деятельности: Никто из авторов не имеет финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

RESEARCH ARTICLE

The modeling of two-dimensional vortex flows in a cylindrical channel using parallel calculations on a supercomputer

Ivan G. Lebo[@],
Ivan V. Obruchev

MIREA – Russian Technological University, Moscow, 119454 Russia

[@] Corresponding author, e-mail: lebo@mirea.ru

Abstract

Objectives. The study aimed to examine vortex structures formed during the interaction of incident and reflected shock waves in a cylindrical channel. The shock wave was described by the Hugoniot relations, which make it possible to determine the parameters of the gas behind the shock front by a given Mach number and the values of the gas-dynamic parameters ahead of the pressure jump. The propagation of a strong shock wave (Mach number was 20) in argon was simulated.

Methods. The methods of mathematical modeling were used. A parallel algorithm for solving two-dimensional equations of gas dynamics in cylindrical coordinates (r, z, t) was developed and a new version of the *NUTCY_ps* program created. The calculations were performed on an MVS-100K supercomputer.

Results. Two methods of parallelization when solving a system of equations were considered. Using a specific task as an example, a comparison of the effectiveness of these methods was conducted. A parallel algorithm was developed and a program was upgraded for solving two-dimensional equations of gas dynamics in cylindrical coordinates $(r, z$ are spatial coordinates, t is time). Numerical calculations were performed to simulate: 1) the shock wave incidence to and reflection from a metal screen; 2) the propagation of the shock wave through a hole in the screen; 3) the propagation of the shock wave through a cylindrical channel and its reflection from the bottom of the channel and interaction with the incident wave.

The results obtained by the parallel supercomputer with different numbers of processors are presented. It is shown that using 16 processors, it is possible to reduce the computation time for getting a solution for the test problem by approximately 12 times.

Conclusions. It is shown that the interaction of incident shock wave and the one reflected at an angle leads to the formation of regions with low and high gas densities, as well as vortex flows. The vortex interaction area (turbulence zone) gets a complex shape. The article discusses the possibility of carrying out full-scale experiments in shock tubes or using a laser shock tube. Such studies would make it possible to compare experimental data with the results of numerical simulation and, on their basis, to develop more advanced models of turbulent motions.

Keywords: numerical simulation, supersonic flows, vortices, two-dimensional gas dynamics in cylindrical coordinates

• Submitted: 15.07.2021 • Revised: 03.08.2021 • Accepted: 13.12.2021

For citation: Lebo I.G., Obruchev I.V. The modeling of two-dimensional vortex flows in a cylindrical channel using parallel calculations on a supercomputer. *Russ. Technol. J.* 2022;10(1):60–67. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2022-10-1-60-67>

Financial disclosure: The authors have no a financial or property interest in any material or method mentioned.

The authors declare no conflicts of interest.

ВВЕДЕНИЕ

Изучение сложных турбулентных течений при сверхзвуковом движении газа представляет собой актуальную проблему современной газовой динамики и физики высоких концентраций энергии. Такие явления возникают при вхождении летательных аппаратов в атмосферу Земли, в астрофизике и изучении последствий столкновений нашей планеты с космическими объектами, при исследованиях в области лазерного термоядерного синтеза.

Для численного решения подобных задач используются методы математического моделирования [1–4].

В работе [5] были опубликованы результаты исследования особенностей взаимодействия двух вихрей в газовой среде. Для моделирования этого явления был развит параллельный алгоритм и двумерная программа *NUT_2D* для решения уравнений двухкомпонентной газовой динамики в декартовых координатах на супер-ЭВМ MBC-100K в Межведомственном суперкомпьютерном центре Российской академии наук (МСЦ РАН)¹. Для решения уравнений применяются TVD-разностные схемы повышенного порядка аппроксимации [6, 7].

Следующий шаг – развитие двумерной программы решения уравнений газовой динамики в цилиндрических координатах и алгоритма расчета задач на параллельном суперкомпьютере MBC-100K.

