

Поле скоростей движения точек изображения при орбитальной съемке поверхности планеты

В.Я. Геча¹,
М.Ю. Жиленев¹,
В.Б. Федоров²,
Д.А. Хрычев^{2,@},
Ю.И. Худак²,
А.В. Шатина²

¹АО «Корпорация «ВНИИЭМ», Москва 107078, Россия

²МИРЭА – Российский технологический университет, Москва 119454, Россия

@Автор для переписки, e-mail: dakford@yandex.ru

В работе получена формула для расчета скорости движения изображения произвольной точки, лежащей в конусе обзора бортовой оптико-электронной аппаратуры космического аппарата (КА), при орбитальной съемке поверхности планеты. Формула описывает зависимость скорости от координат точки в плоскости фиксации изображения, фокусного расстояния съемочной камеры, параметров орбиты КА, угловой скорости вращения планеты, координаты (истинной аномалии) КА на орбите, углов, задающих ориентацию съемочной камеры относительно орбиты, угловой скорости вращения камеры в момент съемки. С помощью полученной формулы построены примеры полей скоростей движения точек изображения для различных наборов значений параметров съемки.

Формула выведена в предположении, что планета является однородным абсолютно твердым телом, имеющим форму шара и вращающимся с постоянной угловой скоростью; как следствие, КА движется по кеплеровской орбите, в одном из фокусов которой находится планета. Несмотря на указанную идеализацию, полученная формула может быть использована при составлении программ дистанционного зондирования Земли, для расчета и оптимизации параметров компенсаторов «смаза» изображения, для решения задачи восстановления смазанного изображения и ряда других задач, возникающих при подготовке, проведении и обработке результатов космической съемки.

Ключевые слова: кеплеровская орбита, космический аппарат, орбитальная съемка планеты, скорость движения изображения.

Для цитирования: Геча В.Я., Жиленев М.Ю., Федоров В.Б., Хрычев Д.А., Худак Ю.И., Шатина А.В. Поле скоростей движения точек изображения при орбитальной съемке поверхности планеты. *Российский технологический журнал*. 2020;8(1):97-109 <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2020-8-1-97-109>

Velocity field of image points in satellite imagery of planet's surface

Vladimir Ya. Gecha¹,
Mikhail Yu. Zhilenev¹,
Viktor B. Fyodorov²,
Dmitry A. Khrychev^{2,@},
Yury I. Hudak²,
Albina V. Shatina²

¹VNIIEM Corporation"JC, Moscow 107078, Russia

²MIREA – Russian Technological University, Moscow 119454, Russia

@Corresponding author, e-mail: dakford@yandex.ru

This paper derives a formula for calculating the velocity of arbitrary point in the field of view of the satellite camera in the process of orbital imagery of the planet's surface. The formula describes the velocity as a function of the point coordinates in the image fixation plane, the focal length of the imaging camera, the orbital parameters of the satellite, the angular velocity of the planet's rotation, the coordinates of the satellite's true anomaly in the orbit, the orientation angles of the imaging camera relative to the orbit, and the angular velocity of the camera. The paper also provides examples of the formula use for calculating the velocity field of image points for different sets of imagery parameters.

The formula is derived under the assumption that the planet is a homogeneous absolutely solid body, shaped as a ball, and rotating at a constant angular velocity; as a result, the satellite moves in a Keplerian orbit, with the planet located at one of the orbit's foci. Despite this idealization, the derived formula can be used in developing algorithms for remote sensing of the Earth, for building and optimizing the image blurring compensators, for solving the problem of blurred image recovery, and for a number of other problems related to satellite imagery preparation, execution, and processing the results.

Keywords: Keplerian orbit, satellite, orbital imagery of a planet, image velocity.

For citation: Gecha V.Ya., Zhilenev M. Yu., Fyodorov V.B., Khrychev D.A., Hudak Yu.I., Shatina A.V. Thin-film heat-sensitive elements on the basis of semimetals for electromagnetic radiation receivers. *Rossiiskii tekhnologicheskii zhurnal* = *Russian Technological Journal*. 2020;8(1):97-109 (in Russ.). <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2020-8-1-97-109>

Введение

Получение космических снимков высокого пространственного разрешения – сложный высокотехнологичный процесс, связанный не только с созданием бортовой оптико-электронной аппаратуры (далее БОЭА) космического аппарата надлежащего качества, но и с разработкой целого комплекса синхронно с ней работающей обеспечивающей аппаратуры, необходимой для организации ряда сопутствующих съемке вспомогательных процессов. В частности, поскольку одним из основных факторов, приводящих к снижению качества снимка, является «смаз» первичного изображения, возникающий вследствие большой скорости движения объекта съемки относительно фиксирующей

этот объект БОЭА, возникает необходимость проведения компенсации «смаза». При этом исходной информацией, как для функционирования компенсатора любого типа, так и для решения задачи восстановления смазанного изображения является поле скоростей движения изображений точек поверхности планеты, лежащих в конусе обзора БОЭА, по плоскости фиксации изображения.

