

ISSN 2500-316X (Online)

<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2020-8-2-43-58>



УДК 621.391

Анализ условий сохранения оптимальности амплитудно-частотной и фазочастотной характеристик при преобразованиях аналоговых и цифровых фильтров

А.В. Смирнов

МИРЭА – Российский технологический университет, Москва 119454, Россия

@Автор для переписки, e-mail: av_smirnov@mirea.ru

Для получения фильтров с заданными показателями качества (ПК) амплитудно-частотных характеристик широко применяется метод фильтров-прототипов, из которых проектируемые фильтры получают путем преобразования оси частот, сохраняющего значения указанных ПК. Однако большинство используемых частотных преобразований приводят к изменениям ПК, характеризующих фазочастотные характеристики. В работе предлагается использовать фильтры-прототипы, Парето-оптимальные по АЧХ и ФЧХ. Передаточные функции таких фильтров могут быть найдены с помощью эвристических алгоритмов оптимизации. Данный подход целесообразен, если в результате преобразования оптимальность сохраняется. Показано, что этим свойством обладают преобразования, сохраняющие результат сравнения (больше или меньше) значений ПК для фильтров, имеющих одинаковый порядок. Проверено выполнение этого условия для билинейного преобразования аналоговых фильтров низких частот (ФНЧ) в цифровые и для преобразования Константинидиса цифрового ФНЧ в другой цифровой ФНЧ. Проведенный анализ показал, что для сохранения Парето-оптимальности по АЧХ и ФЧХ частотная характеристика задержки фильтра должна достигать минимального значения при частотах, близких к нулю, а максимального – на верхней границе полосы пропускания. Этому требованию удовлетворяют ФНЧ, имеющие достаточно малую неравномерность АЧХ в этой полосе и быстрый спад АЧХ выше нее. Приведены примеры, подтверждающие эти выводы.

Ключевые слова: аналоговый фильтр, цифровой фильтр, показатель качества, частотное преобразование, амплитудно-частотная характеристика, фазочастотная характеристика, Парето-оптимальность.

Для цитирования: Смирнов А.В. Анализ условий сохранения оптимальности амплитудно-частотной и фазочастотной характеристик при преобразованиях аналоговых и цифровых фильтров. *Российский технологический журнал*. 2020;8(2):43-58. <https://doi.org/10.32362/2500316X-2020-8-2-43-58>

The analysis of conditions for preservation of gain-frequency and phase-frequency characteristics optimality under analog and digital filters transformation

Alexander V. Smirnov

MIREA – Russia Technological University, Moscow 119454, Russia

@Corresponding author, e-mail: av_smirnov@mirea.ru

Prototype filters have wide usage for the design of filters with required quality indexes (QI) of gain-frequency response (GFR). The designed filter is obtained from a prototype filter by means of frequency transformation, which preserves these QI. But most of employed frequency transformations result in variations of QI of phase-frequency response (PFR). In this paper we proposed to use prototype filters that are Pareto-optimal for QI of GFR and PFR. Transfer functions of these filters may be found by means of heuristic optimization algorithms. This method will be efficient if the frequency transformation preserves the optimality of filters. It was shown that frequency transformation has this feature if it preserves the result of QI comparison (more or less) for filters with equal orders. Compliance of this criterion was checked for bilinear transformation of analog low pass filters (LPF) into digital LPF and for Konstantinidis transformation of digital LPF into other digital LPF. The analysis showed that Pareto-optimality for QI of GFR and PFR is preserved if the delay-frequency characteristic of the filter has a minimum at zero frequency and has a maximum at the upper boundary of the pass band. These conditions are complied for LPF with sufficiently small unevenness of GFR in the pass band and sufficiently fast decline of GFR at higher frequencies. Examples confirming these conclusions are given.

Keywords: analog filter, digital filter, quality index, frequency transformation, gain-frequency response, phase-frequency response, Pareto-optimality.

For citation: Smirnov A.V. The analysis of conditions for preservation of gain-frequency and phase-frequency characteristics optimality under analog and digital filters transformation. *Rossiiskii tekhnologicheskii zhurnal = Russian Technological Journal*. 2020;8(2):43-58 (in Russ.). <https://doi.org/10.32362/2500316X-2020-8-2-43-58>

Введение

Линейная фильтрация является одним из основных видов обработки сигналов. Свойства фильтра как аналогового, так и цифрового определяются его передаточной функцией (ПФн) [1]. Первым этапом разработки фильтра является поиск аппроксимации ПФн, обеспечивающей необходимые показатели качества (ПК) амплитудно-частотной (АЧХ) и фазочастотной характеристик (ФЧХ).

Широко применяемый метод (далее – стандартный метод) получения аппроксимаций ПФн основан на использовании аналоговых фильтров-прототипов, в качестве которых используются фильтры нижних частот (ФНЧ), имеющие АЧХ, оптимальные по каким-либо ПК. К ним относятся фильтры Баттерворта, Чебышева, эллиптические. Их ПФн имеют аналитическое представление. Таблицы координат полюсов и нулей ПФн ФНЧ-прототипов, приведенных к нормированной шкале частот, на которой $f = 1$ соответствует верхней границе полосы пропускания, имеются во многих источниках информации, например, в [2]. Там же даны номограммы для определения порядка фильтра по требованиям к ПК АЧХ.

Для преобразования ФНЧ-прототипа в ФНЧ с другой шириной полосы пропускания или фильтров другого типа: верхних частот (ФВЧ), полосового, режекторного, применяют соответствующее преобразование комплексного аргумента ПФн [2, 3]. ПФн цифрового фильтра с такими же ПК АЧХ, как у аналогового фильтра получают посредством билинейного преобразования ПФн [1, 3].

Стандартный метод обеспечивает компактное представление необходимой для проектирования фильтра информации и позволяет достаточно просто находить аппроксимации ПФн с требуемыми ПК АЧХ. Имеются программные реализации, например, в пакете Matlab [4]. Однако возможности этого метода ограничены, так как он позволяет получать аппроксимации ПФн, оптимизированные только по некоторым ПК АЧХ. В то же время, во многих случаях требуется оптимизация не только по АЧХ, но и по другим характеристикам: ФЧХ, импульсной или переходной. Кроме того, и АЧХ в некоторых задачах требуется характеризовать другими ПК, например, задавать требования в области перехода от полосы пропускания к полосе задерживания.

В данной работе будем рассматривать одновременную оптимизацию по АЧХ и ФЧХ. Аналитическое решение этой задачи известно только для некоторых частных случаев [5], поэтому основной путь ее решения – применение численных методов. В работах [6–10] и многих других даны примеры получения ПФн аналоговых или цифровых фильтров, удовлетворяющих заданным требованиям к АЧХ и ФЧХ. Более общий подход состоит в нахождении множеств Парето-оптимальных аппроксимаций [11]. Напомним, что понятие Парето-оптимальности применяется в задачах оптимизации по нескольким ПК и относится к такому решению, любое изменение которого, дающее улучшение одного из ПК, приведет к ухудшению хотя бы одного из остальных ПК. Парето-оптимальные решения образуют фронт Парето в пространстве ПК. Получение аппроксимации ПФн при этом должно сводиться к выбору точки фронта Парето, обеспечивающей наиболее подходящее сочетание значений ПК. Далее под оптимальностью будем понимать именно Парето-оптимальность, опуская в части случаев для краткости записи фамилию автора этого понятия.