В настоящей статье мы представляем результаты расчетов, выполненных с помощью модернизированной двумерной программы *NUTCY* в цилиндрических координатах (r, z – пространственные координаты, t – время) [8]. В основе математической модели программы лежат уравнения газовой динамики, дополненные условиями Гюгоньо, позволяющими задать параметры газа за фронтом ударной волны [9].

Был разработан алгоритм параллельных вычислений и создана новая версия программы *NUTCY_ps* для численного решения двумерных уравнений газовой динамики в цилиндрических координатах. Расчеты проводились на комплексе MBC-100K с использованием большого количества процессоров.

Существует два основных вида распараллеливания: алгоритмический (по управлению) и геометрический (по данным). В связи со значительным

потенциалом программы *NUTCY* в параллелизме по данным для решения поставленной задачи был выбран геометрический способ: 1) расчетная область в форме цилиндра в ортогональном осевом сечении разбивается плоскостями, перпендикулярными оси, на одинаковые по линейному размеру подобласти; 2) разбиение проводилось по двум направлениям – вдоль оси Oz и на цилиндрические слои одинаковой толщины вдоль оси Or (на рис. 1 $x = r$). Границы и расположение подобласти, рассчитываемой процессором, вычисляются с помощью его индекса, который назначается коммуникатором MPI при инициализации. Каждый процессор хранит в памяти значения только тех ячеек, которые входят в его подобласть, управляющий процессор имеет дополнительные буферы для ввода и вывода данных. На каждом вычислительном узле расчет идет по одинаковой схеме. В ходе расчетов использовались оба варианта разбиения области: по двум осям (рис. 1а) и по одной (рис. 1б).

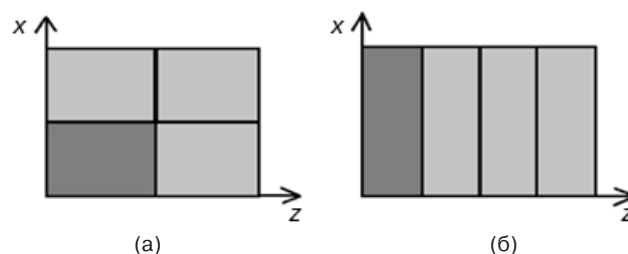


Рис. 1. Схемы распараллеливания в новой версии программы *NUTCY_ps*:

(а) по двум осям; (б) по одной оси

Для сохранения однородности вычислительной схемы для каждой новой подобласти вводится по два слоя фиктивных ячеек на каждой из четырех (двух в случае одномерного распределения) границ. Значения в этих ячейках определяются двумя способами в зависимости от положения в сетке:

- 1) исходя из граничных условий (если граница новой подобласти совпадает с границей всей расчетной области);
- 2) на границу следующей подобласти данные передаются с процессора, который обрабатывает предыдущую подобласть (для внутренних подобластей).

Для обмена данными написана специальная процедура. Каждый процессор хранит индексы «процессоров-соседей». Процедура реализует передачу

¹ www.jscc.ru

значений газодинамических величин граничных ячеек «процессорам-соседям» и получение значений фиктивных ячеек от соседей. Если рассматривать «левую» границу подобласти, то значения ячеек с индексами 1 и 2 будут переданы соседу «слева», значения ячеек 0 и -1 – получены от него. Для неоднородных операций (например, ввод и вывод данных) процессор с нулевым индексом выступает в роли управляющего и ведет обмен данными с остальными процессорами. Все операции передачи данных между вычислительными узлами реализованы средствами MPI.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Программа *NUTCY* позволяет численно решать уравнения газовой динамики в двумерной цилиндрической геометрии в эйлеровых координатах (r, z):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \rho u}{\partial r} + \frac{\partial r \rho \omega}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial r \rho u}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \rho u^2}{\partial r} + \frac{\partial r \rho u \omega}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial r} &= 0, \\ \frac{\partial r \rho \omega}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \rho u \omega}{\partial r} + \frac{\partial r \rho \omega^2}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial r u(e+p)}{\partial r} + \frac{\partial (e+p) \omega}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь ρ – плотность; p – давление; $V_r = u$, $V_z = \omega$ – компоненты вектора скорости $\mathbf{V}$; $e = \rho \left(\varepsilon + \frac{V^2}{2} \right)$ – полная энергия. Система уравнений (1) дополнена:

