

**Математическое моделирование**  
**Mathematical modeling**

УДК 629.78

<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2021-9-3-78-87>**НАУЧНАЯ СТАТЬЯ****Синтез программных угловых движений  
космического аппарата  
дистанционного зондирования Земли  
с высоким пространственным разрешением****С.Ю. Горчаков** <sup>®</sup>

АО «Корпорация «ВНИИЭМ», Москва, 107078 Россия

<sup>®</sup> Автор для переписки, e-mail: SYGorchakov@yandex.ru

**Резюме.** Рассматривается космический аппарат дистанционного зондирования Земли (КА ДЗЗ) со съемочной оптико-электронной аппаратурой высокого или сверхвысокого разрешений. В процессе съемки регистрируемое изображение постоянно перемещается по матрице фотоприемника с непостоянной и/или избыточной скоростью, неподходящей для данного фотоприемника. Цель статьи состоит в синтезе способа управления ориентацией и стабилизацией КА ДЗЗ, который позволит обеспечить строго заданную скорость движения изображения на фотоприемнике. Предлагается отыскать такой закон движения (функциональные зависимости угловых скоростей КА ДЗЗ от времени), который позволит при его применении в контуре управления компенсировать неподходящие для данного фотоприемника скорости движения изображения. Используемый метод состоит в дифференцировании по времени фундаментального уравнения космической фотограмметрии в направляющих косинусах, а также в дифференцировании матрицы направляющих косинусов, обеспечивающей переход между направляющими косинусами в пространстве изображений и пространстве предметов. Полученный в статье результат – выведенное уравнение космической фотограмметрии в кинематическом виде, а также функциональные зависимости угловых скоростей от времени. В представленной статье составлена математическая модель сканирования изображений ландшафтов Земли с помощью КА ДЗЗ. Полученные функциональные зависимости могут быть применимы при разработке бортовых алгоритмов управления ориентацией и стабилизацией КА ДЗЗ. При реализации в бортовой вычислительной машине управления ориентацией и стабилизацией по полученным функциональным зависимостям может быть обеспечена строго заданная скорость движения изображения в фокальной плоскости бортовой съемочной аппаратуры, а, следовательно, повышено качество сканированного изображения путем улучшения функции передачи модуляции кинематического «смаза» изображения.

**Ключевые слова:** дистанционное зондирование Земли, космический аппарат, изображения ландшафтов Земли, математическая модель, компенсация кинематического смаза изображения, угловая скорость

• Поступила: 20.11.2020 • Доработана: 10.12.2020 • Принята к опубликованию: 25.02.2021

**Для цитирования:** Горчаков С.Ю. Синтез программных угловых движений космического аппарата дистанционного зондирования Земли с высоким пространственным разрешением. *Российский технологический журнал*. 2021;9(3):78–87. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2021-9-3-78-87>

**Прозрачность финансовой деятельности:** Автор не имеет финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

RESEARCH ARTICLE

# Synthesis of program angular motions of the Earth remote sensing spacecraft with high spatial resolution

Sergey Yu. Gorchakov<sup>@</sup>

VNIIEM Corporation, Moscow, 107078 Russia

<sup>@</sup> Corresponding author, e-mail: SYGorchakov@yandex.ru

**Abstract.** The article considers a spacecraft for remote sensing of the Earth with high-resolution or ultra-high-resolution optical-electronic equipment. During the shooting process, the recorded image constantly moves through the photodetector matrix at a non-constant and/or excessive velocity, which is not suitable for this photodetector. The purpose of the article is to synthesize a method for the control of the orientation and stabilization of the remote sensing spacecraft, which will provide a strictly specified velocity of the image motion on the photodetector. It is proposed to find such a law of motion (functional dependences of the angular rate of the remote sensing spacecraft on time), which will allow, when applied in the control loop, to compensate for the image motion velocities that are unsuitable for this photodetector. The method used consists in time differentiation of the fundamental equation of space photogrammetry in the guiding cosines, as well as in differentiation of the matrix of guiding cosines. This provides a transition between the guiding cosines in the space of images and the space of objects. The result obtained in the article is the derived equation of space photogrammetry in kinematic form, as well as the functional dependences of angular rate on time. In the present article, a mathematical model of scanning images of the Earth's landscapes with the help of remote sensing spacecraft is compiled. The obtained functional dependences can be applied in the development of on-board algorithms for controlling the orientation and stabilization of the remote sensing spacecraft. When implementing orientation and stabilization control in the on-board computer based on the obtained functional dependencies, a strictly specified speed of image movement in the focal plane of the on-board shooting equipment can be provided, and, consequently, the quality of the scanned image is improved by improving the function of transmitting the modulation of the kinematic "smudge" (blurring) of the image.

**Keywords:** remote sensing of the Earth, spacecraft, images of Earth landscapes, mathematical model, compensation of kinematic image blurring, angular velocity

• Submitted: 20.11.2020 • Revised: 10.12.2020 • Accepted: 25.02.2021

**For citation:** Gorchakov S.Yu. Synthesis of program angular motions of the Earth remote sensing spacecraft with high spatial resolution. *Rossiiskii tekhnologicheskii zhurnal = Russian Technological Journal*. 2021;9(3):78–87 (in Russ.). <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2021-9-3-78-87>

**Financial disclosure:** The author has no a financial or property interest in any material or method mentioned.

The author declares no conflicts of interest.

## СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

ИСК – Инерциальная система координат  
ВСК – Визирная система координат  
ИЛЗ – Изображения ландшафтов Земли  
КА – Космический аппарат  
СДИ – Скорость движения изображения  
ФП – Фокальная плоскость  
ФПЗС – Фотоприемник с зарядовой связью  
БОЭА – Бортовая оптико-электронная аппаратура  
ВЗН – Временная задержка накопления  
ИД – Исходные данные  
ПЗ-90.11 – Параметры Земли 1990 г.  
ОЗЭ – Общеземной эллипсоид  
БКУ – Бортовой комплекс управления

СУОС – Система управления ориентацией и стабилизацией

## ВВЕДЕНИЕ

Получение изображений ландшафтов Земли высокого и сверхвысокого пространственного разрешения с помощью бортовой съемочной оптико-электронной аппаратуры (БОЭА), установленной на космических аппаратах дистанционного зондирования Земли (КА ДЗЗ), с заданными геометрическими, спектральными и радиометрическими характеристиками требует вычислений и реализации параметров ориентации и стабилизации КА ДЗЗ с применением специальных алгоритмов [1–5].

