

ISSN 2500-316X (Online)

<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2020-8-2-7-22>



УДК 330.4

Анализ моделей $ADL(p, q)$, используемых для описания связей между временными рядами

Т.Р. Калугин,
А.К. Ким,
Д.А. Петрусевич[@]

МИРЭА – Российский технологический университет, Москва 119454, Россия

[@]Автор для переписки, e-mail: petrusevich@mirea.ru,

В представленной статье приведен анализ моделей, связывающих значения двух временных рядов. На первом этапе исследования каждый из них анализируется отдельно – на основе характеристик ряда строится модель $ARIMA(p, d, q)$. Взаимосвязь между временными рядами подтверждается с помощью теста на коинтеграцию. Затем строится математическая модель, связывающая значения двух рядов, – используется модель $ADL(p, q)$. При этом, для рассматриваемых рядов показано, что порядки p, q модели $ADL(p, q)$ связаны с порядками модели $ARIMA(p, d, q)$. Таким образом, при подборе математической модели $ADL(p, q)$ ограничивается число проверяемых моделей. В рамках проведённых ранее исследований выявлено, что автоматический подбор моделей $ARIMA(p, d, q)$ по значениям исследуемого ряда ограничивается малыми значениями параметров $q \leq 5, p \leq 5$. Также стремление использовать самую простую модель (с наименьшими значениями p, q) заложено в структуру информационных критериев Акаике AIC и Байесовского критерия (Шварца) BIC, которые используются для сравнения моделей $ARIMA(p, d, q)$. В представленной работе предполагается использовать модели $ADL(p, q)$, чьи максимальные значения порядков при подборе модели ограничиваются порядками моделей $ARIMA(p, d, q)$ для связываемых рядов. В ходе предшествующего исследования показано, что если отказаться от ограничения на сложность модели, можно построить модели $ARIMA(p, d, q)$ более высоких порядков p и q ($p > 5$ и/или $q > 5$), которые лучшим образом подстраиваются под значения временного ряда, чем модели $ARIMA(p, d, q)$ низких порядков. Такой результат ведёт к идее использования моделей $ADL(p, q)$ высоких порядков p и q ($p > 5$ и/или $q > 5$) вслед за использованием моделей $ARIMA(p, d, q)$ высоких порядков для описания поведения связываемых рядов. В работе представлен вычислительный эксперимент, в котором модели $ADL(p, q)$ строятся по значениям временных рядов индекса заработной платы, денежных доходов населения; производства и распределения электроэнергии, газа и воды; реального объема сельскохозяйственного производства из набора динамических рядов макроэкономической статистики РФ временного периода 2000–2018 гг.

Ключевые слова: динамические ряды макроэкономической статистики РФ, ARIMA, ADL, ARDL, коинтеграция, временные ряды, информационный критерий Акаике.

Для цитирования: Калугин Т.Р., Ким А.К., Петрусеви́ч Д.А. Анализ моделей $ADL(p, q)$, используемых для описания связей между временными рядами. *Российский технологический журнал*. 2020;8(2):7-22. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2020-8-2-7-22>

Analysis of the high order $ADL(p, q)$ models used to describe connections between time series

Timothy R. Kalugin,
Alexandra K. Kim,
Denis A. Petrushevich@

MIREA – Russian Technological University, Moscow 119454, Russia

@Corresponding author, e-mail: petrushevich@mirea.ru

In the paper the mathematical models describing connection between two time series are researched. At first each of them is investigated separately, and the $ARIMA(p, d, q)$ model is constructed. These models are based on the time series characteristics obtained during the analysis stage. The connection between two time series is confirmed with the aid of cointegration statistical tests. Then the mathematical model of the connection between series is constructed. The $ADL(p, q)$ model describes this dependence. It's shown that for the time series under investigation the orders p, q of the $ADL(p, q)$ model are connected with the $ARIMA(p, d, q)$ orders of the models describing each series separately. This step makes the set of the investigated $ADL(p, q)$ models much smaller. In the previous papers it was also shown that the $ARIMA(p, d, q)$ automatical fitting functions in popular packages use limitations on the p, q orders of the time series process: $q \leq 5, p \leq 5$. The wish to use the simplest models is also built in the structure of the Akaike (AIC) and Bayes (BIC) informational criteria. In the paper the maximal values of the $ADL(p, q)$ model orders are supposed to be the orders of the appropriate $ARIMA(p, d, q)$ series. In the previous work it was shown that using high order $ARIMA(p, d, q)$ it is possible to fit the models better. In this paper the experiments on the $ADL(p, q)$ models construction are presented. The wage index and money income index time series pair is researched, and also the gas, water and energy production and consumption index/real agricultural production index pair is investigated. The data in the 2000–2018 time period is taken from the dynamic series of macroeconomic statistics of the Russian Federation.

Keywords: dynamic series of macroeconomic statistics of the Russian Federation, ARIMA, ADL, ARDL, cointegration, time series, Akaike informational criterion

For citation: : Kalugin T.R., Kim A.K., Petrushevich D.A. Analysis of the high order $ADL(p, q)$ models used to describe connections between time series. *Rossiiskii tekhnologicheskii zhurnal = Russian Technological Journal*. 2020;8(2):7-22 (in Russ.). <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2020-8-2-7-22>

Временные ряды – инструмент, часто применяемый в разных областях науки. Они представляют собой наборы данных, содержащих информацию об одном и том же объекте статистического исследования и собранных в различные моменты времени. Примерами могут служить курсы валют, показатель индекса заработной платы и т.д. в экономике [1, 2]; показатели солнечной активности или уровня воды в озёрах и реках и т.п. в естественных науках [3, 4]; статистика количества пациентов, поступающих в некоторое медицинское учреждение [5].

Исследователями замечено, что для построения практических моделей и проведения научных экспериментов удобно оперировать временными рядами, обладающими постоянными математическим ожиданием и дисперсией, – слабо стационарными процессами (стационарными в широком смысле, с добавлением некоторых дополнительных требований) [6–9]. В то же время литературный обзор показывает, что процессы, рассматриваемые в практикоориентированных исследованиях, крайне редко обладают свойством стационарности, поэтому разработаны методы перехода к стационарным математическим моделям, например: использование спектрального анализа [10–14]; выделение и удаление из временного ряда тренда, шума, сезонных и периодических составляющих [15, 16]; переход к временным разностям d -го порядка (модель $ARIMA(p, d, q)$, интегрированная модели авторегрессии и скользящего среднего) [8, 9, 17, 18] и т.д. Чаще всего используется последний способ в связи с его сравнительной простотой, а также тем, что его реализации есть во многих популярных статистических пакетах (например, в пакетах языка статистической обработки данных R). На практике при работе с временными рядами часто требуется описывать их с помощью каких-либо математических моделей и производить прогноз значений на некоторый период в будущем.

Также решается задача о взаимосвязи двух временных рядов и причинно-следственной связи между ними: в ситуации, когда поведение временных рядов описано с помощью математических моделей (например, $ARIMA(p, d, q)$), необходимо построить модель взаимосвязи между двумя рядами [2, 19–21] (в частности, коинтеграции нестационарных рядов [22, 23]). Одна из наиболее часто используемых математических моделей, выражающая связь между временными рядами, – модель авторегрессии и распределённого лага $ADL(p, q)$ [7, 9, 11].

Представленная работа посвящена сопоставлению возможностей моделей $ARIMA(p, d, q)$, $ADL(p, q)$ по выявлению взаимозависимостей между временными рядами и прогнозированию их величин на примерах из набора динамических рядов макроэкономической статистики РФ, формируемой при участии НИУ ВШЭ, временного периода 2000–2018 гг. [1]. В качестве экспериментальных объектов исследования были использованы пары рядов: заработной платы и денежных доходов населения, а также временные ряды индекса производства и распределения электроэнергии, газа и воды и индекса реального объема сельскохозяйственного производства.