Получение и документирование множеств Парето-оптимальных решений для всевозможных случаев – задача, требующая чрезмерного расхода времени и ресурсов. Для реализации описанного подхода было бы полезно получить такое множество решений для нормированной частоты и использовать его точки как фильтры-прототипы, из которых получать оптимальные ПФн для произвольных границ полос пропускания и задерживания путем частотных преобразований. Вопрос состоит в том, сохранится ли оптимальность при преобразовании частоты.

В качестве первого шага будем рассматривать сохранение оптимальности при преобразовании ФНЧ-прототипа в проектируемый ФНЧ.

Анализ условий сохранения оптимальности

ПФн как аналогового, так и цифрового фильтра является функцией комплексной переменной, которую обозначим x .

Дадим определение Парето-оптимальности решения задачи многокритериальной аппроксимации ПФн. Без потери общности будем рассматривать задачу минимизации по

двум ПК $Q(H(x))$ и $R(H(x))$, где $H(x)$ – оптимизируемая ПФн, определяемая, например, координатами полюсов и нулей. Решение задачи оптимизации $H_1(x)$ будет Парето-оптимальным, если

$$\nexists H_2(x) \neq H_1(x): Q(H_2(x)) < Q(H_1(x)) \wedge R(H_2(x)) \leq R(H_1(x)), \quad (1)$$

т. е. не существует отличного от $H_1(x)$ решения $H_2(x)$, которое улучшает ПК $Q(H(x))$, не ухудшая ПК $R(H(x))$.

Введем преобразование переменной $x^* = F(x)$ и обратное преобразование $x = F^{-1}(x^*)$. Будем предполагать оба преобразования однозначными. Докажем два утверждения.

Утверждение 1. Если выполнено условие

$$\forall H(x) \in L: Q(H^*(x^*)) = Q(H(x)); R(H^*(x^*)) = R(H(x)), \quad (2)$$

где $H^*(x^*) = H(F^{-1}(x^*))$, и решение $H_1(x)$ Парето-оптимально во множестве ПФн L , то решение $H_1^*(x^*)$ также Парето-оптимально во множестве ПФн $H^*(x^*)$.

Доказательство. Пусть решение $H_1(x)$ Парето-оптимально. Предположим, что $H_1^*(x^*)$ не является Парето-оптимальным, то есть

$$\exists H_2^*(x^*) \neq H_1^*(x^*): Q(H_2^*(x^*)) < Q(H_1^*(x^*)) \wedge R(H_2^*(x^*)) \leq R(H_1^*(x^*)). \quad (3)$$

Из условия (2) и однозначности обратного преобразования следует

$$Q(H_2(x)) < Q(H_1(x)); R(H_2(x)) \leq R(H_1(x)),$$

где $H_2(x) = H_2^*(F(x))$. Но это противоречит определению (1). Следовательно, предположение (3) неверно, и решение $H_1^*(x^*)$ Парето-оптимально.

Данное утверждение, очевидно, справедливо и в случае большего числа ПК, не изменяющихся при преобразовании комплексной переменной.

Утверждение 2. Если выполнены условия

$$\forall H(x) \in L: R(H^*(x^*)) = R(H(x)), \quad (4)$$

$$\forall H_1(x), H_2(x) \in L: Q(H_1(x)) > Q(H_2(x)) \Rightarrow Q(H_1^*(x^*)) > Q(H_2^*(x^*)), \quad (5)$$

и решение $H_1(x)$ Парето-оптимально, то решение $H_1^*(x^*) = H_1(F^{-1}(x^*))$ также Парето-оптимально.

Доказательство. Пусть решение $H_1(x)$ Парето-оптимально. Предположим, что $H_1^*(x^*)$ не является Парето-оптимальным, т. е. справедливо выражение (3).

Из условий (4) и (5) и однозначности обратного преобразования следует

$$Q(H_2(x)) < Q(H_1(x)); R(H_2(x)) \leq R(H_1(x)).$$

Но это противоречит определению (1). Следовательно, сделанное предположение неверно, и решение $H_1^*(x^*)$ Парето-оптимально.

Далее свойство (5) будем называть монотонностью преобразования $F(x)$ по ПК $Q(H(x))$. Данное утверждение легко может быть обобщено на случай нескольких ПК, сохраняющих свое значение при преобразовании, при одном монотонно изменяющемся ПК.

Перейдем к анализу сохранения оптимальности при преобразованиях ФНЧ-прототипа в проектируемый ФНЧ. Рассмотрим случай аналоговых фильтров.

ПФн аналогового фильтра может быть представлена в виде [1]:

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{\sum_{k=0}^{NZ} b_k p^k}{\sum_{k=0}^{NP} a_k p^k} = K_0 \frac{\prod_{k=1}^{NZ} (p - Z_k)}{\prod_{k=1}^{NP} (p - P_k)}, \quad (6)$$

где NZ и NP , $NZ \leq NP$ – порядки многочленов в числителе и знаменателе ПФн, равные количествам ее нулей Z_k и полюсов P_k соответственно. Порядок фильтра равен значению NP .

Для получения АЧХ $K(\omega)$ и ФЧХ $\Phi(\omega)$ необходимо выполнить в (6) замену переменной $p = j\omega$ и выделить модуль и аргумент комплексной передаточной функции

$$\begin{aligned} \dot{H}(j\omega) &= \frac{E_1(\omega) + jO_1(\omega)}{E_2(\omega) + jO_2(\omega)}; \\ K(\omega) &= |\dot{H}(j\omega)| = \sqrt{\frac{E_1^2(\omega) + O_1^2(\omega)}{E_2^2(\omega) + O_2^2(\omega)}}; \\ \Phi(\omega) &= \text{Arg}(\dot{H}(j\omega)) = \text{arctg}\left(\frac{O_1(\omega)}{E_1(\omega)}\right) - \text{arctg}\left(\frac{O_2(\omega)}{E_2(\omega)}\right). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $E_1(\omega)$, $E_2(\omega)$ – многочлены, содержащие четные (even) степени ω , а $O_1(\omega)$, $O_2(\omega)$ – многочлены, содержащие нечетные (odd) степени.

Пусть дана ПФн (6) ФНЧ-прототипа с верхней границей полосы пропускания $f_{\Pi} = 1$, и задано значение f_{Π}^* верхней границы полосы пропускания проектируемого фильтра. Для получения требуемой ПФн выполняется замена переменной или денормирование [3]

$$p = \frac{p^*}{\omega_{\Pi}^*}. \quad (8)$$

Здесь p^* – аргумент денормированной ПФн, $\omega_{\Pi}^* = 2\pi f_{\Pi}^*$. В результате в соотношениях (7) происходит замена переменной

$$\omega = \frac{\omega^*}{\omega_{\Pi}^*}, \quad (9)$$

которая приводит к изменению масштаба оси частот.

Рассмотрим воздействие преобразования (9) на ПК, характеризующие АЧХ и ФЧХ.