Для регистрации изображений ландшафтов Земли, пространственное разрешение которых находится в диапазоне 0.25–1 м, необходимо задавать с помощью исполнительных органов КА ДЗЗ такие программные угловые движения осей фокальной поверхности БОЭА на протяжении сканирования маршрута съемки, чтобы величина допустимого сдвига изображения за время накопления заряда на фотоприемнике с зарядовой связью не превышала 1/3 пиксела [6]. Регистрация изображений ландшафтов Земли без заданных программных угловых движений может приводить к значительному кинематическому «смазу» изображения, ухудшению его геометрических и радиометрических свойств. При этом регистрация изображений ландшафтов Земли с малой для данного фотоприемника скоростью движения изображения может породить местно «пересвеченное» изображение, блуминг, снизить соотношение сигнал/шум, контрастность, детальность. Реализация излишне высокой скорости движения изображения породит «смаз», а отношение сигнал/шум может оказаться недостаточным, что породит структурные искажения изображения и потери в разрешении [6].

Далее в статье приводится вывод таких функциональных зависимостей для обеспечения программных угловых движений осей фокальной поверхности БОЭА КА ДЗЗ.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу, в которой визирная система координат (ВСК) фокальной поверхности (ФП) БОЭА (рис. 1) во время регистрации изображений ландшафтов Земли (ИЛЗ) в целях компенсации поперечного «смаза» (поперек строк фотоприемника с зарядовой связью (ФПЗС)) и обеспечения строго заданного движения зарядовых пакетов вдоль строк ФПЗС должна совершать вращательное движение относительно инерциальной системы координат (ИСК) с угловой скоростью  $\vec{W}(t)$ , которая рассматривается в ВСК.

Необходимо определить функциональную зависимость угловой скорости  $\vec{W}(t)$  от времени на протяжении сканирования маршрута съемки (МС).

Будем считать, что КА – точка, двигающаяся по Кеплеровой орбите вокруг Земли; модель Земли – общеземной эллипсоид (ОЗЭ) с параметрами ПЗ-90.11.

### ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Введем следующие системы отсчета (СО) и системы координат (СК) для верного и наиболее точного преобразования используемых в настоящей статье векторов.

Таблица 1. Описание используемых СО и СК

Обозначение	Название	Краткое описание
ИСК	Инерциальная система координат	Начало ИСК совпадает с центром ОЗЭ, ось $Z$ направлена в северный полюс мира, ось $X$ расположена в плоскости экватора и направлена в точку весеннего равноденствия $\gamma$ , ось $Y$ дополняет систему до правой. Полюс мира и точка весеннего равноденствия не сохраняют неизменными свое положение в пространстве с течением времени, поэтому для фиксирования инерциальной системы координат принимают стандартную эпоху J2000.0 [7, 8]
ГСК	Гринвичская система координат	Прямоугольная система координат $XYZ$ , имеющая начало в центре масс Земли. Вращается вместе с Землей. Ось $Z$ направлена к Международному условному началу. Ось $X$ лежит в плоскости среднего гринвичского меридиана и определяет положение нуля-пункта принятой системы счета долгот. Ось $Y$ дополняет систему $XYZ$ до правой [7, 8]
ПЗ-90.11	Общеземная система отсчета. Параметры Земли	По уровню точности, ориентации осей координат и положению их начала ПЗ-90.11 соответствует ITRS и ITRF [9]. Описание перехода между ITRS и ПЗ-90.11 дано в [9]
ТСК	Транспортирующая система координат	Начало СК располагается в центре масс КА. Является подвижной орбитальной системой координат (ОСК). Реализуется следующим образом: - ось $r$ (радиаль) направлена в положительном направлении радиус-вектора центра масс КА, - ось $n$ (трансверсаль) лежит в плоскости орбиты, образует с осью $r$ прямой угол и направлена в сторону вектора орбитальной скорости центра масс КА, - ось $b$ (бинормаль) дополняет ТСК до правой ортогональной. Погрешности знания осей ТСК определяются погрешностями определения компонент вектора состояния КА

Окончание табл. 1

Обозначение	Название	Краткое описание
ССК	Связанная система координат КА	Начало СК располагается в центре масс КА. Реализуется следующим образом [10]: - ось $X$ направлена от хвостовой к носовой части КА, - ось $Y$ находится направлена к верхней части КА, - ось $Z$ дополняет СК до правой. Оси ССК жестко связаны с конструкцией КА
ВСК	Визирная система координат ФП БОЭА	Подвижная СК. Начало СК располагается в центре ФП. Оси ВСК жестко связаны с конструкцией ФП и материализуются следующим образом: - ось $X$ направлена вдоль ФП, - ось $Y$ направлена поперек ФП, - ось $Z$ направлена по нормали к ФП

Изобразим основные векторы и орты СК, используемые в поставленной задаче. На рис. 1 показано направление основных векторов скорости и ортов ВСК ФП во время сканирования МС.

Для дальнейшего изложения способа решения поставленной задачи и алгоритма зададим исходные данные, представленные в таблице 2.