При рассмотрении перечисленных временных рядов в рамках исследования ставился вопрос об определении параметров модели, связывающей показатели двух временных рядов, после определения их порядков p, q в модели $ARIMA(p, d, q)$.

В первой части исследования представлен вычислительный эксперимент по сопоставлению временных рядов, имеющих экономическое значение: месячных показателей заработной платы и денежных доходов населения [1], которые, на первый взгляд, должны быть связаны. Графики рядов, их автокорреляционной функции (autocorrelation function, ACF) и частной автокорреляционной функции (partial autocorrelation function, PACF) [6–8] представлены на рис. 1, 2. Формально автокорреляционная функция и частная автокорреляционная функция определены только для стационарных процессов [8, 9, 17], но, при рассмотрении нестационарного процесса они являются информативными характеристиками его поведения. Дальнейший анализ следует методике, использованной в работах [24, 25].

На представленных графиках хорошо прослеживается сезонность (пики на графиках частной автокорреляционной функции, PACF) в районе 12–13-го месяца (годовая сезонность), основное отличие – в наличии пика в районе 6-го месяца в графике функции PACF заработной платы. Это означает, что модели $ARIMA(p, d, q)$ 6-го порядка ($p = 6$ или $q = 6$) могут удачно описать этот процесс. Исследованию моделей $ARIMA(p, d, q)$ высоких порядков и методике подбора наилучшей модели посвящены работы [24, 25].

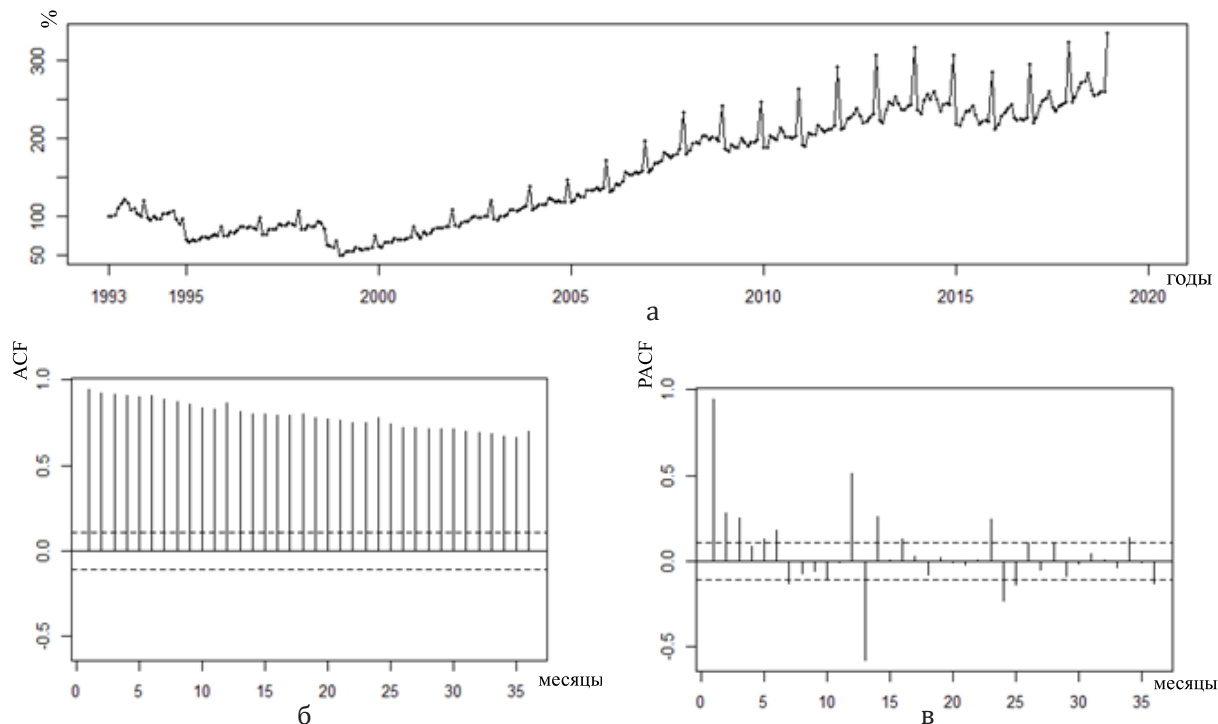


Рис. 1. Динамика месячного показателя индекса реальной заработной платы:

а) временной ряд (за 100% принято значение декабря 1992 года)

б) автокорреляционная функция ACF,

в) частная автокорреляционная функция PACF (пунктиром отмечен уровень значимости).

Для проверки стационарности ряда заработной платы проведён тест Дики-Фуллера (пакет *aTSA* языка R) [6, 7, 18], в котором строятся специальные регрессии с использованием значений временного ряда за несколько прошедших месяцев (номер лага показывает, данные скольких последних месяцев учитываются в тесте). В табл. 1 указан уровень значимости при проверке нулевой гипотезы о нестационарности ряда: $p \leq 0.01$ означает, что гипотеза отвергается, ряд стационарен; $p \geq 0.01$ – ряд не является стационарным. Для временного ряда результаты теста с точностью до 0.01 приведены в табл. 1.

В целом, по приведенным результатам для обоих периодов гипотеза о нестационарности процесса подтверждается. В полученных данных присутствует тренд, демонстрирующий рост заработной платы.

Согласно [8, 9], рассмотрев последовательные разности ограниченного порядка, можно получить стационарный ряд. Для приведения временного ряда к стационарному виду построен ряд из разностей значений соседних периодов месячного показателя индекса заработной платы (разность 1-го порядка). Модель разности первого порядка заработной платы удовлетворяет условиям стационарности по тесту Дики-Фуллера [6, 7, 18]: во всех тестах для лагов от 1 до 5 получены уровни значимости менее 0.01.

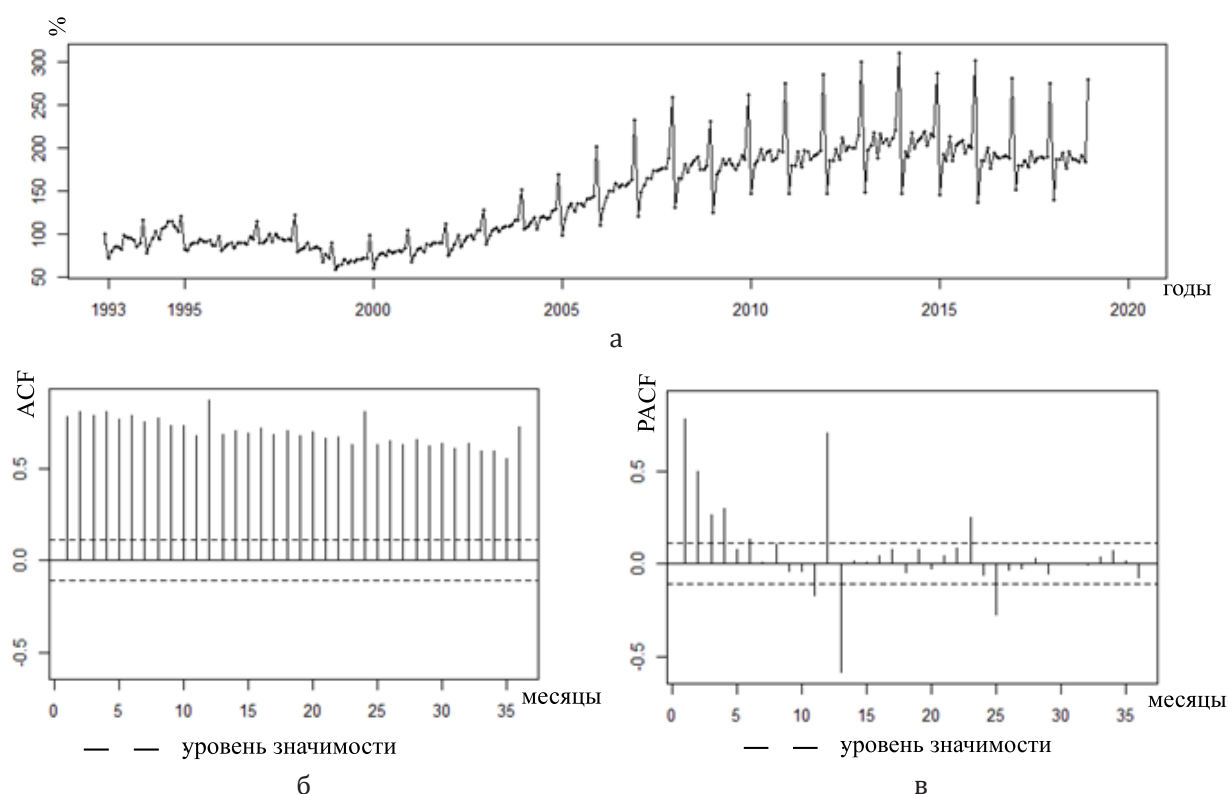


Рис. 2. Динамика месячного показателя индекса реальных денежных доходов населения
а) временной ряд (за 100% принято значение декабря 1992 года),
б) автокорреляционная функция ACF, в) частная автокорреляционная функция PACF.