1) уравнением состояния

$$p = (\gamma - 1) \rho \varepsilon,$$

где ε – удельная внутренняя энергия; γ – показатель адиабаты;

2) уравнением непрерывности для каждой компоненты газа (всего n компонент)

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_i \mathbf{V} = 0, \text{ где } i = \overline{1, n-1}. \quad (2)$$

Если газ содержит две компоненты, то удобно решать уравнение непрерывности для смеси (верхнее уравнение системы (1)) и уравнение для одной из компонент (2). Далее определяется концентрация первого компонента C , а концентрация второго компонента равняется $1 - C$.

Ударная волна задавалась с помощью соотношений Гюгонио:

$$\begin{aligned} P_1 &= P_0 \frac{2\gamma M_x^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1}, \quad ZP = \frac{P_1}{P_0}, \\ C_s^2 &= \gamma \frac{P_0}{\rho_0}, \quad D = M_x C_s, \\ \rho_1 &= \rho_0 \frac{\gamma + 1 + (\gamma - 1) / ZP}{\gamma - 1 + (\gamma + 1) / ZP}, \\ u_1^2 &= \left(\gamma \frac{P_1}{\rho_1} \right) \frac{\gamma - 1 + (\gamma + 1) / ZP}{2\gamma}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $P_{1(0)}$, $\rho_{1(0)}$ – давление и плотность за фронтом (перед фронтом) ударной волны; C_s – скорость звука; D – скорость движения фронта ударной волны в лабораторной системе отсчета. Достаточно задать число Маха (M_x) и термодинамические параметры газа перед фронтом ударной волны, чтобы определить соответствующие параметры за фронтом. Скорость движения газа за фронтом ударной волны в лабораторной системе отсчета будет определяться по формуле $w_1 = D - u_1$.

Моделировалось распространение ударной волны в области, заполненной газом, и ее взаимодействие с расположенным в этой области алюминиевым экраном, плотность которого равнялась $\rho = 2.7$ г/см³. Расчетная область ($0 < r < R$, $0 < z < L_z$, где R , L_z – размеры области) заполнена инертным газом – аргонном; показатель адиабаты $\gamma = 5/3$; начальное давление $P_0 = 0.5$ атм; плотность² $\rho_0 = 0.804$ мг/см³. На рис. 2а показана постановка задачи. Ударная волна (УВ) задается с помощью соотношений Гюгонио в области $0 < z < b_0$ (начальная граница подобласти, возмущенная УВ, число Маха $M_x = 20$) и движется сверху вниз. Скорость газа за фронтом падающей ударной волны $V_z = -4.817$ км/с.

ЗАДАЧА 1:

ОТРАЖЕНИЕ УДАРНОЙ ВОЛНЫ ОТ ЭКРАНА

В задаче 1 в расчетную область помещен алюминиевый экран с начальной плотностью $\rho = 2.7$ мг/см³. В первой серии расчетов проверялось решение квазиодномерной задачи, моделировалось движение ударной волны вдоль канала и ее отражение от экрана. Параметры задачи: $R = 0.25$ см, $L_z = 0.5$ см, скорость газа за фронтом ударной волны $v_z = -4817$ м/с.

Расчеты выполнялись на разностной сетке (250×500 узлов) на персональном компьютере. Ниже представлены результаты проведенных расчетов.

² Программа *NUTCY* использует для работы величины в системе СГС, но масштаб времени – в миллисекундах.

