

Математическое моделирование  
Mathematical modeling

УДК 531.391

<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2021-9-5-84-94>

## НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

## Эволюция вращательного движения вязкоупругой планеты с ядром на эллиптической орбите

А.В. Шатина<sup>®</sup>,  
А.В. Старостина

МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, 119454 Россия

<sup>®</sup> Автор для переписки, e-mail: [shatina\\_av@mail.ru](mailto:shatina_av@mail.ru)

**Резюме.** Работа посвящена исследованию эволюции вращательного движения планеты в центральном ньютоновском поле сил. Планета моделируется телом, состоящим из твердого ядра и жестко прикрепленной к нему вязкоупругой оболочки. Рассматривается ограниченная постановка задачи, когда центр масс планеты движется по заданной кеплеровской эллиптической орбите. Уравнения движения выводятся в форме системы уравнений Рауса с использованием канонических переменных Андуайе, которые в невозмущенной задаче являются переменными «действие-угол» и имеют вид интегро-дифференциальных уравнений с частными производными. Используется методика, разработанная Вильке В.Г. для механических систем с бесконечным числом степеней свободы. Методом разделения движений получена система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая вращательное движение планеты с учетом возмущений, вызванных упругостью и диссипацией. Методом усреднения получена эволюционная система уравнений относительно переменных «действие» и медленных угловых переменных. Построен фазовый портрет, описывающий взаимное изменение модуля вектора кинетического момента  $\mathbf{G}$  вращательного движения и косинуса угла между этим вектором и нормалью к плоскости орбиты центра масс планеты. Найдено стационарное решение эволюционной системы уравнений, которое является асимптотически устойчивым. Показано, что в стационарном движении вектор кинетического момента  $\mathbf{G}$  ортогонален плоскости орбиты, а предельное значение модуля этого вектора зависит от эксцентриситета эллиптической орбиты. Построенная математическая модель может быть использована для изучения приливной эволюции вращательного движения планет и спутников. Полученные в работе результаты согласуются с результатами ранее проведенных исследований в этой области.

**Ключевые слова:** вязкоупругое тело, кеплеровская эллиптическая орбита, переменные Андуайе, метод усреднения, диссипативная эволюция движения, метод усреднения

• Поступила: 01.03.2021 • Доработана: 29.03.2021 • Принята к опубликованию: 12.07.2021

**Для цитирования:** Шатина А.В., Старостина А.В. Эволюция вращательного движения вязкоупругой планеты с ядром на эллиптической орбите. *Russ. Technol. J.* 2021;9(5):84–94. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2021-9-5-84-94>

**Прозрачность финансовой деятельности:** Никто из авторов не имеет финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

RESEARCH ARTICLE

# Evolution of the rotational motion of a viscoelastic planet with a core on an elliptical orbit

Albina V. Shatina @,  
Anastasia V. Starostina

MIREA – Russian Technological University, Moscow, 119454 Russia  
@ Corresponding author, e-mail: shatina\_av@mail.ru

**Abstract.** The work is devoted to the study of the evolution of the rotational motion of a planet in the central Newtonian field of forces. The planet is modeled by a body consisting of a solid core and a viscoelastic shell rigidly attached to it. A limited formulation of the problem is considered, when the center of mass of the planet moves along a given Keplerian elliptical orbit. The equations of motion are derived in the form of a system of Routh equations using the canonical Andoyer variables, which are “action-angle” variables in the unperturbed problem and have the form of integro-differential equations with partial derivatives. The technique developed by V.G. Vilke is used for mechanical systems with an infinite number of degrees of freedom. A system of ordinary differential equations is obtained by the method of separation of motions. The system describes the rotational motion of the planet taking into account the perturbations caused by elasticity and dissipation. An evolutionary system of equations for the “action” variables and slow angular variables is obtained by the averaging method. A phase portrait is constructed that describes the mutual change in the modulus of the angular momentum vector  $\mathbf{G}$  of the rotational motion and the cosine of the angle between this vector and the normal to the orbital plane of the planet’s center of mass. A stationary solution of the evolutionary system of equations is found, which is asymptotically stable. It is shown that in stationary motion, the angular momentum vector  $\mathbf{G}$  is orthogonal to the orbital plane, and the limiting value of the modulus of this vector depends on the eccentricity of the elliptical orbit. The constructed mathematical model can be used to study the tidal evolution of the rotational motion of planets and satellites. The results obtained in this work are consistent with the results of previous studies in this area.

**Keywords:** viscoelastic body, Keplerian elliptic orbit, Andoyer variables, averaging method, dissipative evolution of motion

• Submitted: 01.03.2021 • Revised: 29.03.2021 • Accepted: 12.07.2021

**For citation:** Shatina A.V., Starostina A.V. Evolution of the rotational motion of a viscoelastic planet with a core on an elliptical orbit. *Russ. Technol. J.* 2021;9(5):84–94 (in Russ.). <https://doi.org/10.32362/2500316X-2021-9-5-84-94>

**Financial disclosure:** The authors have no a financial or property interest in any material or method mentioned.

The authors declare no conflicts of interest.

## ВВЕДЕНИЕ

Движение абсолютно твердого сферически симметричного тела относительно центра масс, движущегося по кеплеровской орбите, представляет собой равномерное вращение вокруг оси, неизменно ориентированной в инерциальной системе координат. Так как ни одно из тел, составляющих Солнечную систему, не является абсолютно твердым, то центральное тело, вокруг которого движется планета, создает «горбы» в вязкоупругом теле планеты. Эти

«горбы» стремятся расположиться по линии «планета – центральное тело». Из-за наличия внутреннего вязкого трения приливные «горбы» запаздывают и смещаются на некоторый угол относительно указанной линии. Это приводит к возникновению гравитационного момента сил. Кроме того, происходит сжатие планеты вдоль оси вращения. Все это влияет на изменение скорости вращения планеты.

В классической приливной теории, как правило, используются модели абсолютно твердого тела и материальной точки для описания динамики системы.

А сама теория основывается на различных предположениях относительно величины приливных «горбов» и угла запаздывания [1].

Для изучения приливной эволюции вращательного движения небесных тел Белецкий В.В. предложил феноменологическую модельную формулу для момента приливных сил [2, 3], используя для планеты модель твердого тела. Позже эта формула была обоснована в построенной В.Г. Вильке теории вязкоупругого шара в гравитационном поле [4].

В работе [5] методом разделения движений и усреднения [4] была получена эволюционная система уравнений вращательного движения вязкоупругого шара в центральном ньютоновском поле сил на круговой орбите.

В работе [6] была получена эволюционная система уравнений поступательно-вращательного движения вязкоупругого шара в пространственном случае в переменных Андуайе – Делоне. Для планет Солнечной системы скорость эволюции угловой скорости собственного вращения планеты в  $10^7$ – $10^9$  раз превышает скорость эволюции среднего движения по орбите, так как их отношение равно отношению квадратов радиуса орбиты и планеты [4]. Рассматриваемая в данной работе ограниченная постановка задачи позволяет более детально изучить диссипативную эволюцию вращательного движения планеты.

В 80–90 годы XX века изучению вращательного движения твердого тела с упругими и диссипативными элементами было посвящено большое количество работ [7–9]. В последнее время используются различные модели вязкоупругих тел при изучении приливной эволюции небесных тел [10, 11].