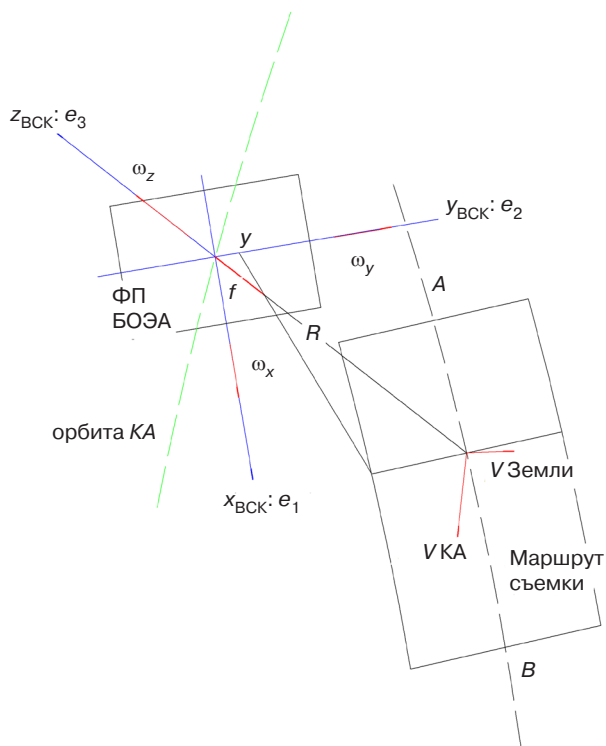


Рис. 1. Направление основных векторов скорости и ортов ВСК во время сканирования МС

Таблица 2. Исходные данные

№, п/п	Название	Обозначение	Размерность
1	Скорость вращения ОЗЭ (ПЗ-90.11)	$w_E = 7292115.0 \cdot 10^{-11}$	рад/с
2	Большая полуось ОЗЭ (ПЗ-90.11)	$a = 6378136$	м
3	Сжатие ОЗЭ (ПЗ-90.11)	$\alpha = 1 / 298.25784$	—
4	Полуразмеры ФП БОЭА	$x, y$	м
5	Фокусное расстояние БОЭА	$f$	м
6	Вектор направления на некоторый пиксел $j$ ФПЗС	$\vec{r}_{ВСК} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ -f \end{bmatrix}$	м
7	Радиус-вектор КА в ИСК	$\vec{R}_{КА} = \begin{bmatrix} X_{КА} \\ Y_{КА} \\ Z_{КА} \end{bmatrix}$	м
8	Вектор скорости КА в ИСК	$\frac{d}{dt} \vec{R}_{КА} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} X_{КА} \\ \frac{d}{dt} Y_{КА} \\ \frac{d}{dt} Z_{КА} \end{bmatrix}$	м/с
9	Координаты пересечения ВО БОЭА и поверхности ПЗ-90.11	$\vec{R}_j = \begin{bmatrix} X_j \\ Y_j \\ Z_j \end{bmatrix}$	м
10	Кососимметричная матрица угловой скорости вокруг ортов ВСК	$\mathbf{W}_x = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$	рад/с

## ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ КОСМИЧЕСКОЙ ФОТОГРАММЕТРИИ

В [11] приведено основное уравнение космической фотограмметрии, определяющее связь между векторами в пространстве изображений (в ВСК) и пространстве предметов (в ИСК), которое записывается в следующем виде:

$$\vec{r}_{ВСК} = \frac{|\vec{r}_{ВСК}|}{|\Delta \vec{R}_{ИСК}|} \cdot \mathbf{A} \cdot \Delta \vec{R}_{ИСК}, \quad (1)$$

где  $\vec{r}_{ВСК} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ -f \end{bmatrix}$  – вектор, соединяющий точку, лежащую на длине фокусного расстояния  $f$ , и точку на ФП ( $j$ -й пиксел ФПЗС);  $f$  – фокусное расстояние БОЭА;  $x$ ,

ую на длине фокусного расстояния  $f$ , и точку на ФП ( $j$ -й пиксел ФПЗС);  $f$  – фокусное расстояние БОЭА;  $x$ ,

$y$  – координаты  $j$ -го пиксела ФПЗС;  $\Delta \vec{R}_{\text{ИСК}} = \vec{R}_j - \vec{R}_{\text{КА}}$  – вектор в ИСК, направленный от центра масс КА до точки пересечения с поверхностью ОЗЭ ПЗ-90.11;

$$\mathbf{A} = [\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \vec{e}_3] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - \text{матрица на-}$$

правляющих косинусов, определяющая взаимный переход между ИСК и ВСК.

Уравнение (1) записано в статическом виде (векторы неизменны – одномоментная регистрация изображения). В действительности, указанные в (1) векторы и матрица являются функциями от времени, так как регистрация ИЛЗ происходит на протяженном МС. Вектор  $\vec{r}_{\text{ВСК}}$  меняется в процессе регистрации ИЛЗ (точка снимаемого изображения перемещается по ФП за время экспонирования ФПЗС). Вектор  $\Delta \vec{R}_{\text{ИСК}}$ , направленный от центра масс КА до точки пересечения с поверхностью Земли, также меняется. Меняется и матрица  $\mathbf{A}$ , так как КА ДЗЗ совершает угловое движение в ИСК (относительно центра масс КА ДЗЗ) (ВСК совершает угловое движение относительно ИСК).

Для дальнейших рассуждений перепишем уравнение (1) через направляющие косинусы:

$$\vec{l}_{\text{ВСК}} = \mathbf{A} \cdot \vec{l}_{\text{ИСК}}, \quad (2)$$

где  $\vec{l}_{\text{ВСК}} = \frac{\vec{r}_{\text{ВСК}}}{|\vec{r}_{\text{ВСК}}|}$  – направляющие косинусы для

вектора  $\vec{r}_{\text{ВСК}}$ ;  $\vec{l}_{\text{ИСК}} = \frac{\Delta \vec{R}_{\text{ИСК}}}{|\Delta \vec{R}_{\text{ИСК}}|}$  – направляющие

косинусы для вектора  $\Delta \vec{R}_{\text{ИСК}}$ .

