

Современные радиотехнические и телекоммуникационные системы
Modern radio engineering and telecommunication systems

УДК 621.372.8
<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2021-9-4-68-76>



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Аналитические выражения для электродинамических параметров экранированной микрополосковой линии

А.Н. Коваленко,
А.Д. Ярлыков[®]

МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, 119454 Россия
[®] Автор для переписки, e-mail: yarlykov@mirea.ru

Резюме. На базе электродинамической модели экранированной микрополосковой линии, построенной на основе проекционного метода при использовании чебышевского базиса, который в явном виде учитывает краевые особенности поля, разработана математическая модель микрополосковой линии с полосковым проводником, ширина которого не превышает высоты подложки. При этом плотность тока на полосковом проводнике аппроксимируется только одной базисной функцией. Представлены аналитические выражения в виде суммы медленно и быстро сходящихся рядов для определения основных электродинамических параметров линии – волнового сопротивления и коэффициента замедления. Вследствие логарифмических особенностей медленно сходящиеся ряды просуммированы и преобразованы в быстро сходящиеся степенные ряды. Помимо этого, для основных электродинамических параметров открытой микрополосковой линии в квазистатическом приближении приведены предельные выражения в виде несобственных интегралов. Вследствие логарифмических особенностей эти интегралы также преобразованы в быстро сходящиеся степенные ряды. В результате получены простые приближенные формулы, которые позволяют рассчитать коэффициент замедления и волновое сопротивление линии с погрешностью, не превышающей 1% при ширине полоскового проводника меньше удвоенной толщины подложки. Представлены результаты расчета электродинамических параметров, полученных на основе разработанной математической модели и на основе проекционного метода с точностью до 5 значащих цифр. Приведенные результаты позволяют установить границы применимости квазистатического приближения и определить погрешность расчета коэффициента замедления и волнового сопротивления с использованием полученных аналитических выражений. Она не превышает 0.1%, если ширина полоскового проводника меньше удвоенной толщины подложки в широком диапазоне изменения диэлектрической проницаемости подложки и частоты.

Ключевые слова: микрополосковая линия с узким полосковым проводником, проекционный метод, чебышевский базис, коэффициент замедления, волновое сопротивление, быстро сходящиеся степенные ряды, квазистатическое приближение, высокая точность

• Поступила: 22.04.2021 • Доработана: 06.05.2021 • Принята к опубликованию: 12.05.2021

Для цитирования: Коваленко А.Н., Ярлыков А.Д. Аналитические выражения для электродинамических параметров экранированной микрополосковой линии. *Российский технологический журнал*. 2021;9(4):68–76. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2021-9-4-68-76>

Прозрачность финансовой деятельности: Никто из авторов не имеет финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

RESEARCH ARTICLE

Analytical expressions for electrodynamic parameters of the shielded microstrip line

Alexander N. Kovalenko,
Alexey D. Yarlykov[@]

MIREA – Russian Technological University, Moscow, 119454 Russia
[@] Corresponding author, e-mail: yarlykov@mirea.ru

Abstract. On the basis of an electrodynamic model of a screened microstrip line, built on the basis of the projection method using the Chebyshev basis, which explicitly takes into account the edge features of the field, a mathematical model of a microstrip line with a strip conductor was developed. The line width does not exceed the height of the substrate. In this case, the current density on the strip conductor is approximated by only one basis function. Analytical expressions are presented in the form of a sum of slowly and rapidly converging series to determine the main electrodynamic parameters of the line – wave resistance and deceleration coefficient. Due to logarithmic features, slowly converging series are summed up and transformed into rapidly converging power series. In addition, limit expressions in the form of improper integrals are given for the main electrodynamic parameters of an open microstrip line in the quasi-static approximation. Due to the logarithmic features, these integrals are also converted to rapidly converging power series. As a result, simple approximate formulas were obtained. They allow calculating the deceleration coefficient and wave impedance of the line with an error not exceeding 1%, when the width of the strip conductor is less than twice the thickness of the substrate. The results of calculating the electrodynamic parameters obtained on the basis of the developed mathematical model and on the basis of the projection method with an accuracy of up to 5 significant digits are presented. These results make it possible to establish the limits of applicability of the quasi-static approximation and to determine the error in calculating the deceleration coefficient and wave resistance using the obtained analytical expressions. The error does not exceed 0.1%, if the width of the strip conductor is less than twice the thickness of the substrate in a wide range of changes in the substrate dielectric constant and frequency.

Keywords: microstrip line with a narrow strip conductor, projection method, Chebyshev basis, deceleration coefficient, wave impedance, rapidly converging power series, quasi-static approximation, high accuracy

• Submitted: 22.04.2021 • Revised: 06.05.2021 • Accepted: 12.05.2021

For citation: Kovalenko A.N., Yarlykov A.D. Analytical expressions for electrodynamic parameters of the shielded microstrip line. *Rossiiskii tekhnologicheskii zhurnal = Russian Technological Journal*. 2021;9(4):68–76 (in Russ.). <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2021-9-4-68-76>

Financial disclosure: The authors have no a financial or property interest in any material or method mentioned.

The authors declare no conflicts of interest.

ВВЕДЕНИЕ

Согласно [1] задачу о собственных волнах экранированной микрополосковой линии (МПЛ) можно решить путем разложения плотности тока на полосковом проводнике по базисным функциям в виде полиномов Чебышева, учитывающих краевые особенности поля. Как следствие, задача сводится к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно коэффициентов разложения плотности тока по этим базисным функциям.