Отметим, что движение объекта съемки относительно БОЭА, обуславливающее появление «смаза», представляет собой результат суперпозиции трех движений: 1) движения космического аппарата (далее КА) по орбите, 2) вращения планеты вокруг своей оси и 3) вращения съемочного аппарата относительно КА или вращения КА с БОЭА вокруг своего центра масс. Настоящая работа посвящена построению поля скоростей движения точек изображения при нахождении КА в произвольной точке его орбиты, при произвольной ориентации БОЭА относительно этой орбиты и при произвольной угловой скорости вращения БОЭА (или КА с БОЭА). Получена аналитическая формула, выражающая скорость произвольной точки изображения через координаты этой точки в плоскости фиксации изображения, параметры орбиты КА, координаты КА на орбите, углы, задающие ориентацию БОЭА относительно орбиты, и угловую скорость вращения съемочного аппарата в момент съемки. Тем самым обобщен предшествующий результат авторов [1], состоящий в решении аналогичной задачи в частном случае съемки «в надир» (т. е. когда главная ось БОЭА направлена в центр планеты) и без учета возможного вращения БОЭА.

Полученный в настоящей работе результат может быть использован как при решении комплекса задач, связанных с дистанционным зондированием поверхности планеты с помощью КА [2–4 и др.], так и для решения обратной задачи при восстановлении смазанного изображения [4, 5 и др.]. Отметим, что в настоящей работе, как и в [1], предполагается, что планета является однородным твердым телом сферической формы, равномерно вращающимся вокруг своей оси. Подобная идеализация, разумеется, ограничивает область применимости полученных результатов, например, при решении задач, связанных с дистанционным зондированием Земли (ДЗЗ). Дальнейшее развитие тематики предполагает адаптацию результатов статьи к задачам ДЗЗ путем рассмотрения уточненной модели Земли [6].

1. Системы координат и матрицы перехода

В оговоренном выше предположении, когда планета (в дальнейшем для определенности будем говорить о Земле) является однородным твердым телом, имеющим форму шара и вращающимся вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью, центр масс K космического аппарата движется по кеплеровской эллиптической орбите, в одном из фокусов которой находится центр Земли O .

Нам понадобятся следующие три прямоугольные системы координат (рис. 1 и 2): геоцентрическая инерциальная система $OXYZ$ (ИСК), орбитальная система $Kxyz$ (ОСК) и визирная система $K\xi\eta\zeta$ (ВСК). Опишем их построение.

Начало ИСК совпадает с центром Земли O . Ось OX направлена в точку весеннего равноденствия данной эпохи, ось OZ направлена по оси вращения планеты перпендикулярно плоскости экватора к Северному полюсу мира. Ось OY дополняет ИСК до правой системы координат.

Обозначим через \mathbf{i} , \mathbf{j} и \mathbf{k} орты осей ИСК. Тогда вектор угловой скорости вращения Земли $\boldsymbol{\omega}_{\oplus} = \omega_{\oplus} \cdot \mathbf{k}$, где ω_{\oplus} – средняя угловая скорость ее вращения.

Опишем построение орбитальной системы координат. Ось Kz ОСК направлена из точки K в центр Земли O . Ось Ky – вдоль нормали к плоскости орбиты противоположно орбитальной угловой скорости, а ось Kx дополняет ОСК до правой системы.

Обозначим радиус-вектор точки K через \mathbf{R} , а орты ОСК – через \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 и \mathbf{e}_3 . Тогда согласно построению ОСК

$$\mathbf{R} = \overline{OK}, \mathbf{e}_3 = -\mathbf{R}/R, \mathbf{e}_2 = -\frac{\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}}}{|\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}}|}, \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3, \quad (1.1)$$

где $R = |\mathbf{R}|$.

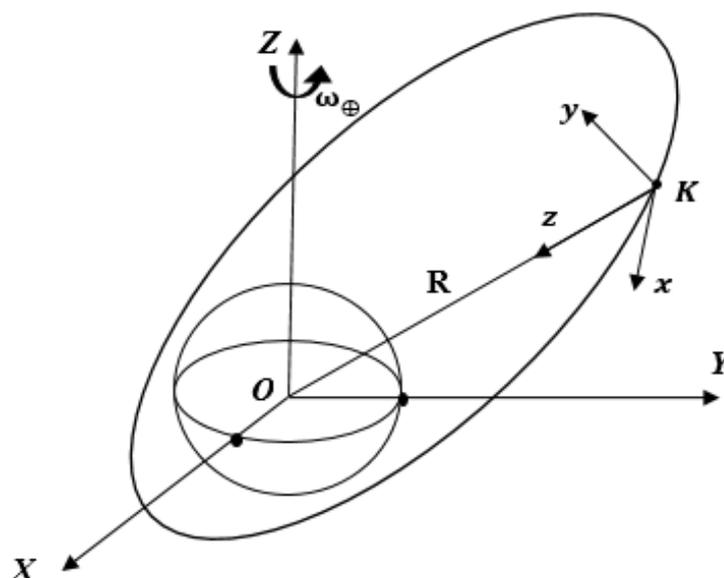


Рис. 1. Инерциальная $OXYZ$ и орбитальная $Kxyz$ системы координат.