Так как вектор  $\vec{r}_{\text{ВСК}}$  меняется во времени (изображение перемещается по ФПЗС), то и сами направляющие косинусы  $\vec{l}_{\text{ВСК}}$  являются переменными в процессе съемки. Для направляющих косинусов  $\vec{l}_{\text{ИСК}}$  рассуждения аналогичны: так как вектор  $\Delta \vec{R}_{\text{ИСК}}$  меняется во времени (КА ДЗЗ движется по орбите, снимаемая поверхность Земли также перемещается вследствие вращения Земли), то и сами  $\vec{l}_{\text{ИСК}}$  также являются переменными.

В отличие от [12], где решается задача определения поля векторов скоростей движения изображения (СДИ) по уже известным законам движения КА ДЗЗ по орбите, вращения Земли и, главное, углового движения КА ДЗЗ относительно собственного центра масс, т.е. уже известной угловой скорости вращения ВСК относительно ИСК, в настоящей статье ставится задача обеспечения за счет вращения КА ДЗЗ требуемой (заданной) СДИ, т.е. задача определения угловых скоростей ВСК относительно ИСК. Требования к поддержанию заданной СДИ исходят из особенностей функционирования ФПЗС с

временной задержкой накопления (ВЗН), а именно для таких ФПЗС существует определенно заданный набор шагов накопления. По этой причине требуется обеспечивать, например, за счет вращения КА ДЗЗ такие величины модулей и направления векторов СДИ по полю фотоприемника БОЭА.

Из уравнения (2) путем дифференцирования выведем основное уравнение космической фотограмметрии в кинематическом виде:

$$\frac{d}{dt} \vec{l}_{\text{ВСК}} = \frac{d}{dt} \mathbf{A} \cdot \vec{l}_{\text{ИСК}} + \mathbf{A} \cdot \frac{d}{dt} \vec{l}_{\text{ИСК}}, \quad (3)$$

где  $\frac{d}{dt} \vec{l}_{\text{ВСК}}$  – производная единичного вектора  $\vec{l}_{\text{ВСК}}$ ;

$\frac{d}{dt} \mathbf{A}$  – производная матрицы направляющих косинусов;  $\frac{d}{dt} \vec{l}_{\text{ИСК}}$  – производная единичного вектора, определяющая направление скорости перемещения регистрируемой точки на поверхности ОЗЭ в ИСК.

Определим производные направляющих косинусов  $\frac{d}{dt} \vec{l}_{\text{ВСК}}$  через требуемую (заданную) СДИ на  $j$ -м пикселе  $\frac{d}{dt} \vec{r}_{\text{ВСК}}$ . Т.к.  $\vec{r}_{\text{ВСК}} = \vec{l}_{\text{ВСК}} \cdot |\vec{r}_{\text{ВСК}}|$ , то:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{r}_{\text{ВСК}} &= \frac{d}{dt} \vec{l}_{\text{ВСК}} \cdot |\vec{r}_{\text{ВСК}}| + \vec{l}_{\text{ВСК}} \cdot \frac{d}{dt} |\vec{r}_{\text{ВСК}}| \rightarrow \\ \frac{d}{dt} \vec{l}_{\text{ВСК}} &= \frac{\frac{d}{dt} \vec{r}_{\text{ВСК}} - \vec{l}_{\text{ВСК}} \cdot \frac{d}{dt} |\vec{r}_{\text{ВСК}}|}{|\vec{r}_{\text{ВСК}}|}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\frac{d}{dt} \vec{r}_{\text{ВСК}}$  – требуемая СДИ на  $j$ -м пикселе;

$\frac{d}{dt} |\vec{r}_{\text{ВСК}}|$  – производная модуля вектора  $\vec{r}_{\text{ВСК}}$ .

Определим производные направляющих косинусов  $\frac{d}{dt} \vec{l}_{\text{ИСК}}$  через скорость перемещения регистрируемой точки на поверхности ОЗЭ в ИСК  $\frac{d}{dt} \Delta \vec{R}_{\text{ИСК}}$ .

Т.к.  $\Delta \vec{R}_{\text{ИСК}} = \vec{l}_{\text{ИСК}} \cdot |\Delta \vec{R}_{\text{ИСК}}|$ , то:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Delta \vec{R}_{\text{ИСК}} &= \frac{d}{dt} \vec{l}_{\text{ИСК}} \cdot |\Delta \vec{R}_{\text{ИСК}}| + \vec{l}_{\text{ИСК}} \cdot \frac{d}{dt} |\Delta \vec{R}_{\text{ИСК}}| \rightarrow \\ \frac{d}{dt} \vec{l}_{\text{ИСК}} &= \frac{\frac{d}{dt} \Delta \vec{R}_{\text{ИСК}} - \vec{l}_{\text{ИСК}} \cdot \frac{d}{dt} |\Delta \vec{R}_{\text{ИСК}}|}{|\Delta \vec{R}_{\text{ИСК}}|}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\frac{d}{dt} |\Delta \vec{R}_{\text{ИСК}}|$  – производная модуля вектора  $\Delta \vec{R}_{\text{ИСК}}$ .

Из уравнения (3) видно, что производная направляющих косинусов  $\frac{d}{dt} \vec{l}_{\text{ВСК}}$  обусловлена вращением



самой ВСК относительно ИСК (первое слагаемое) и изменением производной направляющих косинусов  $\frac{d}{dt} \bar{L}_{\text{ИСК}}$  в ИСК (второе слагаемое).

