ISSN 2500-316X (Online)

https://doi.org/10.32362/2500-316X-2020-8-5-103-114

УДК 535

Использование профилирующих функций для постановки задач синтеза слоистых диэлектрических фильтров

Ю.И. Худак@,
Д.В. Парфенов,
Н.В. Музылев,
Т.С. Хачлаев

МИРЭА – Российский технологический университет, Москва 119454, Россия
@Автор для переписки, e-mail: hudak@mirea.ru

Разработан математический аппарат, позволивший сформулировать и обосновать новый подход к математической постановке задачи синтеза полосовых слоистых диэлектрических фильтров (СДФ). Для произвольных диэлектрических систем с кусочно-непрерывными физическими параметрами среды, определяемыми функциями диэлектрической и магнитной проницаемости материала слоистой системы в зависимости от координаты, измеряемой вдоль направления нормали к слоям, с фиксированными точками разрыва хотя бы одной из указанных функций в отдельных точках, доказано важное тождество сохранения разности квадратов модулей амплитуд плоских волн, распространяющихся в данной слоистой среде влево и вправо, которое порождает традиционную запись закона сохранения энергии для слоистых сред. Указанное тождество позволяет перейти от постановок задач синтеза для дробно-рациональных энергетических коэффициентов отражения или пропускания слоистых систем к эквивалентным постановкам задач для вводимых в работе профилирующих функций, представляющих только числитель или только знаменатель обычно рассматриваемых при синтезе величин. Введено новое понятие правильного идеала для энергетических коэффициентов отражения и пропускания слоистых систем. Показано, что правильность энергетических коэффициентов отражения и пропускания слоистых систем эквивалентна правильности профилирующих функций подобных систем, что в совокупности с основным тождеством позволяет существенно изменить подход к задачам синтеза СДФ. Указано правило для пересчета идеала коэффициента отражения или пропускания в идеал профилирующей функции. Предлагаемая в работе постановка задачи синтеза приводит к значительно более экономным вычислительным процедурам.

Ключевые слова: слоистые диэлектрические системы, полосовые диэлектрические фильтры, коэффициенты отражения и пропускания, оптимальный чебышёвский синтез, кусочно-непрерывные параметры системы.

Для цитирования: Худак Ю.И., Парфенов Д.В., Музылев Н.В., Хачлаев Т.С. Использование профилирующих функций для постановки задач синтеза слоистых диэлектрических фильтров. *Российский технологический журнал.* 2020;8(5):103-114. https://doi.org/10.32362/2500-316X-2020-8-5-103-114

Profiling functions application for layered dielectric filter synthesys problem statement

Yury I. Hudak@,
Denis V. Parfenov,
Nikolay V. Muzylev,
Timur S. Khachlaev

MIREA – Russian Technological University, Moscow, 119454, Russia
@Corresponding author, e-mail: hudak@mirea.ru

A novel mathematical apparatus allowing formulation and justification of a new approach towards the setting of the mathematical problem of band-pass layered dielectric filters (LDF) synthesis is developed. Arbitrary layered dielectric systems with piecewise continuous physical media parameters given by the functions of dielectric permittivity and of magnetic permeability, both depending on the coordinate along the normal to the layer pile, with fixed discontinuity points of at least one of the mentioned functions are examined. For such systems, an important conservation law for the difference of the squares of absolute amplitude values of plane waves propagating left and right in given layered medium is stated, which further leads to the traditional energy conservation law in lossless layered media. This new identity law allows turning from synthesis problems in terms of fractional rational energy reflectivity and transmittance of layered systems to equivalent tasks for profiling functions introduced in the work, representing only the numerator or only the denominator of the expressions usually considered in the synthesis. A new concept of the feasible ideal is introduced for the energy coefficients of reflection and transmission of layered systems. It is shown that the feasibility of the energy coefficients of reflection and transmission of layered systems is equivalent to the feasibility of the profiling functions of such systems, which together with the main identity allows a significant change of the existing LDF synthesis approach. The rule for converting the ideal of the reflection or transmission coefficient into the ideal of the profiling function is given. The proposed synthesis problem statement leads to considerably less intensive computational procedures.

Keywords: layered dielectric systems, band-pass dielectric filters, reflectivity and transmittance, optimal Chebyshev synthesis, piecewise continuous system parameters.

For citation: Hudak Yu.I., Parfenov D.V., Muzylev N.V., Khachlaev T.S. Profiling functions application for layered dielectric filter synthesys problem statement. *Rossiiskii tekhnologicheskii zhurnal = Russian Technological Journal.* 2020;8(5):103-114 (in Russ.). https://doi.org/10.32362/2500-316X-2020-8-5-103-114

Введение

Построению слоистых диэлектрических фильтров (СДФ) посвящена обширная литература, например, [1–12]. В тех работах, где приводится математическая постановка задачи синтеза, обычно используется сильно нелинейный по основным параметрам задачи функционал качества синтезируемой системы:

$$\mathbf{\Phi}_R \overset{\text{def}}{=} \| R(\kappa) - \tilde{R}(\kappa) \|_{\mathbb{L}[\mathcal{K}_1,\, \mathcal{K}_2]}, \quad \left(\mathbf{\Phi}_T \overset{\text{def}}{=} \| T(\kappa) - \tilde{T}(\kappa) \|_{\mathbb{L}[\mathcal{K}_1,\, \mathcal{K}_2]} \right),$$

где κ – волновое число, $R(\kappa)$ и $T(\kappa)$ – энергетические коэффициенты, соответственно, отражения и пропускания слоистой диэлектрической системы (СДС), реализующей фильтр. Желаемое поведение энергетического коэффициента отражения или пропускания в заданной полосе волновых чисел $[\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2]$ задаётся спектральными характеристиками[1] этого фильтра $\tilde{R}(\kappa)$ и $\tilde{T}(\kappa)$. Качество проектируемой системы оценивается величиной разности между функциями $R(\kappa)$ и $\tilde{R}(\kappa)$ $[\,T(\kappa)$ и $\tilde{T}(\kappa)\,]$ по норме линейного нормированного пространства $\mathbb{L}[\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2]$.