Неравномерность АЧХ ФНЧ в полосе пропускания можно характеризовать разностью максимального и минимального затухания

$$DH_p = 20 \lg \left(\frac{\max(K(\omega))}{\min(K(\omega))} \right), \quad \omega \leq \omega_{\Pi}; \quad (10)$$

или среднеквадратическим отклонением коэффициента передачи

$$SH_p = \sqrt{\frac{1}{n_p - 1} \sum_{k=1}^{n_p} \left(K(\omega_k) - \text{mean}(K(\omega)) \right)^2}, \quad \omega \leq \omega_n, \quad (11)$$

где n_p – число отсчетов по оси частот, $\text{mean}(K(\omega))$ – среднее значение $K(\omega)$ в пределах полосы пропускания.

АЧХ в полосе задерживания характеризуется минимальным затуханием

$$H_s = -20 \lg(\max(K(\omega))), \quad \omega \geq \omega_3, \quad (12)$$

где $\omega_3 = 2\pi f_3$, а f_3 – нижняя граница полосы задерживания.

Все эти ПК определяются значениями АЧХ в полосе пропускания или задерживания, которые не изменяются при денормировании (9).

Нелинейность ФЧХ создает неравномерность частотной характеристики длительности групповой задержки (ЧХЗ), определяемой как

$$T_d(\omega) = \frac{d\Phi(\omega)}{d\omega}. \quad (13)$$

Именно неравномерность ЧХЗ приводит к искажениям сигналов. Поэтому нелинейность ФЧХ обычно характеризуют ПК, определяемыми через значения ЧХЗ. Это может быть абсолютное значение неравномерности ЧХЗ

$$\Delta T_d = \max(T_d(\omega)) - \min(T_d(\omega)) = \max\left(\frac{d\Phi(\omega)}{d\omega}\right) - \min\left(\frac{d\Phi(\omega)}{d\omega}\right), \quad \omega \leq \omega_n; \quad (14)$$

относительное значение неравномерности ЧХЗ

$$DT_d = \frac{\max(T_d(\omega)) - \min(T_d(\omega))}{\max(T_d(\omega)) + \min(T_d(\omega))} \cdot 2 = \frac{\max(d\Phi(\omega)) - \min(d\Phi(\omega))}{\max(d\Phi(\omega)) + \min(d\Phi(\omega))} \cdot 2, \quad \omega \leq \omega_n; \quad (15)$$

или среднеквадратическое отклонение значений ЧХЗ

$$ST_d = \sqrt{\frac{1}{n_p - 1} \sum_{k=1}^{n_p} \left(T_d(\omega_k) - \text{mean}(T_d(\omega)) \right)^2}, \quad \omega \leq \omega_n. \quad (16)$$

Для ПК (14)–(16) при преобразовании (9) выполняется условие монотонности (5), так как значения $d\Phi(\omega)$ и $d\omega$ для всех ПФН масштабируются одинаково.

Таким образом, все приведенные выше ПК АЧХ и ФЧХ (ЧХЗ) удовлетворяют условиям Утверждений 1 или 2. Следовательно, преобразование ФНЧ-прототипа в проектируемый ФНЧ не приводит к нарушению оптимальности характеристик фильтра по этим ПК.

Перейдем к случаю цифрового ФНЧ. ПФн рекурсивного или цифрового фильтра имеет вид [3]

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{NZ} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{NP} a_k z^{-k}}. \quad (17)$$

Для получения АЧХ $K(\Omega)$ и ФЧХ $\Phi(\Omega)$ выполняется замена переменной $z = e^{j\Omega T_d}$, где T_d – период дискретизации, $T_d = 1/f_d$, f_d – частота дискретизации.

Стандартный метод получения аппроксимаций ПФн цифрового фильтра состоит в преобразовании ПФн аналогового фильтра-прототипа [1, 3]. В связи с тем, что ПФн аналогового фильтра определена на бесконечном интервале частот $\omega \in [0, \infty)$, а ПФн цифрового фильтра – на конечном интервале частот $\Omega \in [0, \pi/T_d]$, не существует идеального преобразования, не искажающего АЧХ и ФЧХ. Наиболее широко применяется сохраняющее значения экстремумов АЧХ билинейное преобразование, имеющее вид [3]

$$p = \frac{2}{T_d} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} = 2f_d \frac{z - 1}{z + 1}. \quad (18)$$

Исследуем вопрос сохранения оптимальности ПФн при этом преобразовании.

Соотношение (18) при переходе к комплексным функциям частоты принимает вид

$$j\omega = \frac{2}{T_d} \frac{e^{j\Omega T_d} - 1}{e^{j\Omega T_d} + 1}, \quad (19)$$

откуда получается связь значений частот цифрового и аналогового фильтров

$$\Omega = \frac{2}{T_d} \operatorname{arctg} \frac{\omega T_d}{2} = 2f_d \operatorname{arctg} \frac{\omega}{2f_d}. \quad (20)$$

Обозначим $\dot{H}_A(j\omega)$ и $\dot{H}_D(e^{j\Omega T_d})$ комплексные передаточные функции, соответственно, аналогового фильтра и получаемого из него преобразованием (18) цифрового фильтра. Для любых пар значений Ω и ω в пределах диапазонов их изменений, удовлетворяющих условию (20), справедливо равенство $\dot{H}_A(j\omega)$ и $\dot{H}_D(e^{j\Omega T_d})$. Поэтому АЧХ аналогового и цифрового фильтров имеют одинаковые значения экстремумов и, следовательно, значения ПК (10) и (12) не изменяются. Относительно ПК (11) такой вывод сделать нельзя, так как зависимость (20) нелинейная. По мере увеличения частоты Ω АЧХ цифрового фильтра сжимается по оси частот (рис. 1а), что приводит к изменению результатов усреднений в определении (11).

Значения экстремумов ФЧХ $\Phi(\omega)$ также не изменяются при билинейном преобразовании. Однако в ПК (14–16) входят не значения $\Phi(\omega)$, а значения приращений $d\Phi$ или производной $\frac{d\Phi}{d\omega}$. При нелинейном преобразовании оси частот (20) эти значения, а, следовательно, и длительность задержки $T_d(\omega)$ будут возрастать по абсолютной величине тем значительнее, чем больше значение частоты Ω (рис. 1б).

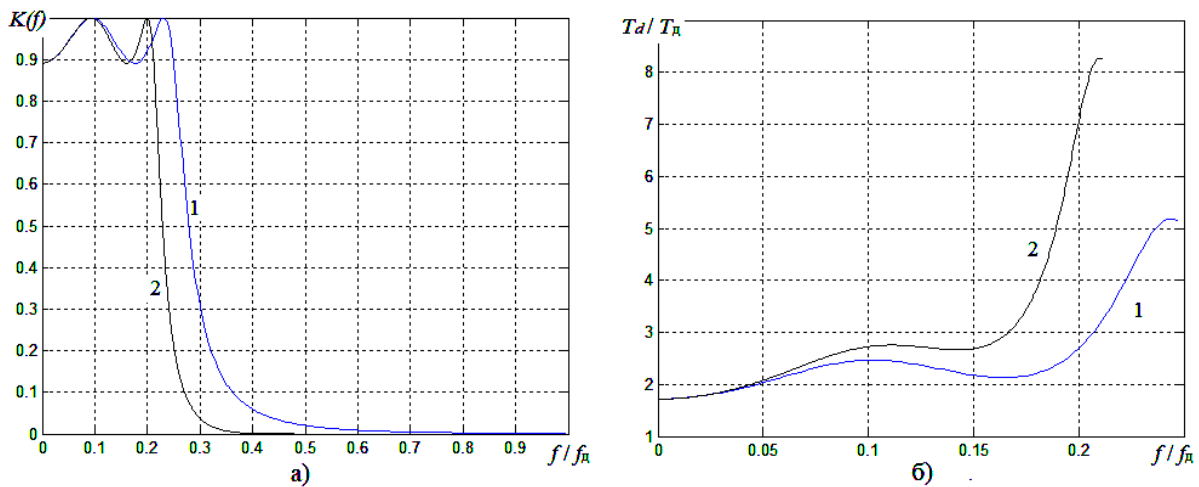


Рис. 1. АЧХ (а) и ЧХЗ (б) аналогового фильтра (кривые 1) и получаемого из него путем билинейного преобразования цифрового фильтра (кривые 2).