При использовании данного метода для проведения компьютерного моделирования можно получить численные результаты с достаточно высокой точностью при небольшом числе базисных функций. В [2] теоретически установлена возможность асимптотического решения бесконечной СЛАУ методом редукции вследствие быстрой сходимости плотности тока по чебышевскому базису. Так, для микрополосковой линии с симметричным расположением полоскового проводника относительно боковых стенок экрана порядок редуцированной СЛАУ не превышает пяти

в широком диапазоне изменения параметров, а для узких полосковых проводников, как следует из [2], высокая точность расчета электродинамических параметров линии обеспечивается при учете только одной базисной функции. Предложенная в [1] электродинамическая модель МПЛ позволяет разработать эффективный алгоритм расчета собственных волн и реализовать его в виде быстродействующей компьютерной программы. Однако алгоритм и программа достаточно сложны и требуют достаточно высокой квалификации для их реализации. Поэтому актуальна разработка сверхбыстродействующих моделей (СБМ) МПЛ в виде простых аналитических выражений, работающих в ограниченном диапазоне изменения параметров, которые могли бы быть использованы как в системах анализа и оптимизации, так и в инженерном проектировании микрополосковых устройств в одно-модовом приближении. Одним из способов создания СБМ является построение аппроксимационных формул путем анализа и обработки большого объема данных, полученных в результате численного решения электродинамической или квазистатической задачи. В зарубежных изданиях (например в [3]) опубликовано достаточно большое число приближенных формул для расчета коэффициента замедления n и волнового сопротивления Z открытой микрополосковой линии с бесконечным нижним экраном. Как показала проверка [4], наиболее точными являются формулы, приведенные в работах [5, 6]. Большое число различных формул, полученных с использованием квазистатического решения задачи, представлено в [7]. Наиболее распространенные формулы приведены в [8, 9]. Для экранированной микрополосковой линии результаты представлены в работах [10, 11], а при использовании квазистатического приближения – в [12]. В [13] проводится сравнение результатов при изготовлении МПЛ из различных материалов.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МИКРОПОЛОСКОВОЙ ЛИНИИ С УЗКИМ ПОЛОСКОВЫМ ПРОВОДНИКОМ

Поперечное сечение микрополосковой линии показано на рис. 1. Параметры линии: W – ширина полоскового проводника; $S/2$ – расстояние от края проводящей полоски до стенки экрана; h – толщина подложки; a, b – размеры экрана; ϵ – относительная диэлектрическая проницаемость подложки.

Для МПЛ с узким полосковым проводником можно пренебречь поперечной составляющей плотности тока, а в разложении продольной составляющей по чебышевскому базису учесть только один первый член. В этом случае, используя [1], получим следующее дисперсионное уравнение, из которого определяется коэффициент замедления n :

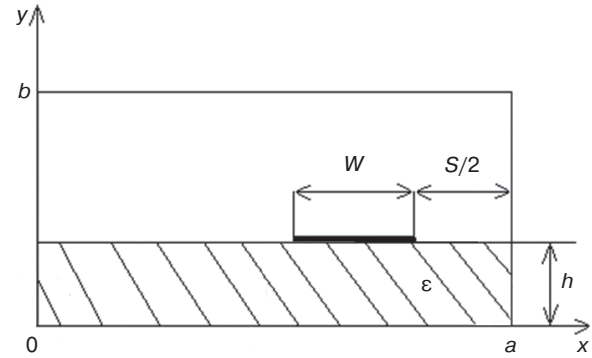


Рис. 1. Поперечное сечение микрополосковой линии

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\chi_m^2} (n^2 G_m^{\Delta} + \alpha_m^2 G_m^M) \right] J_0^2(m\alpha) \sin^2(m\beta) = 0, \quad (1)$$

где $G_m^{\Delta} = \left(\frac{\epsilon}{\beta_m^I} \text{ctg} k_0 \beta_m^I h + \frac{1}{\beta_m^{II}} \text{ctg} k_0 \beta_m^{II} (b-h) \right)^{-1}$;
 $G_m^M = \left(\beta_m^I \text{ctg} k_0 \beta_m^I h + \beta_m^{II} \text{ctg} k_0 \beta_m^{II} (b-h) \right)^{-1}$; $\beta_{m1} = \sqrt{\epsilon - \chi_m^2}$;
 $\beta_{m2} = \sqrt{1 - \chi_m^2}$; $\chi_m^2 = \alpha_m^2 + \Gamma^2$; $\alpha_m = \frac{\pi}{k_0 a} m$; $\alpha = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{W}{a}$;
 $\beta = \alpha \left(1 + \frac{S}{W} \right)$; $k_0 = 2\pi f / c$ – волновое число; f – частота; c – скорость света в вакууме.

Волновое сопротивление Z определяется через мощность, переносимую через поперечное сечение линии, и ток в полосковом проводнике. Из общего выражения для Z , приведенного в [4], получим следующую формулу для расчета волнового сопротивления МПЛ с узким полосковым проводником:

$$Z = \frac{240\pi}{k_0 a} n \times \sum_{m=1}^{\infty} \left[- \left(n^2 (G_m^{\Delta})' + \alpha_m^2 (G_m^M)' \right) + \frac{\alpha_m^2}{\chi_m^2} (G_m^M - G_m^{\Delta}) \right] \times \times \frac{1}{\chi_m^2} J_0^2(m\alpha) \sin^2(m\beta), \quad (2)$$

где $(G_m^{\Delta, M})'$ – производная функции $G_m^{\Delta, M}$ по n^2 .