Визирную систему координат зададим следующим образом. Ось $K\zeta$ направим в точку визирования на земной поверхности (вдоль главной оптической оси съемочной камеры). Оси $K\zeta$ и $K\eta$ проведем параллельно сторонам прямоугольника светочувствительных элементов так, чтобы получить правую систему.

Составим матрицы перехода от ВСК к орбитальной и инерциальной системам.

Положение ВСК относительно орбитальной системы будем описывать углами Эйлера α , β и γ (рис. 2). Матрица перехода $S = (s_{ij})$ от визирной системы к орбитальной представляет собой произведение трех матриц поворота на соответствующие углы:

$$S = U_1 U_2 U_3 \quad (1.2)$$

где

$$U_1 = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix}, U_3 = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

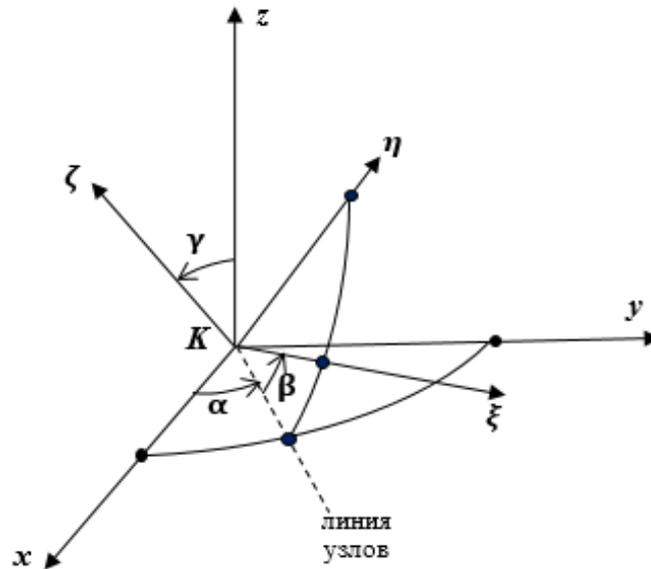


Рис. 2. Орбитальная $Kxyz$ и визирная $Kz\eta z$ системы координат.

Матрица перехода от ОСК к ИСК описывается параметрами орбиты спутника.

Положение спутника K на орбите задано, если заданы постоянные параметры орбиты a , e , i , h , g и зависящая от времени истинная аномалия ϑ . Здесь a – большая полуось, e – эксцентриситет, i – наклонение, h – долгота восходящего узла, g – долгота перигея π от восходящего узла (π – ближайшая к центру Земли O точка орбиты спутника), ϑ – угол в плоскости орбиты, который отсчитывается от направления на перигей до текущего радиус-вектора точки K (рис. 3).

Единичный вектор $\mathbf{e}_3 = -\mathbf{R} / R$ в ИСК выражается через параметры орбиты следующими формулами [7, 8]:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_3 &= (e_{3x}, e_{3y}, e_{3z}), \\ e_{3x} &= -\cos h \cos(g + \vartheta) + \sin h \cos i \sin(g + \vartheta), \\ e_{3y} &= -\sin h \cos(g + \vartheta) - \cos h \cos i \sin(g + \vartheta), \\ e_{3z} &= -\sin i \sin(g + \vartheta). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Из (1.1) и (1.3) получим выражения для координат векторов $\mathbf{e}_1 = (e_{1x}, e_{1y}, e_{1z})$ и $\mathbf{e}_2 = (e_{2x}, e_{2y}, e_{2z})$ в ИСК:

$$\begin{aligned} e_{1x} &= -\cos h \sin(g + \vartheta) - \sin h \cos i \cos(g + \vartheta), \\ e_{1y} &= -\sin h \sin(g + \vartheta) + \cos h \cos i \cos(g + \vartheta), \\ e_{1z} &= \sin i \cos(g + \vartheta), \\ e_{2x} &= -\sin h \sin i, \quad e_{2y} = \cos h \sin i, \quad e_{2z} = -\cos i. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Тем самым определена матрица перехода от ОСК к ИСК

$$T = \begin{pmatrix} e_{1x} & e_{2x} & e_{3x} \\ e_{1y} & e_{2y} & e_{3y} \\ e_{1z} & e_{2z} & e_{3z} \end{pmatrix}.$$

