ISSN 2500-316X (Online)

https://doi.org/10.32362/2500-316X-2020-8-2-67-84

CC BY

УДК 519.224.22, 519.246.8

Оценка VaR при негауссовом распределении доходностей активов

А.Е. Барышева[1,2,@]
А.С. Марков[2]
А.А. Мицель[1]

[1]Национальный исследовательский Томский политехнический университет, Томск 634050, Россия
[2]ООО «ЭКО – ТОМСК», Томск 634009, Россия
[@]Автор для переписки, e-mail: alexandramelnikk@mail.ru

В настоящей работе особый акцент сделан на изучении практического влияния нарушения предположения о нормальности доходностей активов на оценку риска инвестиционного портфеля. В качестве меры риска рассматривается рекомендуемая к расчету для крупных финансовых организаций метрика Value at Risk (VaR). На примере акций российских компаний показано, что доходности активов в реальности имеют распределение, отличное от Гауссова. Показано, что эмпирическое распределение доходностей рассматриваемых активов согласуется с распределением Джонсона. Обоснованность заключения подкрепляется результатом статистического теста Колмогорова – Смирнова. Предложенные авторами тесты позволили оценить потерю в точности оценки параметров модели авторегрессии методом максимального правдоподобия, при нарушении предположения о нормальности распределения доходностей активов. Было выявлено, что потеря в точности оценки меняется в интервале [22%; 26%] для абсолютных доходностей и [33%; 38%] для относительных доходностей при изменении параметра авторегрессии в интервале [–0.9; 0.9]. Погрешность в расчёте десятидневного VaR рассчитывалась на уровнях значимости

1% (99%) и 5% (95%). Результаты тестов показали, что на уровне значимости 5% (95%) оценка риска через метрику VaR, полученная в предположении о нормальности распределения доходностей активов, ниже истинного значения на 7% (6%) для абсолютных доходностей и 4% (13%) для относительных, что говорит о сильной недооценке риска портфеля. На уровне значимости 1% оценка риска является консервативной, превышая истинное значение на 12% (19%) для абсолютных (относительных) доходностей.

Ключевые слова: VaR, распределение Джонсона, портфельное инвестирование, оценка параметров ММП, имитационное моделирование.

Для цитирования: Барышева А.Е., Марков А.С., Мицель А.А. Оценка VaR при негауссовом распределении доходностей активов. *Российский технологический журнал.* 2020:8(2):67-84 https://doi.org/10.32362/2500-316X-2020-8-2-67-84

VAR assessment under nongaussian distribution of returns

Alexandra E. Barysheva[1,2,@],
Alexander S. Markov[2],
Artur A. Mitcel[1]

[1]National Research Tomsk Polytechnic University, Tomsk 634050, Russia
[2]«Econophysica» Ltd., Agency Court, Ferry Works, Summer Road, Thames Ditton, Surrey KT7 0QJ, United Kingdom
[@]Corresponding author, e-mail: alexandramelnikk@mail.ru

The study aims to assess the impact of violation of the assumption about normality of the investment portfolio returns on its risk measures. The article is focused on the Value at Risk (VaR) metric required by major regulatory authorities for bank risk assessment. Using historical share prices of several Russian companies it is shown that the assumption about returns normality is not supported by statistical tests. It is also shown that the empirical distribution of the assets returns is described by Johnson's distribution. The Kolmogorov-Smirnov test supports the obtained results. The tests proposed by the authors allow estimating the loss in accuracy in parameters calibration of the autoregressive model, obtained by using the maximum likelihood method when the asset returns have non-gaussian distribution. It was found that the loss in the accuracy lies in the range [22%, 26%] for absolute returns and in the range [33%, 38%] for relative returns depending on the autoregression parameter which varies in the range [–0.9, 0.9]. The error of ten-day VaR estimation was calculated for 1% (99%) and 5% (95%) significance levels. At a significance level of 5% (95%) the VaR metric obtained under the assumption that the asset returns have normal distribution is lower than the true value by 7% (6%) for absolute returns and 4% (13%) for relative returns, which indicates strong underestimation of the portfolio risk. At a significance level of 1% the metric is conservative exceeding the true value by 12.5%.

Keywords: modeling, testing, ripples, integrated circuit, DC–DC converter, charge pump, inverter, flying capacitor, LDO, burst and constant frequency modes.

For citation: Barysheva A.E., Markov A.S., Mitcel A.A. VAR assessment under nongaussian distribution of returns. *Rossiiskii tekhnologicheskii zhurnal = Russian Technological Journal.* 2020;8(2):67-84 (in Russ.). https://doi.org/10.32362/2500-316X-2020-8-2-67-84

В течение последних десяти лет правительство Российской Федерации активно занимается оздоровлением и развитием финансового рынка страны путем реализации ряда стратегий[1-5]. За это время были введены новые регуляторные требования в части инвестиционной деятельности банков и прочих финансовых институтов [1], оптимизирована регулятивная и налоговая нагрузка, что в совокупности привело к повышению конкурентоспособности этого сектора, а также к повышению доступности финансовых услуг для субъектов экономики, особенно для малого и среднего предпринимательства (МСП) и частных инвесторов. Помимо этого, появление альтернативных систем торговли, увеличение количества видов обращаемых финансовых инструментов, а также снижение транзакционных издержек привело к выходу на рынок огромного числа новых инвесторов. Самым распространенным методом инвестирования среди них является портфельное инвестирование. По данным из интернет источников в среднем инвестиционный портфель обычного инвестора состоит из банковских депозитов в национальной и иностранной валютах (15%), облигаций (10%), акций (25%), недвижимости (30%), драгоценных металлов (5%) и прочих активов (15%). Как видно, большая часть инвестиционных вложений приходятся на ценные бумаги [2].

Формирование портфеля ценных бумаг, как и любой другой вид инвестиционной деятельности, с одной стороны направлен на то, чтобы сохранить капитал за счет включения в портфель условно безрисковых активов, а с другой – чтобы его приумножить посредством включения рискованных активов. В отличие от моноинвестиций, портфельное инвестирование позволяет улучшить условия вложений, придав совокупности ценных бумаг такие инвестиционные характеристики, которые недостижимы с позиции отдельно взятой ценной бумаги. Основная инвестиционная характеристика, интересующая любого инвестора, – это соотношение риска и доходности портфеля. Нахождение баланса между этими показателями, в зависимости от индивидуальных инвестиционных целей, является основной задачей в теории управления инвестиционным портфелем. Данная задача сводится к определению оптимальной пропорции долей распределения вкладываемой суммы между доступным набором фондовых активов. Несмотря на то, что однозначного подхода к формированию оптимального портфеля в финансовой теории не существует [3], классической считается портфельная теория Гарри Марковица, опубликованная в 1952 году [4], которая впоследствии была обобщена Мертоном на случай непрерывного времени [5].

Эффективность управления портфелем ценных бумаг напрямую зависит от качества модели, которая закладывается в основу изменения стоимости базовых активов. Именно модель позволяет реализовать процедуру сравнения альтернативных

[1] Стратегия развития финансового рынка Российской Федерации на период до 2020 года, утвержденная Распоряжением № 2043-р Правительства Российской Федерации от 29 декабря 2008 г.

[2] Стратегия долгосрочного развития пенсионной системы Российской Федерации, утвержденная Распоряжением № 2524-р Правительства Российской Федерации от 25 декабря 2012 г.