Бесконечные ряды в выражениях (1), (2) сходятся медленно и при $\alpha \rightarrow 0$ имеют логарифмическую особенность. Улучшить сходимость этих рядов можно по предложенной в [1] методике: прибавляя и вычитая от членов в квадратных скобках в (1) и (2) их асимптотические выражения при $m \rightarrow \infty$:

$$\frac{\pi}{k_0 a} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{n^2 G_m^{\Delta} + \alpha_m^2 G_m^M}{\chi_m^2} - \frac{0.5 - n^2 / (\epsilon + 1)}{\alpha_m} \right] \times \times J_0^2(m\alpha) \sin^2(m\beta) + \left(0.5 - \frac{n^2}{\epsilon + 1} \right) S(\alpha, \beta), \quad (3)$$

$$Z = \frac{240\pi}{k_0 a} n \sum_{m=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{\chi_m^2} \left(n^2 (G_m^{\mathcal{E}})' + \alpha_m^2 (G_m^{\mathcal{M}})' \right) + \frac{\alpha_m^2}{\chi_m^4} G_m^{\mathcal{M}} - \left(\frac{\alpha_m^2}{\chi_m^4} G_m^{\mathcal{E}} - \frac{1}{\alpha_m (\epsilon + 1)} \right) \right] \times \quad (4)$$

$$\times J_0^2(m\alpha) \sin^2(m\beta) + \frac{240}{\epsilon + 1} n S(\alpha, \beta),$$

где

$$S(\alpha, \beta) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} J_0^2(m\alpha) \sin^2(m\beta). \quad (5)$$

Первые ряды в (3) и (4) сходятся быстро (члены в квадратных скобках при $m \rightarrow \infty$ убывают как $\frac{1}{m^3}$), а второй ряд, определяемый выражением (5), можно просуммировать и преобразовать с выделением логарифмической особенности в быстро сходящийся степенной ряд следующим образом.

Представим функцию $S(\alpha, \beta)$ в виде:

$$S(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} (R(\alpha) - F(\alpha, \beta)), \quad (6)$$

где

$$R(\alpha) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} J_0^2(m\alpha), \quad (7)$$

$$F(\alpha, \beta) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} J_0^2(m\alpha) \cos(2m\beta). \quad (8)$$

Используя формулы (6.519(1)) и (8.411(2)) из [14], представим функцию $J_0^2(m\alpha)$ в виде:

$$J_0^2(m\alpha) = \frac{4}{\pi^2} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \cos(2m\alpha \cos\theta \sin\varphi) d\varphi d\theta. \quad (9)$$

Подставляя (9) в (7) и суммируя бесконечный ряд, используя формулу (1.441(2)) из [14], представим функцию $R(\alpha)$ в виде:

$$R(\alpha) = -\frac{4}{\pi^2} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \ln \left(2 \sin \frac{u}{2} \right) d\varphi d\theta, \quad (10)$$

где $u = 2\alpha \cos\theta \sin\varphi$.

Воспользовавшись разложением логарифма в степенной ряд (формула (1.518(3)) из [14]):

$$\ln \left(2 \sin \frac{u}{2} \right) = \ln u + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k-1}}{(2k)!} B_{2k} \left(\frac{u}{2} \right)^{2k} \quad (11)$$

и формулой (0.233(3)) из [14]:

$$S_{2k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{2^{2k-1} \pi^{2k}}{(2k)!} |B_{2k}|,$$

представим выражение (11) в виде:

$$\ln \left(2 \sin \frac{u}{2} \right) = \ln u - \sum_{k=1}^{\infty} S_{2k} \frac{1}{k} \left(\frac{u}{2\pi} \right)^{2k}, \quad (12)$$

где B_{2k} – числа Бернулли

$$(B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = -\frac{1}{30}, B_6 = \frac{1}{42}, \dots),$$

$$S_2 = \frac{\pi^2}{6}, S_4 = \frac{\pi^2}{90}, S_6 = \frac{\pi^2}{945}, \dots$$

Подставляя (12) в (10) и интегрируя, получим следующее выражение для функции $R(\alpha)$:

$$R(\alpha) = \ln \frac{2}{\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{S_{2k}}{k} \left(\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \right)^2 \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{2k}. \quad (13)$$

Используя интегральное представление для квадрата функции Бесселя (9), представим функцию $F(\alpha, \beta)$, определяемую медленно сходящимся рядом (8), в виде:

$$F(\alpha, \beta) = \frac{4}{\pi^2} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \cos(mu) \cos(2m\beta) d\varphi d\theta. \quad (14)$$

Учитывая, что:

$$\begin{aligned} \cos(2m\beta) \cos(mu) &= \\ &= \frac{1}{2} (\cos(m(2\beta - u)) + \cos(m(2\beta + u))), \end{aligned}$$