Таблица 1. Результаты проверки стационарности временного ряда заработной платы (в месяц) с помощью теста Дики-Фуллера

Тип теста	Лег 1	Лег 2	Лег 3	Лег 4	Лег 5
Нет сдвига, нет тренда	0.61	0.79	0.92	0.96	0.99
Сдвиг (drift), нет тренда	0.10	0.45	0.61	0.64	0.64
Сдвиг (drift) и тренд	≤ 0.01	≤ 0.01	≤ 0.01	0.07	0.35

Модель ARIMA, автоматически подобранная по значениям временного ряда индекса заработной платы, имеет вид $ARIMA(0, 1, 3)$ с сезонностью в 12 месяцев. Автоматический поиск моделей $ARIMA(p, d, q)$ (функция *auto.arima()* пакета *stats* языка статистической обработки R) производится только среди моделей с порядком $p \leq 5$ и $q \leq 5$ (своеобразное проявление принципа «бритвы Оккама» – поиск наиболее простых моделей, описывающих процесс, с малыми p и q) согласно критерию Акаике [6, 7, 9], который накладывает штраф за сложность модели (за высокие значения параметров p и q). В связи с этой особенностью, при моделировании временного ряда в представленной работе используются не только автоматически подобранные модели, но и модели, параметры которых получены по наблюдению характера процесса на графиках автокорреляционной функции ACF и частной автокорреляционной функции PACF. Подробнее структура информационных критериев Акаике AIC и Байеса (Шварца) BIC проанализирована в [6, 7, 9, 25]. Следуя работам [24, 25], стоит проверить модели высоких порядков, которые также могут хорошо описывать поведение временного ряда. В ходе вычислительного эксперимента

рассмотрены модели 7-го порядка ($p = 7, q \leq p$ или $q = 7, p \leq q$) в связи с наличием пика на графике функции PACF в районе 7-го лага (рис. 1). В качестве сезонной компоненты выбиралась функция, подобранная при автоматическом поиске модели. Наиболее удачные модели приведены в табл. 2. Модели, которые не указаны в таблице, либо демонстрируют менее удачный результат по критерию Акаике (чем ниже значение критерия, тем лучше модель настроена по данным временного ряда), либо их коэффициенты некорректны (пределы бесконечны или не существуют).

Аналогично протестирован временной ряд денежных доходов населения. Результаты проверки стационарности по тесту Дики-Фуллера представлены в табл. 3.

Таблица 2. Значения информационного критерия Акаике для различных моделей временных рядов, описывающих индекс заработной платы

Модель временного ряда	Значение информационного критерия Акаике AIC
auto.arima = ARIMA (0, 1, 3)	4547.25
ARIMA(7, 1, 4)	4530.74
ARIMA(4, 1, 7)	4534.56
ARIMA(7, 1, 2)	4539.86
ARIMA(7, 1, 6)	4520.77

Таблица 3. Результаты проверки стационарности временного ряда денежных доходов населения (в месяц) с помощью теста Дики-Фуллера

Тип теста	Лаг 1	Лаг 2	Лаг 3	Лаг 4	Лаг 5
Нет сдвига, нет тренда	0.04	0.59	0.84	0.98	0.99
Сдвиг (drift), нет тренда	0.01	0.60	0.87	0.97	0.99
Сдвиг (drift) и тренд	0.01	0.01	0.01	0.09	0.29

Можно констатировать нестационарность рассматриваемого временного ряда, поэтому был рассмотрен временной ряд разностей первого порядка. По результатам теста Дики-Фуллера во всех тестах для лагов от 1 до 5 получены уровни значимости менее 0.01.

Модель разности первого порядка денежных доходов населения удовлетворяет условиям стационарности по тесту Дики-Фуллера [6, 7, 18]. Следовательно, для разностей первого порядка можно строить модели $ARMA(p, q) = ARIMA(p, 0, q)$ и при рассмотрении ряда заработной платы, и в случае денежных доходов населения. Отметим, что при использовании ARIMA поведение ряда моделируется только на основе его значений в предыдущие моменты времени, в зависимости не включаются другие переменные или временные ряды.

При рассмотрении временного ряда индекса денежных доходов населения [1] не выявлено предпосылок для поиска специальных сложных моделей $ARIMA(p, d, q)$ ($p > 5$ или $q > 5$). На рис. 2 видно, что у функции PACF отсутствуют пики выше уровня значимости для лагов 5, 6 и последующих вплоть до 12-го лага, который соответствует годичной сезонности. Автоматический подбор модели ARIMA даёт процесс $ARIMA(5, 1, 0)$.

Более подробный анализ критерия Акаике в применении к моделям временных рядов ARIMA приведён в работах [24–26].

Далее проверим исследуемые временные ряды на наличие коинтеграции. Под коинтеграцией подразумевается долгосрочная связь между значениями временных рядов: их линейная комбинация должна давать стационарный временной ряд. Для проверки её

наличия используется тест Грейнджера (Энгла – Грейнджера) [6–9, 22, 23, 26–28], а сама процедура принимает вид проверки статистической гипотезы. Значение p -статистик, полученных при проверке гипотезы о том, что заработная плата зависит от денежных доходов населения с учётом трёх последних лагов, и гипотезы об обратной зависимости, менее 0.001, поэтому можно констатировать наличие взаимосвязи между этими временными рядами.

При построении математических моделей, связывающих поведение временных рядов, чаще всего пользуются моделями $ADL(p, q)$ (также встречается обозначение $ARDL(p, q)$) [9, 26, 28, 29]. Другой используемый метод – модель коррекции ошибок (ECM, error correction model) можно получить из моделей $ADL(p, q)$, используя линейное преобразование [23, 29], поэтому в рамках представленной статьи ограничимся рассмотрением моделей $ADL(p, q)$.

Одно из главных достоинств моделей $ADL(p, q)$ – отсутствие требований о стационарности связываемых временных рядов [30–32]. Отсюда следует, что модель можно применять на исходных данных без удаления тренда и сезонности, но для этого требуется дополнительная обработка значений временного ряда [33, 34]. С другой стороны, перейдя к стационарным временным рядам, можно строить модели ADL без дополнительной предобработки [29–34], что и было проведено в вычислительном эксперименте (индекс заработной платы и денежных доходов населения – это временные ряды первого порядка $d = 1$, поэтому достаточно перейти к разностям первого порядка).