Рассмотрим для примера графики АЧХ и ЧХЗ для семейства нормированных Парето-оптимальных аналоговых ФНЧ с параметрами $NP = 4$; $NZ = 0$; $f_3 = 2$; $H_s = 25$ дБ, полученных по методике, описанной в работе [11] (рис. 2). Кривые 1–6 соответствуют значениям DH_p , равным 5; 3; 2; 1; 0.7 и 0.5 дБ. При уменьшении неравномерности АЧХ возрастает неравномерность ЧХЗ. В начале оси частот все ЧХЗ имеют близкие значения. Этот факт согласуется с [5], где в разделе 1.2 показано, что если АЧХ ФНЧ равномерна в полосе пропускания, а в полосе задерживания стремится к нулю как ω^{-n} , то значение задержки при $\omega = 0$ зависит только от показателя степени n , который определяется порядком фильтра. В области быстрого спада АЧХ выше $f_n = 1$ имеют место максимумы ЧХЗ. Чем резче спад АЧХ, тем выше экстремум ЧХЗ, что также соответствует результатам анализа в [5].

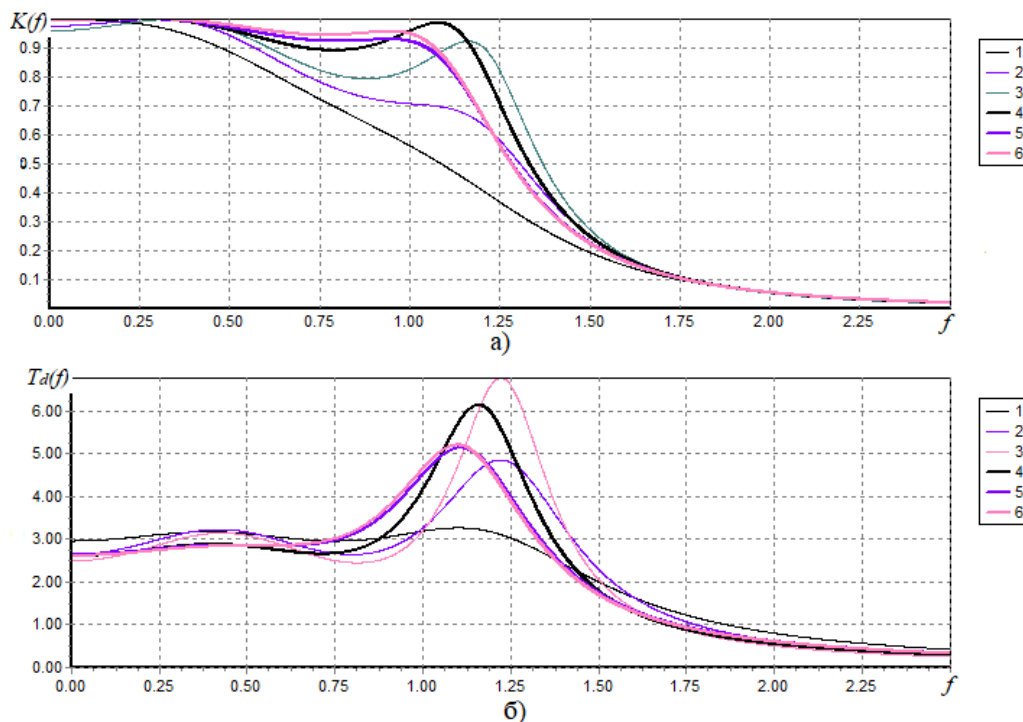


Рис. 2. АЧХ (а) и ЧХЗ (б) для Парето-оптимальных ФНЧ-прототипов.

Учитывая эти свойства ЧХЗ, сформулируем и докажем следующее утверждение.

Утверждение 3. Пусть множество L ПФН $H(p)$ характеризуется свойствами:

$$\forall H(p) \in L : T_d(0) = \tau_0, \quad (21)$$

где $T_d(\omega)$ – значение ЧХЗ на частоте ω ;

$$\forall H(p) \in L : \arg(\min(T_d(\omega))) = 0; \quad \omega \in [0, \omega_n], \quad (22)$$

где ω_n – верхняя граница полосы пропускания;

$$\forall H(p) \in L : \arg(\max(T_d(\omega))) = \omega_n; \quad \omega \in [0, \omega_n]. \quad (23)$$

Пусть задано преобразование переменной $z = F(p)$, при этом связанное с ним преобразование частоты $\Omega = G(\omega)$ имеет непрерывную первую производную, причем

$$\frac{dG(\omega)}{d\omega} > 0, \quad \omega \in [0, \omega_n], \quad (24)$$

и для ПФН $H^*(z) = H(F^{-1}(z))$ выполняются условия

$$\forall H^*(z) \in L^* : \arg(\min(T_d^*(\Omega))) = 0; \quad \Omega \in [0, \Omega_n], \quad (25)$$

где Ω_n – верхняя граница полосы пропускания фильтра после преобразования;

$$\forall H^*(z) \in L^* : \arg(\max(T_d^*(\Omega))) = \Omega_n; \quad \Omega \in [0, \Omega_n]. \quad (26)$$

Тогда преобразование $z = F(p)$ монотонно по ПК ΔT_d (14) и DT_d (15).

Доказательство.

Рассмотрим изменение значений ЧХЗ $T_d(\omega)$ в результате преобразования $z = F(p)$. Зададим произвольное значение частоты $\omega_1 \in [0, \omega_n]$ и малое приращение частоты $d\omega$. Интервал $[\omega_1, \omega_1 + d\omega]$ преобразуется в интервал $[\Omega_1, \Omega_1 + d\Omega] = [G(\omega_1), G(\omega_1 + d\omega)]$. Тогда в соответствии с определением (13), и учитывая, что $\Phi^*(\Omega_1) = \Phi(G^{-1}(\Omega_1)) = \Phi(\omega_1)$, получаем

$$T_d^*(\Omega_1) = \frac{\Phi^*(\Omega_1 + d\Omega) - \Phi^*(\Omega_1)}{d\Omega} = \frac{\Phi(\omega_1 + d\omega) - \Phi(\omega_1)}{d\omega} \cdot \frac{d\omega}{d\Omega} = T_d(\omega_1) \cdot k_d(\omega_1), \quad (27)$$

где
$$k_d(\omega) = \left(\frac{dG(\omega)}{d\omega} \right)^{-1} > 0. \quad (28)$$

Далее рассмотрим две ПФН $H_1(p)$ и $H_2(p)$. Обозначим $\tau_1 = T_{d1}(\omega_p)$, $\tau_2 = T_{d2}(\omega_p)$, $k_0 = k_d(0)$, $k_n = k_d(\omega_n)$. Допустим, что $\tau_2 > \tau_1$. Выполним преобразование $z = F(p)$ и получим ПФН $H_1^*(z)$ и $H_2^*(z)$. С учетом (21) и (27) имеем $T_{d1}^*(0) = T_{d2}^*(0) = k_0\tau_0$; $T_{d1}^*(\Omega_n) = k_n\tau_1$; $T_{d2}^*(\Omega_n) = k_n\tau_2$.