В данной работе в качестве пространства сравнения с **идеальными** спектральными характеристиками фильтра $\tilde{R}(\kappa) \cdot [\tilde{T}(\kappa)]$ выбрано пространство $\mathbb{C}[\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2]$ всех непрерывных на фиксированном отрезке $[\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2]$ функций с нормой $\| f(\kappa) \|_{\mathbb{C}[\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2]} = \max\limits_{\mathcal{K}_1 \le \kappa \le \mathcal{K}_2} |f(\kappa)|$.

Математическая постановка задачи оптимального синтеза СДФ **в смысле Чебышёва** состоит в том, чтобы для заданного интервала волновых чисел $[\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2]$ и заданного идеала энергетического коэффициента отражения $\tilde{R}(\kappa)$ минимизировать функционал:

$$\max_{\mathcal{K}_1 \le \kappa \le \mathcal{K}_2} \left| R(\kappa, \vec{p}, \vec{\nu}) - \tilde{R}(\kappa) \right| \underset{\vec{p}, \vec{\nu}}{\rightarrow} \min \qquad (1)$$

по электрическим толщинам $\vec{\nu}$ и импедансам $\vec{p}$ всех слоёв СДС.

Определение. Идеал фильтра будем называть **правильным** на заданном интервале волновых чисел $[\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2]$, если он может быть на этом интервале сколь угодно точно равномерно приближен $R(\kappa) \cdot [T(\kappa)]$, реализуемыми СДС в классе рассматриваемых[2].

Тогда, как будет показано ниже, вычислительная сложность функционала качества определяется **дробно-рациональной** структурой энергетического коэффициента отражения от любой СДС данного класса и может быть существенно уменьшена при помощи эффективной процедуры построения **идеала** не для сложных коэффициентов отражения или пропускания $R(\kappa) \cdot [T(\kappa)]$, а для квадратичных **профилирующих функций**, введённых в [13–16], что существенно упрощает анализ и решение соответствующих оптимизационных задач.

Проведён представляющий самостоятельный интерес анализ прямой задачи об описании всех возможных в СДС с кусочно-непрерывными физическими параметрами пло-

---

[1] Функции типа $\tilde{R}(\kappa)$, $\tilde{T}(\kappa)$ в данной работе будем называть идеалами для соответствующих физически реализуемых конкретным фильтром спектральных характеристик.

[2] Это естественное требование **корректности идеальных** характеристик формализуется в виде предположения о том, что $\tilde{R}(\kappa) \cdot [\tilde{T}(\kappa)]$ принадлежит **замыканию** в метрике $\mathbb{C}[\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2]$ множества всех возможных коэффициентов отражения (пропускания) СДС рассматриваемого класса: для **идеальной** характеристики $\tilde{R}(\kappa) \cdot [\ \tilde{T}(\kappa)\,]$ существует последовательность СДС данного класса, коэффициенты отражения (пропускания) которых $R^{(n)}(\kappa) \cdot [T^{(n)}(\kappa)]$ сходятся при $n \to \infty$ к идеальным характеристикам $\tilde{R}(\kappa) \cdot [\ \tilde{T}(\kappa)\,]$ в метрике $\mathbb{C}[\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2]$.

ских электромагнитных полей с плоскостями постоянной фазы, параллельными слоям СДС[3].

В этой части работы особенно важен факт доказательства основного энергетического тождества для СДС без потерь [13, 15], в отличие от обычно постулируемой формы закона сохранения энергии[4]:

$$R(\kappa)+T(\kappa)\equiv 1. \tag{2}$$

1. Постановка прямой задачи

Пусть часть пространства $\mathbb{R}^3$ между двумя параллельными плоскостями π и π', расстояние между которыми d, $d > 0$, заполнена диэлектрической средой, параметры которой – диэлектрическая и магнитная проницаемости – являются кусочно-непрерывными функциями от координаты x оси OX декартовой системы координат, направленной по нормали от π к π'. Начало координат находится на плоскости π: $\varepsilon = \varepsilon(x)$ и $\mu = \mu(x)$, $0 \le x \le d$ с конечным, общим для обеих функций, числом точек разрыва первого рода, которые будем обозначать $a_0 = 0 < a_1 < ... < a_N = d$, не заботясь о том, какая из двух функций $\varepsilon(x)$ или терпит разрыв в точке a_j. Интервалы непрерывности обеих функций $\varepsilon(x)$ и $\mu(x)$ будем обозначать $\Delta_j \overset{\text{def}}{=} \left(a_{j-1}, a_j\right), \left(j = 1,\dots,N\right)$.

Пусть полупространство $\mathbb{R}^3_-$ слева от π заполнено однородной средой с диэлектрической и магнитной проницаемостями, соответственно, ε_- и μ_-, а полупространство $\mathbb{R}^3_+$ справа от π' – однородной средой с проницаемостями ε_+ и μ_+.

Прямая задача о распространении плоских электромагнитных волн в пространстве $\mathbb{R}^3$, заполненном слоистым диэлектриком, состоит в описании класса **всех возможных** плоских электромагнитных полей в определённой выше СДС.

Требуется, во-первых, указать количество свободных параметров, определяющих все возможные в указанной системе электромагнитные поля, и, во-вторых, определить коэффициенты отражения и пропускания от СДС $[0,d]$ слева и справа от неё.