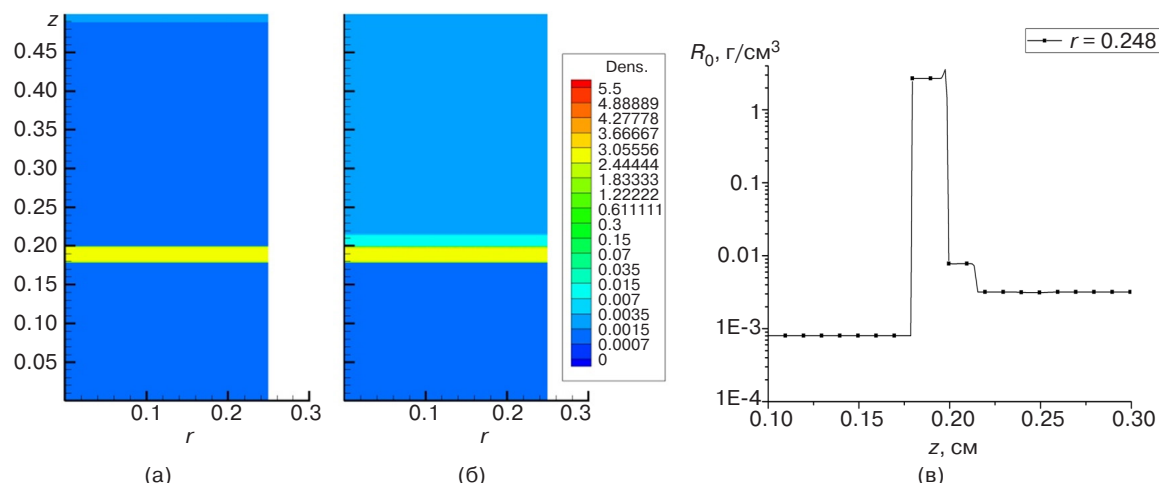


Рис. 2. Поля плотности при: (а) $t = 0$; (б) $t = 0.0005$ мс, распределение плотности вдоль направления Oz на момент $t = 0.0005$ мс (в), $r = 0.248$ см – значение радиуса, для которого построен «профиль плотности» вдоль направления Oz ($R_0 = \rho(z)$ [г/см^3])

Ударная волна достигла экрана и отразилась. К моменту времени $t = 0.0005$ мс отраженная волна движется в сторону верхнего торца ударной трубы. На рис. 2в показан «профиль плотности», полученный вблизи внешней границы цилиндра $r = 0.248$ см. Скорость газа за фронтом отраженной ударной волны $V_z = -0.198$ км/с в момент времени $t = 0.0005$ мс, то есть фронт отраженной УВ распространяется вверх навстречу падающей, а газ продолжает сжиматься.

ЗАДАЧА 2: ПРОХОЖДЕНИЕ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В ОТВЕРСТИЕ ЭКРАНА

Во второй серии расчетов в алюминиевый экран, расположенный в расчетной области, было добавлено отверстие. Рассматривалось частичное прохождение

ударной волны через отверстие и ее дифракция на краю отверстия. В связи с возникновением сложных физических явлений стал необходим переход к сеткам повышенного разрешения. Расчеты проводились в два этапа: на персональном компьютере с сеткой (250×500 узлов) и на одном процессоре комплекса МВС-100К с сеткой (1000×2000 узлов). Сравнение полученных данных показало аналогичные результаты.

В окрестности границы «отверстие-экран» появляется область дифракции ударной волны. Преломление волны приводит к возникновению завихрений. Заметим, что скорость газа за фронтом отраженной от экрана УВ (красная линия на рис. 3в) равна $V_z = -0.198$ км/с, то есть совпадает со скоростью газа в отраженной волне в задаче 1.

Повышенное количество узлов сетки позволяет, в принципе, более детально рассмотреть процессы