Запишем выражения для ПК (14) до и после преобразования, учитывая (22), (23), (25), (26).

$$\Delta T_{d1} = \tau_1 - \tau_0; \quad \Delta T_{d2} = \tau_2 - \tau_0; \quad \Delta T_{d1}^* = k_n \tau_1 - k_0 \tau_0; \quad \Delta T_{d2}^* = k_n \tau_2 - k_0 \tau_0.$$

Определим знаки разностей ПК для второй и первой ПФн до и после преобразования с учетом неравенства (28).

$$\begin{aligned} \Delta T_{d2} - \Delta T_{d1} &= (\tau_2 - \tau_0) - (\tau_1 - \tau_0) = \tau_2 - \tau_1 > 0; \\ \Delta T_{d2}^* - \Delta T_{d1}^* &= (k_n \tau_2 - k_0 \tau_0) - (k_n \tau_1 - k_0 \tau_0) = k_n (\tau_2 - \tau_1) > 0. \end{aligned}$$

Таким образом, по ПК (14) выполнено условие монотонности преобразования $F(p)$. Повторим этот анализ для ПК (15).

$$\begin{aligned} DT_{d1} &= \frac{\tau_1 - \tau_0}{\tau_1 + \tau_0} \cdot 2; \quad DT_{d2} = \frac{\tau_2 - \tau_0}{\tau_2 + \tau_0} \cdot 2; \\ DT_{d1}^* &= \frac{k_n \tau_1 - k_0 \tau_0}{k_n \tau_1 + k_0 \tau_0} \cdot 2; \quad DT_{d2}^* = \frac{k_n \tau_2 - k_0 \tau_0}{k_n \tau_2 + k_0 \tau_0} \cdot 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} DT_{d2} - DT_{d1} &= \frac{(\tau_2 - \tau_0)(\tau_1 + \tau_0) - (\tau_1 - \tau_0)(\tau_2 + \tau_0)}{(\tau_1 + \tau_0)(\tau_2 + \tau_0)} \cdot 2 = \frac{\tau_2 - \tau_0}{(\tau_1 + \tau_0)(\tau_2 + \tau_0)} \cdot 4 > 0; \\ DT_{d2}^* - DT_{d1}^* &= \frac{(k_n \tau_2 - k_0 \tau_0)(k_n \tau_1 + k_0 \tau_0) - (k_n \tau_1 - k_0 \tau_0)(k_n \tau_2 + k_0 \tau_0)}{(k_n \tau_2 + k_0 \tau_0)(k_n \tau_1 + k_0 \tau_0)} \cdot 2 = \frac{k_n (\tau_2 - \tau_1) k_0 \tau_0 \cdot 4}{(k_n \tau_2 + k_0 \tau_0)(k_n \tau_1 + k_0 \tau_0)} > 0. \end{aligned}$$

Таким образом, и по ПК (15) выполнено условие монотонности преобразования $F(p)$. Вернемся к билинейному преобразованию. Для преобразования (20) запишем

$$k_d(\omega) = \left(\frac{d\Omega}{d\omega} \right)^{-1} = 1 + \left(\frac{\omega}{2f_d} \right)^2. \quad (29)$$

Очевидно, условие (28) выполняется. Кроме того, $k_d(\omega)$ увеличивается с ростом частоты. Поэтому, если выполнены условия (22), (23), то и условия (25), (26) выполняются. Следовательно, для ПФн, удовлетворяющих условиям (22), (23), билинейное преобразование (18) монотонно по ПК (14) и (15). А так как ПК АЧХ при билинейном преобразовании не изменяются, то вследствие Утверждения 2, для таких ПФн сохраняется оптимальность.

Полученный результат справедлив для фильтров, ЧХЗ которых удовлетворяет условиям (21)–(23), например, для случаев 4–6 на рис. 2б. У таких фильтров АЧХ характеризуется незначительной неравномерностью в полосе пропускания и достаточно быстрым спадом выше нее. Если же АЧХ спадает плавно и спад начинается в пределах полосы пропускания, то ЧХЗ не имеет выраженного максимума, часть условий (21)–(23) не выполняется, и оптимальность при билинейном преобразовании может и не сохраняться.

Далее рассмотрим преобразование цифрового ФНЧ с верхней границей полосы пропускания Ω_n в другой цифровой ФНЧ с верхней границей полосы пропускания Ω_n^* . Для решения этой задачи применяют преобразование Константи́нидиса [3]:

$$z^* = \frac{z + \alpha}{1 + \alpha z} \quad \text{или наоборот} \quad z = \frac{z^* - \alpha}{1 - \alpha z^*}, \quad (30)$$

где

$$\alpha = \frac{\sin(\Omega_n - \Omega_n^*)}{\sin(\Omega_n + \Omega_n^*)}. \quad (31)$$

Здесь и в последующем изложении Ω – нормированная на f_d круговая частота, принимающая значения в интервале $[0, \pi]$. Преобразование частоты при этом описывается равенством

$$\Omega^* = \text{Arg} \left(\frac{e^{j\Omega} + \alpha}{1 + \alpha e^{j\Omega}} \right). \quad (32)$$

На рис. 3 показана зависимость $\Omega^*(\Omega)$ для двух примеров. В первом случае $\Omega_n = 0.2\pi$; $\Omega_n^* = 0.4\pi$; $\alpha = -0.3820$ (кривая 1). Во втором случае $\Omega_n = 0.2\pi$; $\Omega_n^* = 0.1\pi$; $\alpha = 0.3446$ (кривая 2). При $\alpha < 0$ имеет место сжатие верхней части диапазона частоты $[0, \pi]$, а при $\alpha > 0$ – сжатие его нижней части. В обоих случаях выполняется неравенство (28). В случае $\alpha = 0$ получаем тождественное преобразование $\Omega^* = \Omega$.

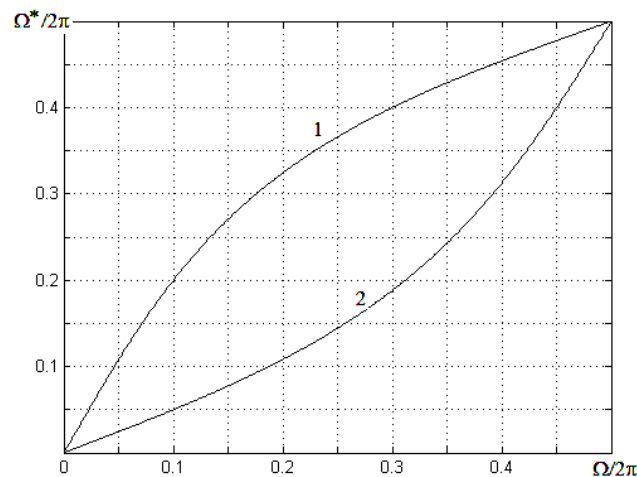


Рис. 3. Функция преобразования частоты (32) при $\alpha = -0.3820$ (1) и $\alpha = 0.3446$ (2).