Входящая в уравнение (3) производная от матрицы направляющих косинусов может быть определена как [13, 14]:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{A} = -\mathbf{W}_x \cdot \mathbf{A}. \quad (6)$$

Тогда уравнение (3) будет иметь следующий вид:

$$\frac{d}{dt} \bar{l}_{\text{ВСК}} = -\mathbf{W}_x \cdot \mathbf{A} \cdot \bar{L}_{\text{ИСК}} + \mathbf{A} \cdot \frac{d}{dt} \bar{L}_{\text{ИСК}}. \quad (7)$$

Путем подстановки в полученное уравнение зависимости (6) получим:

$$\frac{d}{dt} \bar{l}_{\text{ВСК}} = -\mathbf{W}_x \cdot \bar{l}_{\text{ВСК}} + \mathbf{A} \cdot \frac{d}{dt} \bar{L}_{\text{ИСК}}. \quad (8)$$

Перепишем уравнение (8) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} l_{\text{ВСК}}^x \\ l_{\text{ВСК}}^y \\ l_{\text{ВСК}}^z \end{bmatrix} &= \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_{\text{ВСК}}^x \\ l_{\text{ВСК}}^y \\ l_{\text{ВСК}}^z \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} L_{\text{ИСК}}^x \\ L_{\text{ИСК}}^y \\ L_{\text{ИСК}}^z \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (9)$$

Уравнение (9) назовем основным уравнением космической фотограмметрии в кинематическом виде. Для определения угловых скоростей  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  далее рассмотрим частные случаи решения этого уравнения.

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ УГЛОВЫХ СКОРОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ ФП БОЭА ОТНОСИТЕЛЬНО ВСК

#### А) Случай центра ФП

Для центра ФП БОЭА имеем:

$$\bar{l}_{\text{ВСК}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_{\text{ВСК}}^z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Тогда уравнение (9) можно записать в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} l_{\text{ВСК}}^x = -\omega_y \cdot l_{\text{ВСК}}^z + a_{11} \cdot \frac{d}{dt} L_{\text{ИСК}}^x + \\ \quad + a_{12} \cdot \frac{d}{dt} L_{\text{ИСК}}^y + a_{13} \cdot \frac{d}{dt} L_{\text{ИСК}}^z, \\ \frac{d}{dt} l_{\text{ВСК}}^y = \omega_x \cdot l_{\text{ВСК}}^z + a_{21} \cdot \frac{d}{dt} L_{\text{ИСК}}^x + \\ \quad + a_{22} \cdot \frac{d}{dt} L_{\text{ИСК}}^y + a_{23} \cdot \frac{d}{dt} L_{\text{ИСК}}^z, \\ \frac{d}{dt} l_{\text{ВСК}}^z = a_{31} \cdot \frac{d}{dt} L_{\text{ИСК}}^x + a_{32} \cdot \frac{d}{dt} L_{\text{ИСК}}^y + \\ \quad + a_{33} \cdot \frac{d}{dt} L_{\text{ИСК}}^z, \end{cases} \quad (11)$$

где  $\omega_x$  – проекция угловой скорости вращения на ось  $x$  ВСК;  $\omega_y$  – проекция угловой скорости вращения на ось  $y$  ВСК;  $a_{ij}$  – компоненты матрицы направляющих косинусов  $\mathbf{A}$ .

Отсюда найдем проекцию угловой скорости вращения на оси  $\bar{e}_1$  и  $\bar{e}_2$ :

$$\begin{cases} \omega_y = \frac{-\frac{d}{dt} l_{\text{ВСК}}^x + M_1}{l_{\text{ВСК}}^z}, \\ \omega_x = \frac{\frac{d}{dt} l_{\text{ВСК}}^y - M_2}{l_{\text{ВСК}}^z}, \end{cases} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} M_1 &= a_{11} \cdot \frac{d}{dt} L_{\text{ИСК}}^x + \\ &+ a_{12} \cdot \frac{d}{dt} L_{\text{ИСК}}^y + a_{13} \cdot \frac{d}{dt} L_{\text{ИСК}}^z, \\ M_2 &= a_{21} \cdot \frac{d}{dt} L_{\text{ИСК}}^x + \\ &+ a_{22} \cdot \frac{d}{dt} L_{\text{ИСК}}^y + a_{23} \cdot \frac{d}{dt} L_{\text{ИСК}}^z. \end{aligned}$$

После преобразований с использованием (10) получим:

$$\begin{cases} \omega_y = \frac{d}{dt} l_{\text{ВСК}}^x - M_1, \\ \omega_x = \frac{d}{dt} l_{\text{ВСК}}^y + M_2. \end{cases} \quad (13)$$

#### Б) Случай правого края ФП

Направляющие косинусы пиксела правого края, лежащего на оси  $y$  ВСК, можно записать в виде:

$$\bar{l}_{\text{ВСК}} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_{\text{ВСК}}^y \\ l_{\text{ВСК}}^z \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Тогда уравнение (9) можно записать следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} l_{\text{BCK}}^x \\ l_{\text{BCK}}^y \\ l_{\text{BCK}}^z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ l_{\text{BCK}}^y \\ l_{\text{BCK}}^z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} L_{\text{ИСК}}^{xR} \\ L_{\text{ИСК}}^{yR} \\ L_{\text{ИСК}}^{zR} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

После преобразований получим:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} l_{\text{BCK}}^x &= \omega_z \cdot l_{\text{BCK}}^y - \omega_y \cdot l_{\text{BCK}}^z + \\ &+ a_{11} \cdot \frac{d}{dt} L_{\text{ИСК}}^{xR} + a_{12} \cdot \frac{d}{dt} L_{\text{ИСК}}^{yR} + a_{13} \cdot \frac{d}{dt} L_{\text{ИСК}}^{zR}, \\ \frac{d}{dt} l_{\text{BCK}}^y &= \omega_x \cdot l_{\text{BCK}}^z + a_{21} \cdot \frac{d}{dt} L_{\text{ИСК}}^{xR} + \\ &+ a_{22} \cdot \frac{d}{dt} L_{\text{ИСК}}^{yR} + a_{23} \cdot \frac{d}{dt} L_{\text{ИСК}}^{zR}, \\ \frac{d}{dt} l_{\text{BCK}}^z &= \omega_x \cdot l_{\text{BCK}}^y + a_{31} \cdot \frac{d}{dt} L_{\text{ИСК}}^{xR} + \\ &+ a_{32} \cdot \frac{d}{dt} L_{\text{ИСК}}^{yR} + a_{33} \cdot \frac{d}{dt} L_{\text{ИСК}}^{zR}, \end{aligned} \right. \quad (16)$$

где  $\omega_z$  – проекция угловой скорости вращения на ось  $z$  ВСК, а  $\omega_y$  найдем из системы уравнений для центра ФП.