[3] Стратегия развития страховой деятельности в Российской Федерации до 2020 года, утвержденная Распоряжением № 1293-р Правительства Российской Федерации от 22 июля 2013 г.

[4] Стратегия повышения финансовой грамотности в Российской Федерации на 2017–2023 годы, утвержденная Распоряжением № 2039-р Правительства Российской Федерации от 25 сентября 2017 г.

[5] Стратегия государственной политики Российской Федерации в области защиты прав потребителей на период до 2030 года, утвержденная Распоряжением № 1837-р Правительства Российской Федерации от 28 августа 2017 г.

портфелей в разрезе показателей доходности и риска. В отличие от доходности, для измерения риска портфеля на практике используют несколько различных метрик. В классической портфельной теории Марковица в качестве риска выступает величина стандартного отклонения, записываемая в следующем виде:

$$\sigma\left(\Delta P_T\right) = \sqrt{E\left[\left(\Delta P_T - E\left(\Delta P_T\right)\right)^2\right]}, \tag{1}$$

где ΔP_T – доходность портфеля на отрезке времени (0,T], $\sigma(\Delta P_T)$ - стандартное отклонение доходности портфеля, $E(\Delta P_T)$ – среднее изменение доходности портфеля.

В последние годы на практике активно используются квантильные меры риска [6, 7]. Так крупные организации, занимающиеся инвестиционной деятельностью, для оценки достаточности капитала обязаны использовать меру риска VaR (Value at Risk) рекомендуемую как мировыми регуляторами [8], так и ЦБ РФ [6]. Для заданного уровня доверия $(1 - \alpha)$ и периода удержания портфеля T значение метрики VaR портфеля определяется как величина, обеспечивающая покрытие потерь x с вероятностью $(1 - \alpha)$ [9]:

$$P(VaR \geq x) = \left(1 - \alpha\right) \tag{2}$$

где $P(\cdot)$ – вероятность, что изменение стоимости портфеля ΔP_T не превысит VaR порог.

Методы расчета метрики VaR можно разделить на четыре группы [10]:

1. Параметрические (дельта-нормальный метод, метод на основе моделей из семейства GARCH);
2. Непараметрические (метод исторического моделирования);
3. Полупараметрические (метод Монте-Карло, метод Халла – Уайта);
4. Методы, основанные на теории экстремальных значений (метод EVT).

Полупараметрические методы и методы, основанные на теории экстремальных значений, на данный момент считаются более точными, но в то же время и более сложными в реализации [11]. К этим методам прибегают крупные финансовые организации, имеющие разрешение регулятора на использование внутренних моделей оценки риска. Методы предполагают использование имитационного моделирования для построения различных возможных траекторий доходности актива с последующим анализом полученных эмпирических распределений. Полупараметрический метод Монте-Карло требует формирования предположений о рыночной структуре, стохастических процессах, взаимосвязях между факторами риска, их волатильности и других характеристик. Взаимосвязи оцениваются по ретроспективным или современным (рыночным) данным. Точность метрики в данном методе сильно зависит от выбора модели имитирования данных и количества симуляций [12].

Метод исторического моделирования основан на предположении о стационарности временных рядов доходностей актива и предполагает расчет метрики VaR на базе оцененного по историческим данным эмпирического распределения. Данный метод является наиболее простым в реализации и дает довольно точные оценки метрики для уровня значимости 95%. Дополнительным плюсом данного метода является отсутствие каких-либо предположений о законе распределения активов и возможность «улавливать» толстые хвосты эмпирического распределения. Однако, метод исторического моделирования медленно реагирует на внезапные рыночные скачки и слабо отражает их в оценке метрики. Кроме того, для получения точных оценок метрики при помощи этого метода необходимо наличие исторических наблюдений изменения стоимости актива, что довольно часто является проблемой. Данный метод, например, не может быть использован, если в портфеле присутствуют новые или неликвидные инструменты, не обладающие исторической информацией в необходимом объеме. В таких случаях используются параметрические методы, основанные на предположении о заданном законе распределения для доходностей актива.

Использование параметрических методов является подходящим решением для финансовых институтов, желающих сохранить баланс между точностью расчета метрики VaR и сложностью реализации. К параметрическим методам можно отнести:

1. Дельта-нормальный метод. Предполагает нормальное распределение доходностей активов;

2. Методы, предполагающие распределения, отличные от нормального (распределение Стьюдента, обобщенное *t* распределение);

3. Методы, предполагающие применение моделей семейства GARCH для оценки волатильности;

4. Методы, предполагающие применение моделей семейства GARCH для оценки волатильности с ошибками, отличными от нормального распределения.

Детальное описание каждого из методов можно найти в обзоре существующих методов оценки VaR [10]. Автор отмечает, что параметрические методы, использующие модели семейства GARCH с ошибками, распределенными по закону Стьюдента, дают более точные оценки метрики, чем методы с нормально распределенными ошибками. В данной статье авторы также остановились на анализе параметрических методов оценки VaR в силу следующего:

1. Данный метод согласуется с регуляторными требованиями как ЦБ, так и основных мировых регуляторов;

2. Относительно простой в реализации по сравнению с полупараметрическими методами;

3. При правильном выборе модели дает точные оценки метрики;

4. Наиболее распространен на практике, так как может быть применен в ряде случаев, когда использовать вариационный ряд для оценки VaR портфеля не представляется возможным.

При расчете VaR параметрическим методом изменение стоимости портфеля разбивается на составные части и представляется в следующем виде:

$$\Delta P_T = \sum_{l=1}^{N} \theta_l \times \Delta S_{T,l}, \qquad (3)$$

где θ_l – доля l-го актива в портфеле, $\Delta S_{T,l}$ – доходность l-го актива на промежутке (0; T], N – общее количество инструментов в портфеле.

В таком представлении задача моделирования изменения стоимости портфеля сводится к моделированию динамики изменения базовых активов, для описания которых на практике широко используются модели из класса регрессионных, такие как авторегрессионные модели (AR), авторегрессионные модели скользящего среднего (ARMA), авторегрессионные модели условной гетероскедастичности (GARCH) и другие [12]. Оценить параметры таких моделей можно при помощи двух основных статистических методов: метода наименьших квадратов (МНК) и метода максимального правдоподобия (ММП) [13]. При выполнении предположения о нормальности распределения регрессионных остатков, задающих динамику процесса, оба метода дают точные несмещенные оценки параметров модели. Однако согласно ряду исследований, в случае ненормального распределения остатков, оценки, полученные ММП, являются более устойчивыми [14, 15]. Кроме этого, на практике встречаются ситуации, когда при оценке параметров модели методом наименьших квадратов происходит перепараметризация модели, и полученные впоследствии прогнозные значения далеки от реальных.