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим задачу о движении планеты относительно центра масс в центральном ньютоновском гравитационном поле. Планету будем моделировать телом, состоящим из твердого ядра и жестко прикрепленной к нему вязкоупругой оболочки. При отсутствии деформаций, т.е. в естественном недеформированном состоянии, планета занимает область  $V$  в трехмерном евклидовом пространстве:

$$V = V_0 \cup V_1, \quad V_0 = \{ \mathbf{r} \in E^3 : |\mathbf{r}| \leq r_0 \}, \\ V_1 = \{ \mathbf{r} \in E^3 : r_0 < |\mathbf{r}| \leq r_1 \},$$

где  $r_0, r_1$  – внутренний и внешний радиусы оболочки. Пусть  $\rho_0, \rho_1$  – плотности ядра и вязкоупругой оболочки соответственно, которые будем считать постоянными, а  $m_0, m_1$  – их массы.

Будем считать, что центр масс планеты движется по заданной эллиптической орбите. Введем инерциальную систему координат  $OXYZ$  с началом в притягивающем центре, совпадающим с одним из фокусов эллипса. Ось  $OX$  направим по радиус-вектору перигея, ось  $OZ$  – перпендикулярно плоскости орбиты, а ось  $OY$  направим так, чтобы орты осей неподвижной системы координат образовывали правую тройку векторов. Для описания вращательного движения планеты введем подвижную систему координат  $Cx_1x_2x_3$  и систему осей Кенига  $C\xi_1\xi_2\xi_3$  с началом в центре масс  $C$  планеты.

Положение точки  $M$  планеты в инерциальной системе координат  $OXYZ$  определяется векторным полем

$$\mathbf{R}_M(\mathbf{r}, t) = \mathbf{R}(t) + \Gamma(t)(\mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)), \quad (1.1)$$

$$\mathbf{R}(t) = \frac{1}{m} \int_V \mathbf{R}_M(\mathbf{r}, t) \rho dx, \quad \int_{V_1} \mathbf{u} dx = 0, \quad \int_{V_1} \text{rot } \mathbf{u} dx = 0, \quad (1.2)$$

где  $\mathbf{R}(t)$  – радиус-вектор центра масс планеты;  $\Gamma = \Gamma(t)$  – оператор перехода от подвижной системы координат  $Cx_1x_2x_3$  к системе осей Кенига  $C\xi_1\xi_2\xi_3$ ;  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  – вектор упругого смещения, тождественно равный нулю для точек твердого ядра  $V_0$ ;  $m = m_0 + m_1$ ,  $\rho = \rho_i$  для  $\mathbf{r} \in V_i, (i = 0, 1)$ . Условия (1.2) однозначно определяют радиус-вектор центра масс  $C$  деформированной планеты, а также подвижную систему координат  $Cx_1x_2x_3$ , относительно которой вязкоупругая планета в интегральном смысле не вращается [4]. В системе координат  $Cx_1x_2x_3$

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = (u_1(\mathbf{r}, t), u_2(\mathbf{r}, t), u_3(\mathbf{r}, t)), \quad \mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3).$$

Задачу будем решать в рамках линейной модели теории упругости. Функционал потенциальной энергии упругих деформаций имеет вид:

$$\varepsilon = \int_{V_1} \varepsilon[\mathbf{u}] dx, \quad \varepsilon[\mathbf{u}] = \alpha_1 (I_E^2 - \alpha_2 II_E), \quad (1.3)$$

$$\alpha_1 = \frac{E(1-\nu)}{2(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \alpha_2 = \frac{2(1-2\nu)}{1-\nu}, \\ \alpha_1 > 0, \quad 0 < \alpha_2 < 3,$$

$$I_E = \sum_{j=1}^3 e_{jj}, \quad II_E = \sum_{k<l} (e_{kk}e_{ll} - e_{kl}^2),$$

$$e_{kl} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right), \quad dx = dx_1 dx_2 dx_3,$$

где  $E$  – модуль упругости Юнга;  $\nu$  – коэффициент Пуассона вязкоупругой оболочки планеты.

Для описания диссипативных свойств оболочки планеты примем модель Кельвина – Фойгта, т.е. положим, что диссипативный функционал  $\mathcal{D}$  связан с функционалом (1.3) соотношениями:

$$\mathcal{D} = \int_{V_1} \mathcal{D}[\dot{\mathbf{u}}] dx, \quad \mathcal{D}[\dot{\mathbf{u}}] = \chi \varepsilon[\dot{\mathbf{u}}],$$

здесь  $\chi > 0$  – коэффициент внутреннего вязкого трения.

Согласно рассматриваемой ограниченной постановке задачи, центр масс планеты движется по кеплеровской эллиптической орбите, т.е. радиус-вектор  $\mathbf{R}(t)$  точки  $C$  является заданной функцией времени согласно соотношениям:

$$\mathbf{R} = R(\cos \vartheta; \sin \vartheta; 0), \quad (1.4)$$

$$R = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \vartheta}, \quad \dot{\vartheta} = \frac{\partial \vartheta}{\partial l} \dot{l} = \frac{(1+e \cos \vartheta)^2}{(1-e^2)^{3/2}} n, \\ n = \sqrt{\frac{\gamma}{a^3}}, \quad l = n(t-t_0). \quad (1.5)$$

Здесь  $\vartheta$  – истинная аномалия;  $a$  – большая полуось орбиты;  $e$  – эксцентриситет;  $n$  – среднее движение центра масс  $C$  планеты по орбите;  $l$  – средняя аномалия;  $\gamma$  – гравитационная постоянная ( $\gamma = fM_0$ ,  $f$  – универсальная гравитационная постоянная;  $M_0$  – масса притягивающего центра);  $t_0, t$  – начальный и текущий моменты времени.

Кинетическая энергия шара представляется функционалом

$$T = \frac{1}{2} \int_V \dot{\mathbf{R}}_M^2 \rho dx = \frac{1}{2} \int_V [\Gamma^{-1} \dot{\mathbf{R}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u}) + \dot{\mathbf{u}}]^2 \rho dx, \quad (1.6)$$

где  $\boldsymbol{\omega} \times (\cdot) = \Gamma^{-1} \dot{\Gamma}(\cdot)$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  – угловая скорость вращения шара (системы координат  $Cx_1x_2x_3$ ). С учетом условий (1.2) функционал кинетической энергии вязкоупругого шара примет вид:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2} \int_V [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u})]^2 \rho dx + \\ + \int_{V_1} (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u}), \dot{\mathbf{u}}) \rho_1 dx + \frac{1}{2} \int_{V_1} \dot{\mathbf{u}}^2 \rho_1 dx. \quad (1.7)$$

Потенциальная энергия гравитационного поля равна

$$\Pi = -\gamma \int_V \frac{\rho dx}{\sqrt{(\mathbf{R} + \Gamma(\mathbf{r} + \mathbf{u}))^2}}. \quad (1.8)$$

Так как  $|\mathbf{R}| \gg |\mathbf{r} + \mathbf{u}|$ , то подынтегральное выражение в (1.8) можно разложить в ряд по степеням

$|\mathbf{r} + \mathbf{u}|/R$ . Ограничиваясь членами второго порядка по степеням  $|\mathbf{r} + \mathbf{u}|/R$  и линейными по  $|\mathbf{u}|/R$ , получим

$$\Pi = -\frac{\gamma m}{R} + \frac{\gamma}{R^3} \int_{V_1} [(\mathbf{r}, \mathbf{u}) - 3(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{r})(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{u})] \rho_1 dx, \\ \boldsymbol{\xi} = \Gamma^{-1} \mathbf{R} / R. \quad (1.9)$$

Конфигурационным пространством механической системы является прямое произведение  $SO(3) \times \mathfrak{B}$ , где

$$\mathfrak{B} = \left\{ \mathbf{u}; \mathbf{u} \in (W_2^1(V_1))^3, \int_{V_1} \mathbf{u} dx = 0, \int_{V_1} \text{rot } \mathbf{u} dx = 0, \mathbf{u}|_{r=r_0} = 0 \right\},$$

$(W_2^1(V_1))^3$  – пространство Соболева [4];  $SO(3)$  – группа вращений трехмерного евклидова пространства. Обобщенными координатами  $q_1, q_2, q_3$ , определяющими группу вращений  $SO(3)$ , могут быть, например, углы Эйлера.