Из полученного уравнения найдем угловую скорость вращения  $\omega_z$  для определения закона движения КА ДЗЗ вокруг оси  $z$  ВСК при сканировании МС:

$$\omega_z = \frac{\frac{d}{dt} l_{\text{BCK}}^x + \omega_y \cdot l_{\text{BCK}}^z - M_1^R}{l_{\text{BCK}}^y}, \quad (17)$$

где

$$M_1^R = a_{11} \cdot \frac{d}{dt} L_{\text{ИСК}}^{xR} + a_{12} \cdot \frac{d}{dt} L_{\text{ИСК}}^{yR} + a_{13} \cdot \frac{d}{dt} L_{\text{ИСК}}^{zR};$$

$L_{\text{ИСК}}^{iR}$  – направляющие косинусы вектора  $\vec{\Delta R}_{\text{ИСК}}$  с правого края ФП.

При подстановке в (17) зависимости для определения угловой скорости  $\omega_y$  из уравнения (13) получим:

$$\omega_z = \frac{\frac{d}{dt} l_{\text{BCK}}^x + \left( \frac{d}{dt} l_{\text{BCK}}^x - M_1 \right) \cdot l_{\text{BCK}}^z - M_1^R}{l_{\text{BCK}}^y}. \quad (18)$$

Таким образом, выведены функциональные зависимости угловых скоростей  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  от времени для обеспечения строго заданной СДИ по полю ФПУ БОЭА.

## РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРЕДЛОЖЕННОГО АЛГОРИТМА

Предложенные функциональные зависимости угловой скорости вращения ФП от времени  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  относительно ортов ВСК были запрограммированы в среде MATLAB. Также были запрограммированы: модель орбиты КА по Кеплеру, модель параметры Земли ПЗ-90.11, модель перехода между ИСК, ГСК и ПЗ-90.11, модель перехода между ИСК, ТСК и ВСК. Рассмотрен КА со средней высотой орбиты 400 км. Задана постоянная скорость движения изображения вдоль строк ФПЗС, равная 35.000 мм/с на всем протяжении сканирования МС. Съемка проводится в нади́р (углы крена, тангажа и рыскания околонулевые). На КА установлена БОЭА с фокусным расстоянием равным 1500.000 мм, при этом ширина ФПУ БОЭА равна 55.000 мм, а длина ФПУ БОЭА равна 200 мм. Проведено моделирование процесса регистрации изображения с КА ДЗЗ со следующими исходными данными (таблица 3).

**Таблица 3.** Исходные данные для проведения моделирования

Наименование параметра	Размерность	Численное значение
Высота орбиты КА ДЗЗ на момент съемки, $H$	км	400.000
Скорость перемещения снимаемой точки в ИСК	м/с	7500 – вдоль движения КА ДЗЗ 450 – поперек движения КА ДЗЗ
Фокусное расстояние БОЭА, $f$	м	1.500
Длина ФПУ	м	0.200
Требуемая СДИ в центре ФП	мм/с	35.000
Требуемая СДИ в правом крае ФП	мм/с	35.000

### Скрипт расчета угловых скоростей в среде MATLAB

```
clear; clc; close all

%% задание ИД
IMV_Center = [35*1e-3;0;0];
IMV_Right = [35*1e-3;0;0];
RdotC = [7500;450;0];
RdotR = [7500;450;0];
RC = [0;400*1e3;0];
```

```

RR = [0; 400*1e3; 0];
f = 1.5; % фокусное расстояние
y = 0.2; % длина ФП БОЭА

% вычисление матрицы направляющих косинусов, определяющих переход между ИСК и ВСК
e3 = RC/norm(RC);
e2 = cross(RC, RdotC)/norm(cross(RC, RdotC));
e1 = cross(e2, e3);
IF2VF = [e1 e2 e3];

%% случай центра ФП БОЭА
rC = [0; 0; -f];

% вычисление производной направляющих косинусов вектора в ВСК для центра ФП БОЭА
absrC = norm(rC);
lC = rC/absrC;
absIMV_Center = norm(IMV_Center);
ldotC = (IMV_Center - lC*absIMV_Center)/absrC;

% вычисление производной направляющих косинусов вектора в ИСК для центра ФП БОЭА
absRC = norm(RC);
LC = RC/absRC;
absRdotC = norm(RdotC);
LdotC = (RdotC - LC*absRdotC)/absRC;

% вычисление угловых скоростей
MC = IF2VF * LdotC;
wy = (-ldotC(1) + MC(1))/lC(3);
wx = (ldotC(2) - MC(2))/lC(3);

%% Правый край ФП
rR = [0; -y; -f];

% вычисление производной направляющих косинусов вектора в ВСК для правого края ФП БОЭА
absrR = norm(rR);
lR = rR/absrR;
absIMV_Right = norm(IMV_Right);
ldotR = (IMV_Right - lR*absIMV_Right)/absrR;

% вычисление производной направляющих косинусов вектора в ИСК для правого края ФП БОЭА
absRR = norm(RR);
LR = RR/absRR;
absRdotR = norm(RdotR);
LdotR = (RdotR - LR*absRdotR)/absRR;

% вычисление угловых скоростей
MR = IF2VF * LdotR;
wz = (ldotR(1) + wy*lR(3) - MR(1))/lR(2);

```

Остальные алгоритмы и программы, включающие алгоритм определения геодезических координат места съемки, алгоритм вычисления орбитального движения КА ДЗЗ, алгоритм вычисления углового движения КА ДЗЗ во время съемки (в том числе вращения ВСК относительно ИСК во времени), алгоритм вычисления дальности до места съемки, в настоящей статье не рассматриваются.

В результате моделирования процесса орбитальной съемки были вычислены необходимые угловые скорости сканирования на время съемки продолжительностью 120 с относительно ортов ВСК, графики которых приведены на рис. 2.