На рис. 4 в качестве примера приведены АЧХ и ЧХЗ Парето-оптимальных по этим характеристикам цифровых ФНЧ 4-го порядка ($NP = 4$, $NZ = 4$). Для всех фильтров минимальное затухание в полосе задерживания $H_s = 40$ дБ. Кривые 1–6 получены при значениях неравномерности затухания в полосе пропускания равных 2; 1; 0.7; 0.5; 0.3 и 0.2 дБ, соответственно. Исходный ФНЧ (рис. 4 а,б) имеет верхнюю границу полосы пропускания $\Omega_n = 0.2\pi$ и нижнюю границу полосы задерживания $\Omega_s = 0.4\pi$.

В первом примере выполняется преобразование к частоте $\Omega_n^* = 0.4\pi$, что дает $\Omega_s^* = 0.644\pi$. АЧХ при этом растягиваются вправо без изменения значений экстремумов (на рис. 4 не показаны). ЧХЗ приведены на рис. 4в. В этом случае $\alpha < 0$, и значение коэффициента $k_d(\Omega)$ увеличивается с ростом частоты. Поэтому, аналогично рассмотренному выше билинейному преобразованию, делаем вывод, что при выполнении условий (22), (23) преобразование Константинидиса сохраняет оптимальность цифрового ФНЧ по АЧХ и ЧХЗ. В данном примере указанные условия выполнены для всех шести значений DH_p .

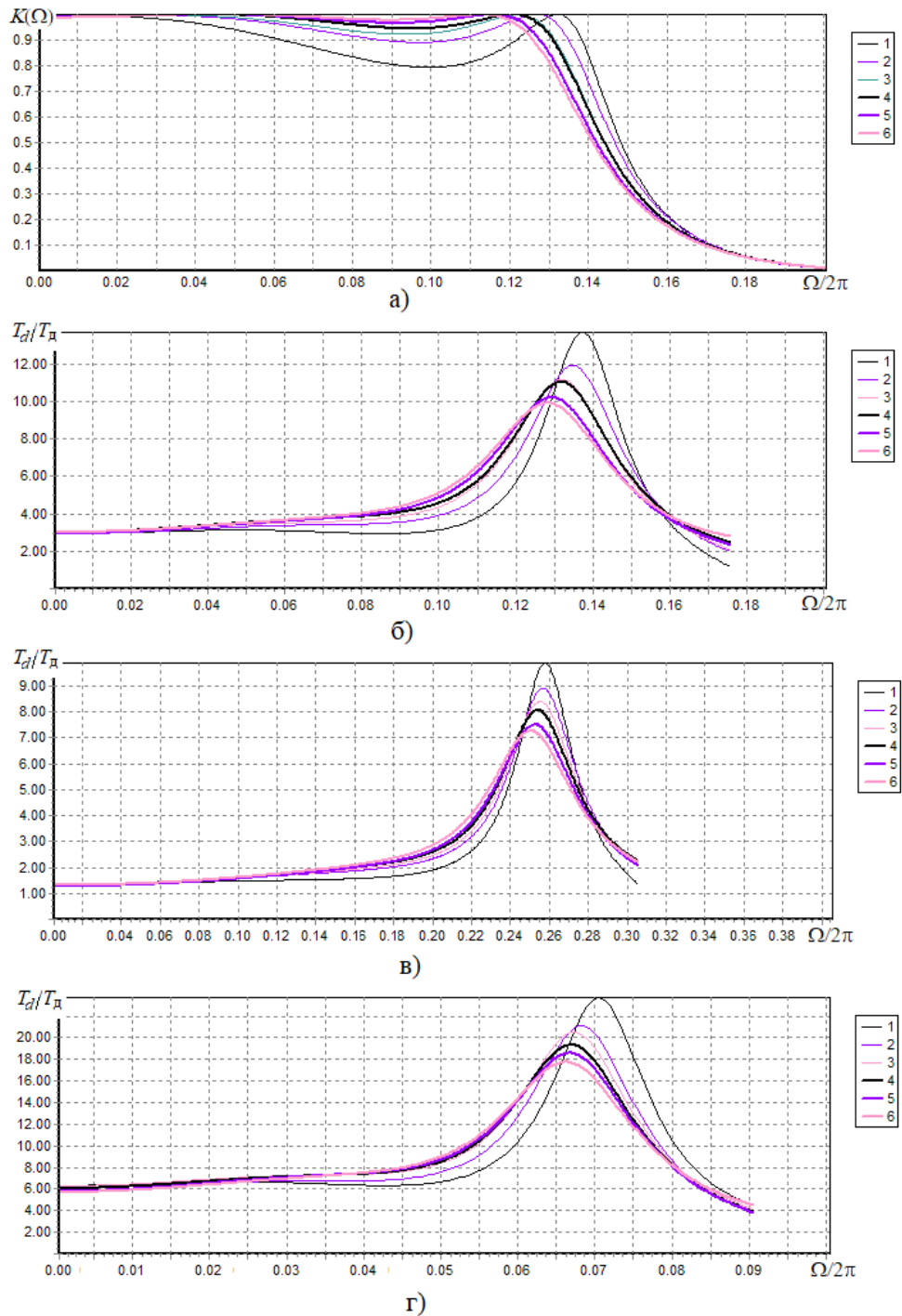


Рис. 4. АЧХ (а) и ЧХЗ (б-г) Парето-оптимальных цифровых ФНЧ 4-го порядка.

Во втором примере преобразование выполняется в сторону понижения частоты до $\Omega_n^* = 0.1\pi$. При этом получается $\Omega_s^* = 0.216\pi$. Преобразованные ЧХЗ показаны на рис. 4г. При $\alpha < 0$ значение коэффициента $k_d(\Omega)$ уменьшается с ростом частоты. Поэтому из выполнения условий (22), (23) не следует однозначное выполнение условий (25), (26). В рассматриваемом примере все эти условия выполняются для всех шести значений DH_p . Поэтому и в этом примере преобразование Константиноидиса не нарушает оптимальность цифрового ФНЧ по АЧХ и ЧХЗ. Примеры случаев с нарушением оптимальности будут даны в следующем разделе.

Таким образом, проведенный анализ позволил определить условия, при выполнении которых частотные преобразования (денормирование) аналоговых и цифровых ФНЧ сохраняют Парето-оптимальность этих фильтров по ПК, характеризующих АЧХ и ЧХЗ или ФЧХ.

Примеры сохранения и нарушения оптимальности при частотных преобразованиях

Рассмотрим несколько примеров влияния частотных преобразований на характеристики ФНЧ. В каждом примере сначала формировался набор Парето-оптимальных ФНЧ, рассматриваемых далее, как фильтры-прототипы. При этом использовался эвристический алгоритм поиска глобального экстремума, подобный описанным в [11, 12]. В каждом случае фиксировались значения характеризующих АЧХ ПК DH_p (10) и H_s (12) и осуществлялся поиск решения в виде координат полюсов и нулей ПФн, минимизирующего значение DT_d (15).