При описании поведения временного ряда $Y(t)$ с помощью его значений в предыдущие моменты времени и значений второго ряда $X(t)$: q – количество лагов временного ряда $Y(t)$, p – максимальный порядок лага временного ряда $X(t)$. Форма модели $ADL(p, q)$ представлена для наглядности в виде линейной регрессии (1):

$$Y(t) = \alpha_0 + \alpha_1 Y(t-1) + \dots + \alpha_q Y(t-q) + \beta_0 X(t) + \beta_1 X(t-1) + \dots + \beta_p X(t-p). \quad (1)$$

При построении взаимосвязи индексов заработной платы (модель ARIMA 7-го порядка, подобранная вручную, или модель ARIMA 3-го порядка, полученная автоматическим поиском) и денежных доходов населения (модель ARIMA 5-го порядка), есть два основных логических пути по подбору параметров p и q . С одной стороны, аналогично принципам построения информационных критериев Акаике AIC и Байеса BIC [25] можно подбирать самые простые модели с наименьшими значениями параметров p и q : $p < 3$, $q < 3$. Другое решение – использовать максимальные значения порядков p и q моделей ARIMA (p, d, q), описывающих связываемые процессы: 5-й порядок для индекса денежных доходов, 7-й или 3-й порядок – для индекса заработной платы.

В табл. 4 приведены результаты вычислительного эксперимента, в котором временной ряд индекса денежных доходов населения выражался через свои значения за несколько последних месяцев, а также с помощью значений индекса реальной заработной платы.

В табл. 4 первые две модели – самые простые по структуре. Модель первого порядка включает незначимые параметры. Согласно модели второго порядка $ADL(2, 2)$, лаги по индексу заработной платы незначимы, второй лаг по денежным доходам населения также незначим. Хотя у обеих моделей высокий коэффициент детерминации R^2 , в них большое количество незначимых регрессоров.

Таблица 4. Модели $ADL(p, q)$, связывающие значения лагов индекса заработной платы $wage(p)$ и лагов индекса денежных доходов населения $income(q)$: их характеристики R^2

Модель $ADL(p, q)$	Adjusted R^2
$ADL(1, 1)$	0.9403
$ADL(2, 2)$	0.9405
$ADL(6, 7)$	0.9737
$ADL(5, 5)$	0.7675
$ADL(4, 3)$	0.9506
$ADL(6, 6)$	0.7884

Имея ввиду порядки моделей $ARIMA(p, d, q)$, описывающих исследуемые временные ряды (модель $ARIMA$ 7-го порядка, подобранная вручную, или модель $ARIMA$ 3-го порядка, полученная с помощью автоматического подбора для индекса заработной платы; модель $ARIMA$ 5-го порядка для индекса денежных доходов населения), следует рассмотреть модели ADL 7-го, 5-го и 3-го порядков. Сначала тестировались полные модели, в которых участвовали все лаги от 1 до значений p и q , а затем незначимые параметры исключались из регрессии. Как видно, модель наиболее полным образом отражающая взаимосвязь индексов $ADL(6, 7)$, имеет высокую сложность. Её вид (значения параметров даны с точностью до 0.01) приведён в формуле (2) (все регрессоры значимы):

$$\begin{aligned}
 income(t) = & 154.00 - 0.44income(t-1) - 0.25income(t-2) - 0.22income(t-3) - \\
 & - 0.21income(t-4) - 0.31income(t-5) - 0.27income(t-6) - \\
 & - 0.16income(t-7) + 1.31wage(t) - 0.13wage(t-3) - 0.14wage(t-6).
 \end{aligned} \tag{2}$$

Кроме указанных моделей, также были проверены и другие. Исключение незначимых регрессоров из модели $ADL(3, 3)$ приводит к указанной выше модели $ADL(1, 1)$. Обработка модели $ADL(4, 4)$ ведёт к модели $ADL(4, 3)$, коэффициент детерминации которой чуть хуже, чем у модели 7-го порядка. Обработанная модель 6-го порядка $ADL(6, 6)$ демонстрирует практически такой же результат, что и проверенная модель 5-го порядка, но её сложность чуть выше. Исключение незначимых параметров из моделей 8-го и 9-го порядков приводит к исследованной выше модели 7-го порядка. Более высокие порядки в рамках этих моделей нет смысла рассматривать, т.к. исследуемые временные ряды обладают сезонностью в 1 год (12 лагов).

Естественно, следует отметить, что коэффициент R^2 в нескольких моделях довольно высокий (более 94%) и «борьба» ведётся за единицы процентов доли объяснённой дисперсии. По этой причине в исследовании произведён ещё один эксперимент.

Далее приведены результаты следующего вычислительного эксперимента по анализу временных рядов, связь которых менее очевидна: месячные показатели индекса производства и распределения электроэнергии, газа и воды и индекса реального объема сельскохозяйственного производства [1]. В ходе литературного обзора не выявлено связей между этими временными рядами. При этом, поведение функций ACF этих рядов схоже, присутствует лишь сдвиг на несколько лагов.

Аналогично проведённому для первой пары рядов анализу исследуем указанные процессы.

На представленных на рис. 3, 4 графиках хорошо прослеживается сезонность (пики на графиках частной автокорреляционной функции PACF) в районе 6, 12-го месяца, но в отличие от предыдущего примера не только отклики, соответствующие 6-му и 12-му лагу, выше уровня значимости, но и значения для нескольких соседних лагов также выше предельного уровня.

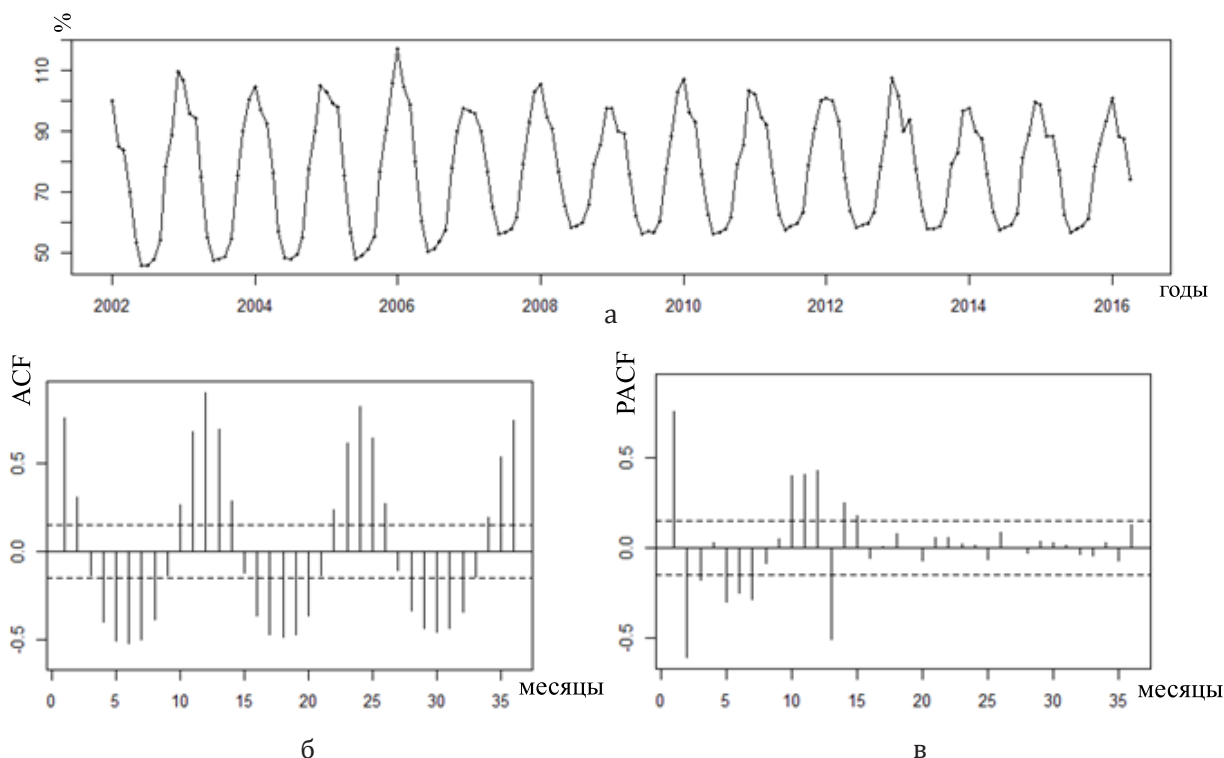


Рис. 3. Динамика месячного показателя индекса производства и распределения электроэнергии, газа и воды:

- а) временной ряд (за 100% принято значение января 2002 года);
 б) автокорреляционная функция ACF; в) частная автокорреляционная функция PACF (пунктиром отмечен уровень значимости).