Наконец, обозначим через $\Sigma = (\sigma_{ij})$ матрицу перехода от ВСК к ИСК:

$$\Sigma = TS. \tag{1.5}$$

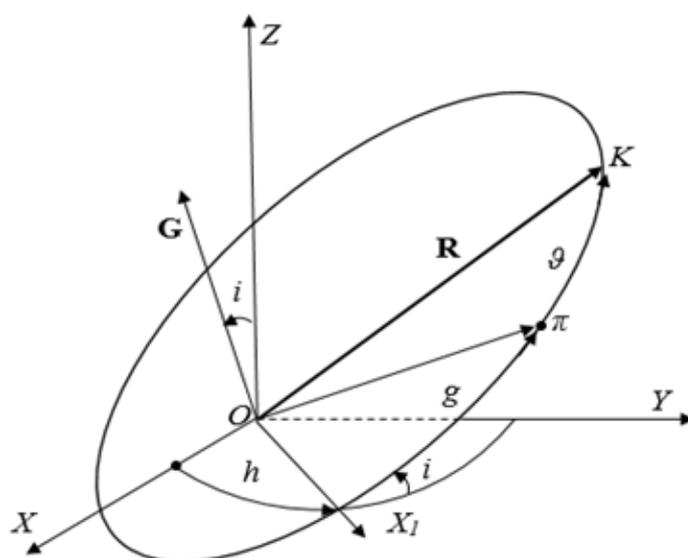


Рис. 3. Элементы кеплеровской орбиты: i – наклонение орбиты спутника (OG – ось, нормальная к плоскости орбиты); h – долгота восходящего узла (угол между осью OX и линией OX_1 пересечения плоскости орбиты спутника с плоскостью OXY); g – долгота перигея π от восходящего узла; ϑ – истинная аномалия.

2. Скорость движения точек изображения при орбитальной съемке планеты

Для нахождения скорости движения точек изображения при орбитальной съемке Земли рассмотрим следующую условную модель съемочной камеры. Будем предполагать, что главный фокус камеры находится в центре масс спутника – точке K , а плоскость Π фиксации изображений точек Земли перпендикулярна линии визирования и удалена от точки K на расстояние d (фокусное расстояние камеры).

Предполагается, что съемочная камера (или спутник с камерой) может вращаться вокруг точки K . Положение камеры относительно ОСК описывается введенной выше матрицей перехода S от ВСК к ОСК, а скорость вращения – вектором мгновенной угловой скорости

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 + \omega_3 \mathbf{e}_3,$$

где

$$\begin{cases} \omega_1 = \dot{\beta} \cos \alpha + \dot{\gamma} \sin \alpha \sin \beta, \\ \omega_2 = \dot{\beta} \sin \alpha - \dot{\gamma} \cos \alpha \sin \beta, \\ \omega_3 = \dot{\alpha} + \dot{\gamma} \cos \beta. \end{cases}$$

Поскольку угловая скорость орбитальной системы координат относительно инерциальной равна $-\dot{\vartheta}\mathbf{e}_2$ (см. построение ОСК), по правилу сложения угловых скоростей [9] угловая скорость съёмочной камеры в ИСК есть

$$\mathbf{\Omega} = \omega_1 \mathbf{e}_1 + (\omega_2 - \dot{\vartheta}) \mathbf{e}_2 + \omega_3 \mathbf{e}_3. \quad (2.1)$$

Отметим, что производная $\dot{\vartheta}$ выражается через элементы кеплеровской орбиты формулой [7, 8]

$$\dot{\vartheta} = \frac{(1 + e \cos \vartheta)^2}{(1 - e^2)^{3/2}} n, \quad (2.2)$$

где $n = \sqrt{fM_{\oplus} a^{-3}}$ – среднее движение спутника по орбите (f – универсальная гравитационная постоянная, M_{\oplus} – масса Земли).

Пусть N – произвольная точка земной поверхности, лежащая в конусе обзора БОЭА, а точка M – изображение точки N на плоскости фиксации изображения Π (рис. 4). Как уже отмечалось, вследствие вращения Земли и движения КА точка M перемещается по плоскости Π . Нашей целью является определение скорости \mathbf{v}_M точки M в ВСК.

Скорость точки M в инерциальной системе отсчета, согласно правилу сложения скоростей [9], равна $\frac{d}{dt} \overline{OM} = \mathbf{v}_M + \mathbf{v}_M^e$, где $\mathbf{v}_M^e = \frac{d}{dt} \overline{OK} + \mathbf{\Omega} \times \overline{KM}$ – ее переносная скорость (здесь и всюду ниже под производной вектора понимается его производная в ИСК). С другой стороны, $\frac{d}{dt} \overline{OM} = \frac{d}{dt} \overline{OK} + \frac{d}{dt} \overline{KM}$. Отсюда

$$\mathbf{v}_M = \frac{d}{dt} \overline{KM} - \mathbf{\Omega} \times \overline{KM}. \quad (2.3)$$

Пусть в рассматриваемый момент времени точка M имеет в ВСК координаты $(\xi, \eta, -d)$, т. е.

$$\overline{KM} = \xi \mathbf{e}_1 + \eta \mathbf{e}_2 - d \mathbf{e}_3 \quad (2.4)$$