Компоненты вектора угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$  являются линейными однородными функциями относительно обобщенных скоростей  $\dot{q}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Выделяя в правой части (1.7) слагаемые, содержащие обобщенные скорости  $\dot{q}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) во второй, первой и нулевой степени соответственно, представим функционал кинетической энергии в виде:

$$T = T_2 + T_1 + T_0, \quad (1.10)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \int_V [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u})]^2 \rho dx, \quad T_1 = \int_{V_1} (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u}), \dot{\mathbf{u}}) \rho_1 dx,$$

$$T_0 = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2} \int_{V_1} \dot{\mathbf{u}}^2 \rho_1 dx. \quad (1.11)$$

Уравнения движения планеты получим в форме уравнений Рауса, используя канонические переменные Андуайе  $(\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}) = (I_1, I_2, I_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$  [4, 12] для описания вращательного движения системы координат  $Cx_1x_2x_3$  относительно осей Кенига и лагранжевы координаты  $u_i(\mathbf{r}, t)$ ,  $i = (1, 2, 3)$  для описания деформаций вязкоупругой оболочки планеты.

Вектор момента количеств движения планеты относительно центра масс равен

$$\mathbf{G} = \nabla_{\boldsymbol{\omega}} T = \mathcal{J}[\mathbf{u}] \boldsymbol{\omega} + \mathbf{G}_{\mathbf{u}}, \quad (1.12)$$

$$\mathcal{J}[\mathbf{u}] \boldsymbol{\omega} = \int_V (\mathbf{r} + \mathbf{u}) \times [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u})] \rho dx,$$

$$\mathbf{G}_{\mathbf{u}} = \int_{V_1} [(\mathbf{r} + \mathbf{u}) \times \dot{\mathbf{u}}] \rho_1 dx. \quad (1.13)$$

С учетом (1.13) слагаемое  $T_2$  в правой части равенства (1.10) представляется через тензор инерции  $J[\mathbf{u}]$  деформированной планеты в виде:

$$T_2 = \frac{1}{2}(J[\mathbf{u}]\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}). \quad (1.14)$$

Построим вектор кинетического момента  $\mathbf{G}$  в точке  $C$  и перпендикулярно вектору  $\mathbf{G}$  плоскость  $CMN$ , которая пересекает плоскость  $C\xi_1\xi_2$  по прямой  $CM$ , а плоскость  $Cx_1x_2$  – по прямой  $CN$ . Переменная  $I_2$  – это модуль вектора  $\mathbf{G}$ ;  $I_1, I_3$  – его проекции на оси  $Cx_3$  и  $C\xi_3$  соответственно. Переход от системы осей Кенига  $C\xi_1\xi_2\xi_3$  к подвижной системе координат  $Cx_1x_2x_3$  в случае переменных Андуайе осуществляется посредством пяти последовательных поворотов на углы  $\varphi_3, \delta_1, \varphi_2, \delta_2, \varphi_1$  вокруг осей  $C\xi_3, CM$ , вектора  $\mathbf{G}$  и осей  $CN, Cx_3$  соответственно (рис. 1).

Оператор перехода  $\Gamma$  в переменных Андуайе представляется в виде произведения пяти ортогональных матриц [12]:

$$\Gamma = \Gamma_3(\varphi_3)\Gamma_1(\delta_1)\Gamma_3(\varphi_2)\Gamma_3(\delta_2)\Gamma_3(\varphi_1),$$

$$\cos \delta_1 = I_3/I_2, \quad \cos \delta_2 = I_1/I_2,$$

$$\Gamma_3(\varphi_k) = \begin{pmatrix} \cos \varphi_k & -\sin \varphi_k & 0 \\ \sin \varphi_k & \cos \varphi_k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_1(\delta_j) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \delta_j & -\sin \delta_j \\ 0 & \sin \delta_j & \cos \delta_j \end{pmatrix}.$$

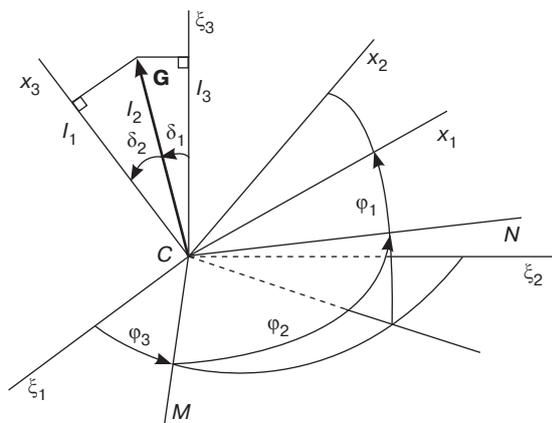


Рис. 1. Переменные Андуайе

В системе координат  $Cx_1x_2x_3$

$$\mathbf{G} = (\sqrt{I_2^2 - I_1^2} \sin \varphi_1, \sqrt{I_2^2 - I_1^2} \cos \varphi_1, I_1), \quad (1.15)$$

$$\xi = \Gamma^{-1}\mathbf{R}/R = \Gamma_3(-\varphi_1)\Gamma_1(-\delta_2)\Gamma_3(-\varphi_2) \times \Gamma_1(-\delta_1)\Gamma_3(-\varphi_3)(\cos \vartheta, \sin \vartheta, 0)^T. \quad (1.16)$$

Из (1.12) следует, что

$$\boldsymbol{\omega} = J^{-1}[\mathbf{u}](\mathbf{G} - \mathbf{G}_{\mathbf{u}}). \quad (1.17)$$

Тогда из (1.14) и (1.17) для функционала  $T_2$  получим следующее представление:

$$T_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{G} - \mathbf{G}_{\mathbf{u}}, J^{-1}[\mathbf{u}](\mathbf{G} - \mathbf{G}_{\mathbf{u}})). \quad (1.18)$$

Функционал Рауса  $\mathcal{R}$ , зависящий от канонических переменных  $\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}$  и лагранжевых переменных  $\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}$ , определяется равенством

$$\mathcal{R} = T_2 - T_0 + \Pi + \mathcal{E}[\mathbf{u}], \quad (1.19)$$

где  $T_2$  представляется равенством (1.18), а в выражении (1.9) для функционала потенциальной энергии гравитационного поля  $\Pi$  вектор  $\xi$  представляется равенством (1.16).