ряд в (14) можно просуммировать, используя формулу (1.441(2)) из [14], и после преобразований получить следующее выражение для функции $F(\alpha, \beta)$:

$$F(\alpha, \beta) = R(2\alpha) - R(\alpha) - \tilde{F}(\alpha, \beta), \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\alpha, \beta) &= \\ &= \frac{1}{2} \ln \sin \beta + \frac{1}{\pi^2} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \ln \left(1 - \frac{\text{tg}^2(u/2)}{\text{tg}^2\beta} \right) d\varphi d\theta. \quad (16) \end{aligned}$$

Для широких экранов $\left(\alpha = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{W}{a} \ll 1 \right)$:

$$\text{tg}^2 \left(\frac{u}{2} \right) = \text{tg}^2(\alpha \cos\theta \sin\varphi) \approx \alpha^2 \cos^2\theta \sin^2\varphi.$$

Разлагая в (16) логарифмическую функцию в степенной ряд:

$$\ln\left(1 - \frac{\operatorname{tg}^2 u/2}{\operatorname{tg}^2 \beta}\right) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{\operatorname{tg}^2 u/2}{\operatorname{tg}^2 \beta}\right)^k = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cos^{2k}(\theta) \sin^{2k}(\theta) \left(\frac{\alpha}{\operatorname{tg} \beta}\right)^{2k}$$

и используя при интегрировании формулу (3.621(3)) из [14], получим следующее выражение для функции $\tilde{F}(\alpha, \beta)$:

$$\tilde{F}(\alpha, \beta)|_{\alpha \ll 1} = \frac{1}{2} \ln \sin \beta - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\right)^2 \left(\frac{\alpha}{\operatorname{tg} \beta}\right)^{2k}. \quad (17)$$

Подставляя (15) в (6), представим функцию $S(\alpha, \beta)$ в виде:

$$S(\alpha, \beta) = R(\alpha) - \frac{1}{2} R(2\alpha) + \tilde{F}(\alpha, \beta). \quad (18)$$

Для широкого нижнего экрана ($\alpha \ll 1$):

$$S(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{4}{\alpha} \sin \beta\right) - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left[\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\right]^2 \left(\frac{\alpha}{\operatorname{tg} \beta}\right)^{2k}. \quad (19)$$

2. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТА ЗАМЕДЛЕНИЯ И ВОЛНОВОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ В КВАЗИСТАТИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

При $k_0 a \rightarrow 0$ функции $G_m^{\Delta, M}$, входящие в выражения (1) и (2), преобразуются к виду:

$$G_m = -\alpha_m / (\operatorname{ech}(\alpha_m h) + \operatorname{cth}(\alpha_m (b-h))), \\ G_m^M = 1 / (\alpha_m (\operatorname{cth}(\alpha_m h) + \operatorname{cth}(\alpha_m (b-h)))).$$

С учетом этих выражений получим следующие формулы для расчета коэффициента замедления n и волнового сопротивления микрополосковой линии Z в квазистатическом приближении:

$$n = \left\{ \frac{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin^2(m\beta)}{\operatorname{cth}(\alpha_m h) + \operatorname{cth}[\alpha_m (b-h)]} \frac{J_0^2(m\alpha)}{m}}{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin^2(m\beta)}{\operatorname{ech}(\alpha_m h) + \operatorname{cth}[\alpha_m (b-h)]} \frac{J_0^2(m\alpha)}{m}} \right\}^{\frac{1}{2}}, \\ Z = \frac{240}{n} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin^2(m\beta)}{\operatorname{cth}(\alpha_m h) + \operatorname{cth}[\alpha_m (b-h)]} \frac{J_0^2(m\alpha)}{m}.$$

Представим эти формулы в следующем виде:

$$a) n = \sqrt{\frac{P(\epsilon=1)}{P(\epsilon)}}, \quad б) Z = \frac{240}{n} P(\epsilon=1), \quad (20)$$

$$P(\epsilon) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin^2(m\beta)}{\operatorname{ech}(\alpha_m h) + \operatorname{cth}[\alpha_m (b-h)]} \frac{J_0^2(m\alpha)}{m}, \\ \alpha_m = \frac{\pi}{k_0 a} m. \quad (21)$$

При вычислении функции $P(\epsilon)$ проводится процедура улучшения сходимости медленно сходящегося ряда по изложенной выше методике.

Устремляя в (21) размеры экрана к бесконечности, можно получить формулы для расчета электродинамических параметров открытой микрополосковой линии с бесконечным нижним экраном.

Полагая в (21) $\beta = \frac{\pi}{2}$ и $b \rightarrow \infty$, представим это выражение в виде:

$$P(\epsilon) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{J_0^2\left(\frac{m\delta W}{4h}\right) \sin^2\left(\frac{m\pi}{2}\right)}{\operatorname{ech}\left(\frac{m\delta}{2}\right) + 1}; \quad \delta = \frac{2\pi h}{a}.$$

При $\delta \rightarrow 0$ заменим бесконечную сумму на интеграл, полагая в ней $m\delta = x$, $\delta = dx$:

$$P(\epsilon) = \frac{1}{2} \int_{x=0}^{\infty} \frac{1}{x} \frac{J_0^2\left(\frac{W}{4h}x\right)}{\operatorname{ech}\left(\frac{x}{2}\right) + 1} dx = \\ = \frac{1}{2} \frac{1}{\epsilon + 1} \int_{x=0}^{\infty} \frac{1}{x} \left(\frac{1 - e^{-x}}{1 + qe^{-x}}\right) J_0^2\left(\frac{W}{4h}x\right) dx, \quad q = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1}. \quad (22)$$