(отметим, что аппликата любой точки плоскости Π равна $-d$ в силу принятой нами модели съёмочной камеры и определения ВСК). Тогда в силу (2.1) и (2.4)

$$\begin{aligned} \mathbf{\Omega} \times \overline{KM} = & \{-\omega_1 (s_{12}d + s_{13}\eta) - (\omega_2 - \dot{\vartheta})(s_{22}d + s_{23}\eta) - \omega_3 (s_{32}d + s_{33}\eta)\} \mathbf{e}_1 + \\ & + \{\omega_1 (s_{11}d + s_{13}\xi) + (\omega_2 - \dot{\vartheta})(s_{21}d + s_{23}\xi) + \omega_3 (s_{31}d + s_{33}\xi)\} \mathbf{e}_2 + \\ & + \{\omega_1 (s_{11}\eta - s_{12}\xi) + (\omega_2 - \dot{\vartheta})(s_{21}\eta - s_{22}\xi) + \omega_3 (s_{31}\eta - s_{32}\xi)\} \mathbf{e}_3, \end{aligned} \quad (2.5)$$

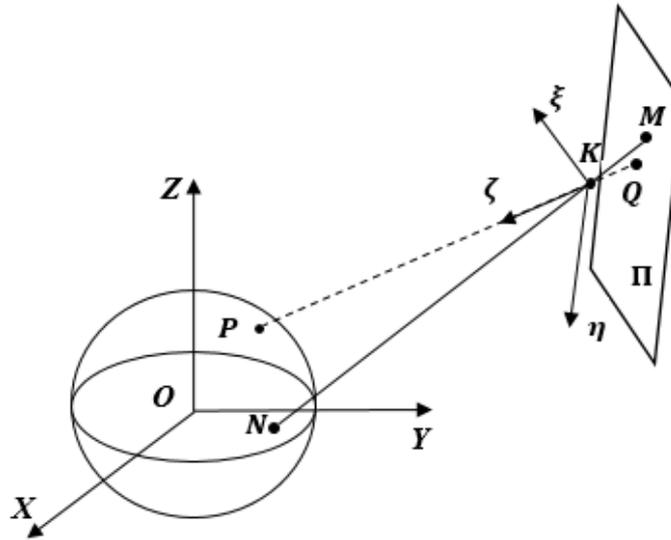


Рис. 4. Соответствие между точками земной поверхности и плоскости Π фиксации изображения (PQ – оптическая ось, $K\xi$, $K\eta$ и $K\zeta$ – оси ВСК).

где s_{ij} – элементы матрицы перехода (1.2).

Вычислим теперь производную $\frac{d}{dt} \overline{KM}$.

Векторы \overline{KM} и \overline{KN} лежат на одной прямой, а значит $\overline{KM} = \lambda \cdot \overline{KN}$ и

$$\frac{d}{dt} \overline{KM} = \dot{\lambda} \cdot \overline{KN} + \lambda \cdot \frac{d}{dt} \overline{KN} = \dot{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda} \overline{KM} + \lambda \cdot \frac{d}{dt} \overline{KN}. \quad (2.6)$$

Определим значение коэффициента λ из равенства

$$|\overline{ON}|^2 = |\overline{OK} + \overline{KN}|^2 = \left| \overline{OK} + \frac{1}{\lambda} \overline{KM} \right|^2 = R_{\oplus}^2,$$

где R_{\oplus} – радиус Земли. Учитывая, что $\overline{OK} = -R\mathbf{e}_3$ и $\overline{KM} = \xi\mathbf{e}_1 + \eta\mathbf{e}_2 - d\mathbf{e}_3$, получаем для λ квадратное уравнение

$$(R^2 - R_{\oplus}^2)\lambda^2 - 2Rz\lambda + \xi^2 + \eta^2 + d^2 = 0, \quad (2.7)$$

где

$$z = (\overline{KM}, \mathbf{e}_3) = s_{31}\xi + s_{32}\eta - s_{33}d \quad (2.8)$$

является аппликатой точки M в ОСК. Уравнение (2.7) имеет два корня, отвечающие двум точкам пересечения прямой KM со сферой, при этом точке N отвечает больший по модулю корень

$$\lambda = \frac{Rz - \sqrt{(Rz)^2 - (R^2 - R_{\oplus}^2)(\xi^2 + \eta^2 + d^2)}}{(R^2 - R_{\oplus}^2)}. \quad (2.9)$$

Найдем производную

$$\frac{d}{dt} \overline{KN} = \frac{d}{dt} \overline{ON} - \frac{d}{dt} \overline{OK}. \quad (2.10)$$