С учетом (1.11), (1.18) функционал Рауса (1.19) можно представить в виде:

$$\mathcal{R} = \frac{I_2^2}{2A} - \frac{1}{A} \left( \mathbf{G}, \int_{V_1} \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{u}} \rho_1 dx \right) - \frac{1}{2A^2} \times$$

$$\times (J_1[\mathbf{u}]\mathbf{G}, \mathbf{G}) - \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{R}}^2 + \Pi + \mathcal{E}[\mathbf{u}] + \mathcal{R}^*, \quad (1.20)$$

где  $A$  – момент инерции недеформированной планеты относительно диаметра;  $\mathcal{R}^*$  содержит члены второго и более высокого порядка относительно координат векторов  $\mathbf{u}$  и  $\dot{\mathbf{u}}$ ,

$$J_1[\mathbf{u}]\boldsymbol{\omega} = \int_{V_1} (\mathbf{r} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}] + \mathbf{u} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]) \rho_1 dx,$$

$$A = \frac{8\pi}{15} [\rho_0 r_0^5 + \rho_1 (r_1^5 - r_0^5)].$$

Уравнения вращательного движения планеты на эллиптической орбите записываются в форме канонических уравнений для переменных Андуайе и в форме вариационного принципа Даламбера – Лагранжа [4]:

$$\dot{I}_k = -\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \varphi_k}, \quad \dot{\varphi}_k = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial I_k}, \quad k = 1, 2, 3, \quad (1.21)$$

$$\left( -\frac{d}{dt} \nabla^{\dot{\mathbf{u}}} \mathcal{R} + \nabla^{\mathbf{u}} \mathcal{R} + \nabla^{\dot{\mathbf{u}}} \mathcal{D} + \lambda_1, \delta \mathbf{u} \right)_{V_1} +$$

$$+ \int_{V_1} (\lambda_2, \text{rot} \delta \mathbf{u}) dx = 0, \quad \forall \delta \mathbf{u} \in (W_2^1(V))^3. \quad (1.22)$$

Здесь  $\lambda_1, \lambda_2$  – неопределенные множители Лагранжа, порожденные условиями (1.2).

## 2. ДЕФОРМАЦИИ ВЯЗКОУПРУГОЙ ОБОЛОЧКИ ПЛАНЕТЫ

Будем считать, что жесткость деформируемой оболочки планеты велика, т.е. мал безразмерный параметр  $\bar{\varepsilon} = \omega^2(0)\rho_1 r_1^2 E^{-1}$  ( $\omega(0)$  – модуль начальной угловой скорости планеты). Выбирая определенным образом масштабы размерных единиц, можно ввести малый параметр  $\varepsilon = E^{-1}$ . В качестве невозмущенной задачи рассмотрим задачу о движении абсолютно твердой сферически симметричной планеты на эллиптической орбите. В этом случае  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = 0$ , а параметр  $\varepsilon$  полагаем равным нулю. Уравнения невозмущенного движения имеют вид:

$$\dot{I}_k = 0, \quad k = 1, 2, 3, \quad \dot{\phi}_1 = 0, \quad \dot{\phi}_2 = I_2/A, \quad \dot{\phi}_3 = 0. \quad (2.1)$$

Уравнения (2.1) описывают равномерное вращение планеты вокруг одного из диаметров с угловой скоростью  $\dot{\phi}_2 = I_2/A$ . При  $\varepsilon \neq 0$  согласно методу разделения движений [4], после затухания собственных колебаний вязкоупругого шара решение  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  ищется в виде ряда по степеням малого параметра  $\varepsilon$ :

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon \mathbf{u}_1(\mathbf{r}, t) + \varepsilon^2 \mathbf{u}_2(\mathbf{r}, t) + \dots \quad (2.2)$$

При этом множители Лагранжа  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  также необходимо искать в виде разложений по степеням  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \lambda_1(t) &= \lambda_{10}(t) + \varepsilon \lambda_{11}(t) + \dots, \\ \lambda_2(t) &= \lambda_{20}(t) + \varepsilon \lambda_{21}(t) + \dots \end{aligned} \quad (2.3)$$

С учетом (1.20), (1.9) уравнение (1.22) для функции  $\mathbf{u}_1(\mathbf{r}, t)$  первого приближения примет вид:

$$\begin{aligned} \int_{V_1} \left[ -\frac{\rho_1}{A} \frac{d}{dt} (\mathbf{G} \times \mathbf{r}) + \frac{1}{2A^2} (\nabla_{\mathbf{u}} J_1[\mathbf{u}]\mathbf{G}, \mathbf{G}) - \frac{\gamma \rho_1 \mathbf{r}}{R^3} + \right. \\ \left. + \frac{3\gamma \rho_1}{R^3} (\xi, \mathbf{r}) \xi + \lambda_{10} \right] \delta \mathbf{u} dx + \\ + \int_{\partial V_1} (\lambda_{20} \times \mathbf{n}) \delta \mathbf{u} d\sigma - \varepsilon (\nabla_{\mathbf{u}} \mathcal{E}[\mathbf{u}_1 + \chi \dot{\mathbf{u}}_1], \delta \mathbf{u})_{V_1} = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

При получении последнего равенства была использована формула Остроградского – Гаусса в виде:

$$\int_{V_1} \lambda_{20} \operatorname{rot} \delta \mathbf{u} dx = \int_{\partial V_1} (\delta \mathbf{u} \times \lambda_{20}) \mathbf{n} d\sigma,$$

где  $\partial V_1$  – граница области  $V_1$ , а  $\mathbf{n}$  – нормаль к  $\partial V_1$ .

Переменные  $(\mathbf{I}, \boldsymbol{\phi})$  в уравнении (2.4) в соответствии с методом разделения движений являются решениями невозмущенной задачи (2.1). Поэтому в (2.4)  $\frac{d}{dt}(\mathbf{G} \times \mathbf{r}) = 0$ . Далее

$$(\nabla_{\mathbf{u}} J_1[\mathbf{u}]\mathbf{G}, \mathbf{G}) = 2\rho_1 I_2^2 \mathbf{r} - 2\rho_1 (\mathbf{r}, \mathbf{G}) \mathbf{G}. \quad (2.5)$$

Полагая в (2.4) последовательно  $\delta \mathbf{u} = \delta \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}$ ,  $\delta \mathbf{u} = \mathbf{a}$ , ( $\delta \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{a} \in E^3$ ) и учитывая, что работа упругих и диссипативных сил на бесконечно малых поворотах равна нулю, получим  $\lambda_{10} = 0, \lambda_{20} = 0$ .