Известно (см., например, [5]), что комплексные амплитуды векторов электрической $\vec{\mathbf{E}} \overset{\text{def}}{=} u(x)\,\vec{\mathbf{y}}_0$ и магнитной $\vec{\mathbf{H}} \overset{\text{def}}{=} v(x)\,\vec{\mathbf{z}}_0$ напряжённостей плоского электромагнитного поля (зависимость от времени – $\exp(-i\omega t)$ с волновым вектором $\vec{\mathbf{k}}$, параллельным оси OX внутри каждого интервала непрерывности Δ_j функций $\varepsilon(x)$ и $\mu(x)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} u_j' &= i\kappa\mu_j(x)v_j, \\ v_j' &= i\kappa\varepsilon_j(x)u_j, \end{aligned} \qquad j = 1,2,\dots,N, \tag{3}$$

которые получаются для плоских волн из общих уравнений Максвелла. Уравнения (3) в матричной записи имеют вид:

$$\vec{\mathbf{u}}_j' = \mathbf{P}_j(x)\vec{\mathbf{u}}_j(x), \quad \text{где } \vec{\mathbf{u}}_j = \begin{pmatrix} u_j(x) \\ v_j(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_j(x) = \begin{pmatrix} 0 & i\kappa\mu_j(x) \\ i\kappa\varepsilon_j(x) & 0 \end{pmatrix}.$$

[3]Ранее в [13–16] подобный анализ был проведен **только** для сред с кусочно-постоянными параметрами.

[4]Распространение результатов данной работы на анализ, например, «наклонного» распространения плоских волн в СДС, как в [14], не представляет трудностей.

Кроме (3), на каждой плоскости $\pi_j : x = a_j$ из разрыва коэффициентов ε(x) или μ(x) должны выполняться вытекающие из уравнений Максвелла электродинамические граничные условия, которые в нашем случае совпадают с условиями непрерывности амплитуд электрического и магнитного полей:

$$\vec{\mathbf{u}}\left(a_j-0\right)=\vec{\mathbf{u}}\left(a_j+0\right): \quad \begin{matrix} u\left(a_j-0\right)=u\left(a_j+0\right) \\ v\left(a_j-0\right)=v\left(a_j+0\right) \end{matrix}, \tag{4}$$

где (a_j – 0) и (a_j + 0) – пределы слева и справа в точках разрыва $a_j, j=0,1,2,...,N$, коэффициентов ε(x) или μ(x) уравнений (3).

Всевозможные плоские электромагнитные поля рассматриваемого выше типа слева и справа от СДС [d, 0] (в полупространствах $\mathbb{R}^3_{\mp}$) определяются уравнением (3) с постоянными коэффициентами ε_-, μ_- слева от плоскости π и ε_+, μ_+ – справа от π'.

Поэтому в полупространствах $\mathbb{R}^3_{\mp}$ общее решение системы (3) имеет вид:

$$\vec{\mathbf{u}}_{\mp}\left(x-x_0^{\mp}\right)=C_0^{\mp}\begin{pmatrix}1\\ p_{\mp}\end{pmatrix}e^{i\kappa n_{\mp}\left(x-x_0^{\mp}\right)}+C_1^{\mp}\begin{pmatrix}1\\ -p_{\mp}\end{pmatrix}e^{-i\kappa n_{\mp}\left(x-x_0^{\mp}\right)},$$

где величины, помеченные индексами «–» и «0», относятся к плоской волне, распространяющейся в $\mathbb{R}^3_-$ **к** плоскости π, а с индексами «–» и «1» относятся к плоской волне, распространяющейся в $\mathbb{R}^3_-$ **от** плоскости π[5].

Аналогично этому в (3) все величины, помеченные индексами «+» и «0», относятся к плоской волне, распространяющейся в $\mathbb{R}^3_+$ **от** плоскости π' а с индексами «+» и «1» относятся к плоской волне, распространяющейся в $\mathbb{R}^3_+$ **к** плоскости π'.

Замечание. Вектор Пойнтинга $\vec{\mathbf{W}}=\left[\vec{\mathbf{E}},\vec{\mathbf{H}}^*\right]$ для волны в $\mathbb{R}^3_-$, распространяющейся **к** плоскости π равен $p_- |C_0^-|^2 \ \vec{\mathbf{x}}_0$, а для распространяющейся **от** π равен $-p_- |C_1^-|^2 \ \vec{\mathbf{x}}_0$. Аналогично, вектор Пойнтинга для волны в $\mathbb{R}^3_+$, распространяющейся **к** плоскости π' равен $-p_+ |C_1^+|^2 \ \vec{\mathbf{x}}_0$, а для распространяющейся **от** π' равен $p_+ |C_0^+|^2 \ \vec{\mathbf{x}}_0$.

Общее решение уравнений (3) в $\mathbb{R}^3_{\mp}$ в векторно-матричной записи имеет вид:

$$\vec{\mathbf{u}}_{\mp}\left(x-x_0^{\mp}\right)=\mathbf{B}_{\mp}\mathbf{S}_{\mp}\left(x-x_0^{\mp}\right)\vec{\mathbf{C}}_{\mp}, \quad \vec{\mathbf{C}}_{\mp}=\begin{pmatrix}C_0^{\mp}\\ C_1^{\mp}\end{pmatrix}, \tag{5}$$

где далее будет принято $x_0^-=0, x_0^+=d$. При этом:

$$\mathbf{B}_{\mp}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ p_{\mp} & -p_{\mp}\end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_{\mp}\left(x-x_0^{\mp}\right)=\begin{pmatrix}e^{i\kappa n_{\mp}\left(x-x_0^{\mp}\right)} & 0\\ 0 & e^{-i\kappa n_{\mp}\left(x-x_0^{\mp}\right)}\end{pmatrix}. \tag{6}$$

Величины, использованные в (5) и (6): $\lambda_s^{\mp}$ – собственные значения и $\vec{\mathbf{l}}_s^{\mp}, (s=0,1)$ – собственные векторы матриц $\mathbf{P}_{\mp}$ для полупространств $\mathbb{R}^3_{\mp}$, имеют вид:

[5] В физической и технической литературе для волны, распространяющейся **к** какой-либо плоскости, обычно применяется термин «падающая» (на эту плоскость) волна, а для волны, распространяющейся **от** плоскости – термин «отраженная» (от этой плоскости) волна.

$$\lambda_s^{\mp} = (-1)^s i\kappa n_{\mp}, \quad \vec{\mathbf{l}}_s^{\mp} = \begin{pmatrix} 1 \\ (-1)^s p_{\mp} \end{pmatrix}, \quad (s = 0,1),$$

где $n_{\mp} = \left(\varepsilon_{\mp}\mu_{\mp}\right)^{1/2}$, $p_{\mp} = \left(\dfrac{\varepsilon_{\mp}}{\mu_{\mp}}\right)^{1/2}$. Таким образом, в соответствии с (4) на плоскостях и имеют место равенства:

$$\mathbf{B}_{-}\vec{\mathbf{C}}_{-} = \vec{\mathbf{u}}_1(0), \quad \text{и} \quad \vec{\mathbf{u}}_N(d) = \mathbf{B}_{+}\vec{\mathbf{C}}_{+}.$$

2. Основные свойства прямой задачи

Лемма. Матрицы $\mathbf{B}_{\mp}$ обладают свойством:

$$\mathbf{B}_{\mp}^{*}\mathbf{J}_0\mathbf{B}_{\mp} = 2p_{\mp}\mathbf{J}_1, \text{ где } \mathbf{J}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ – матрицы Паули.} \tag{7}$$

Доказательство леммы проводится перемножением нужных матриц. Для произвольного решения $\vec{\mathbf{u}}(x)$ (3) рассмотрим квадратичную форму:

$$\left(\vec{\mathbf{u}}^{*}\mathbf{J}_0\vec{\mathbf{u}}\right)(x) \equiv u(x)v^{*}(x) + u^{*}(x)v(x) \equiv 2\ \mathrm{Re}\left[u(x)v^{*}(x)\right]. \tag{8}$$

Лемма (основная). Для произвольного решения $\vec{\mathbf{u}}(x)$ системы уравнений (3) на всяком интервале непрерывности её коэффициентов $\Delta_j, j = 1,\ldots,N$ квадратичная форма (8) сохраняет постоянное значение:

$$\left(\vec{\mathbf{u}}^{*}\mathbf{J}_0\vec{\mathbf{u}}\right)(x) \equiv \mathrm{const}, \text{ где } \mathbf{J}_0 \text{ – матрица Паули.} \tag{9}$$

Доказательство. Производная от квадратичной формы (8) с учётом уравнений (3) тождественно равна нулю на всяком интервале непрерывности Δ_j коэффициентов системы уравнений (3) в силу тождества: $\mathbf{P}^{*}(x)\mathbf{J}_0 + \mathbf{J}_0\mathbf{P}(x) \equiv 0.$

3. Амплитудная параметризация прямой задачи

Для решения прямой задачи используем представление решения (3) с начальным условием $\vec{\mathbf{u}}_j\left(a_j\right) = \vec{\mathbf{u}}_j^0$ на всяком интервале $\Delta_j, j = 1,2,\ldots,N$:

$$\vec{\mathbf{u}}_j(x) = \mathbf{M}_j(x)\vec{\mathbf{C}}_j, \tag{10}$$

где $\mathbf{M}_j(x) = \begin{pmatrix} m_{00}(x) & m_{01}(x) \\ m_{10}(x) & m_{11}(x) \end{pmatrix}$ – фундаментальная матрица (3), столбцы которой $\vec{\mathbf{m}}_0$ и $\vec{\mathbf{m}}_1$ образуют фундаментальную систему решений (3) на Δ_j; $\vec{\mathbf{C}}_j = \begin{pmatrix} C_0^{(j)} \\ C_1^{(j)} \end{pmatrix}$ – постоянный на $\Delta_j, j = 1,2,\ldots,N$ вектор коэффициентов – комплексных амплитуд «волн» $\vec{\mathbf{m}}_0$ и $\vec{\mathbf{m}}_1$.

Чтобы получить представление (10), достаточно решить матричное дифференциальное уравнение:

$$\mathbf{M}_j' = \mathbf{P}_j\left(x\right)\mathbf{M}_j\left(x\right) \tag{11}$$

с начальным условием:

$$\mathbf{M}_j\left(a_j\right)=\mathbf{M}_j^0,\ \ \det\left(\mathbf{M}_j^0\right)\neq 0. \qquad (12)$$

Далее будем рассматривать два разных представления фундаментальных матриц $\mathbf{M}_j(x)$ в (11), $\Delta_j, j=1,2,...,N$, отвечающих разным начальным условиям (12). Во-первых, будем говорить про «тригонометрическое» представление (**t**-представление)[6], когда

$$\mathbf{M}_j\left(a_j\right)=\mathbf{I},\ \text{где}\ \mathbf{I}-\text{единичная матрица},$$

и, во-вторых, про «экспоненциальное» представление (**e**-представление), когда

$$\mathbf{M}_j\left(a_j\right)=\mathbf{B}_j,\ \text{где}\ \mathbf{B}_j=\begin{pmatrix}1 & 1\\ p_j\left(a_j\right) & -p_j\left(a_j\right)\end{pmatrix}, \qquad (13)$$

а $p_j(a_j)$ – величина импеданса в правом конце $\Delta_j, j=1,2,...,N$.