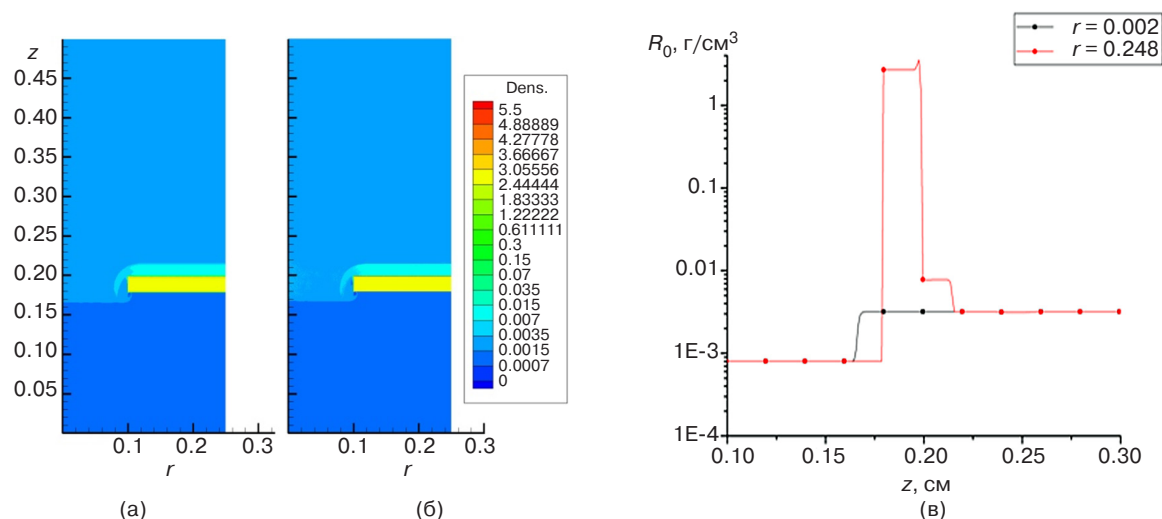


Рис. 3. Поля плотности ($t = 0.0005$ мс), полученные: (а) на персональном компьютере на сетке 250×500 ; (б) на МВС-100К (8 процессоров, сетка 1000×2000), профили плотности на момент $t = 0.0005$ мс (в) вблизи оси ($r = 0.002$ см) и вблизи внешней границы ($r = 0.248$ см)

в области дифракции ударной волны, однако существенно увеличивает время, затрачиваемое на расчеты. Была разработана версия программы *NUTCY* для расчета на многопроцессорном комплексе супер-ЭВМ (программа *NUTCY_ps*). С помощью многопроцессорной версии программы был просчитан предыдущий вариант (задача 2) и получены результаты, аналогичные рис. 3а (см. рис. 3б). Расчеты были выполнены на 8 процессорах. Этот расчет послужил тестом отсутствия ошибок в новой версии программы *NUTCY_ps*.

ЗАДАЧА 3: ВХОЖДЕНИЕ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В ПРОТЯЖЕННЫЙ КАНАЛ

Расчеты третьей задачи проводились на многопроцессорном комплексе МВС-100К с помощью программы *NUTCY_ps*.

В рамках третьей задачи алюминиевый экран был заменен на алюминиевую стенку с протяженным каналом. На нижнем торце – абсолютно упругая стенка. Изучалось движение ударной волны вдоль канала вниз и отраженной – до момента выхода из него. Рассматривалось распределение плотности по расчетной области. В связи с повышенной «времязатратностью» расчетов на сетке (1000×2000 узлов) запуск программы выполнялся на 16 процессорах комплекса МВС-100К в двух режимах: распределение по одной и по двум осям.

Ниже представлены графики, демонстрирующие движение ударной волны.

Рис. 4а соответствует моменту вхождения УВ в канал; рис. 4б – достижение фронтом УВ дна и отражения; рис. 4в – выход отраженной УВ из канала.

На графиках можно наблюдать возникновение зон уплотнений газа и «пузырей», возникающих за фронтом преломления ударной волны при ее вхождении в канал и выходе из него.

Сравнение результатов применения данной методики, а также сравнение эффективности двух подходов геометрического распараллеливания приведены в таблице 1.

Таблица 1. Сравнение времени расчетов одного шага и 6000 шагов в различных режимах распараллеливания

Режим расчетов (сетка 1000×2000 узлов)	Среднее время, затраченное на один шаг, с	Общее время работы программы при расчете 6000 шагов, с
Однопроцессорный	1.982	12462
Многопроцессорный, в конфигурации 4×4	0.155	1175
Многопроцессорный, в конфигурации 1×16	0.167	1234

Как можно видеть, при одинаковом количестве используемых процессоров двумерное распараллеливание оказывается эффективнее за счет сокращения общего числа межпроцессорных обменов. Из таблицы видно, что достигнуто сокращение времени расчетов примерно в 10–13 раз при переходе от однопроцессорного запуска программы на 16-процессорный. При двумерном распараллеливании получается выигрыш на 7–8% относительно одномерного. С увеличением количества процессоров этот выигрыш может возрастать, но возможны технические и организационные неудобства.