Для последнего слагаемого в левой части уравнения (2.4) справедливо равенство [4]:

$$\begin{aligned} (\nabla_{\mathbf{u}} \mathcal{E}[\mathbf{u}], \delta \mathbf{u})_{V_1} &= \int_{V_1} \nabla \mathcal{E}[\mathbf{u}] \delta \mathbf{u} dx + \int_{\partial V_1} \sum_{i=1}^3 \sigma_{ni} \delta u_i dx, \\ \nabla \mathcal{E}[\mathbf{u}] &= -\frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{1}{1-2\nu} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \Delta \mathbf{u} \right), \\ \sigma_{ni}[\mathbf{u}] &= \frac{E\nu\gamma_i}{(1+\nu)(1-2\nu)} \operatorname{div} \mathbf{u} + \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} + \operatorname{grad} u_i, \mathbf{n} \right), \\ i &= 1, 2, 3, \quad \mathbf{n} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3). \end{aligned}$$

Таким образом, краевая задача для нахождения функции  $\mathbf{u}_1(\mathbf{r}, t)$  первого приближения примет вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon \nabla \mathcal{E}[\mathbf{u}_1 + \chi \dot{\mathbf{u}}_1] = \\ = \rho_1 \frac{I_2^2}{A^2} \mathbf{r} - \frac{\rho_1}{A^2} (\mathbf{r}, \mathbf{G}) \mathbf{G} - \frac{\rho_1 \gamma}{R^3} \mathbf{r} + \frac{3\rho_1 \gamma}{R^3} (\xi, \mathbf{r}) \xi, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\mathbf{u}_1|_{|\mathbf{r}|=r_0} = 0, \quad \sigma_{ni}[\mathbf{u}_1]|_{|\mathbf{r}|=r_1} = 0, \quad i = (1, 2, 3). \quad (2.7)$$

Краевые условия (2.7) означают равенство нулю перемещений на внутренней границе вязкоупругой оболочки планеты и равенство нулю напряжений на ее внешней границе. Решение краевой задачи (2.6) – (2.7) имеет вид [13, 14]:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_{10} + \mathbf{u}_{11} + \mathbf{u}_{12}, \quad (2.8)$$

$$\mathbf{u}_{10} = \frac{2I_2^2}{3A^2} \rho_1 \left( a_1 r^2 + a_2 + \frac{a_3}{r^3} \right) \mathbf{r},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{11} = \rho_1 \left\{ p(r_0, r_1, \nu) \left[ \frac{I_2^2}{3A^2} \mathbf{r} - \frac{\mathbf{G}}{A^2} (\mathbf{G}, \mathbf{r}) \right] + \right. \\ \left. + q(r_0, r_1, \nu) \left[ \frac{I_2^2}{6A^2} r^2 - \frac{1}{2A^2} (\mathbf{G}, \mathbf{r})^2 \right] \mathbf{r} \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{12} = & -\frac{3\gamma\rho_1}{R^3} \left(1 + \frac{3\chi\dot{R}}{R}\right) \times \\ & \times \left\{ p(r_0, r_1, \nu) \left[ \frac{1}{3} \mathbf{r} - \xi(\xi, \mathbf{r}) \right] + \right. \\ & + q(r_0, r_1, \nu) \left[ \frac{1}{6} r^2 - \frac{1}{2} (\xi, \mathbf{r})^2 \right] \mathbf{r} \left. \right\} - \\ & - \frac{3\chi\gamma\rho_1}{R^3} \left\{ p(r_0, r_1, \nu) \left[ \dot{\xi}(\xi, \mathbf{r}) + \xi(\dot{\xi}, \mathbf{r}) \right] + \right. \\ & \left. + q(r_0, r_1, \nu) (\xi, \mathbf{r}) (\dot{\xi}, \mathbf{r}) \mathbf{r} \right\}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$a_1 = -\frac{1+\nu}{5(k+2)}, \quad a_2 = -\frac{a_1 r_1^2 (4x^5 + 5k + 6)}{4x^3 + 3k + 2},$$

$$a_3 = -\frac{a_1 r_1^5 x^3 ((3k+2)x^2 - 5k - 6)}{4x^3 + 3k + 2},$$

$$p(r_0, r_1, \nu) = b_1 r^2 + b_2 + \frac{b_3}{r^3} + \frac{b_4}{r^5},$$

$$q(r_0, r_1, \nu) = b_5 + \frac{b_6}{r^5} + \frac{b_7}{r^7},$$

$$k = \frac{2\nu}{1-2\nu}, \quad r = |\mathbf{r}|, \quad x = \frac{r_0}{r_1},$$

$$b_1 = -\frac{(1+\nu)}{\Delta_0} \left\{ 8(9k+14)x^{10} + 80x^7 + 24(k+1) \times \right. \\ \left. \times (5k+11)x^5 - 5(k+2)(15k+16)x^3 + 2(3k+8)(5k+4) \right\},$$

$$b_2 = \frac{(1+\nu)r_1^2}{\Delta_0} \left\{ 8(9k+14)x^{12} + 8(15k^2 + 46k + 51)x^7 - \right. \\ \left. - (63k^2 + 114k + 56)x^5 + 4(3k+8)(4k+3) \right\},$$

$$b_3 = \frac{2(1+\nu)r_1^5 x^3}{\Delta_0} \times$$

$$\times \left\{ 40x^9 - 16(k+6)x^7 + (21k+16)x^2 - 10(4k+3) \right\},$$

$$b_4 = \frac{2(1+\nu)(k+1)r_1^7 x^5}{\Delta_0} \times$$

$$\times \left\{ 24x^7 - 2(3k+26)x^5 + (15k+16)x^2 - 6(4k+3) \right\},$$

$$b_5 = -\frac{4(1+\nu)(k+1)}{\Delta_0} \times$$

$$\times \left\{ 60x^7 - 12(2k+17)x^5 + 5(3k+26)x^3 - 2(3k+8) \right\},$$

$$b_6 = 3(k+1)b_3, \quad b_7 = -5b_4,$$

$$\begin{aligned} \Delta_0 = & 8(2k+7)(9k+14)x^{10} + 200(3k^2 + 8k + 7)x^7 - \\ & - 1008(k+1)^2 x^5 + 25(27k^2 + 56k + 28)x^3 + \\ & + 2(3k+8)(19k+14). \end{aligned}$$

В равенстве (2.9) дифференцирование по времени производится в силу невозмущенной системы уравнений движения (2.1), а величины  $\mathbf{G}$ ,  $\xi$  определяются формулами (1.15), (1.16).

### 3. ВОЗМУЩЕННАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

Найденное решение  $\mathbf{u} = \varepsilon \mathbf{u}_1 = \varepsilon(\mathbf{u}_{10} + \mathbf{u}_{11} + \mathbf{u}_{12})$  описывает вынужденные колебания вязкоупругого шара. Согласно асимптотическому методу разделения движений необходимо далее подставить это решение в правые части уравнений (1.21) для «медленных» переменных, предварительно линеаризуя их по  $\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}$ . В результате указанной подстановки и вычисления тройных интегралов по сферическому слою  $V_1$  получим возмущенную систему уравнений вращательного движения спутника:

$$\begin{aligned} \dot{i}_1 = & -\frac{6\varepsilon\gamma\rho_1^2 D}{A^2 R^3} \left(1 + 3\chi \frac{\dot{R}}{R}\right) \left( \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \varphi_1}, \xi \right) (\mathbf{G}, \xi) + \\ & + \frac{6\varepsilon\chi\gamma\rho_1^2 D}{A^2 R^3} \left\{ \left( \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \varphi_1}, \xi \right) (\mathbf{G}, \dot{\xi}) + \left( \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \varphi_1}, \dot{\xi} \right) (\mathbf{G}, \xi) \right\} - \\ & - \frac{6\varepsilon\gamma\rho_1^2 D}{A^2 R^3} \left( \frac{\partial \xi}{\partial \varphi_1}, \mathbf{G} \right) (\xi, \mathbf{G}) - \frac{18\varepsilon\chi\gamma^2 \rho_1^2 D}{R^6} \left( \frac{\partial \xi}{\partial \varphi_1}, \dot{\xi} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{j}_j = & -\frac{6\varepsilon\gamma\rho_1^2 D}{A^2 R^3} \left( \frac{\partial \xi}{\partial \varphi_j}, \mathbf{G} \right) (\xi, \mathbf{G}) - \\ & - \frac{18\varepsilon\chi\gamma^2 \rho_1^2 D}{R^6} \left( \frac{\partial \xi}{\partial \varphi_j}, \dot{\xi} \right), \quad j = 2, 3, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1 = & \frac{6\varepsilon\gamma\rho_1^2 D}{A^2 R^3} \left(1 + 3\chi \frac{\dot{R}}{R}\right) \left( \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial I_1}, \xi \right) (\mathbf{G}, \xi) - \\ & - \frac{6\varepsilon\chi\gamma\rho_1^2 D}{A^2 R^3} \left\{ \left( \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial I_1}, \xi \right) (\mathbf{G}, \dot{\xi}) + \left( \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial I_1}, \dot{\xi} \right) (\mathbf{G}, \xi) \right\} + \\ & + \frac{6\varepsilon\gamma\rho_1^2 D}{A^2 R^3} \left( \frac{\partial \xi}{\partial I_1}, \mathbf{G} \right) (\xi, \mathbf{G}) + \frac{18\varepsilon\chi\gamma^2 \rho_1^2 D}{R^6} \left( \frac{\partial \xi}{\partial I_1}, \dot{\xi} \right), \end{aligned}$$

$$\dot{\varphi}_3 = \frac{6\varepsilon\gamma\rho_1^2 D}{A^2 R^3} \left( \frac{\partial \xi}{\partial I_3}, \mathbf{G} \right) (\xi, \mathbf{G}) + \frac{18\varepsilon\chi\gamma^2 \rho_1^2 D}{R^6} \left( \frac{\partial \xi}{\partial I_3}, \dot{\xi} \right).$$

Здесь  $D = \frac{1}{3}k_1(5b_1 + b_5) + b_2k_3 + \frac{1}{5}k_4(5b_3 + b_6)$ ,  
 $k_1 = \frac{4\pi}{35}(r_1^7 - r_0^7)$ ,  $k_3 = \frac{4\pi}{15}(r_1^5 - r_0^5)$ ,  $k_4 = \frac{2\pi}{3}(r_1^2 - r_0^2)$ .

Переменная  $\varphi_2$  является быстрой угловой переменной,  $\dot{\varphi}_2 \approx I_2/A$ . Дифференцирование по времени в правых частях системы уравнений (3.2) проводится в силу невозмущенной системы (2.1) и соотношений (1.5), т.е.

$$\dot{R} = \frac{\partial R}{\partial \vartheta} \dot{\vartheta} = \frac{ane \sin \vartheta}{\sqrt{1-e^2}},$$

$$\dot{\xi} = \frac{\partial \xi}{\partial \vartheta} \dot{\vartheta} + \frac{\partial \xi}{\partial \varphi_2} \dot{\varphi}_2 = \frac{\partial \xi}{\partial \vartheta} \frac{(1+e \cos \vartheta)^2}{(1-e^2)^{3/2}} n + \frac{\partial \xi}{\partial \varphi_2} \frac{I_2}{A}.$$

Здесь вектор  $\xi$  определяется равенством (1.16) и представляется в виде:

$$\xi = (\xi_x, \xi_y, \xi_z),$$

$$\xi_x = d_x \cos \varphi_1 + d_y \sin \varphi_1,$$

$$\xi_y = -d_x \sin \varphi_1 + d_y \cos \varphi_1, \quad \xi_z = d_z,$$

$$d_x = \cos \varphi_2 \cos(\varphi_3 - \vartheta) - \sin \varphi_2 \cos \delta_1 \sin(\varphi_3 - \vartheta),$$

$$d_y = -\sin \varphi_2 \cos(\varphi_3 - \vartheta) \cos \delta_2 -$$

$$-\cos \varphi_2 \cos \delta_1 \sin(\varphi_3 - \vartheta) \cos \delta_2 +$$

$$+\sin \delta_1 \sin(\varphi_3 - \vartheta) \sin \delta_2,$$

$$d_z = \sin \varphi_2 \cos(\varphi_3 - \vartheta) \sin \delta_2 +$$

$$+\cos \varphi_2 \cos \delta_1 \sin(\varphi_3 - \vartheta) \sin \delta_2 +$$

$$+\sin \delta_1 \sin(\varphi_3 - \vartheta) \cos \delta_2.$$

#### 4. ЭВОЛЮЦИОННАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

На следующем шаге усредним правые части возмущенной системы (3.1) по быстрым угловым переменным – переменной Андуайе  $\varphi_2$  и средней аномалии  $l$  при условии отсутствия резонансов. Процедура усреднения заключается в вычислении интеграла:

$$\langle (*) \rangle_{\varphi_2, l} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (*) d\varphi_2 dl =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (*) \frac{(1-e^2)^{3/2}}{(1+e \cos \vartheta)^2} d\varphi_2 d\vartheta.$$

В результате получим эволюционную систему уравнений, описывающую динамику вращательного движения вязкоупругой планеты с ядром, в виде:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 \cos \delta_2,$$

$$\dot{I}_2 = -\frac{18\chi\rho_1^2 \varepsilon D n^4}{(1-e^2)^{9/2}} \left\{ \frac{I_2}{A} \left[ \frac{1}{2} + \frac{3e^2}{4}(1+2\cos^2 \varphi_3) + \frac{e^4}{16}(1+4\cos^2 \varphi_3) + \cos^2 \delta_1 \left( \frac{1}{2} + \frac{3e^2}{4}(1+2\sin^2 \varphi_3) + \frac{e^4}{16}(1+4\sin^2 \varphi_3) \right) \right] - \frac{n \cos \delta_1}{(1-e^2)^{3/2}} \cdot F_2(e) \right\}, \quad (4.1)$$

$$\dot{I}_3 = -\frac{18\chi\rho_1^2 \varepsilon D n^4}{(1-e^2)^{9/2}} \left\{ \frac{I_2}{A} \cdot \cos \delta_1 \cdot F_1(e) - \frac{n}{(1-e^2)^{3/2}} \cdot F_2(e) \right\},$$

$$\dot{\varphi}_1 = 0, \quad \dot{\varphi}_2 \approx I_2/A,$$

$$\dot{\varphi}_3 = -\frac{3\rho_1^2 \varepsilon D I_2 n^2 \cos \delta_1}{A^2 (1-e^2)^{3/2}} + \frac{9\chi\rho_1^2 \varepsilon D n^4}{A(1-e^2)^{9/2}} \left( \frac{3e^2}{2} + \frac{e^4}{4} \right) \sin 2\varphi_3,$$

где  $F_1(e) = 1 + 3e^2 + \frac{3}{8}e^4$ ,  $F_2(e) = 1 + \frac{15}{2}e^2 + \frac{45}{8}e^4 + \frac{5}{16}e^6$ .