В силу тождества (9) и нужного начального условия (12) на интервале Δ_j:

$$\begin{aligned}&\left((\mathbf{M}^{(t)})^*\mathbf{J}_0\mathbf{M}^{(t)}\right)\left(x\right)\equiv\mathbf{J}_0,\ \ \text{где}\ \ \mathbf{J}_0-\text{матрица Паули в t}-\text{представлении},\\ &\left((\mathbf{M}^{(e)})^*\mathbf{J}_0\mathbf{M}^{(t)}\right)\left(x\right)\equiv 2p\left(a_j\right)\mathbf{J}_1,\text{где}\ \mathbf{J}_1-\text{матрица Паули в e}-\text{представлении}.\end{aligned} \qquad (14)$$

Из этих тождеств следует невырожденность матриц $\mathbf{M}_j^{(e)}(x),\mathbf{M}_j^{(t)}(x)$ для всякого x из $\Delta_j, j=1,2,...,N$, а также выражения для постоянных векторов $\vec{\mathbf{C}}_j$:

$$\begin{aligned}&\vec{\mathbf{C}}_j^{(t)}=\vec{\mathbf{u}}_j^{(0)},\text{в}\ \ \text{t}-\text{представлении},\\ &\vec{\mathbf{C}}_j^{(e)}=\mathbf{B}_j^{-1}\,\vec{\mathbf{u}}_j^{(0)}-\text{в e}-\text{представлении}.\end{aligned} \qquad (15)$$

Представления (14) аналогичны представлению (7) для всякого x из Δ_j.

Используя первое из тождеств (12) и непрерывность электромагнитного поля в каждой точке разрыва коэффициентов уравнений (3), получаем **основное** энергетическое тождество, показывающее сохранение **направления** и **величины** потока энергии электромагнитного поля слева от СДС $[0,d]$ и справа от неё:

$$p_-\left(\left|C_0^-\right|^2-\left|C_1^-\right|^2\right)\equiv p_+\left(\left|C_0^+\right|^2-\left|C_1^+\right|^2\right). \qquad (16)$$

Последнее тождество показывает, что решение прямой задачи для $\mathbb{R}^3$ зависит от **двух произвольных постоянных,** в качестве которых можно взять $\vec{\mathbf{C}}_-$ или $\vec{\mathbf{C}}_+$.

При интерпретации решения прямой задачи, как задачи о распространении плоской электромагнитной волны через слоистую систему $\mathbb{R}^3$ **слева направо**, удобно выбрать произвольные постоянные в виде:

$$C_0^+=1,\quad C_1^+=0, \qquad (17)$$

[6] Фундаментальная матрица для t-представления была названа Абеле [5, с. 85] **характеристической** матрицей *j*-го слоя.

где второе условие – отсутствие отражения на $+\infty$, а первое – нормировка «по прохождению» волны, прошедшей через СДС $[0,d]$ с кусочно-непрерывными параметрами.

С учётом указанного выбора свободных параметров тождество (16) примет вид:

$$\left|C_0^-\right|^2 - \left|C_1^-\right|^2 \equiv \theta, \quad \text{где} \quad \theta = \frac{p_+}{p_-}, \tag{18}$$

из которого вытекает ряд важных следствий для рассматриваемых полей: $\left|C_0^-\right|^2 = \left|C_1^-\right|^2 + \theta \geq \theta$, т.е. оценка величины $|C_0^-|^2$ снизу: $|C_0^-|^2 \geq \theta > 0$, в силу которой для всех κ обязательна конечность энергетических коэффициентов отражения слева от СДС и пропускания справа от СДС с кусочно-непрерывными физическими параметрами:

$$R_-(\kappa) \overset{\text{def}}{=} \frac{|C_1^-(\kappa)|^2}{|C_0^-(\kappa)|^2}, \quad T_+(\kappa) \overset{\text{def}}{=} \frac{\theta}{|C_0^-(\kappa)|^2}, \tag{19}$$

и, как следствие этого и (16), оказывается обоснованным тождество (2).

Подстановка решений (11) в условия непрерывности (4) приводит к основной системе уравнений [13–16] относительно амплитуд прямой и обратной волн $\vec{\mathbf{C}}_j = \begin{pmatrix} C_0^{(j)} \\ C_1^{(j)} \end{pmatrix}$ в j-ом слое $(j = 0,1,\ldots,N+1)$:

$$\mathbf{M}_j \vec{\mathbf{C}}_j = \mathbf{M}_{j+1} \vec{\mathbf{C}}_{j+1},$$

где $j = 0$ отвечает индексу «–», а $j = N + 1$ – индексу «+» в предыдущем тексте работы.

Определение. При распространении волны слева направо будем называть **профилирующими** функциями следующие функции[7] от волнового числа κ: $F_0(\kappa) \overset{\text{def}}{=} |C_0^-(\kappa)|^2$ и $F_1(\kappa) \overset{\text{def}}{=} |C_1^-(\kappa)|^2$.

Тогда, в силу (16), будет справедливо тождество:

$$F_0(\kappa) - F_1(\kappa) = \theta, \quad \text{где} \quad \theta = \frac{p_+}{p_-}, \; R_-(\kappa) = \frac{F_1(\kappa)}{F_0(\kappa)}, \; T_+(\kappa) = \frac{\theta}{F_0(\kappa)}.$$

Замечание. При интерпретации решения прямой задачи как задачи о распространении плоской электромагнитной волны через слоистую систему **справа налево** удобно выбрать произвольные постоянные в (13) в виде $C_0^- = 0, \quad C_1^- = 1,$ где первое условие означает отсутствие отражения на $-\infty$, а второе – нормировку «по прохождению» волны, прошедшей через кусочно-непрерывную СДС.

С учётом указанного выбора свободных параметров и изменения знаков тождество (16) примет вид:

$$\left|C_1^+\right|^2 - \left|C_0^+\right|^2 \equiv \theta^{-1}, \tag{20}$$

из которого, как и выше, вытекает ряд следствий для рассматриваемых полей: $\left|C_1^+\right|^2 = \left|C_0^+\right|^2 + \theta^{-1} \geq \theta^{-1},$ т.е. оценка величины $|C_1^+|^2$ снизу: $\left|C_1^+\right|^2 \geq \theta^{-1} > 0,$ в силу которой для всех κ следует конечность энергетических коэффициентов отражения справа от СДС и

[7] Эти функции, а также аналогичные им при распространении волны справа налево, являются функционалами от кусочно-непрерывных параметров СДС $[0, d]$.