Полагая в (22) $\epsilon = 1$, получим:

$$P(\epsilon=1) = \frac{1}{2} \int_{x=0}^{\infty} \frac{1}{x} \frac{J_0^2\left(\frac{W}{4h}x\right)}{\operatorname{cth}(x/2) + 1} dx = \\ = \frac{1}{4} \int_{x=0}^{\infty} \frac{1}{x} (1 - e^{-x}) J_0^2\left(\frac{W}{4h}x\right) dx.$$

Подставляя в это выражение интегральное представление для квадрата функции Бесселя (9) и используя при вычислении интеграла по x формулу (3.951(3)) из [14], получим:

$$P(\epsilon=1) = \frac{1}{4} \left\{ \frac{4}{\pi^2} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \frac{1}{2} (\ln(u^2 + 1) - \ln u^2) d\theta d\varphi \right\}, \\ u = \frac{W}{2h} \cos \theta \sin \varphi.$$

Разлагая логарифмическую функцию $\ln(1+u^2)$ в степенной ряд, после интегрирования получим при $W/h \leq 2$:

$$P(\varepsilon = 1) = \frac{1}{4} \left\{ \ln \frac{8h}{W} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \left(\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \right)^2 \left(\frac{W}{2h} \right)^{2k} \right\}. \quad (23)$$

Отметим, что при $W/h > 2$ ряд в (23) расходится. Однако при $W/h = 2$ погрешность расчета функции $P(\varepsilon = 1)$ не превышает 1%, если в нем учесть только один первый член.

Раскладывая в (22) функцию $(1+qe^{-x})^{-1}$ в степенной ряд, с помощью аналогичных преобразований получим:

$$P(\varepsilon) = \frac{1}{2(\varepsilon+1)} \left\{ f_1(W/h) - \sum_{v=1}^{\infty} (-1)^v (f_v(W/h) - f_{v+1}(W/h)) q^v - \varphi(\varepsilon) \right\}, \quad (24)$$

где

$$f_v(W/h) = \ln \frac{8h}{W} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \left[\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \right]^2 \left(\frac{W}{2hv} \right)^{2k}, \quad (25)$$

$$\varphi(\varepsilon) = \ln(1+q) + \sum_{v=1}^{\infty} (-1)^{v+1} \left(\ln \left(1 + \frac{1}{v} \right) - \frac{1}{v} \right) q^v. \quad (26)$$

Таким образом, подставляя (23) и (24) в (20), можно получить при $W/h \leq 2$ простые формулы для расчета коэффициента замедления n и волнового сопротивления Z открытой ($b \rightarrow \infty$, $a \rightarrow \infty$) микрополосковой линии в квазистатическом приближении. Учитывая в бесконечных рядах (23), (24) только первый член, получим следующие приближенные формулы для n и Z :

$$n \approx \left(\frac{\varepsilon+1}{2} \times \frac{\ln(8h/W) + (1/32)(W/h)^2}{\ln(8h/W) + (1/32)(1+0.75q)(W/h)^2 - \varphi(\varepsilon)} \right)^{1/2}, \quad (27)$$

$$Z \approx \frac{60}{n} \left(\ln \left(\frac{8h}{W} \right) + \frac{1}{32} \left(\frac{W}{h} \right)^2 \right). \quad (28)$$

При расчете функции $\varphi(\varepsilon)$ можно воспользоваться аппроксимационной формулой:

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1} \left(0.4516 + \frac{1}{0.7184 + 3.421\varepsilon} \right). \quad (29)$$

Эти формулы при $W/h \leq 2$ обеспечивают более высокую точность расчета коэффициента замедления и волнового сопротивления микрополосковой линии, чем формулы, приведенные в [7–9, 15].

Из формул (20), (21) следует, что величина произведения коэффициента замедления и волнового сопротивления МПЛ не зависит от ε . Поэтому при изменении диэлектрической проницаемости ε на $\varepsilon + \Delta\varepsilon$ волновое сопротивление можно представить в виде

$$Z(\varepsilon + \Delta\varepsilon) = Z(\varepsilon) \frac{n(\varepsilon)}{n(\varepsilon + \Delta\varepsilon)}. \quad (30)$$

В результате численного анализа установлено, что коэффициент $q = (n^2 - 1) / (\varepsilon - 1)$ слабо зависит от ε . Поэтому при изменении ε на $\varepsilon + \Delta\varepsilon$ коэффициент замедления можно определить по формуле

$$n(\varepsilon + \Delta\varepsilon) = \sqrt{1 + \frac{n^2(\varepsilon) - 1}{\varepsilon - 1} [(\varepsilon + \Delta\varepsilon) - 1]}. \quad (31)$$

3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Согласно предложенному в [1] численно-аналитическому методу расчета собственных волн экранированной МПЛ, была разработана компьютерная программа, позволяющая быстро и с высокой точностью рассчитать основные электродинамические параметры микрополосковой линии – волновое сопротивление Z и коэффициент замедления n при помощи разработанного эффективного алгоритма их расчета, а также определить погрешности полученных в статье приближенных формул. Расчеты проводились при симметричном расположении полоскового проводника относительно боковых стенок экрана ($\beta = \pi/2$). В результате анализа численных результатов установлено, что размеры экрана практически не влияют на точность расчета электродинамических параметров при использовании формул (3)–(5). При $a/h \geq 200$, $b \geq a/2$ результаты расчета n и Z совпадают с точностью до 4–5 значащих цифр с результатами расчета для открытой линии.