В задаче поиска оптимального портфеля выполнение предположения о нормальности распределения остатков модели, задающих динамику процесса доходностей активов, входящих в портфель, необходимо не только для оценки параметров модели данных. Для оценки достаточности капитала требуется расчет VaR методом исторического моделирования для горизонта в 1 день и 10 дней [16]. Европейские регуляторные органы предписывают использовать три года данных для оценки VaR (порядка 750 наблюдений), чтобы снизить эффект от изменчивости динамики активов во времени. При этом для 10-дневного VaR независимых наблюдений получается всего 75 и хвост распределения оценивается крайне неточно, поэтому VaR на 10 дней рассчитывают из VaR на один день путём масштабирования с помощью формулы, которая выводится из предположения о нормальности доходностей активов [8]:

$$VaR_{10d} = VaR_{1d} \times \sqrt{10}\,. \tag{4}$$

Высокая значимость предположения о нормальности распределения остатков в задаче управления оптимальным портфелем послужила отправной точкой для проведения данного исследования. В рамках работы предположение о нормальности распределения было проверено для акций следующих российских компаний: Сбербанк, Газпром, Норильский Никель и Роснефть за период с 20/07/2006 по 19/01/2019. Также был изучен эффект, оказываемый отклонением от нормальности на свойства оценки параметров модели и на оценку VaR на 10 дней. Для каждого из рассматриваемых активов анализ включал в себя решение следующих задач:

1. Расчет дневных абсолютных и относительных доходностей   по формулам:

$$\begin{gathered} r_t^{abs} = S_t - S_{t-1}, \\ r_t^{rel} = \frac{S_t}{S_{t-1}} - 1 \end{gathered}\,, \tag{5}$$

где S_t – цена акции в момент времени t. Все нижеследующие результаты исследований представлены как для относительных, так и для абсолютных доходностей, а соответствующий временной ряд обозначен как r_t.

2. Построение авторегрессионной модели первого порядка следующего вида:

$$r_t = \alpha_1 \times r_{t-1} + \varsigma_t \,, \tag{6}$$

где α_1 – параметр авторегрессии, ς_t – остатки регрессии.

3. Проверка предположения о стационарности остатков ς_t. В случае выполнения предположения переходим к пункту 4.

4. Проверка предположения о нормальности распределения остатков ς_t. В случае невыполнения предположения выполняются задачи 5, 6.

5. Подбор распределения, которое воспроизводит динамику восстановленных остатков ς_t.

6. Оценка влияния невыполнения предположения о нормальности остатков на свойства оценки параметров модели авторегрессии по методу МП.

Оценка смещения VaR на 10 дней при нарушении предположения о нормальности.

В таблице 1 представлены полученные оценки параметра модели авторегрессии первого порядка для абсолютных и относительных дневных доходностей акций Газпрома, Сбербанка, Норильского Никеля и Роснефти.

Таблица 1. Оценки параметров AR(1)

	Газпром	НорНикель	Сбербанк	Роснефть
Абсолютные доходности				
α_1	0.015	0.021	0.045	0.029
p-значение	0.42	0.25	0.01	0.11
Относительные доходности				
α_1	0.02	0.11	0.03	0.01
p-значение	0.18	0.00	0.10	0.67

Для проверки стационарности остатков использовались три теста: расширенный тест Дики-Фуллера (ADF), Квятковский-Филлипс-Шмидт-Шин тест (KPSS), тест Филлипса-Перрона (PP) [17]. Для ADF и PP тестов нулевой гипотезой является наличие единичного корня, что говорит о нестационарности временного ряда. В KPSS тесте, напротив, нулевой гипотезой является предположение о стационарности временного ряда или, другими словами, отсутствие единичного корня. Поэтому, на уровне значимости $\alpha = 0.05$ временной ряд можно считать стационарным, если *p*-значение удовлетворяет условиям, приведенным в таблице 2.

Таблица 2. Критерии тестов на стационарность

	ADF	KPSS	PP
p-значение	< 0.05	> 0.05	< 0.05

Результаты тестов представлены в таблице 3.

В обоих случаях, как для абсолютных доходностей, так и для относительных, можно сделать вывод, что нет повода считать остатки регрессии нестационарными.

Проверим предположение о нормальности распределения остатков регрессии. Для каждого из рассматриваемых инструментов на рисунке 1 изображены плотность нормального стандартного распределения (пунктирная линия) и эмпирическая плотность распределения стандартизованных остатков (столбчатые гистограммы), полученных по следующей формуле:

$$\varepsilon_t = \frac{\varsigma_t - \hat{m}_\varsigma}{\hat{\sigma}_\varsigma}, \tag{7}$$

где $\hat{m}_\varsigma$ – выборочное среднее, а $\hat{\sigma}_\varsigma$ – выборочное стандартное отклонение остатков ς_t.

Таблица 3. Результаты тестов на стационарность

	Газпром	НорНикель	Сбербанк	Роснефть
Абсолютные доходности				
p-значение ADF	0.00	0.00	0.00	0.00
p-значение KPSS	0.10	0.10	0.10	0.10
p-значение PP	0.00	0.00	0.00	0.00
Относительные доходности				
p-значение ADF	0.00	0.00	0.00	0.00
p-значение KPSS	0.10	0.10	0.10	0.10
p-значение PP	0.00	0.00	0.00	0.00

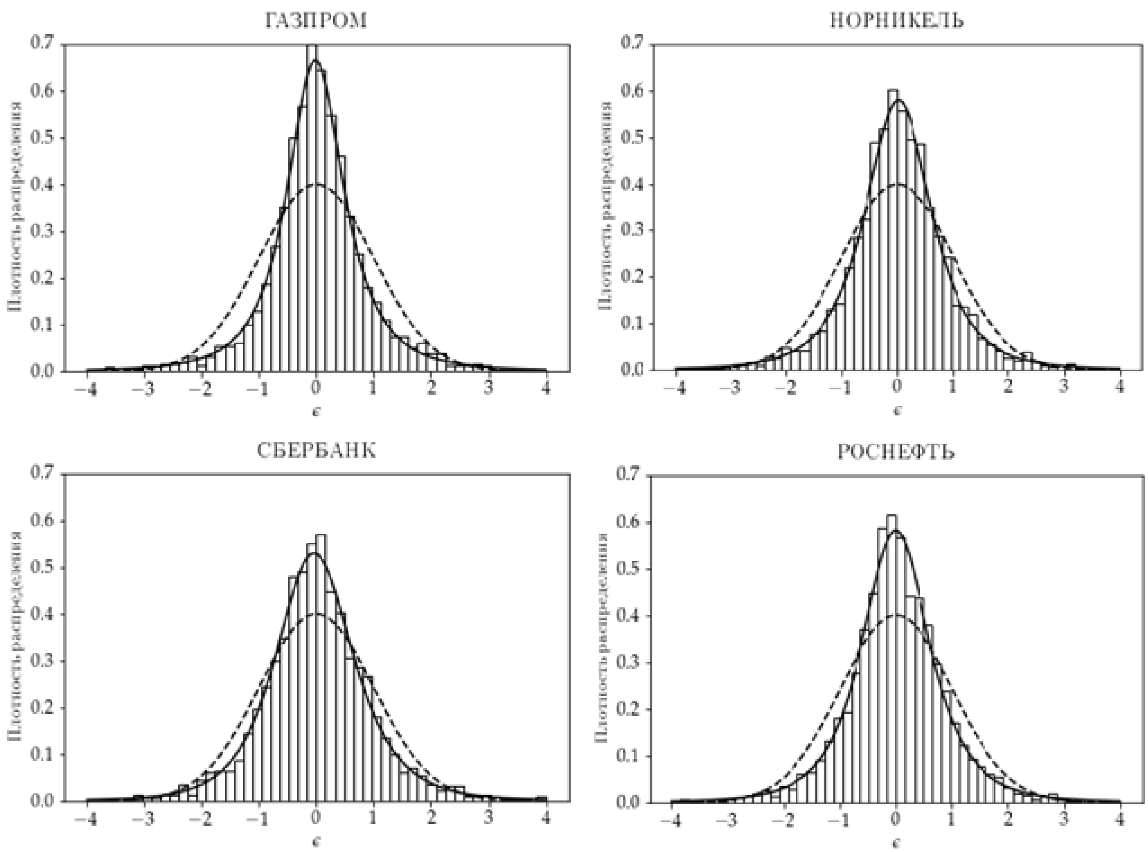

Рис. 1. Плотность нормального стандартного распределения (пунктирная линия), теоретическая плотность распределения Джонсона SU (сплошная линия), эмпирическая плотность распределения стандартизованных шумов, полученных на асболютных доходностях (столбчатые гистограммы).