Точка N , находящаяся на поверхности Земли, имеет в ИСК скорость

$$\frac{d}{dt} \overline{ON} = \boldsymbol{\omega}_{\oplus} \times \overline{ON} = \boldsymbol{\omega}_{\oplus} \times \left(\overline{OK} + \frac{1}{\lambda} \overline{KM} \right) \quad (\text{напомним, что } \boldsymbol{\omega}_{\oplus} = \omega_{\oplus} \cdot \mathbf{k} \text{ – вектор угловой скорости вращения Земли}). \text{ Отсюда с учетом (1.1) и (2.4)}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \overline{ON} = & \boldsymbol{\omega}_{\oplus} \left[\sigma_{32} \left(-s_{33}R - \frac{d}{\lambda} \right) - \sigma_{33} \left(-s_{32}R + \frac{\eta}{\lambda} \right) \right] \boldsymbol{\epsilon}_1 - \\ & - \boldsymbol{\omega}_{\oplus} \left[\sigma_{31} \left(-s_{33}R - \frac{d}{\lambda} \right) - \sigma_{33} \left(-s_{31}R + \frac{\xi}{\lambda} \right) \right] \boldsymbol{\epsilon}_2 + \\ & + \boldsymbol{\omega}_{\oplus} \left[\sigma_{31} \left(-s_{32}R + \frac{\eta}{\lambda} \right) - \sigma_{32} \left(-s_{31}R + \frac{\xi}{\lambda} \right) \right] \boldsymbol{\epsilon}_3, \end{aligned} \quad (2.11)$$

где σ_{ij} – элементы матрицы перехода (1.5).

Далее, $\frac{d}{dt} \overline{OK} = -\dot{R}\mathbf{e}_3 - R\dot{\mathbf{e}}_3$. Заметим, что в силу (1.3) и (1.4) $\dot{\mathbf{e}}_3 = -\dot{\vartheta}\mathbf{e}_1$. Отсюда

$$\frac{d}{dt} \overline{OK} = -\dot{R}\mathbf{e}_3 + R\dot{\vartheta}\mathbf{e}_1 \quad \text{или в ВСК}$$

$$\frac{d}{dt} \overline{OK} = (-s_{31}\dot{R} + s_{11}R\dot{\vartheta})\boldsymbol{\epsilon}_1 + (-s_{32}\dot{R} + s_{12}R\dot{\vartheta})\boldsymbol{\epsilon}_2 + (-s_{33}\dot{R} + s_{13}R\dot{\vartheta})\boldsymbol{\epsilon}_3. \quad (2.12)$$

Из (2.10), (2.11) и (2.12)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \overline{KN} = & \left\{ \boldsymbol{\omega}_{\oplus} \left[\sigma_{32} \left(-s_{33}R - \frac{d}{\lambda} \right) - \sigma_{33} \left(-s_{32}R + \frac{\eta}{\lambda} \right) \right] + s_{31}\dot{R} - s_{11}R\dot{\vartheta} \right\} \boldsymbol{\epsilon}_1 + \\ & + \left\{ \boldsymbol{\omega}_{\oplus} \left[\sigma_{31} \left(s_{33}R + \frac{d}{\lambda} \right) + \sigma_{33} \left(-s_{31}R + \frac{\xi}{\lambda} \right) \right] + s_{32}\dot{R} - s_{12}R\dot{\vartheta} \right\} \boldsymbol{\epsilon}_2 + \\ & + \left\{ \boldsymbol{\omega}_{\oplus} \left[\sigma_{31} \left(-s_{32}R + \frac{\eta}{\lambda} \right) - \sigma_{32} \left(-s_{31}R + \frac{\xi}{\lambda} \right) \right] + s_{33}\dot{R} - s_{13}R\dot{\vartheta} \right\} \boldsymbol{\epsilon}_3. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Наконец, найдем производную λ . Для этого воспользуемся отсутствием нормальной составляющей к плоскости Π у вектора \mathbf{v}_M (точка M движется по плоскости Π): $(\mathbf{v}_M, \boldsymbol{\epsilon}_3) = 0$, откуда с учетом (2.3) и (2.6) получим

$$\dot{\lambda} = \frac{\lambda(\boldsymbol{\Omega} \times \overline{KM}, \boldsymbol{\epsilon}_3) - \lambda^2 \left(\frac{d}{dt} \overline{KN}, \boldsymbol{\epsilon}_3 \right)}{(\overline{KM}, \boldsymbol{\epsilon}_3)}.$$

Из последнего равенства в силу (2.5), (2.13) и (2.4)

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} = & -\frac{\lambda}{d} \left\{ \omega_1 (s_{11}\eta - s_{12}\xi) + (\omega_2 - \dot{\vartheta})(s_{21}\eta - s_{22}\xi) + \omega_3 (s_{31}\eta - s_{32}\xi) - \right. \\ & \left. -\lambda\omega_{\oplus} \left[\sigma_{31} \left(-s_{32}R + \frac{\eta}{\lambda} \right) - \sigma_{32} \left(-s_{31}R + \frac{\xi}{\lambda} \right) \right] - \lambda (s_{33}\dot{R} - s_{13}R\dot{\vartheta}) \right\}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Окончательно, учитывая (2.3), (2.5), (2.4), (2.6) и (2.13), приходим к следующему выражению для вектора $\mathbf{v}_M = \mathbf{v}(\xi, \eta)$ в ВСК:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\xi, \eta) = & \left\{ \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \xi + \lambda\omega_{\oplus} \left[\sigma_{32} \left(-s_{33}R - \frac{d}{\lambda} \right) - \sigma_{33} \left(-s_{32}R + \frac{\eta}{\lambda} \right) \right] + \lambda (s_{31}\dot{R} - s_{11}R\dot{\vartheta}) + \right. \\ & + \omega_1 (s_{12}d + s_{13}\eta) + (\omega_2 - \dot{\vartheta})(s_{22}d + s_{23}\eta) + \omega_3 (s_{32}d + s_{33}\eta) \left. \right\} \mathbf{e}_1 + \\ & + \left\{ \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \eta + \lambda\omega_{\oplus} \left[\sigma_{31} \left(s_{33}R + \frac{d}{\lambda} \right) + \sigma_{33} \left(-s_{31}R + \frac{\xi}{\lambda} \right) \right] + \lambda (s_{32}\dot{R} - s_{12}R\dot{\vartheta}) - \right. \\ & \left. - \omega_1 (s_{11}d + s_{13}\xi) - (\omega_2 - \dot{\vartheta})(s_{21}d + s_{23}\xi) - \omega_3 (s_{31}d + s_{33}\xi) \right\} \mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