В табл. 1 приведены результаты расчета n и Z при различных значениях нормированной частоты $f_n = f[\text{ГГц}]/h[\text{мм}]$ и отношения W/h . Параметры линии: $S/h = 200$; $b/h = 150$; $\varepsilon = 9.6$. В первых строках представлены результаты, полученные с использованием формул (3)–(5), во вторых строках – результаты, рассчитанные с точностью до 4–5 значащих цифр, полученные на основе метода [1]. В третьих строках приведена погрешность расчета произведения nZ . Из рассмотрения данных табл. 1

видно, что при $W/h \leq 1$ погрешность $\delta(nZ)$ не превышает 0.05%. С увеличением отношения W/h погрешность увеличивается. Но даже при $W/h \leq 4$ погрешность не превышает 1.1%.

Численные результаты, представленные в табл. 2, позволяют определить границы применимости квазистатического приближения решения. В этой таблице:

$$\delta(nZ) = \frac{|nZ - n_0 Z_0|}{nZ} 100\%,$$

где $n_0 Z_0 = 240P(\epsilon = 1)$ – произведение коэффициента замедления на волновое сопротивление линии на нулевой частоте, рассчитанное с использованием формул (20), (23) с учетом в бесконечных рядах одного члена (первые строки) и 200 членов (вторые строки); nZ – произведение коэффициента замедления на волновое сопротивление линии на частоте f_n , рассчитанное проекционным методом с точностью до 4–5 значащих цифр.

Таблица 1. Зависимость параметров n и Z от W/h и f_n

f_n		0.1	1	3	5	7	10	15
$W/h = 0.1$	n	2.4121 2.4121	2.4139 2.4139	2.4221 2.4221	2.4337 2.4337	2.4469 2.4469	2.4687 2.4687	2.5081 2.5081
	Z	109.00 109.00	108.99 108.99	109.05 109.05	109.34 109.34	109.92 109.92	111.45 111.45	116.11 116.11
	$\delta(nZ), \%$	0.005	0.001	0.002	0.005	0.002	0.001	0.002
$W/h = 0.5$	n	2.4811 2.4811	2.4839 2.4840	2.4976 2.4976	2.5161 2.5161	2.5370 2.5370	2.5704 2.5704	2.6266 2.6267
	Z	63.232 67.231	67.213 67.213	67.231 67.230	67.443 67.442	67.895 67.893	69.057 69.054	72.353 72.348
	$\delta(nZ), \%$	0.001	0.002	0.001	0.001	0.003	0.003	0.004
$W/h = 1$	n	2.5392 2.5394	2.5430 2.5433	2.5611 2.5614	2.5852 2.5854	2.6115 2.6119	2.6520 2.6525	2.7159 2.7168
	Z	49.825 49.817	49.804 49.795	49.805 49.795	49.980 49.968	50.360 50.346	51.313 51.291	53.825 53.779
	$\delta(nZ), \%$	0.007	0.008	0.009	0.014	0.012	0.022	0.051
$W/h = 2$	n	2.6224 2.6254	2.6281 2.6310	2.6528 2.6560	2.6835 2.6873	2.7153 2.7198	2.7604 2.7662	2.8237 2.8322
	Z	34.009 33.930	33.987 33.908	33.987 33.902	34.148 34.052	34.475 34.363	35.229 35.085	36.971 36.739
	$\delta(nZ), \%$	0.124	0.123	0.130	0.140	0.161	0.201	0.330
$W/h = 3$	n	2.6767 2.6865	2.6837 2.6936	2.7126 2.7236	2.7464 2.7590	2.7792 2.7937	2.8224 2.8403	2.8777 2.9010
	Z	26.196 25.989	26.176 25.967	26.190 25.969	26.359 26.117	26.666 26.397	27.307 26.988	28.634 28.200
	$\delta(nZ), \%$	0.431	0.434	0.445	0.467	0.492	0.544	0.724
$W/h = 4$	n	2.7123 2.7318	2.7206 2.7403	2.7522 2.7740	2.7867 2.8115	2.8183 2.8465	2.8577 2.8909	2.9051 2.9450
	Z	21.485 21.139	21.466 21.119	21.496 21.131	21.671 21.280	21.956 21.536	22.502 22.033	23.541 22.972
	$\delta(nZ), \%$	0.914	0.912	0.928	0.941	0.940	0.954	1.085
$W/h = 6$	n	2.7554 2.7951	2.7651 2.8058	2.7991 2.8442	2.8320 2.8826	2.8595 2.9153	2.8916 2.9535	2.9291 2.9965
	Z	16.024 15.464	16.012 15.447	16.065 15.478	16.234 15.624	16.465 15.836	16.854 16.205	17.528 16.838
	$\delta(nZ), \%$	2.152	2.154	2.142	2.082	1.985	1.823	1.755