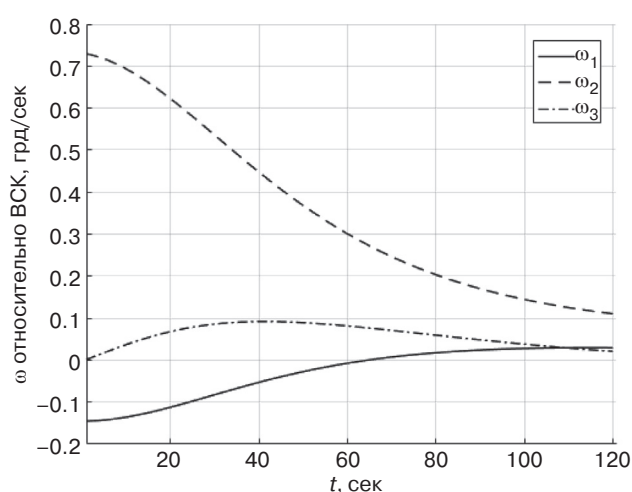


Рис. 2. Угловые скорости относительно ортов ВСК в зависимости от времени сканирования МС

На рис. 2 показаны угловые скорости КА ДЗЗ, требуемые для обеспечения строго заданной СДИ по полю ФП БОЭА. Величина полученных угловых скоростей такова, что может быть отработана исполнительными органами КА ДЗЗ, что говорит о возможности применения на практике предложенного алгоритма при разработке и создании КА ДЗЗ высокого и сверхвысокого разрешений.

## Выводы

В статье выведены функциональные зависимости угловой скорости от времени относительно ортов ВСК, необходимые для обеспечения сохранности заданной СДИ по фотоприемнику БОЭА, а, следовательно, и компенсации кинематического «смаза» изображения. Предложенные функциональные зависимости позволяют обеспечивать получение ИЛЗ наилучшего качества с заданными геометрическими, радиометрическими и спектральными характеристиками. По этим зависимостям составлена математическая модель получения ИЛЗ при помощи КА ДЗЗ.



Полученные функциональные зависимости угловой скорости от времени, предназначенные для обеспечения сохранности СДИ по полю ФПУ БОЭА, имеют преимущества перед общей моделью сканирования, изложенной в [15, 16] тем, что зависимости определены в нормированных компонентах векторов (направляющих косинусах). Это позволяет увеличить скорость вычислений в бортовом комплексе управления КА ДЗЗ, особенно при поиске зависимостей, обеспечивающих строго заданную СДИ в

конкретной точке ФПУ БОЭА, а также в тех случаях, где необходим расчет зависимостей для множества точек ФПУ БОЭА.

Для реализации в бортовом комплексе управления КА ДЗЗ предложенного алгоритма необходимо на каждом такте управления угловым движением КА ДЗЗ рассчитывать и впоследствии реализовывать при помощи исполнительных органов системы ориентации и стабилизации найденные угловые скорости.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бородин М.С. Технология трехосного сканирования в оптико-электронной космической съемке. *Космонавтика и ракетостроение*. 2008;2(51):75–83.
2. Галкина А.С. Синтез программ управления угловым движением космического аппарата для съемки криволинейных маршрутов: дисс. канд. техн. наук. Самара; 2011. 143 с.
3. Бутырин С.А., Сомова Т.Е. Оптимизация режимов сканирующей оптико-электронной съемки и 3D-анимация движения спутника землеобзора. В сб.: *XVI Всероссийский семинар по управлению движением и навигации летательных аппаратов*: сб. трудов. Самара: СГАУ им. С.П. Королева; 2013. С. 30–33.
4. Сомов Е.И., Бутырин С.А. Алгоритмы наведения и гиросилового управления ориентацией спутников землеобзора при сканирующей оптико-электронной съемке. *Механика, управление и информатика*. 2012;3(9):61–70.
5. Сомов Е.И. Аналитический синтез законов гиросилового наведения космических аппаратов информационного назначения. В сб.: *XIV Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам*: сб. материалов. СПб.: ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электрон»; 2007. С. 90–92.
6. Геча В.Я., Жилнев М.Ю., Горчаков С.Ю., Новоселов С.А. Формулы расчета кинематических параметров орбитальной съемки планеты бортовой оптико-электронной аппаратурой космического аппарата. *Вопросы электромеханики. Труды ВНИИЭМ*. 2019;173(6):23–32. URL: <http://jurnal.vniiem.ru/text/173/23-32.pdf>
7. *Методические указания. Спутники Земли искусственные. Основные системы координат для баллистического обеспечения полетов и методика расчета звездного времени*. РД 50-25645.325-89. М.: Изд-во стандартов; 1990. 23 с.
8. Petit G., Luzum B. (Eds.). *IERS Conventions* (2010). IERS Technical Note; 36. Frankfurt am Main: Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie; 2010. 179 p. ISBN 3-89888-989-6
9. *Параметры Земли 1990 года (ПЗ-90.11). Справочный документ*. М.: ЦНИИ Министерства обороны России; 2014. 52 с.
10. *Динамика летательных аппаратов в атмосфере. Термины, определения и обозначения*. ГОСТ 20058-80. М.: Изд-во стандартов; 1981. 54 с.