Из первого уравнения системы (4.1) следует, что сохраняется угол между вектором кинетического момента  $\mathbf{G}$  и осью  $Cx_3$ :

$$\cos \delta_2 = \frac{I_1}{I_2} = \frac{I_1(0)}{I_2(0)}.$$

Метод разделения движений основан на физическом допущении, которое заключается в следующем: время затухания свободных собственных колебаний упругой среды на наименьшей частоте больше периода этих колебаний, но много меньше характерного времени движения тела как целого [7, 8]. Поэтому произведение  $\chi^n$  ( $\chi^n \ll 1$ ) мало. Следовательно, в системе уравнений (4.1) угловую переменную  $\varphi_3$  можно рассматривать как быструю и провести процедуру усреднения по  $\varphi_3$ . В результате этого действия система (4.1) примет вид:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 \cos \delta_2,$$

$$\dot{I}_2 = -\frac{18\chi\rho_1^2 \varepsilon D n^4}{(1-e^2)^{9/2}} \left\{ \frac{I_2}{2A} F_1(e) (1 + \cos^2 \delta_1) - \frac{n \cos \delta_1}{(1-e^2)^{3/2}} \cdot F_2(e) \right\},$$

$$\dot{I}_3 = -\frac{18\chi\rho_1^2 \varepsilon D n^4}{(1-e^2)^{9/2}} \left\{ \frac{I_2}{A} \cdot \cos \delta_1 \cdot F_1(e) - \frac{n}{(1-e^2)^{3/2}} \cdot F_2(e) \right\},$$

$$\dot{\varphi}_1 = 0, \quad \dot{\varphi}_2 \approx I_2/A, \quad \dot{\varphi}_3 = -\frac{3\rho_1^2 \varepsilon D I_2 n^2 \cos \delta_1}{A^2 (1-e^2)^{3/2}}. \quad (4.2)$$

От переменных  $I_2, I_3$  перейдем к безразмерным переменным  $y = \cos \delta_1 = I_3/I_2$ ,  $\omega_0 = I_2/An$ . Тогда из второго и третьего уравнения системы (4.2) получим замкнутую автономную систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -\frac{\varepsilon \Delta}{(1-e^2)^{9/2}} \cdot \frac{(1-y^2)}{\omega_0} \cdot \left\{ \omega_0 \cdot y \cdot F_1(e) - \frac{2F_2(e)}{(1-e^2)^{3/2}} \right\}, \\ \dot{\omega}_0 &= -\frac{\varepsilon \Delta}{(1-e^2)^{9/2}} \cdot \left\{ \omega_0 \cdot (1+y^2) \cdot F_1(e) - \frac{2yF_2(e)}{(1-e^2)^{3/2}} \right\}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где  $\Delta = 9\chi\rho_1^2 A^{-1} Dn^4$ .

Система (4.3) имеет асимптотически устойчивое стационарное решение:

$$y = 1, \omega_0^* = \frac{F_2(e)}{F_1(e) \cdot (1-e^2)^{3/2}}. \quad (4.4)$$

В стационарном движении вектор кинетического момента  $\mathbf{G}$  ортогонален плоскости орбиты, а предельное значение угловой скорости собственного вращения зависит от эксцентриситета эллиптической орбиты. Стационарное решение (4.4) было получено ранее в работах Белецкого В.В. [2, 3], где планета моделировалась твердым телом, а для приливного момента сил использовалась феноменологическая формула.

На рис. 2 изображен фазовый портрет системы (4.3), построенный в среде *Octave* при  $e = 0.05$ . Пунктирами изображены кривые, в точках которых интегральные кривые имеют горизонтальные и вертикальные касательные. Все интегральные кривые стягиваются в одну точку  $(1, \omega_0^*)$ . Можно выделить три типа движения: 1) монотонное уменьшение безразмерной угловой скорости до стационарного значения и угла  $\delta_1$  – до нуля (когда интегральные кривые не пересекают пунктирные линии); в точках прямой  $\cos \delta_1 = 0$  происходит переход из обратного вращения в прямое; 2) монотонное уменьшение угла  $\delta_1$  до нуля, уменьшение безразмерной угловой скорости до некоторого минимального значения с последующим увеличением до стационарного (когда интегральные кривые пересекают нижнюю пунктирную линию); 3) монотонное уменьшение безразмерной угловой скорости до стационарного значения, монотонное увеличение угла  $\delta_1$  до некоторого максимального значения с последующим уменьшением до нуля (когда интегральные кривые пересекают верхнюю пунктирную линию).

Ранее в работе [15] методом разделения движений и усреднения исследовалось вращательное

движение спутника с гибкими вязкоупругими стержнями на эллиптической орбите.

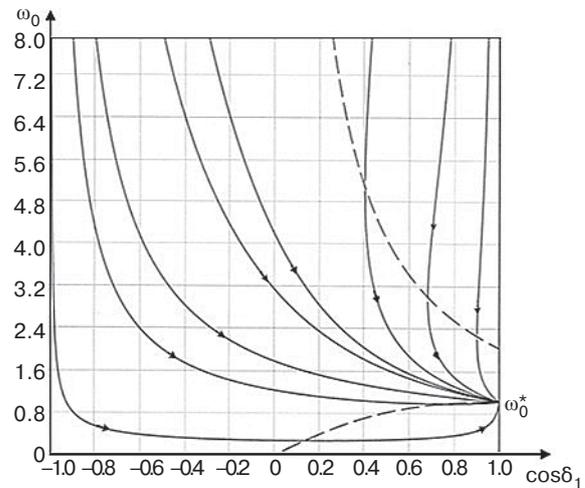


Рис. 2. Фазовый портрет эволюционной системы уравнений движения

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведено исследование вращательного движения планеты, моделируемой телом, состоящим из твердого ядра и жестко прикрепленной к нему вязкоупругой оболочки. В рамках линейной теории упругости получена система уравнений движения в виде интегро-дифференциальной системы уравнений с частными производными в форме уравнений Рауса с использованием канонических переменных Андуайе. Асимптотическим методом разделения движений получена система обыкновенных дифференциальных уравнений 6-го порядка, описывающая динамику вращательного движения планеты. С помощью метода усреднения получена эволюционная система уравнений движения планеты в нерезонансном случае. Показано, что движение планеты стремится к стационарному, когда вектор кинетического момента  $\mathbf{G}$  ортогонален плоскости орбиты, а его модуль имеет постоянное значение, зависящее от эксцентриситета эллиптической орбиты. При нулевом значении эксцентриситета в стационарном движении угловая скорость собственного вращения планеты совпадает с орбитальной угловой скоростью, а ось вращения планеты ортогональна плоскости орбиты.

Полученные в работе результаты могут применяться для исследования приливных эффектов вращательного движения планет и их спутников.