Здесь $\dot{\vartheta}$ задается формулой (2.2), λ – формулами (2.9) и (2.8), $\dot{\lambda}$ – формулой (2.14), а R и \dot{R} , согласно [7, 8], выражаются через параметры орбиты и истинную аномалию формулами $R = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\vartheta}$ и $\dot{R} = \frac{ane \cdot \sin\vartheta}{\sqrt{1-e^2}}$ соответственно.

В заключение приведем примеры расчета поля скоростей движения точек изображения в плоскости Π для различных наборов значений параметров $\alpha, \beta, \gamma, \omega_1, \omega_2$ и ω_3 . Все расчеты выполнены при следующих значениях исходных данных: $f = 6.67428 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \text{ кг}^{-1} \text{ с}^{-2}$ (универсальная гравитационная постоянная), $M_{\oplus} = 5.9736 \cdot 10^{24} \text{ кг}$ (масса Земли), $\omega_{\oplus} = 7.292115 \cdot 10^{-5} \text{ рад/с}$ (средняя угловая скорость вращения Земли), $R_{\oplus} = 6.371 \cdot 10^6 \text{ м}$ (средний радиус Земли). Параметры орбиты: $a = R_{\oplus} + h_0$, где $h_0 = 3 \cdot 10^5 \text{ м}$ – максимальная высота полета спутника над поверхностью Земли, $e = 0.01$, $i = \pi/3$, $g = 0$. Значение истинной аномалии ϑ взято равным нулю, а фокусное расстояние $d = 1.5 \text{ м}$.

Для наглядности результаты расчетов представлены в графическом виде, при этом в точке (ξ, η) плоскости Π строится не сам вектор $\mathbf{v}(\xi, \eta)$, а разность его и вектора скорости в начале координат $\mathbf{v}(\xi, \eta) - \mathbf{v}(0, 0)$. Под каждой иллюстрацией указаны значения параметров, при которых производился расчет.

Прокомментируем полученные результаты. На рис. 5а–г представлено изменение поля скоростей при увеличении угла крена γ от 0° до 1° при нулевых значениях остальных параметров. Как видим, в указанном диапазоне изменения γ поле эволюционирует достаточно быстро; дальнейшее же увеличение угла крена принципиально картину не меняет.

Рис. 5д и 5е иллюстрируют поворот на 90° вокруг визирной оси и вращение вокруг нее же с угловой скоростью $\omega = 0.5 \text{ рад/с}$ при нулевых значениях остальных параметров. Влияние указанных действий на картину поля вполне предсказуемо, и полученные результаты соответствуют ожидаемым.