При проведении теста Дики-Фуллера [6, 7, 18] для производства и распределения электроэнергии, газа и воды отвергнута гипотеза о нестационарности ряда (его результаты приведены в таблице 5). Следовательно, нет необходимости переходить к разностям соседних показателей и для описания временного ряда допустимо использовать модели $ARMA(p, q) = ARIMA(p, 0, q)$.

Автоматический подбор модели ARIMA даёт процесс второго порядка $AR(2) = ARIMA(2, 0, 0)$. Судя по графику частной автокорреляционной функции PACF, необходимо дополнительно рассмотреть модели 6-го порядка. И действительно оказывается, что все модели с $p = 6$ пре-

Таблица 5. Результаты проверки стационарности временного ряда индекса производства и распределения электроэнергии, газа и воды (в месяц) с помощью теста Дики-Фуллера

Тип теста	Ларг 1	Ларг 2	Ларг 3	Ларг 4	Ларг 5
Нет сдвига, нет тренда	0.36	0.11	0.10	0.25	0.48
Сдвиг (drift), нет тренда	≤ 0.01	≤ 0.01	≤ 0.01	≤ 0.01	≤ 0.01
Сдвиг (drift) и тренд	0.02	0.01	0.01	0.01	0.01

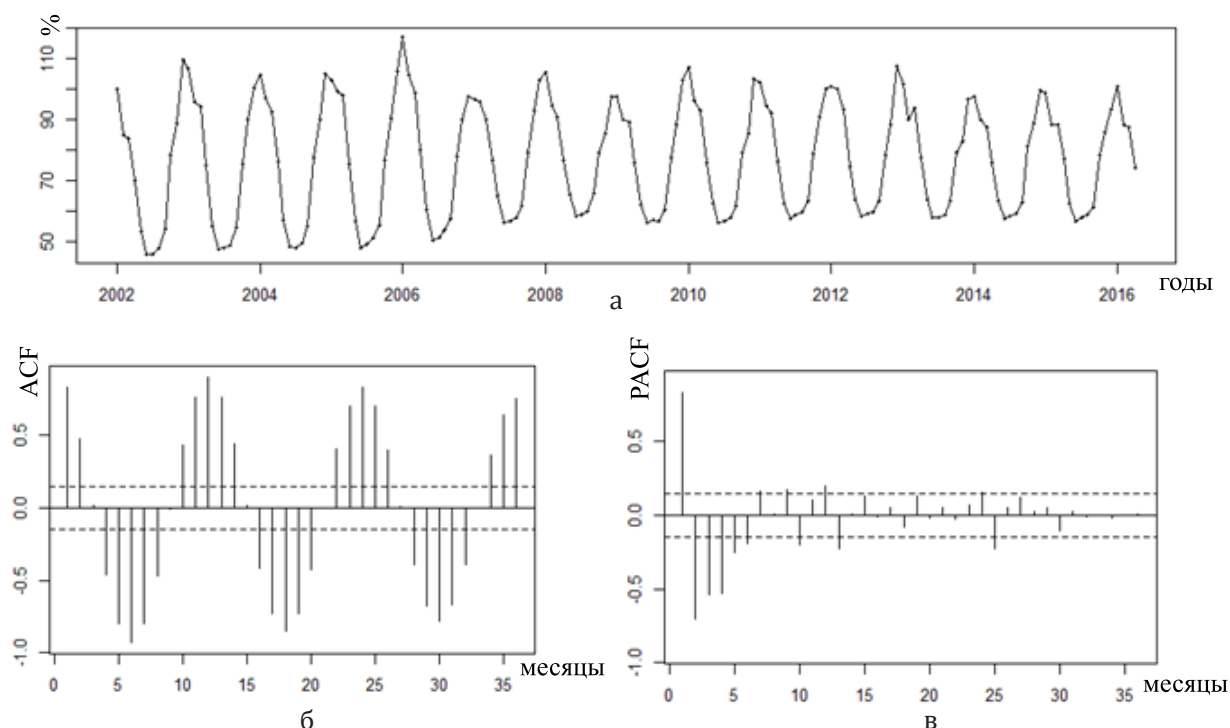


Рис. 4. Динамика месячного показателя индекса реального объема сельскохозяйственного производства: а) временной ряд (за 100% принято значение января 2002 года), б) автокорреляционная функция ACF; в) частная автокорреляционная функция PACF (пунктиром отмечен уровень значимости) .

восходят по информационному критерию Акаике автоматически подобранный процесс. Вдобавок, некоторые модели с параметром $q = 6$ также выглядят несколько лучше модели 2-го порядка. По характеру графика автокорреляционной функции ACF видно, что также следует проверить модели с параметром $p = 8$. Параметры некоторых моделей, продемонстрировавших наилучшее поведение по критерию Акаике (чем ниже значение, тем лучше модели настроены по данным временного ряда), приведены в табл. 6.

Следуя анализу, проведённому в работах [24, 25], заметим, что, не ограничиваясь малыми порядками p, q моделей $ARIMA(p, d, q)$, для некоторых эконометрических рядов удаётся построить лучшие модели с высокими значениями p, q .

Таблица 6. Значения информационного критерия Акаике для различных моделей временных рядов, описывающих индекс производства и распределения электроэнергии, газа и воды

Модель временного ряда	Значение информационного критерия Акаике AIC
auto.arima = ARIMA (2, 0, 0)	835.69
ARIMA(6, 0, 0)	828.65
ARIMA(6, 0, 1)	823.85
ARIMA(6, 0, 2)	827.41
ARIMA(6, 0, 3)	827.6
ARIMA(4, 0, 6)	827.06
ARIMA(5, 0, 6)	828.77
ARIMA(6, 0, 6)	822.31
ARIMA(8, 0, 5)	823.06
ARIMA(8, 0, 8)	824.24

Аналогично протестирован временной ряд индекса реального объема сельскохозяйственного производства. Результаты проверки стационарности по тесту Дики-Фуллера представлены в табл. 7.

Таблица 7. Результаты проверки стационарности временного ряда индекса реального объема сельскохозяйственного производства (в месяц) с помощью теста Дики-Фуллера

Тип теста	Лag 1	Лag 2	Лag 3	Лag 4	Лag 5
Нет сдвига, нет тренда	≤ 0.01	≤ 0.01	≤ 0.01	0.02	0.02
Сдвиг (drift), нет тренда	≤ 0.01	≤ 0.01	≤ 0.01	≤ 0.01	≤ 0.01
Сдвиг (drift) и тренд	≤ 0.01	≤ 0.01	≤ 0.01	≤ 0.01	≤ 0.01

Временной ряд индекса реального объема сельскохозяйственного производства явно является стационарным, согласно тесту Дики-Фуллера. При этом, на 4-м и 5-м лагах наблюдается уровень значимости выше 1%, что подсказывает возможность перехода к разностям первого порядка. Автоматический подбор моделей ARIMA(p, d, q) даёт процесс ARIMA(1, 1, 1). Наличие пиков на графике частной автокорреляционной функции PACF вплоть до 7-го лага, а также наличие пиков на графике автокорреляционной функции ACF до 8-го лага говорит о том, что модели ARIMA 7-го и 8-го порядков могут удачно моделировать представленный процесс. Вместе с тем, результаты вычислительного эксперимента, приведённые в таблице 8, не дают лучшей модели, чем ARIMA(1, 1, 1), по критерию Акаике (чем ниже значение, тем лучше модель настроена по данным временного ряда). Это связано с высокой сложностью (большими значениями порядков p и q) тестируемых моделей ARIMA(p, d, q) [25].