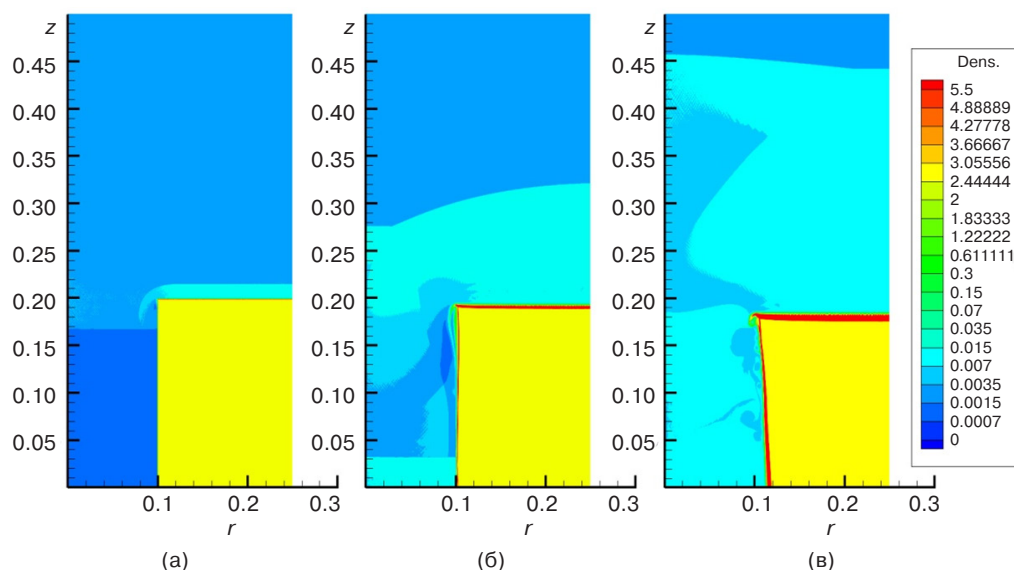


Рис. 4. Поля плотности на моменты времени:
(а) $t = 0.0005$ мс; (б) $t = 0.00085$ мс; (в) $t = 0.00135$ мс

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Было проведено три серии расчетов.

В первой серии проводилась проверка численного решения квазиодномерной задачи. Показано согласие результатов с аналитическим решением по распространению УВ в газе.

Во второй серии наблюдались двумерные явления, связанные с преломлением ударной волны при прохождении через отверстие в экране. Показано, что при разработке параллельного алгоритма вычисления (программа *NUTCY_ps*) и переходе к сеткам повышенного разрешения результаты расчетов задачи 2 идентичны результатам, полученным в расчетах по однопроцессорной версии.

В третьей серии расчетов изучалось прохождение ударной волны вдоль протяженного канала и отражение от его дна. Видно, что взаимодействие падающей и отраженной волн между собой приводит к возникновению зон уплотнений и зон пониженной плотности. При этом область взаимодействия вихрей приобретает сложную форму.

Сравнение двух способов геометрического распараллеливания подтвердило теоретические предположения о большей эффективности двумерного распределения вычислений. В заключение заметим, что дальнейшее сокращение времени вычислений возможно с помощью модификации работы с вводом и выводом данных (многопроцессорное чтение и запись в файл).

В начале статьи отмечено, что изучение развития гидродинамической неустойчивости и перехода к турбулентности имеет важное значение для исследований по лазерному термоядерному синтезу. В нашей стране [10] и за рубежом [11–13] ведется строительство мощных многоканальных лазеров для инициирования термоядерных микровзрывов.