Из рисунка 1 видно, что наблюдаемые распределения являются более остроконечными по сравнению с распределением Гаусса.

Сформулируем статистическую гипотезу о принадлежности распределения остатков, задающих динамику процесса доходностей активов перечисленных компаний к нормальному распределению:

$$H_0 : \varsigma_t^i \sim N\left(\mu, \sigma^2\right). \tag{8}$$

Для проверки гипотезы будем использовать тест Колмогорова – Смирнова. Это непараметрический тест, предназначенный для проверки простых гипотез о принадлежности анализируемой выборки некоторому полностью известному закону распределения [13]. В нашем случае статистика критерия Колмогорова – Смирнова определяется следующим образом:

$$D_n = \sup_x \left| F_n\left(x\right) - \Phi\left(x\right) \right|, \tag{9}$$

где n – количество наблюдений, $F_n(x)$ – эмпирическая функция распределения, а $\Phi(x)$ – функция распределения нормального закона.

Если гипотеза справедлива, то предельным распределением статистики Колмогорова $\sqrt{n}D_n$ будет являться распределение Колмогорова $K(t)$, а p-значение ожидается не меньше заданного уровня значимости α. В таблице 4 приведены полученные при проверке гипотезы H_0 p-значения для остатков построенных моделей доходностей акций Сбербанка, Газпрома, Норильского Никеля и Роснефти для уровня значимости $\alpha = 0.05$ (p-значение, $H_0 : \varsigma_t^i \sim N(\mu, \sigma^2)$).

Таблица 4. Результаты проверки гипотезы о нормальности распределения шумов

	Газпром	НорНикель	Сбербанк	Роснефть
p-значение, $H_0 : \varsigma_t^i \sim N(\mu, \sigma^2)$.				
Абсолютные доходности	0.00	0.00	0.00	0.00
Относительные доходности	0.00	0.00	0.00	0.00
Выборочное значение статистики критерия				
Абсолютные доходности	5.51	4.55	3.64	4.29
Относительные доходности	4.62	4.73	5.58	5.47

Как видно из таблицы, полученные p-значения меньше заданного уровня значимости, следовательно, нулевая гипотеза H_0 может быть отвергнута в обоих случаях: как для абсолютных, так и для относительных доходностей.

На основе полученных результатов можно сделать вывод, что предположение о нормальности распределения шумов, задающих динамику процессов доходностей акций рассматриваемых компаний, не выполняется, то есть вместо нормального распределения при моделировании необходимо использовать другое распределение, верно описывающее эмпирические характеристики наблюдаемых процессов.

Для описания поведения финансовых временных рядов зачастую на практике используют гибкие распределения, имеющие более остроконечную вершину [18,19]. Так большую популярность имеют так называемые устойчивые распределения [20], однако их использование вызывает ряд затруднений из-за бесконечной дисперсии (за исключением нормального распределения, которое также является устойчивым), что не позволяет использовать многие полезные вероятностные/статистические методы, ведь они получены в предположении конечности дисперсии.

Другим примером гибких распределений является семейство распределений, предложенных Н.Л. Джонсоном [21]. В [18] авторами исследований было показано, что распределение Джонсона дает более точную оценку меры риска VaR в сравнении с нормальным распределением и распределением Стьюдента. Автор статьи [19] показал, что семейство распределений Джонсона является более предпочтительным в использовании для оценки VaR и ES в сравнении с аналогичными методами, также использующими метод моментов для воспроизведения эмпирического распределения доходностей портфеля.

Семейство распределений Джонсона вводится через преобразование стандартной нормально распределенной случайной величины. Пусть ξ – случайная величина, которая принадлежит семейству распределений Джонсона. В общем случае она задается выражением [22]:

$$
\begin{aligned}
&\zeta = \gamma + \eta \times \tau(\xi,\ \varepsilon,\ \lambda),\\
&-\infty < \gamma < \infty,\quad \eta,\ \lambda > 0,\quad -\infty < \varepsilon < \infty
\end{aligned}
\tag{10}
$$

где $\tau(\cdot)$ некоторая функция, γ, η, ε, λ – параметры распределения, $\zeta \sim N(0,\ 1)$.

В зависимости от вида функции $\tau(\cdot)$ существуют три различные семейства распределений Джонсона *SL*, *SB*, *SU*:

$$
\begin{aligned}
&SL:\tau_1(\xi,\varepsilon,\lambda) = \ln\left(\frac{\xi-\varepsilon}{\lambda}\right), \xi \ge \varepsilon\\
&SB:\tau_2(\xi,\varepsilon,\lambda) = \ln\left(\frac{\xi-\varepsilon}{\lambda+\varepsilon-\xi}\right), \varepsilon \le \xi \le \lambda+\varepsilon\\
&SU:\tau_3(\xi,\varepsilon,\lambda) = Arsh\left(\frac{\xi-\varepsilon}{\lambda}\right), -\infty \le \xi \le \infty
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Для выбора семейства распределения пользуются двумя способами: графическим и аналитическим. Оба способа основаны на зависимости коэффициента эксцесса от квадрата коэффициента асимметрии [23], которые обозначаются через a_4 и a_3 соответственно. При графическом способе используется диаграмма в плоскости эксцесс ~ асимметрия в квадрате ($a_4 \sim a_3$) при аналитическом способе используется линейная зависимость в виде:

$$
a_4 > 3 \times (1 + 0.641 \times a_3^2) \tag{12}
$$

Правило выбора семейства распределения аналитическим способом сформулировано в таблице 5 [24].

Таблица 5. Условия выбора семейства распределения Джонсона

Условие	Соответствующее семейство распределений
$a_4 > 3 \times (1 + 0.641 \times a_3^2)$	*SU*
$a_4 \approx 3 \times (1 + 0.641 \times a_3^2)$	*SL*
$a_4 < 3 \times (1 + 0.641 \times a_3^2)$	*SB*
$a_4 < 1 + a_3$	Распределение Джонсона неприменимо

В таблице 6 для каждого из рассмотренных активов представлены выборочные значения коэффициента эксцесса и асимметрии, значения решающих правил и выбранное на их основе семейство распределения Джонсона.

Оценки параметров распределения Джонсона *SU*, полученные для эмпирических данных, а также результаты проверки гипотезы $H_0 : \varsigma_t \sim JSU(\gamma, \xi, \varepsilon. \lambda)$ о принадлежности распределению Джонсона *SU* с оцененными параметрами представлены в таблицах 7, 8. Так как полученные *p*-значения больше традиционного в финансах уровня значимости можно сделать вывод, что гипотеза $H_0 : \varsigma_t \sim JSU(\gamma, \xi, \varepsilon. \lambda)$ не отвергается. На рисунке 1 сплошной линией изображена теоретическая плотность распределения Джонсона *SU* с параметрами из таблицы 7. Из этого рисунка видно, что теоретическая плотность хорошо воспроизводит гистограмму, построенную по историческим данным.