Таблица 8. Значения информационного критерия Акаике для различных моделей временных рядов, описывающих индекс реального объема сельскохозяйственного производства

Модель временного ряда	Значение информационного критерия Акаике AIC
auto.arima = ARIMA (1, 1, 1)	2781.37
ARIMA(7, 0, 1)	2798.91
ARIMA(1, 0, 7)	2798.97
ARIMA(3, 0, 7)	2799.49
ARIMA(4, 0, 7)	2798.41

Далее проверим исследуемые временные ряды на наличие коинтеграции с помощью теста Энгла – Грейнджера [6–9, 22, 23, 27–29]. Значение p -статистик, полученных при проверке гипотезы о том, что потребление электроэнергии, газа и воды зависит от индекса реального объема сельскохозяйственного производства с учётом трёх последних лагов, и гипотезы об обратной зависимости, менее 0.001, поэтому можно констатировать наличие взаимосвязи между этими временными рядами.

Так же, как и в предыдущем эксперименте, при построении связи между временными рядами в виде структуры ADL сначала проверены наиболее простые модели 1-го и 2-го порядка, т.к. автоматический подбор моделей ARIMA(p, d, q) дал процессы с $p = 2$ для индекса производства и распределения электроэнергии, газа и воды и $p = 1, q = 1$ для ряда индекса реального объема сельскохозяйственного производства (но тест Дики-Фуллера показал, что эту величину можно рассматривать как стационарный временной ряд). Рассмотрение более сложных моделей ARIMA(p, d, q) для этих временных рядов позволило построить более удачную связь между ними в виде модели ADL(p, q) высоких порядков (результаты приведены в табл. 9).

Таблица 9. Модели $ADL(p, q)$, связывающие значения лагов индекса производства и распределения электроэнергии, газа и воды $egw(q)$ и лагов индекса реального объема сельскохозяйственного производства $agr(p)$: их характеристики R^2

Модель $ADL(p, q)$	Adjusted R^2
$ADL(1, 1)$	0.8523
$ADL(2, 1)$	0.8712
$ADL(6, 7)$	0.967
$ADL(3, 3)$	0.9289
$ADL(4, 4)$	0.9112
$ADL(3, 5)$	0.9553
$ADL(6, 6)$	0.9642

В ходе тестирования модели $ADL(8, 8)$ были исключены незначимые регрессоры. Полученная модель имеет форму $ADL(6, 7)$. Значения её коэффициентов с точностью до 0.01 приведены в формуле (3):

$$\begin{aligned}
 eqw(t) = & 60.54 + 0.48eqw(t-1) + 0.36eqw(t-3) - 0.31eqw(t-4) - \\
 & -0.35eqw(t-5) - 0.28eqw(t-6) + 0.28eqw(t-7) - 0.01agr(t-2) + \\
 & + 0.03agr(t-3) + 0.02agr(t-5) - 0.02agr(t-6).
 \end{aligned}
 \quad (3)$$

Дополнительно для сравнения приведены коэффициенты детерминации для других моделей: 3-го, 4-го, 5-го и 6-го порядков. Как видно, по этому параметру наилучшей моделью оказывается $ADL(6, 7)$, подтверждённая другим путём, – основываясь на параметрах модели $ARIMA(p, d, q)$.

Таким образом, построив более сложные модели $ARIMA(p, d, q)$ высоких порядков ($p > 5, q > 5$) для временных процессов, взаимосвязь которых требуется исследовать, можно использовать эти значения для порядков p, q в модели $ADL(p, q)$, которые в дальнейшем тестируются. В ходе вычислительного эксперимента модели $ADL(p, q)$ с высокими порядками p, q показали лучшие значения коэффициента R^2 , чем простые модели 1-го и 2-го порядка. Отчасти, наличие таких моделей $ADL(p, q)$ подтверждает обоснованность построения сложных моделей $ARIMA(p, d, q)$ высоких порядков ($p > 5, q > 5$) [24, 25].

Для трёх из четырёх исследованных в представленной работе временных рядов удаётся построить модель $ARIMA(p, d, q)$ высокого порядка, которая обладает более удачным значением критерия Акаике, чем простая модель 1-го или 2-го порядка, даже с учётом штрафов за сложность модели, используемых в его структуре [25].

Для индекса реального объема сельскохозяйственного производства такую модель построить не удалось: модель первого порядка имеет меньшее значение информационного критерия Акаике. Но при этом, модели $ARIMA(p, d, q)$ высокого порядка, построенные для него, также ведут к использованию моделей $ADL(p, q)$, обладающих более высоким значением коэффициента R^2 .

Для обеих исследованных пар временных рядов было проверено наличие взаимосвязи между ними статистическими методами, а следом за этим были построены модели $ADL(p, q)$, связывающие значения двух различных временных рядов (в модели $ARIMA(p, d, q)$ поведение ряда прогнозируется на основе только его значений в предыдущие моменты времени). На представленных примерах продемонстрирована взаимос-

вязь порядков процессов $ARIMA(p, d, q)$, моделирующих связываемые ряды, и порядков моделей $ADL(p, q)$. Обнаружение наличия точной взаимосвязи является объектом дальнейших исследований. Её присутствие позволяет снизить количество тестируемых моделей при поиске наилучшего соотношения между временными рядами в виде модели $ADL(p, q)$.

Следует обратить внимание на то, что коэффициенты в модели $ADL(p, q)$ вычисляются на основе метода наименьших квадратов [29–34], в то время как параметры модели $ARIMA(p, d, q)$ получаются исходя из принципа максимального правдоподобия. Интересно, что, кроме этого, в разных статистических пакетах по разным алгоритмам вычисляются коэффициенты в модели $ARIMA(p, d, q)$ и «единого стандарта» нет. Обзору этих алгоритмов посвящена работа [35]. По этим причинам, напрямую нельзя построить связь между двумя временными рядами с известными моделями $ARIMA(p, d, q)$, основываясь только на величинах порядков p, q и коэффициентов в этих моделях.

В рамках дальнейшей работы над этой темой предполагается исследовать подробнее взаимосвязь порядков моделей $ADL(p, q)$ и $ARIMA(p, d, q)$ на примере разнообразных по своим характеристикам и смысловому значению наборов статистических данных, а также включить в обработку другие модели, описывающие поведение временного ряда.

Литература:

1. Единый архив экономических и социологических данных. Динамические ряды макроэкономической статистики РФ. Заработная плата; денежные доходы населения; производства и распределения электроэнергии, газа и воды; реального объема сельскохозяйственного производства. [Электронный ресурс]. URL: <http://sophist.hse.ru/hse/nindex.shtml>
2. Айвазян С.А., Березняцкий А.Н., Бродский Б.Е. Модели социально-экономических показателей России. *Прикладная эконометрика*. 2018;51:5-32.
3. Montanari A., Rosso R., Taqqu M.S. A seasonal fractional ARIMA model applied to the Nile River monthly flows at Aswan. *Water Resour. Res.* 2000;36(5):1249-1259. <https://doi.org/10.1029/2000WR900012>
4. Wang W.-C., Chau K.-W., Xu D.-M., Chen X.-Y. Improving Forecasting Accuracy of Annual Runoff Time Series Using ARIMA Based on EEMD Decomposition. *Water Resour. Manag.* 2015;29:2655-2675. <https://doi.org/10.1007/s11269-015-0962-6>
5. Kadri F., Harrou F., Chaabane S., Tahon C. Time Series Modelling and Forecasting of Emergency Department Overcrowding. *J. Med. Syst.* 2014;38:107-127. <https://doi.org/10.1007/s10916-014-0107-0>
6. Hyndman R.J., Khandakar Y. Automatic time series forecasting: The forecast package for R. *J. Stat. Soft.* 2008;27(1):1-22. <https://doi.org/10.18637/jss.v027.i03>
7. Hyndman R.J., Athanasopoulos G. Forecasting: principles and practice. Second ed. Publisher: OTexts, 2018. 382 p. ISBN-13: 978-0987507112.
8. Бокс Дж., Дженкинс Г.М. Анализ временных рядов. Прогноз и управление: пер. с англ., под ред. В.Ф. Писаренко. М.: Мир, 1974. Кн. 1. 406 с. Кн. 2. 197 с.
9. Айвазян С.А. Прикладная статистика. Основы эконометрики: в 2-х т. Т. 2. М.: Юнити-Дана, 2001. 432 с. ISBN: 5-238-00305-6.
10. Broomhead D., King G. Extracting qualitative dynamics from experimental data. *Physica D*. 1986;20:217-236. [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(86\)90031-X](https://doi.org/10.1016/0167-2789(86)90031-X)
11. Elsner J.B., Tsonis A.A. Singular Spectrum Analysis: A New Tool in Time Series Analysis. Plenum Press, 1996. 164 p.
12. Vautard R., Yiou P., Ghil M. Singular-Spectrum Analysis: A toolkit for short, noisy chaotic signals. *Physica D*. 1992;58(1):95-126. [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(92\)90103-T](https://doi.org/10.1016/0167-2789(92)90103-T)
13. Ghil M., Allen R.M., Dettinger M.D., Ide K., Kondrashov D., Mann M.E., Robertson A., Saunders A., Tian Y., Varadi F., Yiou P. Advanced spectral methods for climatic time series. *Rev. Geophys.* 2002;40(1):1-41. <https://doi.org/10.1029/2000RG000092>
14. Golyandina N., Shlemov A. Variations of Singular Spectrum Analysis for separability improvement: non-orthogonal decompositions of time series. *Statistics and Its Interface*. 2015;8(3):277-294. arXiv:1308.4022. <https://doi.org/10.4310/SII.2015.v8.n3.a3>
15. Trenberth K.E., Fasullo J., Smith L. Trends and variability in column-integrated atmospheric water vapor. *Clim. Dynam.* 2005;24:741-758. <https://doi.org/10.1007/s00382-005-0017-4>

16. Delgado-Arredondo P.A., Garcia-Perez A., Morinigo-Sotelo D., Osornio-Rios R.A., Avina-Cervantes J.G., Rostro-Gonzalez H., Romero-Troncoso R.J. Comparative Study of Time-Frequency Decomposition Techniques for Fault Detection in Induction Motors Using Vibration Analysis during Startup Transient. *Shock Vib.* 2015. Article Number 708034. <http://dx.doi.org/10.1155/2015/708034>
17. Said S.E., Dickey D.A. Testing for Unit Roots in Autoregressive-Moving Average Models of Unknown Order. *Biometrika*. 1984;71(3):599-607. <https://doi.org/10.1093/biomet/71.3.599>
18. Wold H. A Study in the Analysis of Stationary Time Series: Second revised edition. Uppsala: Almqvist and Wiksell Book Co., 1954. 236 p.
19. Granger C.W.J. Testing for causality: A personal viewpoint. *J. Econ. Dyn. Control*. 1980;2(1):329-352. [https://doi.org/10.1016/0165-1889\(80\)90069-X](https://doi.org/10.1016/0165-1889(80)90069-X)
20. Granger C.W.J. Essays in Econometrics: The Collected Papers of Clive W.J. Granger. Cambridge: Cambridge University Press, 2001. 544 p. ISBN: 9780521774963
21. Chen Y., Rangarajan G., Feng J., Ding M. Analyzing multiple nonlinear time series with extended Granger causality. *Phys. Lett. A*. 2004;324(1):26-35. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2004.02.032>
22. Hatemi J.A. Tests for cointegration with two unknown regime shifts with an application to financial market integration. *Empir. Econ.* 2008;35(3):497-505. <https://doi.org/10.1007/s00181-007-0175-9>
23. Enders W. Cointegration and Error-Correction Models. Applied Econometrics Time Series (Second ed.). New York: Wiley, 2004. P. 319–386. ISBN 978-0-471-23065-6.
24. Петрусеви́ч Д.А. Анализ математических моделей, используемых для прогнозирования эконометрических временных рядов. *Российский технологический журнал*. 2019;7(2):61-73. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2019-7-2-61-73>
25. Petrushevich D. Time series forecasting using high order arima functions. In: Proc. XIX International Multidisciplinary Scientific GeoConference SGEM 2019. V. 19; P. 673-680. <https://doi.org/10.5593/sgem2019/2.1/S07.088>
26. Engle R., Granger C. Long-Run Economic Relationships: Readings in Cointegration. New York: Oxford University Press, 1991. 312 p. ISBN: 9780198283393
27. Davidson R., MacKinnon J.G. Estimation and inference in econometrics. New York: Oxford University Press, 1993. 874 с.
28. Энгл Р.Ф., Грэнджер К. У. Дж. Коинтеграция и коррекция ошибок: представление, оценивание и тестирование. *Прикладная эконометрика*. 2015;39(3):107-135.
29. Nkoro E., Uko A.K. Autoregressive Distributed Lag (ARDL) cointegration technique: application and interpretation. *J. Stat. Economet. Meth.* 2016;5(4):63-91.
30. Wan Omar W.A., Hussin F., Ali G. H.A. The Empirical Effects of Islam on Economic Development in Malaysia. *Research in World Economy*. 2015;6(1):99-111. <https://doi.org/10.5430/rwe.v6n1p99>
31. Thao D.T., Zhang J.H. ARDL Bounds Testing Approach to Cointegration: Relationship International Trade Policy Reform and Foreign Trade in Vietnam. *Int. J. Econ. Financ.* 2016;8(8):84-94. <https://doi.org/10.5539/ijef.v8n8p84>
32. The Tung D. Remittances and Economic Growth in Vietnam: An ARDL Bounds Testing Approach. *Review of Business and Economics Studies*. 2015;3(1):80-88.
33. Pesaran M.H., Shin Y., Smith R.J. Bounds testing approaches to the analysis of level relationships. *J. Appl. Econometrics*. 2001;16(3):289-326. <https://doi.org/10.1002/jae.616>
34. Pesaran M.H., Shin Y. An Autoregressive Distributed Lag Modelling Approach to Cointegration Analysis. In: S. Strom (Ed.). Ch. 11 in Econometrics and Economic Theory in the 20th Century: The Ragnar Frisch Centennial Symposium. Cambridge: Cambridge University Press, 1999. 371-413. <https://doi.org/10.1017/CCOL521633230.011>
35. Дроздов И.Ю. Алгоритмы оценки параметров временного ряда в методе ARIMA. Дисс. ... магистра по направлению 01.04.02 «Прикладная математика и информатика». Москва, РТУ МИРЭА, 2019.

References:

1. Dynamic series of macroeconomic statistics of the Russian Federation. The wage index; money income index; the gas, water and energy production and consumption index; real agricultural production index. <http://sophist.hse.ru/hse/nindex.shtml> (in Russ.)
2. Aivazian S., Berezhnyatsky A., Brodsky B. Modeling Russian social indicators. *Prikladnaya ekonometrika = Applied econometrics*. 2018;3(51):5-32 (in Russ.).
3. Montanari A., Rosso R., Taqqu M.S. A seasonal fractional ARIMA model applied to the Nile River monthly flows at Aswan. *Water Resour. Res.* 2000;36(5):1249-59. <https://doi.org/10.1029/2000WR900012>
4. Wang W.-C., Chau K.-W., Xu D.-M., Chen X.-Y. Improving Forecasting Accuracy of Annual Runoff Time Series Using ARIMA Based on EEMD Decomposition. *Water Resour. Manag.* 2015;29:2655-75. DOI: 10.1007/s11269-015-0962-6. <https://doi.org/10.1007/s11269-015-0962-6>
5. Kadri F., Harrou F., Chaabane S., Tahon C. Time Series Modelling and Forecasting of Emergency Department Overcrowding. *J. Med. Syst.* 2014;38:107-27. <https://doi.org/10.1007/s10916-014-0107-0>
6. Hyndman R.J., Khandakar Y. Automatic time series forecasting: The forecast package for R. *J. Stat. Soft.* 2008;27(1):1-22. <https://doi.org/10.18637/jss.v027.i03>
7. Hyndman R.J., Athanasopoulos G. Forecasting: principles and practice. Second ed. Publisher: OTexts; 2018. 382 p. ISBN-13: 978-0987507112.