Наряду с изучением сжатия микроишеней на таких установках можно будет проводить исследования по инициированию и взаимодействию ударных волн и развитию перемешивания на лазерной ударной трубе [14]. По сравнению с классическими ударными трубами на лазерной ударной трубе легко достигаются большие скорости течения газа³ (и большие числа Маха), и можно моделировать эти процессы в камерах сложной конфигурации, заполненных различными средами. Лазерные ударные трубы, возможно, позволят моделировать в лабораторных условиях некоторые астрофизические явления, связанные с защитой Земли от столкновения с космическими объектами, а также другие задачи физики высоких концентраций энергии.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 19-02-00875 и в рамках научной программы Национального Центра Физики и Математики – НЦФМ (Российская Федерация, г. Саров).

Acknowledgments. This study was supported by the Russian Foundation for Basic Research, project No. 19-02-00875 and the scientific program of the National Center for Physics and Mathematics, Sarov, Russian Federation.

Вклад авторов

И.Г. Лебо – разработка физико-математической модели и программы, постановка задач, анализ результатов. Итого 70%.

И.В. Обручев – проведение расчетов, графическая обработка результатов. Итого 30%.

Authors' contribution

I.G. Lebo – physicomathematical model and code development, problem statement, analysis of results (70%).

I.V. Obruchev – simulations and graphical treatment (30%).

³ Сравнимые со скоростями космических объектов, которые могут входить в атмосферу Земли (~10–20 км/с).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский А.А., Михайлов А.П. *Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры*. М.: Физматлит; 2005. 316 с. ISBN 5-9221-0120-X
2. Самарский А.А. *Теория разностных схем*. М.: Наука; 1990. 614 с. ISBN 5-02-014576-9
3. Самарский А.А., Попов Ю.П. *Разностные методы решения задач газовой динамики*. М.: ЛИБРОКОМ; 1992. 424 с. ISBN 978-5-397-00862-4
4. Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М. *Метод крупных частиц в газовой динамике*. М.: Наука; 1982. 391 с.
5. Лебо И.Г., Симаков А.И. Моделирование развития вихревых структур в сверхзвуковом газовом потоке. *Российский технологический журнал*. 2018;6(5):45–54. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2018-6-5-45-54>

REFERENCES

1. Samarskii A.A., Mikhailov A.P. *Matematicheskoe modelirovanie: Idei. Metody. Primery (Mathematical Modeling: Ideas. Methods. Examples)*. Moscow: Fizmatlit; 2005. 316 p. (in Russ.). ISBN 5-9221-0120-X
2. Samarskii A.A. *Teoriya raznostnykh skhem (The theory of difference schemes)*. Moscow: Nauka; 1990. 614 p. (in Russ.). ISBN 5-02-014576-9
3. Samarskii A.A., Popov Yu.P. *Raznostnye metody resheniya zadach gazovoi dinamiki (Difference methods for solving problems of gas dynamics)*. Moscow: LIBROKOM; 1992. 424 p. (in Russ.). ISBN 978-5-397-00862-4
4. Belotserkovskii O.M., Davydov Yu.M. *Metod krupnykh chastits v gazovoi dinamike (The method of large particles in gas dynamics)*. Moscow: Nauka; 1982. 391 p. (in Russ.).