пропускания слева от СДС с кусочно-непрерывными физическими параметрами:

$$R_+(\kappa) \overset{\text{def}}{=} \frac{|C_0^+(\kappa)|^2}{|C_1^+(\kappa)|^2}, \quad T_-(\kappa) \overset{\text{def}}{=} \frac{\theta^{-1}}{|C_1^+(\kappa)|^2},$$

и, как следствие этих обозначений и (16), обосновано тождество (2), которое позволяет для **правильных** идеалов для коэффициентов отражения (пропускания) обосновать переход от стандартных постановок задач синтеза к их эффективным постановкам.

4. Обоснование перехода к эффективным постановкам задач синтеза

Лемма. Если **идеальные** спектральные характеристики $\tilde{R}(\kappa)$ и $\tilde{T}(\kappa)$ связаны между собой соотношением $\tilde{R}(\kappa)+\tilde{T}(\kappa)\equiv 1$, то оба идеала могут быть **правильными** только одновременно.

Доказательство. В силу (17) имеет место представление: $\tilde{T}(\kappa)\equiv 1-\tilde{R}(\kappa)$.

Покажем, что из правильности идеала $\tilde{R}(\kappa)$ вытекает правильность $\tilde{T}(\kappa)$. Если последовательность коэффициентов отражения различных СДС $R^{(n)}(\kappa)$ равномерно на заданном интервале $[\mathcal{K}_1,\mathcal{K}_2]$ сходится к заданному идеалу $\tilde{R}(\kappa)$ то в силу тождества (2) последовательность коэффициентов пропускания тех же СДС $T^{(n)}(\kappa) \overset{\text{def}}{=} 1-R^{(n)}(\kappa)$ будет равномерно на интервале $[\mathcal{K}_1,\mathcal{K}_2]$ сходиться к идеалу $\tilde{T}(\kappa)=1-\tilde{R}(\kappa)$. Аналогично доказывается, что из правильности идеала $\tilde{T}(\kappa)$ вытекает правильность идеала $\tilde{R}(\kappa)$.

Если же какой-то из идеалов $\tilde{R}(\kappa)$ или $\tilde{T}(\kappa)$ не является правильным, то и другой идеал не будет правильным.

Лемма. Если хотя бы один из идеалов $\tilde{R}_-(\kappa)$ или $\tilde{T}_+(\kappa)$ имеет представление:

$$\tilde{R}_-(\kappa)=\frac{\tilde{F}_1(\kappa)}{\tilde{F}_0(\kappa)} \quad \left[\tilde{T}_+(\kappa)=\frac{\theta}{\tilde{F}_0(\kappa)}\right],$$

где $\tilde{F}_1(\kappa)$ – идеал для профилирующей функции $F_1(\kappa)$, а $\tilde{F}_0(\kappa)$ – идеал для профилирующей функции $F_0(\kappa)$, то правильность любого из идеалов $\tilde{R}_-(\kappa), \tilde{T}_+(\kappa), \tilde{F}_0(\kappa)$ или $\tilde{F}_1(\kappa)$ влечёт правильность остальных идеалов из перечисленных.

Доказательство. Прежде всего, ввиду тождества (15) из правильности идеала $\tilde{F}_1(\kappa)$ очевидно, вытекает правильность идеала $\tilde{F}_0(\kappa)$ и наоборот. Покажем, что из правильности идеала $\tilde{T}_+(\kappa)$ вытекает правильность $\tilde{F}_0(\kappa)$.

Если $T_+^{(n)}(\kappa)$ – последовательность коэффициентов пропускания различных СДС, равномерно на заданном интервале $[\mathcal{K}_1,\mathcal{K}_2]$ сходящаяся к заданному идеалу $\tilde{T}_+(\kappa)$, то в силу представления (16) для коэффициента пропускания $T_+(\kappa)$ (19), последовательность профилирующих функций тех же СДС $F_0^{(n)}(\kappa) \overset{\text{def}}{=} |C_0^-(\kappa)|^2_{(n)}$ будет равномерно сходиться к идеалу $\tilde{F}_0(\kappa)$ на интервале $[\kappa_1,\kappa_2]$. Идея доказательства остальной части утверждения леммы – та же самая.

Приведём теперь формулы пересчёта идеала для стандартного коэффициента отражения $\tilde{R}_-(\kappa)$ в идеалы для профилирующих функций $\tilde{F}_1(\kappa)$ и $\tilde{F}_0(\kappa)$.

$$\tilde{R}_-(\kappa) \overset{\text{def}}{=} \frac{\tilde{F}_1(\kappa)}{\tilde{F}_0(\kappa)}, \quad \tilde{F}_0(\kappa)-\tilde{F}_1(\kappa)=\theta. \tag{21}$$

Из первой формулы следует: $\tilde{F}_1(\kappa) = \tilde{R}_-(\kappa)\,\tilde{F}_0(\kappa)$ и, подставляя это соотношение во вторую формулу, получим: $\tilde{F}_0(\kappa) = \dfrac{\theta}{1-\tilde{R}_-(\kappa)}$ и $\tilde{F}_1(\kappa) = \dfrac{\tilde{R}_-(\kappa)}{1-\tilde{R}_-(\kappa)}\theta.$

В приведённых формулах для оценки точности замены на интервале $[\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2]$ исходного неравенства $\left|R_-(\kappa) - \tilde{R}_-(\kappa)\right| < \varepsilon$ на $\left|F_1(\kappa) - \tilde{F}_1(\kappa)\right| < \delta(\varepsilon),$ нужно использовать модуль непрерывности положительной выпуклой во всём интервале её определения $(0, +\infty)$ функции $y \overset{\text{def}}{=} \dfrac{x}{x+\theta}$, производная которой в указанном интервале монотонно спадает от $y'(0) = \dfrac{1}{\theta}$ до нуля, с заменой её аргумента x на $F_1(\kappa),$ а её значений y – на $R(\kappa)$.