Таблица 6. Выбор семейства распределения Джонсона для абсолютных и относительных доходностей акций компаний Сбербанк, Газпром, Норильский Никель и Роснефть

Характеристики	Газпром		НорНикель		Сбербанк		Роснефть	
	Абс.	Отн.	Абс.	Отн.	Абс.	Отн.	Абс.	Отн.
a_3	–0.04	0.75	–0.82	–0.31	0.49	2.48	–1.98	0.81
a_4	17.68	24.67	16.34	16.89	12.72	57.02	43.61	22.63
$3 \times (1 + 0.641 \times a_3^2)$	3.00	4.09	4.30	3.18	3.46	14.83	10.54	4.25
$1 + a_3$	0.96	1.75	0.18	0.69	1.49	3.48	–0.98	1.81
Выбранное распределение	*SU*		*SU*		*SU*		*SU*	

Таблица 7. Параметры распределения Джонсона *SU*, *p* -значения проверки гипотез о принадлежности к распределению Джонсона (абсолютные доходности)

Параметры распределения Джонсона	Газпром	НорНикель	Сбербанк	Роснефть	Среднее значение
γ	–0.04	0.02	–0.09	–0.03	–0.03
η	1	1	1	1	1
ξ	1.04	1.25	1.41	1.29	1.25
ε	–0.03	0.03	–0.08	–0.02	–0.03
λ	0.62	0.86	1.06	0.88	0.86
p-значение, $H_0 : \varsigma_t \sim JSU(\gamma, \xi, \varepsilon. \lambda)$	0.31	0.88	0.95	0.57	

Таблица 8. Параметры распределения Джонсона *SU*, *p* -значения проверки гипотез о принадлежности к распределению Джонсона (относительные доходности)

Параметры распределения Джонсона	Газпром	НорНикель	Сбербанк	Роснефть	Среднее значение
γ	–0.09	–0.03	–0.09	–0.04	–0.06
η	1	1	1	1	1
ξ	1.16	1.10	1.14	1.09	1.13
ε	–0.08	–0.02	–0.08	–0.04	–0.05
λ	0.73	0.68	0.67	0.66	0.68
p-значение, $H_0 : \varsigma_t \sim JSU(\gamma, \xi, \varepsilon. \lambda)$	0.43	0.32	0.79	0.83	

При использовании параметрических методов расчета VaR необходимо оценить параметры выбранной модели данных, и на практике часто прибегают к нормальному распределению. Предположение о нормальности зачастую используется при построении оценок ММП, например, для модели авторегрессии, которая широко используется в финансах. При этом оценка обладает полезным свойством асимптотической нормальности [25], которое используется для построения доверительных интервалов. В случае, когда предположение о нормальности нарушено, но всё же используется в ММП, предельное распределение ошибки оценивания может быть отличным от нормального, что приведет к искаженной оценке доверительных интервалов. Тест, предложенный авторами статьи и описанный ниже, позволяет оценить влияние нарушения предположения о нормальности распределения шумов на ММП оценки параметров модели данных (рассмотрен случай модели авторегресии первого порядка), что, в свою очередь, приводит к изменению точности в оценке VaR портфеля параметрическим методом.

Тест включает в себя выполнение следующих шагов:

1. Генерация n Монте-Карло траекторий (на m точек) процесса AR (1) с заданными параметрами модели α_1 и параметрами распределения остатков γ, ξ, ε, λ.
2. Построение оценки параметра модели $\hat{\alpha}_1$ методом максимального правдоподобия на каждой траектории, в предположении, что:

а) остатки имеют нормальное распределение;

б) остатки имеют распределение Джонсона SU.

3. Расчет ошибки оценивания $\alpha_1 - \hat{\alpha}_1$ на каждой траектории для случаев а) и б).
4. Расчет выборочных стандартных отклонений $\sigma_{\text{норм}}$ и σ_{JSU} по набору ошибок оценивания, полученных на шаге 3.
5. Расчет метрики потери точности в оценке параметра по следующей формуле:

$$\Delta_\sigma = \frac{\sigma_{\text{норм}}}{\sigma_{JSU}} - 1. \tag{13}$$

Параметры, использованные для проведения теста, описаны в таблице 9. В качестве параметров распределения остатков использовались усредненные параметры распределения остатков из таблиц 7, 8.

Таблица 9. Настройки теста

	α_1	n	m	γ	ξ	ε	λ	η
Абс. доходности	[–0.9; 0.9]	10 000	750	–0.03	1.25	–0.03	0.86	1
Отн. доходности	[–0.9; 0.9]	10 000	750	–0.06	1.13	–0.05	0.68	1

На рисунке 2 изображена зависимость метрики потери точности в оценке параметра авторегрессии Δ_σ (слева) и выборочных стандартных отклонений σ (справа) от значения истинного параметра регрессии. Маркерами обозначено значение выборочного стандартного отклонения ошибки оценивания в предположении нормальности распределения шумов, а сплошной линией – в предположении распределения Джонсона.

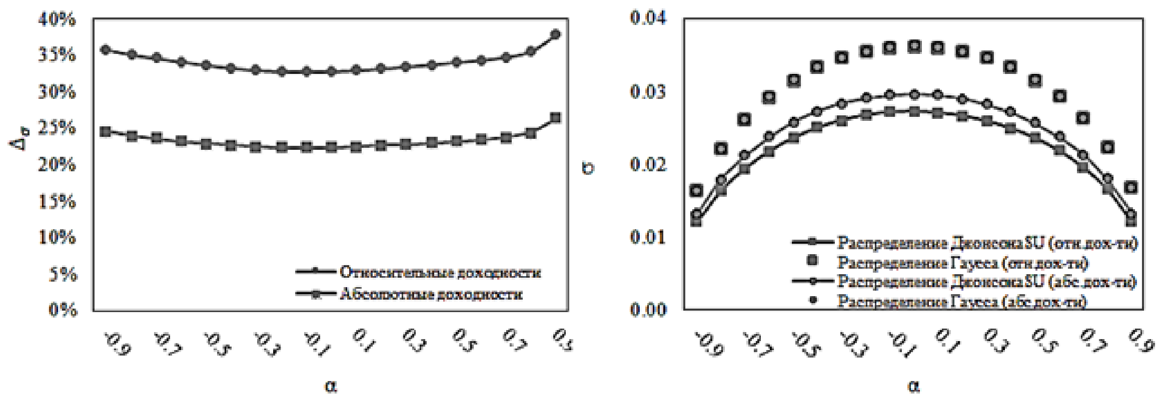

Рис. 2. Зависимость метрики потери точности в оценке параметра авторегрессии (слева) и выборочных стандартных отклонений от значения истинного параметра регрессии (справа).

Как видно из рисунка 2, при невыполнении предположения о нормальности остатков, задающих динамику процесса, потеря в точности оценки параметров меняется в интервале от 22% до 26% для абсолютных и от 33% до 37% для относительных доходностей активов при изменении параметра α_1 в интервале [–0.9; 0.9].