8. Box G., Jenkins G. Time series analysis: Forecast and management. John Wiley and Sons; 2008. 712 p. ISBN-13: 978-0470272848.
9. Aivazyan S. Prikladnaya statistika. Osnovy ekonometriki (Applied statistics. Fundamentals of econometrics). In 2 v. V 2. Moscow: Unity-Dana; 2001. 432 p. ISBN: 5-238-00305-6 (in Russ.).
10. Broomhead D., King G. Extracting qualitative dynamics from experimental data. *Physica D*. 1986;20:217-36. [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(86\)90031-X](https://doi.org/10.1016/0167-2789(86)90031-X)
11. Elsner J.B., Tsonis A.A. Singular Spectrum Analysis: A New Tool in Time Series Analysis. Plenum Press; 1996. 164 p.
12. Vautard R., Yiou P., Ghil M. Singular-Spectrum Analysis: A toolkit for short, noisy chaotic signals. *Physica D*. 1992;58(1):95-126. [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(92\)90103-T](https://doi.org/10.1016/0167-2789(92)90103-T)
13. Ghil M., Allen R.M., Dettinger M.D., Ide K., Kondrashov D., Mann M.E., Robertson A., Saunders A., Tian Y., Varadi F., Yiou P. Advanced spectral methods for climatic time series. *Rev. Geophys.* 2002;40(1):1-41. <https://doi.org/10.1029/2000RG000092>
14. Golyandina N., Shlemov A. Variations of Singular Spectrum Analysis for separability improvement: non-orthogonal decompositions of time series. *Statistics and Its Interface*. 2015;8(3):277-94. arXiv:1308.4022. <https://doi.org/10.4310/SII.2015.v8.n3.a3>
15. Trenberth K.E., Fasullo J., Smith L. Trends and variability in column-integrated atmospheric water vapor. *Clim. Dynam.* 2005;24:741–58. <https://doi.org/10.1007/s00382-005-0017-4>
16. Delgado-Arredondo P.A., Garcia-Perez A., Morinigo-Sotelo D., Osornio-Rios R.A., Avina-Cervantes J.G., Rostro-Gonzalez H., Romero-Troncoso R.J. Comparative Study of Time-Frequency Decomposition Techniques for Fault Detection in Induction Motors Using Vibration Analysis during Startup Transient. *Shock Vib.* 2015; Article No. 708034. <http://dx.doi.org/10.1155/2015/708034>
17. Said S.E., Dickey D.A. Testing for Unit Roots in Autoregressive-Moving Average Models of Unknown Order. *Biometrika*. 1984;71(3):599-607. <https://doi.org/10.1093/biomet/71.3.599>
18. Wold H. A Study in the Analysis of Stationary Time Series: Second revised edition. Uppsala: Almqvist and Wiksell Book Co.; 1954. 236 p.
19. Granger C.W.J. Testing for causality: A personal viewpoint. *J. Econ. Dyn. Control*. 1980;2(1):329-52. [https://doi.org/10.1016/0165-1889\(80\)90069-X](https://doi.org/10.1016/0165-1889(80)90069-X)
20. Granger C.W.J. Essays in Econometrics: The Collected Papers of Clive W.J. Granger. Cambridge: Cambridge University Press; 2001. 544 p. ISBN: 9780521774963
21. Chen Y., Rangarajan G., Feng J., Ding M. Analyzing multiple nonlinear time series with extended Granger causality. *Phys. Lett. A*. 2004;324(1):26-35. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2004.02.032>
22. Hatemi J.A. Tests for cointegration with two unknown regime shifts with an application to financial market integration. *Empir. Econ.* 2008;35(3):497-505. <https://doi.org/10.1007/s00181-007-0175-9>
23. Enders W. Cointegration and Error-Correction Models. Applied Econometrics Time Series (Second ed.). New York: Wiley; 2004. p. 319–386. ISBN 978-0-471-23065-6.
24. Petrusевич D.A. Analysis of mathematical models used for econometrical time series forecasting. *Rossiyskij tekhnologicheskij zhurnal = Russian Technological Journal*. 2019;7(2):61-73 (in Russ.). <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2019-7-2-61-73>
25. Petrusевич D. Time series forecasting using high order arima functions. In: Proc. XIX International Multidisciplinary Scientific GeoConference SGEM 2019. V. 19; P. 673–680. <https://doi.org/10.5593/sgem2019/2.1/S07.088>
26. Engle R., Granger C. Long-Run Economic Relationships: Readings in Cointegration. New York: Oxford University Press; 1991. 312 p. ISBN: 9780198283393
27. Davidson R., MacKinnon J.G. Estimation and inference in econometrics. New York: Oxford University Press; 1993. 874 p.
28. Engle R., Granger C. Cointegration and error correction: representation, evaluation and testing. *Prikladnaya ekonometrika = Applied econometrics*. 2015;39(3):107-35 (in Russ.).
29. Nkoro E., Uko A.K. Autoregressive Distributed Lag (ARDL) cointegration technique: application and interpretation. *J. Stat. Economet. Methods*. 2016;5(4):2016:63-91.
30. Wan Omar W.A., Hussin F., Ali G. H. A. The Empirical Effects of Islam on Economic Development in Malaysia. *Research in World Economy*. 2015;6(1):99–111. <https://doi.org/10.5430/rwe.v6n1p99>
31. Thao D.T., Zhang J. H. ARDL Bounds Testing Approach to Cointegration: Relationship International Trade Policy Reform and Foreign Trade in Vietnam. *Int. J. Econ. Financ.* 2016;8(8):84-94. <https://doi.org/10.5539/ijef.v8n8p84>
32. The Tung D. Remittances and Economic Growth in Vietnam: An ARDL Bounds Testing Approach. *Review of Business and Economics Studies*. 2015;3(1):80–8.
33. Pesaran M.H., Shin Y., Smith R.J. Bounds testing approaches to the analysis of level relationships. *J. Appl. Econometrics*. 2001;16(3):289-326. <https://doi.org/10.1002/jae.616>
34. Pesaran M.H., Shin Y. An Autoregressive Distributed Lag Modelling Approach to Cointegration Analysis. In: S. Strom (Ed.). Ch. 11 in Econometrics and Economic Theory in the 20th Century: The Ragnar Frisch Centennial Symposium. Cambridge: Cambridge University Press; 1999. 371-413. <https://doi.org/10.1017/CCOL521633230.011>
35. Drozdov I. Time series parameter evaluation algorithms in the ARIMA methods: Master thesis, 01.04.02 “Applied math and informatics”. Moscow: MIREA; 2019 (in Russ.).

Об авторах:

Калугин Тимофей Романович, студент, кафедра Высшей математики Института кибернетики ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78).

Ким Александра Константиновна, студентка, кафедра Высшей математики Института кибернетики ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78).

Петрусевич Денис Андреевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры Высшей математики Института кибернетики ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78), ORCID: 0000-0001-5325-6198, Scopus Author ID: 55900513600, Web of Science ResearcherID: AAA-6661-2020.

About the authors:

Timothy R. Kalugin, Student, Higher Mathematics Department, Institute of Cybernetics, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo Pr., Moscow 119454, Russia).

Alexandra K. Kim, Student, Higher Mathematics Department, Institute of Cybernetics, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo Pr., Moscow 119454, Russia).

Denis A. Petrusevich, Cand. Sci. (Physics and Mathematics), Associate Professor of the Higher Mathematics Department, Institute of Cybernetics, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo Pr., Moscow 119454, Russia), ORCID: 0000-0001-5325-6198, Scopus Author ID: 55900513600, Web of Science ResearcherID: AAA-6661-2020