Затем проводилось частотное преобразование и рассчитывались вышеуказанные ПК преобразованного ФНЧ. Эти операции выполнялись с помощью отдельных программ в пакете Matlab. Далее проверялась оптимальность преобразованного ФНЧ. Для этого фиксировались рассчитанные для этого фильтра значения DH_p и H_s и находилось решение, минимизирующее значение DT_d . Результат поиска сравнивался со значением этого ПК для преобразованного фильтра.

В табл. 1 приведены результаты для ФНЧ-прототипов 4-го порядка с $NP = 4$, $NZ = 0$, параметры которых были даны выше в тексте, относящемся к рис. 2. Значения DT_d даны в процентах для лучшей наглядности. Билинейное преобразование сохраняет значения DH_p и H_s , характеризующие АЧХ, и заметно ухудшает ПК DT_d , характеризующий нелинейность ФЧХ и неравномерность ЧХЗ. Цифровой фильтр, получаемый в результате такого преобразования, имеет две пары нулей вида $z = -1 \pm 0 \cdot j$. Поэтому поиск оптимального решения производился для цифрового фильтра с $NP = 4$, $NZ = 4$, причем значения нулей фиксировались на указанных значениях, и изменялись только координаты полюсов.

Для первых трех строк табл. 1 ПФн, полученные в результате поиска, имеют существенно лучшие ПК DT_d , чем полученные в результате преобразования. То есть, в этих случаях оптимальность при билинейном преобразовании не сохранилась. В остальных строках табл. 1 этот ПК оказался для результата поиска также лучшим, чем для результата преобразования, но разница незначительна и может быть отнесена к особенностям работы эвристических алгоритмов, использованных для оптимизации аналоговых фильтров-прототипов и цифровых фильтров. Следовательно, в этих случаях можно считать, что оптимальность сохраняется с достаточно высокой степенью точности. Полученные

Таблица 1

	Фильтр-прототип			Результат преобразования			Результат поиска		
	DH_p , дБ	H_s , дБ	DT_d , %	DH_p , дБ	H_s , дБ	DT_d , %	DH_p , дБ	H_s , дБ	DT_d , %
1	4.9	25.0	7.3	5.0	25.2	54.1	4.9	25.0	23.1
2	3.0	25.2	20.1	3.0	25.4	66.3	3.0	25.0	37.1
3	2.0	25.4	25.2	2.0	25.6	69.7	2.0	25.0	60.6
4	1.0	25.1	44.5	1.0	25.3	88.0	1.0	25.0	84.2
5	0.7	25.0	51.6	0.7	25.2	93.7	0.7	25.0	91.1
6	0.5	25.0	55.3	0.5	25.2	96.7	0.5	25.0	95.2
7	0.3	25.0	59.2	0.3	25.2	99.9	0.3	25.0	98.2
8	0.2	25.1	61.0	0.2	25.3	101.3	0.2	25.0	99.8

результаты согласуются с проведенным выше анализом ЧХЗ на рис. 2, где кривые 1–3, соответствующие строкам 1–3 табл. 1, не имеют выраженных максимумов на верхней границе полосы пропускания и, следовательно, для них не выполняются условия Утверждения 3, достаточные для сохранения оптимальности.

В табл. 2 и 3 представлены результаты исследования преобразования Константинодиса цифрового ФНЧ 4-го порядка с параметрами, данными выше в тексте, относящимися к рис. 4. Данные в табл. 2 получены при повышении верхней границы полосы пропускания с 0.2π до 0.4π . Результаты поиска с вполне достаточной для инженерной практики точностью совпадают с результатами преобразования. Следовательно, в этих случаях оптимальность при преобразовании ФНЧ в другой сохраняется. Это согласуется с кривыми ЧХЗ на рис. 4б, в. Все эти ЧХЗ имеют минимум на нулевой частоте и максимум на верхней границе полосы пропускания, так что для них выполняются условия Утверждения 3.

Таблица 2

	Фильтр-прототип			Результат преобразования			Результат поиска		
	DH_p , дБ	H_s , дБ	DT_d , %	DH_p , дБ	H_s , дБ	DT_d , %	DH_p , дБ	H_s , дБ	DT_d , %
1	2.0	40.0	6.6	2.0	39.6	38.5	2.0	40.0	37.8
2	1.0	40.0	28.7	1.0	39.6	59.5	1.0	40.0	59.5
3	0.7	40.0	36.7	0.7	39.6	66.9	0.7	40.0	66.3
4	0.5	40.0	42.1	0.5	39.9	71.8	0.5	40.0	71.3
5	0.3	40.0	48.5	0.3	40.0	77.7	0.3	40.0	77.0
6	0.2	40.0	52.2	0.2	39.6	81.0	0.2	40.0	80.3
7	0.1	40.0	57.4	0.1	39.6	85.6	0.1	40.0	85.4

Таблица 3

	Фильтр-прототип			Результат преобразования			Результат поиска		
	DH_p , дБ	H_s , дБ	DT_d , %	DH_p , дБ	H_s , дБ	DT_d , %	DH_p , дБ	H_s , дБ	DT_d , %
1	2.0	40.0	6.6	2.0	39.5	10.4	1.8	40.0	5.3
2	1.0	40.0	28.7	1.0	39.5	21.0	1.0	40.0	21.1
3	0.7	40.0	36.7	0.7	39.5	29.0	0.7	40.0	28.7
4	0.5	40.0	42.1	0.5	39.7	34.5	0.5	40.0	34.4
5	0.3	40.0	48.5	0.3	39.9	41.0	0.3	40.0	41.2
6	0.2	40.0	52.2	0.2	39.5	44.7	0.2	40.0	44.7
7	0.1	40.0	57.4	0.1	39.5	50.0	0.1	39.8	52.1

Данные в табл. 3 получены при понижении верхней границы полосы пропускания с 0.2π до 0.1π . Здесь есть заметная разница значений DT_d для результатов преобразования и поиска в первой строке. На рис. 4г этот случай отображается графиком 1, который не имеет выраженного максимума на верхней границе полосы пропускания. Поэтому для этого случая не выполняются условия Утверждения 3. В остальных случаях, отраженных в табл. 3, оптимальность при преобразовании Константиноидиса сохраняется.

Сходные результаты были получены и при исследовании ряда других примеров.

Заключение

Проведенный анализ показал, что при выполнении определенных условий билинейное преобразование аналогового ФНЧ в цифровой и преобразование Константиноидиса одного цифрового ФНЧ в другой сохраняют Парето-оптимальность по ПК, характеризующим АЧХ и ФЧХ или ЧХЗ. Эти условия определяются Утверждениями 1–3, сформулированными и доказанными в настоящей статье. На качественном уровне можно сказать, что оптимальность сохраняется для ФНЧ, имеющих достаточно быстрый спад АЧХ и достаточно выраженный подъем ЧХЗ выше границы полосы пропускания. Данный результат согласуется со сделанным ранее на основе экспериментальных исследований выводом об условиях сохранения оптимальности при преобразовании аналоговых ФНЧ в аналоговые полосовые фильтры [13].