На рисунке 3 пунктирной линией изображена скорость сходимости оценки параметра регрессии (уменьшения разброса относительно его истинного значения) в зависимости от размера выборки m в предположении нормальности распределения остатков, а сплошной – в предположении распределения Джонсона.

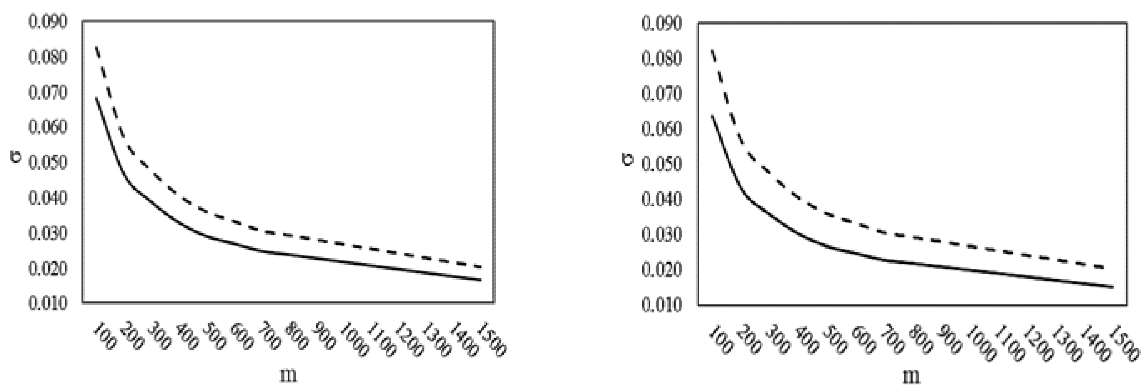

Рис. 3. Скорость сходимости оценки параметра регрессии в зависимости от размера выборки (слева для абсолютных доходностей, справа для относительных).

Как видно из рисунка 3, стандартное отклонение ошибки оценивания в предположении, что шумы имеют распределение Джонсона быстрее, стремится к нулевому значению.

Для оценки смещения метрики VaR на 10 дней при нарушении предположения о нормальности авторами данной статьи предлагается тест, включающий в себя выполнение следующих шагов:

1. Генерация траектории однодневных абсолютных/относительных доходностей (на 10 млн. точек), описываемых процессом AR (1) с заданным параметром модели α_1 и параметрами шума γ, ξ, ε, λ.

2. Расчет траектории десятидневных доходностей из однодневных доходностей на непересекающемся окне в десять точек.

3. Расчет квантилей уровня 1%, 5%, 95%, 99% на выборках однодневных и десятидневных доходностей.

4. Расчет аппроксимации квантилей уровня 1%, 5%, 95%, 99% для десятидневных доходностей по формуле (6).

Для проведения теста использовались усредненные по активам параметры распределения шума из таблиц 7 и 8, а также коэффициент регрессии $\alpha_1 = 0.06$ Результаты теста представлены в таблицах 10 и 11.

Таблица 10. Оценка смещения метрики VaR на 10 дней при нарушении предположения о нормальности (параметры распределения оценены на абсолютных доходностях)

Квантили распределения VaR_{10d}	Истинное значение	Аппроксимация	Ошибка
5% квантиль	–197.03	–184.14	–7%
95% квантиль	202.98	190.21	–6%
1% квантиль	–296.48	–332.43	12%
99% квантиль	306.66	345.73	13%

Таблица 11. Оценка смещения метрики VaR на 10 дней при нарушении предположения о нормальности (параметры распределения оценены на относительных доходностях)

Квантили распределения VaR_{10d}	Истинное значение	Аппроксимация	Ошибка
5% квантиль	–0.11	–0.11	–4%
95% квантиль	0.14	0.12	–13%
1% квантиль	–0.17	–0.21	19%
99% квантиль	0.21	0.23	6%

Из таблиц 10, 11 видно, что нарушение предположения о нормальности распределения в зависимости от уровня значимости приводит как к недооценке, так и переоценке риска. Из результатов теста, полученных для относительных доходностей, видно влияние несимметричности распределения на оценку метрики на разных уровнях значимости. Этот факт необходимо учитывать, например, если метрика VaR используется в качестве шокового значения риск фактора портфеля для расчета регуляторного капитала на основе дельта-метода. В этом случае шоковое значение будет отличаться в зависимости от занятой позиции относительно риск фактора (покупка, продажа).

В таблице 12 приведены интервалы плотности распределения, для которых наблюдается недооценка и переоценка риска с указанием экстремальных значений смещения метрики, полученные в результате численных экспериментов.

Рисунки 4, 5 демонстрируют результаты, полученные выше.

Таблица 12. Интервалы и максимальные значения смещения метрики VaR на 10 дней при нарушении предположения о нормальности

Вид доходностей	Недооценка риска		Переоценка риска	
	Интервал	Мин. значение, %	Интервал	Макс. значение, %
Абсолютные	[2.8%; 97.2%]	–15.5	[0.1%; 2.8%) ⋃ (97.2%; 99.9%]	42.3
Относительные	[3.7%, 98.4%]	–21.1	[0.1%; 3.7%) ⋃ (98.4%; 99.9%]	56.6

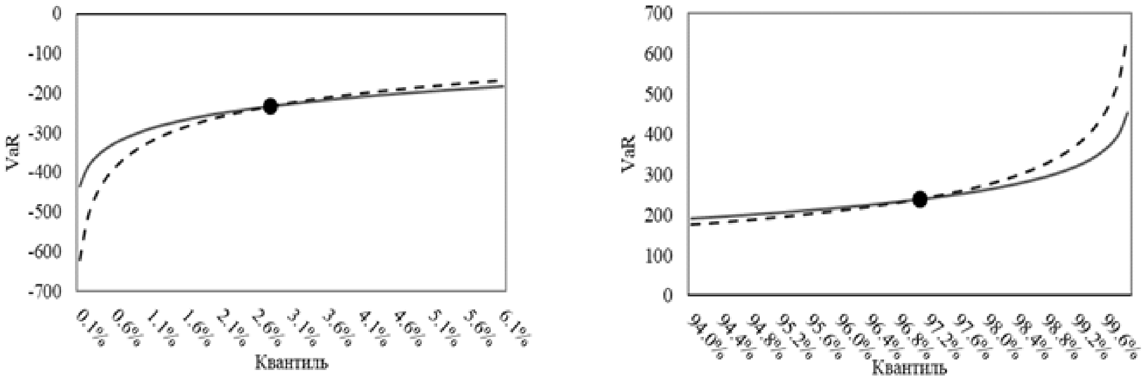

Рис. 4. Истинное значение VaR (сплошная линия) и его аппроксимация (пунктирная линия). Параметры распределения оценены на абсолютных доходностях.