## REFERENCES

1. Borodin M.S. Technology of three-axis scanning by optoelectronic space imaging systems. *Kosmonavtika i raketostroyeniye = Cosmonautics and Rocket*. 2008;2(51):75–83 (in Russ.).
2. Galkina A.S. Synthesis of programs for controlling the angular motion of a spacecraft for shooting curvilinear routes: Cand. Sci. Thesis. Samara; 2011. 143 p. (in Russ.).
3. Butyrin S.A., Somova T.E. Optimization of scanning optoelectronic survey modes and 3D-animation of the motion of the remote sensing satellite. In: *XVI Vserossiiskii seminar po upravleniyu dvizheniem i navigatsii letatel'nykh apparatov*: sb. trudov (*Proceedings of the XVI All-Russian Seminar on Traffic Control and Navigation of Aircraft*). Samara: SGAU; 2013, p. 30–33. (in Russ.).
4. Somov E.I., Butyrin S.A. Algorithms for guidance and gyromoment attitude control of the land-survey satellites at a scanning optoelectronic observation. *Mekhanika, upravlenie i informatika*. 2012;3(9):61–70 (in Russ.).
5. Somov E.I. Analytical synthesis of the laws of gyro-force guidance of information space vehicles. In: *XIV Sankt-Peterburgskaya mezhdunarodnaya konferentsiya po integrirovannym navigatsionnym sistemam*: sb. materialov (*Collection of materials of the XIV St. Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems*). Saint Petersburg: Kontsern "TsNII Elektropribor"; 2007, p. 90–92. (in Russ.).
6. Gecha V.Ya., Zhilenev M.Yu., Gorchakov S.Yu., Novoselov S.A. Formulas for calculating the kinematic parameters of the planet's orbital survey by the spacecraft's on-board optic imager when taking into account the required the velocity of the image motion on its photodetector. *Voprosy elektromekhaniki. Trudy VNIIEEM = Electromechanical Matters. VNIIEEM Studies*. 2019;173(6):23–32 (in Russ.). Available from URL: <http://jurnal.vniiem.ru/text/173/23-32.pdf>
7. *Metodicheskie ukazaniya. Sputniki Zemli iskusstvennyye. Osnovnye sistemy koordinat dlya ballisticheskogo obespecheniya poletov i metodika rascheta zvezdnogo vremeni* (*Methodical instructions. Artificial Earth Satellites. The basic coordinate system for ballistic support of flights and the method of calculation of sidereal time*). RD 50-25645.325-89. Moscow: Izdatel'stvo standartov; 1990. 23 p. (in Russ.).
8. Petit G., Luzum B. (Eds.). *IERS Conventions* (2010). IERS Technical Note; 36. Frankfurt am Main: Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie; 2010. 179 p. ISBN 3-89888-989-6

11. Урмаев М. *Космическая фотограмметрия*. М.: Недра; 1989. 278 с. ISBN 5-247-01273-9
12. Геча В.Я., Жиленин М.Ю., Федоров В.Б., Хрычев Д.А., Худак Ю.И., Шатина А.В. Поле скоростей движения точек изображения при орбитальной съемке поверхности планеты. *Российский технологический журнал*. 2020;8(1):97–109. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2020-8-1-97-109>
13. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. *Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела*. М.: Наука; 1992. 280 с.
14. Markley F.L., Crassidis J.L. *Fundamentals of Spacecraft Attitude Determination and Control*. New York: Springer-Verlag; 2014. 486 p.
15. Батраков А.С. Общая модель для расчета и анализа скорости сдвига оптического изображения при съемке земной поверхности. *Исслед. Земли из космоса*. 1989;4:99–106.
16. Бутырин С.А. Кинематический синтез программного углового движения космического аппарата при оптико-электронной съемке Земли. *Известия Самарского научного центра РАН*. 2007;9(3):664–670. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/kinematicheskii-sintez-programmnogo-uglovogo-dvizheniya-kosmicheskogo-apparata-pri-optiko-elektronnoy-semke-zemli/viewer>
9. *Parametry Zemli 1990 goda (PZ-90.11). Spravochnyi document (Earth Parameters 1990 (PZ-90.11). Reference document)*. Moscow: 27 TsNII Ministerstva oborony Rossii; 2014. 52 p. (in Russ.).
10. *Aircraft dynamics in atmosphere. Terms, definitions and symbols*. GOST 20058-80. Moscow: Izdatel'stvo standartov; 1981. 54 p. (in Russ.).
11. Urmayev M. *Kosmicheskaya fotogrammetriya (Space photogrammetry)*. Moscow: Nedra; 1989. 278 p. (in Russ.). ISBN 5-247-01273-9
12. Gecha V.Y., Zhilenev M.Yu., Fedorov V.B., Khrychev D.A., Khudak Yu.I., Shatina A.V. Velocity field of image points in satellite imagery of planet's surface. *Rossiiskii tekhnologicheskii zhurnal = Russian Technological Journal*. 2020;8(1):97–109 (in Russ.). <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2020-8-1-97-109>
13. Branets V.N., Shmyglevskii I.P. *Primenenie kvaternionov v zadachakh orientatsii tverdogo tela (Application of quaternions in solid body orientation problems)*. Moscow: Nauka; 1992. 280 p. (in Russ.).
14. Markley F.L., Crassidis J.L. *Fundamentals of Spacecraft Attitude Determination and Control*. New York: Springer-Verlag; 2014. 486 p.
15. Batrakov A.S. General model for calculating and analyzing the shift rate of an optical image when shooting the Earth's surface. *Issledovanie Zemli iz kosmosa = Izvestiya of the Academy of Sciences of the USSR. Atmospheric and Oceanic Physics*. 1989;4:99–106 (in Russ.).
16. Butyrin S.A. Kinematic synthesis of the spacecraft programmed attitude motion at the earth optic-electronic survey. *Izvestiya Samarskogo nauchnogo tsentra RAN = Izvestia of Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences*. 2007;9(3):664–670 (in Russ.). Available from URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/kinematicheskii-sintez-programmnogo-uglovogo-dvizheniya-kosmicheskogo-apparata-pri-optiko-elektronnoy-semke-zemli/viewer>

#### Об авторе

**Горчаков Сергей Юрьевич**, инженер, АО «Корпорация «ВНИИЭМ» (107078, Россия, Москва, Хоромный тупик, д. 4, стр. 1). E-mail: SYGorchakov@yandex.ru. <http://orcid.org/0000-0003-2266-5284>

#### About the author

**Sergey Yu. Gorchakov**, Engineer, VNIEM Corporation (4–1, Khoromnyi tupik, Moscow, 107078 Russia). E-mail: SYGorchakov@yandex.ru. <http://orcid.org/0000-0003-2266-5284>