Выполненное исследование показало, что существует возможность формирования наборов аналоговых или цифровых ФНЧ-прототипов, Парето-оптимальных по АЧХ и ФЧХ, и использования их для нахождения ПФН цифровых ФНЧ с заданными границами полос пропускания и задерживания, также оптимальных по АЧХ и ФЧХ. Такие наборы могут быть документированы в виде таблиц координат полюсов и нулей в нормированной шкале частот или в виде компьютерных программ с встроенными базами данных. Тем самым будут существенно расширены возможности проектирования фильтров в инженерной практике.

Литература:

1. Нефедов В.И., Сигов А.С. Основы радиоэлектроники и связи: учебное пособие, под ред. В.И. Нефедова. М.: Высшая школа, 2009. 735 с. ISBN 978-5-06-006161-1
2. Букашкин С.А., Власов В.П., Змий Б.Ф. Справочник по расчету и проектированию ARC-схем, под ред. А.А. Ланне. М.: Радио и связь, 1984. 368 с.
3. Гадзиковский В.И. Методы проектирования цифровых фильтров. М.: Горячая линия – Телеком, 2007. 416 с. ISBN 978-5-9912-0007-3
4. URL: <http://www.mathworks.com>
5. Роудз Дж. Теория электрических фильтров: пер. с англ. М.: Сов. радио, 1980. 240 с.
6. Трифонов И.И. Расчет электронных цепей с заданными частотными характеристиками. М.: Радио и связь, 1988. 304 с. ISBN 5-256-00076-4
7. Slowik A., Bialko M. Design and Optimization of IIR Digital Filters with Non-Standard Characteristics Using Particle Swarm Optimization Algorithm. Proceed. of the 14th IEEE International Conference on Electronics, Circuits and Systems (ICECS 2007). 11–14 Dec. 2007; P. 162-165. <https://doi.org/10.1109/ICECS.2007.4510955>
8. Walczak K. Multicriteria design of digital filter with evolutionary optimization. Proceed. of the IEEE International Symposium on Signal Processing and Information Technology (ISSPIT), 14–17 Dec. 2011; P. 331-335. <https://doi.org/10.1109/ISSPIT.2011.6151583>
9. Sidhu D.S., Dhillon J.S., Kaur D. Design of Digital IIR Filter with Conflicting Objectives Using Hybrid Gravitational Search Algorithm. *Mathematical Problems in Engineering*. 2015; 2015. article № 282809. <http://dx.doi.org/10.1155/2015/282809>

10. Бугров В.Н. Синтез целочисленных рекурсивных фильтров с произвольно заданными селективными требованиями. *Цифровая обработка сигналов*. 2016;2:35-43.
11. Смирнов А.В. Оптимальные по Парето аппроксимации передаточных функций электрических фильтров. *Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук*. 2015;5-1:74-78.
12. Смирнов А.В. Метод поиска оптимальных дробно-чебышевских аппроксимаций АЧХ. *Журн. Радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2018;3. URL: <http://jre.cplire.ru/jre/mar18/7/text.pdf>
13. Смирнов А.В. Многокритериальная оптимизация характеристик полосовых фильтров с применением эвристического алгоритма. *Моделирование, оптимизация и информационные технологии*. 2019;7(1(24)):115-126. <https://doi.org/10.26102/2310-6018/2019.24.1.023>

References:

1. Nefedov V.I., Sigov A.S. *Osnovy radioelektroniki i svyazi* (Basic of radio electronics and communications). V.I. Nefedov (Ed.). Moscow: Vysshaya shkola; 2009. 735 p. (in Russ.). ISBN 978-5-06-006161-1
2. Bukashkin S.A., Vlasov V.P., Zmii B.F. *Spravochnik po raschetu i proektirovaniyu ARC-skhem* (Handbook of calculation and design of ARC-circuits). A.A. Lanne (Ed.). Moscow: Radio i svyaz'; 1984. 368 p. (in Russ.).
3. Gadzikovskii V.I. *Metody proektirovaniya tsifrovyykh fil'trov* (Methods of design of digital filters). Moscow: Goryachaya liniya – Telekom; 2007. 416 p. (in Russ.). ISBN 978-5-9912-0007-3
4. URL: <http://www.mathworks.com>
5. Rhodes J.D. Theory of electrical filters. John Wiley & Sons; 1976. 224 p. [Rhodes J.D. *Teoriya elektricheskikh fil'trov* (Theory of electrical filters): transl. from Engl. Moscow: Sovetskoe radio; 1980. 240 p. (in Russ.).]
6. Trifonov I.I. *Raschet elektronnykh tsepei s zadannymi chastotnymi kharakteristikami* (Calculation of electronic circuits with specified frequency characteristics. Radio i svyaz'; 1988. 304 p. (in Russ.). ISBN 5-256-00076-4
7. Slowik A., Bialko M. Design and Optimization of IIR Digital Filters with Non-Standard Characteristics Using Particle Swarm Optimization Algorithm. In: Proc. of the 14th IEEE International Conference on Electronics, Circuits and Systems (ICECS 2007), 11–14 Dec. 2007; P. 162-165. <https://doi.org/10.1109/ICECS.2007.4510955>
8. Walczak K. Multicriteria design of digital filter with evolutionary optimization. In: Proceedings of the IEEE International Symposium on Signal Processing and Information Technology (ISSPIT), 14–17 Dec. 2011; P. 331-335. <https://doi.org/10.1109/ISSPIT.2011.6151583>
9. Sidhu D.S., Dhillon J.S., Kaur D. Design of Digital IIR Filter with Conflicting Objectives Using Hybrid Gravitational Search Algorithm. *Mathematical Problems in Engineering*. 2015;2015: article No. 282809. <http://dx.doi.org/10.1155/2015/282809>
10. Bugrov V.N. Synthesis of integer-valued recursive filters with arbitrary determined selective parameters. *Tsifrovaya obrabotka signalov = Digital signal processing*. 2016;2:35-43 (in Russ.).
11. Smirnov A.V. Pareto-optimal approximations of electric filters transfer functions. *Aktual'nye problemy gumanitarnykh i estestvennykh nauk = Actual problems of the humanities and natural sciences*. 2015;5-1:74-78 (in Russ.).
12. Smirnov A.V. Method of searching for optimal gain-frequency characteristics approximations with Chebyshev rational functions. *Zhurnal radioelektroniki = J. Radio Electronics* [electronic journal]. 2018;3 (in Russ.). URL: <http://jre.cplire.ru/jre/mar18/7/text.pdf>
13. Smirnov A.V. Multiobjective optimization of bandpass filters characteristics using heuristic algorithm. *Modelirovanie, optimizatsiya i informatsionnye tekhnologii = Modeling, optimization and information technologies*. 2019;7(1(24)):115-126 (in Russ.). <https://doi.org/10.26102/2310-6018/2019.24.1.023>

Об авторе:

Смирнов Александр Витальевич, кандидат технических наук, доцент, профессор кафедры телекоммуникаций и радиотехники Института радиотехнических и телекоммуникационных систем ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78).

About the author:

Alexander V. Smirnov, Cand. Sci. (Engineering), Professor of Department of Telecommunications and Radio Techniques, Institute of Radio Engineering and Telecommunication Systems, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo Pr., Moscow 119454, Russia).