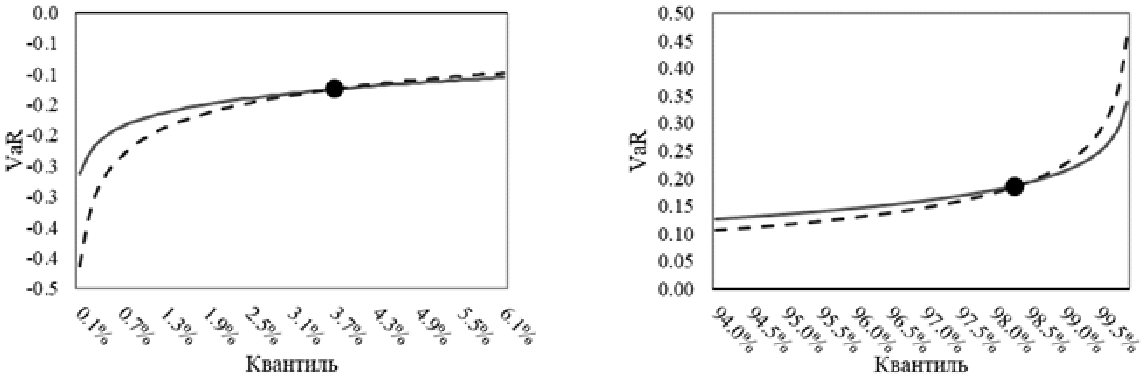

Рис. 5. Истинное значение VaR (сплошная линия) и его аппроксимация (пунктирная линия). Параметры распределения оценены на относительных доходностях.

Заключение

В настоящей статье показано, как нарушение предположения о нормальности распределения активов, широко используемое для прогнозирования финансовых временных рядов, влияет на точность оценки параметров модели авторегрессии, а также на оценку риска инвестиционного портфеля. Для данного исследования в качестве альтернативного распределения было рассмотрено семейство распределений Джонсона, которое согласуется с эмпирическим распределением доходностей акций российских компаний. Для анализа в работе были использованы данные о стоимости акций компаний Сбербанк, Газпром, Норильский Никель и Роснефть за период с 20/07/2006 по 19/01/2019.

Согласно результатам тестов, представленных в статье, нарушение предположения о нормальности распределения активов приводит к потере в точности оценки параметра модели авторегрессии в интервале [22%; 26%] для абсолютных доходностей и [33%; 38%] для относительных доходностей при изменении параметра авторегрессии в интервале [–0.9; 0.9]. Более того, показано, что на уровне значимости 5% (95%) метрика VaR, полученная в предположении о нормальности распределения доходностей активов, недооценивает истинный риск портфеля на 7% (6%) для абсолютных доходностей и 4% (13%) для относительных доходностей.

Полученные результаты подтверждают важность правильного выбора распределения доходностей активов во избежание как недооценки, так и переоценки риска инвестиционного портфеля.

Литература:

1. Указание Банка России от 15 апреля 2015 г. 3624-У «О требованиях к системе управления рисками и капиталом кредитной организации и банковской группы» (с изменениями и дополнениями).
2. Газетова М.А. Понятие и методы портфельного инвестирования. *Научно-методический электронный журнал «Концепт»*. 2016;6:31-35. URL: http://e-koncept.ru/2016/56042.htm.
3. Казаков В. А., Тарасов А.В., Зубицкий А.Б. Теоретические аспекты осуществления портфельных инвестиций. *Финансы и кредит*. 2016;7(211):27-32.
4. Markowitz H. Portfolio Selection. *The Journal of Finance.* 1952;7(1):77-91. https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1952.tb01525.x
5. Merton R. Continuous-time Finance. Oxford, U.K.: Basil Blackwell; 1990. 535 p.
6. Бронштейн Е.М., Тулупова Е.В. О формировании портфелей российских ценных бумаг на основе комбинированных квантильных мер риска. *Аудит и финансовый анализ.* 2014;3:115-120.
7. Bronshtein E.M., Kachkaeva M.M., Tulupova E.V. Control of investment portfolio based on complex quantile risk measures. *J. Comput. Syst. Sci. Int.* 2011;50(l):174-180. https://doi.org/10.1134/S1064230711010084
8. Basel Committee on Banking Supervision. International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards. Basel, Switzerland. June, 2004. 285 p.
9. Тимиркаев Д.А. Использование моделей волатильности для оценки рыночного риска. *Экономический анализ: Теория и практика.* 2010;24(189):44-53.
10. Дробыш И. Современные методы расчета величины Value at Risk при оценке рыночных рисков. *Труды ИСА РАН.* 2018;68(3):51-62. https://doi.org/10.14357/20790279180305
11. McNeil A., Frey R. Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: an extreme value approach. *J. Empirical Finance.* 2000;7(3-4):271-300. https://doi.org/10.1016/S0927-5398(00)00012-8
12. Ma J., Kim H.M. Predictive Model Selection for Forecasting Product Returns. *J. Mech. Des.* 2016;138(5): 054501. https://doi.org/10.1115/1.4033086
13. Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Прикладная статистика и основы эконометрики. М.: Изд-во "ЮНИТИ", 1998. 656 с.
14. Барышева А.Е., Марков А.С. Проблема изменчивости волатильности активов в задаче динамического управления портфелем Марковица. Труды Всероссийской научно-практической конфенции студентов, аспирантов и молодых ученых «Современные технологии принятия решений в цифровой экономике». Юрга, 2018. С. 255-257.
15. Markov A.S. Evaluation of the autoregression parameter with infinite noise dispersion. *Autom. Remote Control.* 2009;1:92-106. https://doi.org/10.1134/S000511790901007X
16. Basel Committee on Banking Supervision. Standards. Minimum capital requirements for market risk. January 2016. 92 p. URL: https://www.bis.org/bcbs/publ/d457.pdf
17. Arltová M., Fedorová, D. Selection of Unit Root Test on the Basis of Length of the Time Series and Value of AR(1) Parameter. *STATISTIKA.* 2016;96(3):47-64.
18. Abad P., Benito S., López C. Evaluating the performance of the skewed distributions to forecast Value at Risk in the Global Financial Crisis. *J. Risk.* 2016;18(5):1-28. https://doi.org/10.21314/J0R.2016.332
19. Simonato J.-G. The Performance of Johnson Distributions for Computing Value at Risk and Expected Shortfall. *J. Deriv.* 2011;19(1):7-24. https://doi.org/10.3905/jod.2011.19.1.007

20. Borak S., Härdle W.K., Weron R. Working Paper. Stable distributions. SFB 649 Discussion Paper № 2005-008. Economic Risk, Berlin. URL: http://hdl.handle.net/10419/25027

21. Johnson N.L. Bivariate distributions based on simple translation systems. *Biometrika.* 1949;36(3-4):297-304. https://doi.org/10.1093/biomet/36.3-4.297

22. Burkatovskaya Yu.B., Markov N.G., Morozov A.S., Serykh A.P. Application of Johnson Distributions to the Problem of Aerospace Images Classification. *Bulletin of Tomsk Polytechnic University.* 2007;311(5):69-73.

23. Приходько С.Б., Макарова Л.Н., Приходько А.С. Аналитическая зависимость для выбора семейства распределений Джонсона. *ПРОБЛЕМИ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ.* 2016;20:105-110.

24. Телегин А.В., Сальников В.Г., Денчик Ю.М. Применение распределения Джонсона для определения стохастических параметров дуговых замыканий. Эффективное и качественное снабжение и использование электроэнергии: сб. докл. 5-й междунар. науч.-практ. конф. в рамках специализир. форума «Expo Build Russia» (Екатеринбург. 14 апреля 2016 г.). Екатеринбург: Издательство УМЦ УП. 2016. С. 243-246.

25. Anderson T.W. On asymptotic distribution of estimates of parameters of stochastic difference equations. *Ann. Math. Statist.* 1959;30(3):676-687.