5. Формальная запись постановки задачи синтеза СДФ

Задача оптимального синтеза СДФ в смысле Чебышёва (1) для энергетического коэффициента отражения в силу тождества (2) полностью эквивалентна такой же задаче для энергетического коэффициента пропускания, если $\tilde{T}(\kappa) = 1 - \tilde{R}(\kappa)$.

Аналогично в силу (13) эквивалентны между собой задачи оптимального синтеза для каждой из профилирующих функций $F_0(\kappa), F_1(\kappa)$.

Тождество

$$\left|R_-(\kappa) - \tilde{R}_-(\kappa)\right| \equiv \left|T_+(\kappa) - \tilde{T}_+(\kappa)\right| \equiv \frac{\theta}{F_0(\kappa)\tilde{F}_0(\kappa)}\left|F_0(\kappa) - \tilde{F}_0(\kappa)\right| \tag{22}$$

позволяет дать простую двухстороннюю оценку для функционала задачи (1) через аналогичные функционалы для профилирующих функций:

$$\frac{\theta}{\alpha\beta}\left|F_0(\kappa) - \tilde{F}_0(\kappa)\right| \le \left|R_-(\kappa) - \tilde{R}_-(\kappa)\right| \le \frac{1}{\theta}\left|F_0(\kappa) - \tilde{F}_0(\kappa)\right|, \tag{23}$$

где $\theta \le F_0(\kappa) \le \alpha,\ \ \theta \le \tilde{F}_0(\kappa) \le \beta$, что позволяет говорить об эквивалентности (1) и существенно более простой задачи:

$$\max_{\mathcal{K}_1 \le \kappa \le \mathcal{K}_2} \left|F_0(\kappa, \vec{p}, \vec{\nu}) - \tilde{F}_0(\kappa)\right| \underset{\vec{p},\vec{\nu}}{\longrightarrow} \min.$$

Аналогичный переход от (22) к аналогу (23):

$$\frac{\theta}{\alpha}\,\nu(\kappa)\left|F_0(\kappa) - \tilde{F}_0(\kappa)\right| \le \left|R(\kappa) - \tilde{R}(\kappa)\right| \le \nu(\kappa)\left|F_0(\kappa) - \tilde{F}_0(\kappa)\right|,$$

где $\nu(\kappa) = \dfrac{1}{\tilde{F}_0(\kappa)}$ – фиксированная весовая функция для равномерной метрики, позволяет говорить об асимптотической (при $n \to +\infty$) эквивалентности задачи (1) аналогичной «весовой» задаче для профилирующей функции $\tilde{F}_0(\kappa)$:

$$\max_{\mathcal{K}_1 \le \kappa \le \mathcal{K}_2} \nu(\kappa)\left|F_0(\kappa, \vec{p}, \vec{\nu}) - \tilde{F}_0(\kappa)\right| \underset{\vec{p},\vec{\nu}}{\longrightarrow} \min.$$

Выводы

1. Проведён анализ прямой задачи о распространении плоских электромагнитных волн в слоистой среде в $\mathbb{R}^3$, являющийся единственно надёжной основой для постановки и решения всех возможных оптимизационных и обратных задач, связанных с этой тематикой. Получены основные для всей теории слоистых сред тождества (18) и (20).

2. Получены явные формулы пересчёта для «идеалов» энергетических коэффициентов отражения и пропускания в «идеалы» для профилирующих функций.

3. Обоснована эквивалентность традиционных постановок задач синтеза слоистых диэлектрических фильтров по их «желаемым» спектральным характеристикам типа энергетических коэффициентов отражения и пропускания, названных в работе «идеалами» для соответствующих спектральных характеристик, значительно более простым по структуре функционалам – задачам синтеза по «идеалу» для профилирующих функций.

Литература:

1. Macleod H.A. Thin-Film Optical Filters. Fifth edition. CRC Press, 2018. 696 p. ISBN: 978-1-13-819824-1

2. Seshan K., Schepis D. Handbook of Thin Film Deposition. Fourth edition. Elsevier, 2018. 470 p. ISBN: 978-0-12-812311-9.

3. Baumeister P.W. Optical coating technology. Bellingham, Washington: SPIE Press, 2004, 840 p. ISBN 978-0-8194-5313-6.

4. Современная теория фильтров и их проектирование, под ред. Г. Темеша и С. Митра: пер. с англ. М.: Мир, 1977. 560 с.

5. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. Изд. 2-е. М.: Наука, 1973. 722 с.

6. Кард П.Г. Анализ и синтез многослойных интерференционных плёнок. Таллин: Валгус, 1971. 233 с.

7. Фельдштейн А.Л., Явич Л.Р. Синтез четырёхполюсников и восьмиполюсников на СВЧ. М.: Связь, 1971. 388 с.

8. Furman Sh.A. and Tikhonravov A.V. Basics of optics of multilayer systems. Editions Frontiers. Gif-sur Yvette, 1992. 242 p.

9. Винер Н. Интеграл Фурье и некоторые его приложения: пер. с англ. М.: Физматгиз, 1963. 256 с.

10. Левитан Б.М. Почти-периодические функции. М.: ГИТТЛ, 1953. 396 с.

11. Akshaya and Nagendra N.N. Thin Film Optical Filters: Bandpass Characteristics of VIBGYOR Wavelengths. In: 2018 4th International Conference for Convergence in Technology (I2CT). Mangalore, India, 2018. 4 p.

12. Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи: пер. с англ. М.: Мир, 1968. 750 с.

13. Худак Ю.И. О задаче просветления в классической постановке. *Доклады РАН.* 2013;448(5):520–523.