6. Лебо И.Г., Тишкин В.Ф. *Исследование гидродинамической неустойчивости в задачах лазерного термоядерного синтеза*. М.: Физматлит; 2006. 304 с. ISBN 5-9221-0683-X
7. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. *Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений*. М.: ФМЛ; 2008. 654 с. ISBN 978-5-9291-0938-3
8. Harten A. On a class of high resolution total-variation-stable finite-difference schemes. *SIAM J. Numer. Anal.* 1984;21(1):1–23. <https://doi.org/10.1137/0721001>
9. Вязников К.В., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П. Построение монотонных разностных схем повышенного порядка аппроксимации для систем уравнений гиперболического типа. *Матем. моделирование*. 1989;1(5):95–120.
10. Гаранин С.Г., Бельков С.А., Бондаренко С.В. Концепция построения лазерной установки УФЛ-2М. *Сб. докладов XXXIX Международной (Звенигородской) конференции по физике плазмы и управляемому термоядерному синтезу*. Звенигород; 2012. С. 17.
11. Moses E.I. and NIC Collaboration. The National Ignition Campaign: status and progress. *Nuclear Fusion*. 2013;53(10);104020. <https://doi.org/10.1088/0029-5515/53/10/104020>
12. Ebrardt J., Chapt J.M. LMJ on its way to fusion. *J. Phys.: Conf. Ser.* 2010;244(3):032017. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/244/3/032017>
13. Zhen W., Wei X., Zhu Q., Jing F., et al. Laser performance of the SG-III laser facility. *High Power Laser. Sci. Eng.* 2016;4:e21. <https://doi.org/10.1017/hpl.2016.20>
14. Зворыкин В.Д., Лебо И.Г. Применение мощного KrF-лазера для исследования сверхзвуковых течений газа и развития гидродинамических неустойчивостей в слоистых средах. *Квантовая электроника*. 2000;30(6):540–544.
5. Lebo I.G., Simakov A.I. Modeling the evolution of whirl structures in a supersonic gas stream. *Rossiiskii tekhnologicheskii zhurnal = Russian Technological Journal*. 2018;6(5):45–54 (in Russ.). <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2018-6-5-45-54>
6. Lebo I.G., Tishkin V.F. *Issledovanie gidrodinamicheskoi neustoichivosti v zadachakh lazernogo termoyadernogo sinteza (Investigation of hydrodynamic instability in problems of laser thermonuclear synthesis)*. Moscow: Fizmatlit; 2006. 304 p. (in Russ.). ISBN 5-9221-0683-X
7. Zel'dovich Ya.B., Raizer Yu.P. *Fizika udarnykh voln i vysokotemperaturnykh gidrodinamicheskikh yavlenii (Physics of shock waves and high-temperature hydrodynamic phenomena)*. Moscow: FML; 2008. 654 p. (in Russ.). ISBN 978-5-9291-0938-3
8. Harten A. On a class of high resolution total-variation-stable finite-difference schemes. *SIAM J. Numer. Anal.* 1984;21(1):1–23. <https://doi.org/10.1137/0721001>
9. Vyaznikov K.V., Tishkin V.F., Favorskii A.P. Construction of monotone high resolution difference schemes for hyperbolic systems. *Matematicheskoe modelirovanie = Mathematical modeling* 1989;1(5):95–120 (in Russ.).
10. Garanin S.G., Bel'kov S.A., Bondarenko S.V. The concept of building a laser installation UFL-2M In: *Proc. XXXIX Intern. (Zvenigorod) Conf. on Plasma Phys. and Controlled Thermonuclear Fusion*. Zvenigorod; 2012. P. 17 (in Russ.).
11. Moses E.I. and NIC Collaboration. The National Ignition Campaign: status and progress. *Nuclear Fusion*. 2013;53(10);104020. <https://doi.org/10.1088/0029-5515/53/10/104020>
12. Ebrardt J., Chapt J.M. LMJ on its way to fusion. *J. Phys.: Conf. Ser.* 2010;244(3):032017. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/244/3/032017>
13. Zhen W., Wei X., Zhu Q., Jing F., et al. Laser performance of the SG-III laser facility. *High Power Laser. Sci. Eng.* 2016;4:e21. <https://doi.org/10.1017/hpl.2016.20>
14. Zvorykin V.D., Lebo I.G. Application of a high-power KrF laser for the study of supersonic gas flows and the development of hydrodynamic instabilities in layered media. *Kvantovaya elektronika = Quantum Electronics*. 2000;30(6):540–544. <http://dx.doi.org/10.1070/QE2000v030n06ABEH001761>

Об авторах

Лебо Иван Германович, д.ф.-м.н., профессор кафедры высшей математики Института искусственного интеллекта ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: lebo@mirea.ru. <https://orcid.org/0000-0001-8341-9453>

Обручев Иван Владимирович, соискатель, инженер, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: ivan_obruchev97@mail.ru

About the authors

Ivan G. Lebo, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Department of Higher Mathematics, Institute of Artificial Intelligence, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: lebo@mirea.ru. <https://orcid.org/0000-0001-8341-9453>

Ivan V. Obruchev, Competitor of a Scientific Degree, Engineer, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: ivan_obruchev97@mail.ru