**Вклад авторов.** Все авторы в равной степени внесли свой вклад в исследовательскую работу.

**Authors' contribution.** All authors equally contributed to the research work.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Efroimsky M., Williams J.G. Tidal torques. A critical review of some techniques. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2009;104:257–289. <https://doi.org/10.1007/s10569-009-9204-7>
2. Белецкий В.В. *Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле*. М.: Изд-во МГУ; 1975. 308 с.
3. Белецкий В.В. *Очерки о движении космических тел*. М.: Изд-во ЛКИ; 2009. 432 с. ISBN 978-5-382-00982-7
4. Вильке В.Г. *Аналитическая механика систем с бесконечным числом степеней свободы: в 2-х ч.* М.: Изд-во МГУ. Мех.-мат. фак.; 1997. Ч. 1. 216 с., Ч. 2. 160 с.
5. Вильке В.Г., Копылов С.А., Марков Ю.Г. Эволюция вращательного движения вязкоупругого шара в центральном ньютоновском поле сил. *Прикладная математика и механика*. 1985;49(1):25–34.
6. Шатина А.В. Эволюция движения вязкоупругого шара в центральном ньютоновском поле сил. *Космические исследования*. 2001;39(3):303–315.
7. Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д. *Эволюция движений твердого тела относительно центра масс*. М.; Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований; 2015. 308 с.
8. Черноусько Ф.Л. О движении твердого тела с упругими и диссипативными элементами. *Прикладная математика и механика*. 1978;42(1):34–42.
9. Сидоренко В.В. Об эволюции движения механической системы с линейным демпфером большой жесткости. *Прикладная математика и механика*. 1995;59(4):562–568.
10. Frouard J., Efroimsky M. Precession relaxation of viscoelastic oblate rotation. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2018;473(1):728–746. <https://doi.org/10.1093/mnras/stx2328>
11. Haus E., Bambusi D. Asymptotic Behavior of an Elastic Satellite with Internal Friction. *Mathematical Physics, Analysis and Geometry*. 2015;18(1): Article No. 14. <https://doi.org/10.1007/s11040-015-9184-7>
12. Вильке В.Г. *Механика систем материальных точек и твердых тел*. М.: Физматлит; 2013. 268 с. ISBN 978-5-9221-1481-3
13. Лейбензон Л.С. *Краткий курс теории упругости*. М.-Л.: Гостехиздат; 1942. 304 с.
14. Шатина А.В., Шерстнев Е.В. Движение спутника в гравитационном поле вязкоупругой планеты с ядром. *Космические исследования*. 2015;53(2):173–180.
15. Садовникова Е.В., Шатина А.В. Эволюция вращательного движения спутника с гибкими вязкоупругими стержнями на эллиптической орбите. *Российский технологический журнал*. 2018;6(4):89–104. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2018-6-4-89-104>

## REFERENCES

1. Efroimsky M., Williams J.G. Tidal torques. A critical review of some techniques. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2009;104:257–289. <https://doi.org/10.1007/s10569-009-9204-7>
2. Beletskii V.V. *Dvizhenie sputnika otноситel'no tsentra mass v gravitatsionnom pole (Satellite motion relative to the center of mass in a gravitational field)*. Moscow: Izdatel'stvo MGU; 1975. 308 p. (in Russ.).
3. Beletskii V.V. *Ocherki o dvizhenii kosmicheskikh tel (Essays on the motion of cosmic bodies)*. Moscow: Izdatel'stvo LKI; 2009. 432 p. (in Russ.). ISBN 978-5-382-00982-7
4. Vil'ke V.G. *Analiticheskaya mekhanika sistem s beskonechnym chislom stepenei svobody: v 2-kh ch. (Analytical mechanics of systems with an infinite number of degrees of freedom: in 2 v.)*. Moscow: Izdatel'stvo MGU, mekhaniko-matematicheskii fakul'tet; 1997. V. 1. 216 p., V. 2. 160 p. (in Russ.).
5. Vil'ke V.G., Kopylov S.A., Markov Yu.G. Evolution of the rotational motion of a viscoelastic sphere in a central Newtonian field force field. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1985;49(1):24–30. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(85\)90122-4](https://doi.org/10.1016/0021-8928(85)90122-4) [Vil'ke V.G., Kopylov S.A., Markov Yu.G. Evolution of the rotational motion of a viscoelastic sphere in a central Newtonian field force field. *Prikladnaya matematika i mekhanika = Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1985;49(1):25–34 (in Russ.).]
6. Shatina A.V. Evolution of the motion of a viscoelastic sphere in a central Newtonian field. *Cosmic Research*. 2001;39(3):282–294. <https://doi.org/10.1023/A:1017585722391> [Shatina A.V. Evolution of the motion of a viscoelastic sphere in a central Newtonian field. *Kosmicheskie issledovaniya = Cosmic Research*. 2001;39(3):303–315 (in Russ.).]
7. Chernous'ko F.L., Akulenko L.D., Leshchenko D.D. *Evolutsiya dvizhenii tverdogo tela otноситel'no tsentra mass (Evolution of motion of a rigid body relative to the center of mass)*. Moscow; Izhevsk: Izhevskii institut komp'yuternykh issledovaniy; 2015. 308 p. (in Russ.).
8. Chernous'ko F.L. On the motion of solid body with elastic and dissipative elements. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1978;42(1):32–41. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(78\)90086-2](https://doi.org/10.1016/0021-8928(78)90086-2) [Chernous'ko F.L. On the motion of solid body with elastic and dissipative elements. *Prikladnaya matematika i mekhanika = Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1978;42(1):34–42 (in Russ.).]
9. Sidorenko V.V. The dynamic evolution of a mechanical system with a very rigid linear damper. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1995;59(4):533–539. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(95\)00062-3](https://doi.org/10.1016/0021-8928(95)00062-3) [Sidorenko V.V. The dynamic evolution of a mechanical system with a very rigid linear damper. *Prikladnaya matematika i mekhanika = Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1995;59(4):562–568 (in Russ.).]

10. Frouard J., Efroimsky M. Precession relaxation of viscoelastic oblate rotation. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2018;473(1):728–746. <https://doi.org/10.1093/mnras/stx2328>
11. Haus E., Bambusi D. Asymptotic Behavior of an Elastic Satellite with Internal Friction. *Mathematical Physics, Analysis and Geometry*. 2015;18(1): Article No. 14. <https://doi.org/10.1007/s11040-015-9184-7>
12. Vil'ke V.G. *Mekhanika sistem material'nykh toчек i tverdykh tel (Mechanics of systems of material points and solids)*. Moscow: Fizmatlit; 2013. 268 p. (in Russ.). ISBN 978-5-9221-1481-3
13. Leibenzon L.S. *Kratkii kurs teorii uprugosti (A Short Course of the Elasticity Theory)*. Moscow – Leningrad: Gostekhizdat; 1942. 304 p. (in Russ.).
14. Shatina A.V., Sherstnyov E.V. Satellite motion in the gravitational field of a viscoelastic planet with a core. *Cosmic Research*. 2015;53(2):163–170. <https://doi.org/10.1134/S0010952515020082>  
[Shatina A.V., Sherstnyov E.V. Satellite motion in the gravitational field of a viscoelastic planet with a core. *Kosmicheskie issledovaniya = Cosmic Research*. 2015;53(2):173–180 (in Russ.).]
15. Sadovnikova E.V., Shatina A.V. Evolution of the rotational movement satellite with flexible viscoelastic rods on the elliptic orbit. *Rossiiskii tekhnologicheskii zhurnal = Russian Technological Journal*. 2018;6(4):89–104 (in Russ.). <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2018-6-4-89-104>

#### Об авторах

**Шатина Альбина Викторовна**, д.ф.-м.н., доцент, профессор, кафедра высшей математики Института кибернетики ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: [shatina\\_av@mail.ru](mailto:shatina_av@mail.ru). <https://orcid.org/0000-0001-5016-5899>

**Старостина Анастасия Валерьевна**, аспирант, старший преподаватель, кафедра высшей математики Института кибернетики ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: [starostina\\_a@mirea.ru](mailto:starostina_a@mirea.ru)

#### About the authors

**Albina V. Shatina**, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Docent, Professor, Department of Higher Mathematics, Institute of Cybernetics, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). Email: [shatina\\_av@mail.ru](mailto:shatina_av@mail.ru). <https://orcid.org/0000-0001-5016-5899>

**Anastasia V. Starostina**, Graduate Student, Senior Lecturer, Department of Higher Mathematics, Institute of Cybernetics, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). Email: [starostina\\_a@mirea.ru](mailto:starostina_a@mirea.ru)