Таблица 2. Погрешности расчета параметров МПЛ в квазистатическом приближении

W/h		0.10	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
$f_n = 0.1$	$\delta(nZ)$, %	0.001	0.003	0.004	0.003	0.015	0.077	0.238	0.580
		0.001	0.003	0.006	0.013	0.027	0.050	0.084	0.129
$f_n = 1$	$\delta(nZ)$, %	0.057	0.083	0.092	0.104	0.131	0.203	0.372	0.722
		0.057	0.082	0.090	0.094	0.089	0.076	0.052	0.014
$f_n = 3$	$\delta(nZ)$, %	0.448	0.652	0.734	0.810	0.896	1.021	1.241	1.638
		0.448	0.652	0.733	0.800	0.855	0.895	0.923	0.936
$f_n = 5$	$\delta(nZ)$, %	1.183	1.696	1.897	2.074	2.250	2.456	2.750	3.212
		1.183	1.695	1.895	2.064	2.209	2.322	2.437	2.521

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построенная в настоящей статье сверхбыстродействующая модель (СБМ) экранированной микрополосковой линии с узким полосковым проводником ($W/h \leq 2$) позволяет путем компьютерного моделирования получить численные результаты с высокой точностью в широком диапазоне изменения геометрических и физических параметров. Она может быть эффективно использована как в

инженерной практике, так и в системах анализа и оптимизации в одномодовом приближении. Предложенным способом можно построить СБМ микрополосковой линии с подвешенной подложкой, щелевой и компланарной линий, а также связанных микрополосковых линий.

Вклад авторов. Все авторы в равной степени внесли свой вклад в исследовательскую работу.

Authors' contribution. All authors equally contributed to the research work.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коваленко А.Н. Собственные волны микрополосковой линии. *Известия вузов. Радиофизика*. 1978;21(2):188–194.
2. Коваленко А.Н. Проекционный метод построения электродинамических моделей полосковых линий. *Радиотехника и электроника*. 2019;64(2):108–115. <https://doi.org/10.1134/S0033849419020128>
3. Alexeev P.P., Kirillina E.V. Review of the application and improvement of microstrip lines. In: *Proc. of the XV International scientific conference. The strategies of Modern Science Development*. May 16–17, 2018. USA North Charleston, p. 65–69.
4. Коваленко А.Н., Козлов А.Ю. К расчету стыка микрополосковых линий. В сб.: «Автоматизированное проектирование устройств СВЧ»: межвузовский сб. научных трудов. М.: МИРЭА; 1988. С. 28–40.
5. Kirschning M.K., Jansen R.H. Accurate model for effective dielectric constant of microstrip with validity up to millimetrewave frequencies. *Electronics Letters*. 1982;18(6):272–273. <https://doi.org/10.1049/el:19820186>
6. Jansen R.H., Kirschning M.K. Arguments and an accurate model for the power-current formulation of microstrip characteristic impedance. *Arch Elek Ubertragung*. 1983;37(3/4):108–112.
7. Котов Е.П., Каплун В.Д., Тер-Маркарян А.А. *Полосковые платы и узлы. Проектирование и изготовление*. М.: Советское радио; 1979. 248 с.
8. Гупта К., Гардж Р., Чадха Р. *Машинное проектирование СВЧ устройств*: пер. с англ. М.: Радио и связь; 1987. 432 с.
9. Бахарев С.И., Вольман В.И., Либ Ю.Н. и др. *Справочник по расчету и конструированию СВЧ полосковых устройств*. М.: Радио и связь; 1982. 328 с.
10. Priyanka K., Anupma M., Manpreet S.M. Optimized design of shielded microstrip lines using adaptive finite element method. In: *Excerpt of the Proceedings of the 2011*

REFERENCES

1. Kovalenko A.N. Natural modes of a microstrip line. *Radiophysics and Quantum Electronics*. 1978;21(2):128–133. <https://doi.org/10.1007/BF01078702> [Kovalenko A.N. Sobstvennye volny mikropoloskovoi linii. *Izvestiya vuzov. Radiofizika = Radiophysics and Quantum Electronics*. 1978;21(2):188–194 (in Russ.).]
2. Kovalenko A.N. Projection method for constructing full-wave models of striplines. *Journal of Communications Technology and Electronics*. 2019;64(2):93–99. <https://doi.org/10.1134/S1064226919020128> [Kovalenko A.N. Proektsionnyi metod postroeniya elektrodinamicheskikh modelei poloskovykh linii. *Radiotekhnika i elektronika = Journal of Communications Technology and Electronics*. 2019;64(2):108–115 (in Russ.).]
3. Alexeev P.P., Kirillina E.V. Review of the application and improvement of microstrip lines. In: *Proc. of the XV International scientific conference. The strategies of Modern Science Development*. May 16–17, 2018. USA North Charleston, p. 65–69.
4. Kovalenko A.N., Kozlov A.Yu. To the calculation of the joint of microstrip lines. In: *Avtomatizirovannoe proektirovanie ustroystv SVCh: Mezhdvuzovskii sbornik nauchnykh trudov (Computer-Aided Design of Microwave Devices: Interuniversity collection of scientific papers)*. Moscow: MIREA; 1988, p. 21–40. (in Russ.).
5. Kirschning M.K., Jansen R.H. Accurate model for effective dielectric constant of microstrip with validity up to millimetrewave frequencies. *Electronics Letters*. 1982;18(6):272–273. <https://doi.org/10.1049/el:19820186>
6. Jansen R.H., Kirschning M.K. Arguments and an accurate model for the power-current formulation of microstrip characteristic impedance. *Arch Elek Ubertragung*. 1983;37(3/4):108–112.
7. Kotov E.P., Kaplun V.D., Ter-Markaryan A.A. *Poloskovyye platy i uzly. Proektirovanie i izgotovlenie (Strip boards*