References:

1. Bank of Russia, Guideline 3624-U "On the requirements for the risk management and capital management system of a credit institution and a banking group" (with amendments and additions). 2015.

2. Gazetova M.A. The concept and methods of portfolio investment. *Nauchno-metodicheskii elektronnyi zhurnal «Kontsept» = Scientific and methodological electronic journal "Concept”.* 2016;6:31-35. URL: http://e-koncept.ru/2016/56042.htm. (in Russ.).

3. Kazakov V.A., Tarasov A.V., Zubitsky A.B. Theoretical Aspects of Portfolio Investment Implementation. *Finansy i kredit = Finance and Credit.* 2016;7(211):27-32 (in Russ.).

4. Markowitz H. Portfolio Selection. *The Journal of Finance.* 1952;7(1):77-91. https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1952.tb01525.x

5. Merton R. Continuous-time Finance. Oxford, U.K.: Basil Blackwell; 1990. 535 p.

6. Bronstein E.M., Tulupova E.V. On the forming of portfolios of the russian securities based on the complex quantile risk measures. *Audit i finansovyi analiz = Audit and financial analysis.* 2014;3:115-120 (in Russ.).

7. Bronshtein E.M., Kachkaeva M.M., Tulupova E.V. Control of investment portfolio based on complex quantile risk measures. *J. Comput. Syst. Sci. Int.* 2011;50(l):174-180. https://doi.org/10.1134/S1064230711010084

8. Basel Committee on Banking Supervision. International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards. Basel, Switzerland. June, 2004. 285 p.

9. Timirkaev D.A. Using Volatility Models to Assess Market Risk. *Ekonomicheskii analiz: Teoriya i praktika = Economic Analysis: Theory and Practice.* 2010;24(189):44-53 (in Russ.).

10. Drobysh I.I. Advanced methods of calculating Value at Risk in market risk estimation. *Trudy Instituta sistemnogo analiza rossiyskoy akademii nauk = Proceeding of the Institute for Systems Analysis of RAS.* 2018;68(3):51-62. https://doi.org/10.14357/20790279180305 (in Russ.).

11. McNeil A., Frey R. Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: an extreme value approach. *J. Empirical Finance.* 2000;7(3-4):271-300. https://doi.org/10.1016/S0927-5398(00)00012-8

12. Ma J., Kim H.M. Predictive Model Selection for Forecasting Product Returns. *J. Mech. Des.* 2016;138(5): 054501. https://doi.org/10.1115/1.4033086

13. Aivazyan S.A., Mkhitaryan V.S. *Prikladnaya statistika i osnovy ekonometriki* (Applied Statistics and Econometrics Foundations). Moscow: UNITY Publishing House; 1998. 656 p. (in Russ.).

14. Barysheva A.E., Markov A.S. The asset volatility problem in the dynamic Markowitz portfolio management. In: Trudy Vserossiiskoi nauchno-prakticheskoi konfentsii studentov, aspirantov i molodykh uchenykh «Sovremennye tekhnologii prinyatiya reshenii v tsifrovoi ekonomike» (Proc. All-Russian Scientific and Practical Conference of Students, Postgraduates and Young Scientists “Modern Decision-Making Technologies in the Digital Economy”). Yurga; 2018. P. 255-257(in Russ.).

15. Markov A.S. Evaluation of the autoregression parameter with infinite noise dispersion. *Autom. Remote Control.* 2009;1:92-106. https://doi.org/10.1134/S000511790901007X

16. Basel Committee on Banking Supervision. Standards. Minimum capital requirements for market risk. January 2016. 92 p. URL: https://www.bis.org/bcbs/publ/d457.pdf

17. Arltová M., Fedorová, D. Selection of Unit Root Test on the Basis of Length of the Time Series and Value of AR(1) Parameter. *STATISTIKA.* 2016;96(3):47-64.

18. Abad P., Benito S., López C. Evaluating the performance of the skewed distributions to forecast Value at Risk in the Global Financial Crisis. *J. Risk.* 2016;18(5):1-28. https://doi.org/10.21314/J0R.2016.332

19. Simonato J.-G. The Performance of Johnson Distributions for Computing Value at Risk and Expected Shortfall. *J. Deriv.* 2011;19(1):7-24. https://doi.org/10.3905/jod.2011.19.1.007

20. Borak S., Härdle W.K., Weron R. Working Paper. Stable distributions. SFB 649 Discussion Paper № 2005-008. Economic Risk, Berlin. URL: http://hdl.handle.net/10419/25027

21. Johnson N.L. Bivariate distributions based on simple translation systems. *Biometrika.* 1949;36(3-4):297-304. https://doi.org/10.1093/biomet/36.3-4.297

22. Burkatovskaya Yu.B., Markov N.G., Morozov A.S., Serykh A.P. Application of Johnson Distributions to the Problem of Aerospace Images Classification. *Bulletin of Tomsk Polytechnic University.* 2007;311(5):69-73.

23. Prikhod'ko S.B., Makarova L.N., Prikhod'ko A.S. The Analytical Dependence for Choosing the Johnson Distribution Family. *PROBLEMI INFORMATsIINIKh TEKhNOLOGII = PROBLEMS OF INFORMATION TECHNOLOGIES.* 2016;20:105-110 (in Russ.).

24. Telegin A.V., Salnikov V.G., Denchik Yu.M. Application of the Johnson distribution to determine the stochastic parameters of arc closures. In: Effective and high-quality supply and use of electricity: Proc. 5th Intern. scientific-practical conf. within the specialty. Forum "Expo Build Russia" (Ekaterinburg, April 14, 2016). Ekaterinburg: UMTs UP Publishing house; 2016. P. 243-246.

25. Anderson T.W. On asymptotic distribution of estimates of parameters of stochastic difference equations. *Ann. Math. Statist.* 1959;30(3):676-687.

Об авторах:

Барышева Александра Евгеньевна, аспирант Инженерной школы ядерных технологий Национального исследовательского Томского политехнического университета (634050, Россия, Томск, пр. Ленина, д. 2); программист-аналитик компании ООО «ЭКО – ТОМСК» (634034, Россия, Томск, пр. Ленина, д. 60/1, оф. 401).

Марков Александр Сергеевич, кандидат физико-математических наук, руководитель направления валидации математических моделей ООО «ЭКО – ТОМСК» (634034, Россия, Томск, пр. Ленина, д. 60/1, оф. 401).

Мицель Артур Александрович, доктор технических наук, профессор Инженерной школы ядерных технологий Национального исследовательского Томского политехнического университета (634050, Россия, Томск, пр. Ленина, д. 2)

About the authors:

Alexandra E. Barysheva, Postgraduate Student, School of Nuclear Science & Engineering, National Research Tomsk Polytechnic University (2, Lenina pr., 634050 Tomsk, Russia); lead of model validation department in «Econophysica» Ltd. (Agency Court, Ferry Works, Summer Road, Thames Ditton, Surrey KT7 0QJ, United Kingdom).

Alexander S. Markov, Cand. Sci. (Physico-Mathematical), lead of model validation department in «Econophysica» Ltd. (Agency Court, Ferry Works, Summer Road, Thames Ditton, Surrey KT7 0QJ, United Kingdom).

Artur A. Mitcel, Dr. Sci. (Engineering), Professor, School of Nuclear Science & Engineering, National Research Tomsk Polytechnic University (2, Lenina pr., 634050 Tomsk, Russia).