14. Худак Ю.И. Составные электромагнитные волны в магнитодиэлектрических системах. *Доклады РАН.* 2015;467(2):149–153.
https://doi.org/10.7868/S0869565216080053

15. Худак Ю.И., Ахмедов И.А., Музылев Н.В., Парфенов Д.В. Структура пространства параметров двухслойных магнитодиэлектрических систем. *Электромагнитные волны и электронные системы.* 2016;2:24–32.

16. Худак Ю.И., Ахмедов И.А., Музылев Н.В., Парфенов Д.В. О решении задачи просветления Чебышева для двухслойных магнитодиэлектрических систем. *Нелинейный мир.* 2016;14(2):38–48.

References:

1. Macleod H.A. Thin-Film Optical Filters. Fifth edition. CRC Press; 2018. 696 p. ISBN: 978-1-13-819824-1

2. Seshan K., Schepis D. Handbook of Thin Film Deposition. Fourth edition. Elsevier; 2018. 470 p. ISBN: 978-0-12-812311-9.

3. Baumeister P.W. Optical coating technology. Bellingham, Washington: SPIE Press, 2004, 840 p. ISBN 978-0-8194-5313-6.

4. *Sovremennaya teoriya fil'trov i ikh proektirovanie; pod red. G. Temesha i S. Mitra* (Modern filter theory and design; (Eds.) G. Temesh and S. Mitra). Moscow: Mir; 1977. 560 p. (in Russ.).

[Temes G.C., Mitra S. (Eds.). Modern Filter Theory and Design. John Wiley & Sons; 1973. 566 p.]

5. *Born M., Vol'f E. Osnovy optiki* (Born M., Wolf E. Fundamentals of Optics). Moscow: Nauka; 1973. 722 p. (in Russ.).

[Born M., Wolf E. Principles of optics. Electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light. 7th ed. Cambridge University Press; 2005, 952 p.]

6. Kard P.G. *Analiz i sintez mnogosloinykh interferentsionnykh plenok* (Analysis and Syntheis of Multilayered Interference Films). Tallinn: Valgus; 1971. 233 p. (in Russ.).

7. Fel'dshtein A.L., Yavich L.R. *Sintez chetyrekhpolyusnikov i vos'mipolyusnikov na SVCh* (SHF Four- and Eight-pole Terminal Network Synthesis). Moscow: Svyaz'; 1971. 388 p. (in Russ.).

8. Furman Sh.A. and Tikhonravov A.V. Basics of optics of multilayer systems. Editions Frontiers. Gif-sur Yvette, 1992. 242 p.

9. Viner N. *Integral Fur'e i nekotorye ego prilozheniy*a (Fourier Integral and Some of Its Applications). Moscow: Fizmatgiz; 1963. 256 p. (in Russ.).

[Wiener N. The Fourier Integral and Certain of its Applications. NY: Dover publ.; 1933. 201 p.]

10. Levitan B.M. *Pochti-periodicheskie funktsii* (Almost Periodic Functions). Moscow: GITTL Publ.; 1953. 396 p. (in Russ.).

11. Akshaya and Nagendra N.N. Thin Film Optical Filters: Bandpass Characteristics of VIBGYOR Wavelengths. In: 2018 4th International Conference for Convergence in Technology (I2CT). Mangalore, India, 2018. 4 p.

12. Atkinson F. *Diskretnye i nepreryvnye granichnye zadachi* (Discrete and Continuous Boundary Problems). Moscow: Mir; 1968. 750 p. (in Russ.).

[Atkinson F.V. Discrete and Continuous Boundary Problems. NY: Academic Press; 1964. 770 p.]

13. Khudak Yu.I. Antireflective Coating in Classic Problem Definition. *Doklady RAN.* 2013;448(5): 520–523 (in Russ.).

14. Khudak Yu.I. Composite Electromagnetic Waves in Magnetodielectric Systems. *Doklady RAN.* 2015;467(2):149–153 (in Russ.)
https://doi.org/10.7868/S0869565216080053

15. Khudak Yu.I., Akhmedov I.A., Muzylev N.V., Parfenov D.V. The Structure of the Parameters Area of Two-layer Magnetodielectric Systems. *Elektromagnitnye volny i elektronnye sistemy = Electromagnetic Waves and Electronic Systems.* 2016;2:24–32 (in Russ.).

16. Khudak Yu.I., Akhmedov I.A., Muzylev N.V., Parfenov D.V. The Solution on the Problem of Anti-Reflective coating for Two-layered Magnetodielectric Systems in the sense of Chebyshev. *Nelineinyi mir = Nonlinear World.* 2016;14(2):38–48 (in Russ.).

Об авторах:

Худак Юрий Иосифович, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики Института кибернетики ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78).

Парфенов Денис Васильевич, кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики Института кибернетики ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78).

Музылев Николай Викторович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Института кибернетики ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78).

Хачлаев Тимур Султанович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Института кибернетики ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78).

About the authors:

Yury I. Hudak, Dr. Sc. (Engineering), Professor, Head of the Department of Higher Mathemaics, Institute of Cybernetics, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow 119454, Russia).

Denis V. Parfenov, Cand. Sci. (Engineering), Associate Professor of the Department of Higher Mathemaics, Institute of Cybernetics, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow 119454, Russia).

Nikolay V. Muzylev, Cand. Sci. (Physics and Mathematics), Associate Professor of the Department of Higher Mathemaics, Institute of Cybernetics, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow 119454, Russia).

Timur S. Khachlaev, Cand. Sci. (Physics and Mathematics), Associate Professor of the Department of Higher Mathemaics, Institute of Cybernetics, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow 119454, Russia).

Поступила: 02.04.2020; получена после доработки: 12.07.2020; принята к опубликованию: 20.07.2020.

Свидетельство о регистрации СМИ *Эл № ФС 77-74578 от 14 декабря 2018 г.*

Дата опубликования *30 сентября 2020 г.*

МИРЭА – Российский технологический университет
119454, Москва, пр. Вернадского, 78.

http://rtj-mirea.ru