- COMSOL Conference in Bangalore. 2011. URL: https://www.comsol.fr/paper/download/84093/riyanka_paper.pdf
11. Peric Ć.M., Ilić S., Aleksić S. Quasi-TEM analysis of multilayered shielded microstrip lines using hybrid boundary element method. In: *Engineering Mathematics I. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*. 2016. V. 178, p. 115–129. https://doi.org/10.1007/978-3-319-42082-0_8
 12. Musa S.M., Sadiku M.N.O. Quasi-static analysis of shielded microstrip lines. In: *Excerpt of the Proceedings of the COMSOL Users Conference 2006 Las Vegas*. 2006. URL: <https://www.comsol.dk/paper/download/100951/Musa.pdf>
 13. Pantoja J.P., Hernandez-Figueroa H.E., Savu R., Canesqui M.A., Moshkalev S.A. Performance comparison of metallic and graphene buckypaper microstrip transmission lines. In: *SBMO/IEEE MTT-S International Microwave and Optoelectronics Conference*. 2017, p. 1–5. <https://doi.org/10.1109/IMOC.2017.8121104>
 14. Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*. М.: Физматгиз; 1963. 1100 с.
 15. Цыба Е.А., Голубева И.П., Казимиренко В.А., Прокopenko Ю.В. Комплексная эффективная диэлектрическая проницаемость микромеханически перестраиваемых микрополосковых линий. *Известия ВУЗов. Радиоэлектроника*. 2018;61(2):96–107. <https://doi.org/10.20535/S0021347018020048>
 8. Gupta K.C., Garg R., Chadha R. *Computer-aided Design of Microwave Circuits*. Dedham, Mass., Artech House Inc.; 1981. 636 p.
 - [Gupta K., Gardzh R., Chadkha R. *Mashinnoe proektirovanie SVCh ustroystv (Machine design of microwave devices)*. Moscow: Radio i svyaz'; 1987. 432 p. (in Russ.)]
 9. Bakharev S.I., Vol'man V.I., Lib Yu.N., et al. *Spravochnik po raschetu i konstruirovaniyu SVCh poloskovykh ustroystv (Handbook for the calculation and design of microwave stripline devices)*. Moscow: Radio i svyaz'; 1982. 328 p. (in Russ.)
 10. Priyanka K., Anupma M., Manpreet S.M. Optimized design of shielded microstrip lines using adaptive finite element method. In: *Excerpt of the Proceedings of the 2011 COMSOL Conference in Bangalore*. 2011. Available from URL: https://www.comsol.fr/paper/download/84093/riyanka_paper.pdf
 11. Peric Ć.M., Ilić S., Aleksić S. Quasi-TEM analysis of multilayered shielded microstrip lines using hybrid boundary element method. In: *Engineering Mathematics I. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*. 2016. V. 178, p. 115–129. https://doi.org/10.1007/978-3-319-42082-0_8
 12. Musa S.M., Sadiku M.N.O. Quasi-static analysis of shielded microstrip lines. *Excerpt of the Proceedings of the COMSOL Users Conference 2006 Las Vegas*. 2006. Available from URL: <https://www.comsol.dk/paper/download/100951/Musa.pdf>
 13. Pantoja J.P., Hernandez-Figueroa H.E., Savu R., Canesqui M.A., Moshkalev S.A. Performance comparison of metallic and graphene buckypaper microstrip transmission lines. In: *SBMO/IEEE MTT-S International Microwave and Optoelectronics Conference*. 2017, p. 1–5. <https://doi.org/10.1109/IMOC.2017.8121104>
 14. Gradshtein I.S., Ryzhik I.M. *Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedenii (Tables of integrals, sums, series and products)*. Moscow: Fizmatgiz; 1963. 1100 p. (in Russ.)
 15. Tsyba E.A., Golubeva I.P., Kazimirenko V.A., Prokopenko Y.V. Complex effective dielectric permittivity of micromechanically tunable microstriplines. *Radioelectronics and communications systems*. 2018;61(2):72–79. <https://doi.org/10.3103/S0735272718020048>
[Tsyba E.A., Golubeva I.P., Kazimirenko V.A., Prokopenko Yu.V. Kompleksnaya effektivnaya dielektricheskaya pronitsaemost' mikromekhanicheski perestraivaemykh mikropoloskovykh linii. *Izvestiya VUZov. Radioelektronika = Radioelectronics and communications systems*. 2018;61(2):96–107 (in Russ.)]

Об авторах

Коваленко Александр Николаевич, д.т.н., профессор, кафедра радиоволновых процессов и технологий Института радиотехнических и телекоммуникационных систем ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: a_kovalenko@mirea.ru.

Ярлыков Алексей Дмитриевич, ассистент, кафедра радиоволновых процессов и технологий Института радиотехнических и телекоммуникационных систем ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: yarlykov@mirea.ru.

About the authors

Alexander N. Kovalenko, Dr. Sci. (Eng.), Professor, Department of Radio Wave Processes and Technologies, Institute of Radio Engineering and Telecommunication Systems, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: a_kovalenko@mirea.ru.

Alexey D. Yarlykov, Assistant, Department of Radio Wave Processes and Technologies, Institute of Radio Engineering and Telecommunication Systems, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: yarlykov@mirea.ru.