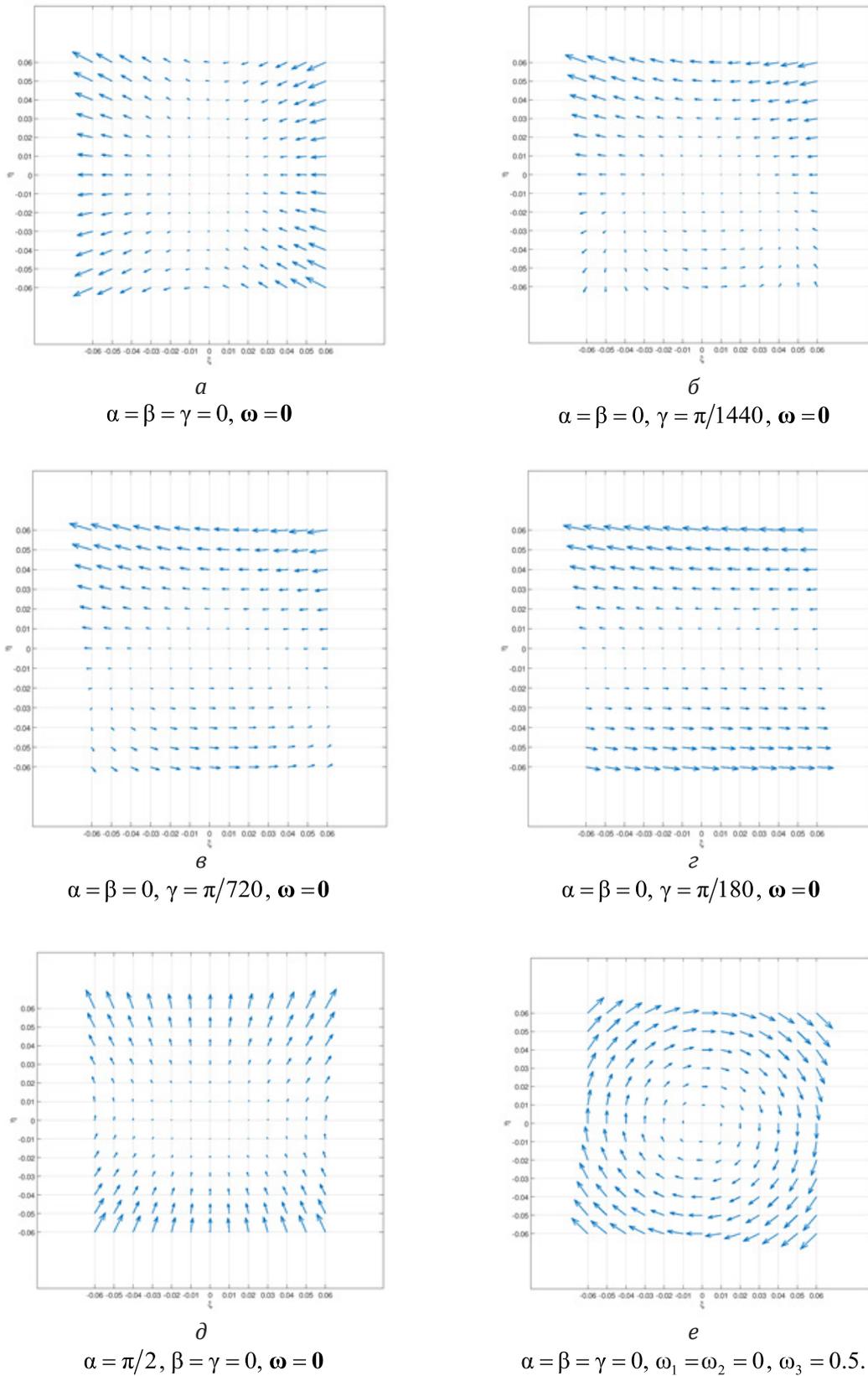


Рис. 5. Поле скоростей движения точек изображения в плоскости Π

Обратим внимание, что на рис. 5а фактически изображено поле скоростей для случая съемки «в наدير» в отсутствие вращения съемочного аппарата, т. е. в ситуации, изучавшейся в работе [1], и полученный здесь результат в точности совпадает с результатом из [1] для соответствующего значения истинной аномалии ($\vartheta = 0$).

Литература:

1. Геча В.Я., Жиленев М.Ю., Федоров В.Б., Хрычев Д.А., Худак Ю.И., Шатина А.В. Скорость движения изображения при оптико-электронной съемке поверхности планеты. *Российский технологический журнал*. 2018;6(4):65-77. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2018-6-4-65-77>
2. Современные технологии обработки данных дистанционного зондирования Земли, Под ред. В.В. Еремеева. М.: Физматлит, 2015. 460 с. ISBN 978-5-9221-1596-4
3. Somov Ye., Butyrin S., Somov S., Hajiyev C. Attitude guidance, navigation and control of land-survey mini-satellites. In: Proceedings of IFAC international workshop on advanced control and navigation for autonomous aerospace vehicles. Seville, 2015. P. 222–227. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2015.08.087>
4. Showengerdt R.A. Remote Sensing. Models and Methods for Image Processing. Burlington: Academic Press, 2007. 515 p.
5. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В. Обратные задачи обработки фотоизображений / Некорректные задачи естествознания. М.: Изд-во МГУ, 1987. С. 185–195.
6. Petit G., Luzum B. (Eds.) IERS Conventions (2010). (IERS Technical Note No.36). Frankfurt am Main: Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie, 2010. 179 p. ISBN 3-89888-989-6
7. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1975. 800 с.
8. Мюррей К., Дермотт С. Динамика Солнечной системы. М.: Физматлит, 2010. 588 с.
9. Вильке В.Г. Теоретическая механика: учебник и практикум для академического бакалавриата. М.: Издательство Юрайт, 2016. 311 с. ISBN 978-5-534-03481-3

References:

1. Gecha V.Y., Zhilenev M.Y., Fyodorov V.B., Khrychev D.A., Khudak Y.I., Shatina A.V. The image speed during the optical-electronic surfacing the planet. *Rossiiskii technologicheskii zhurnal = Russian Technological Journal*. 2018;6(4):65-77 (in Russ.) <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2018-6-4-65-77>
2. Eremeeva V.V. (Ed.). *Sovremennye tekhnologii obrabotki dannykh distantsionnogo zondirovaniya Zemli* (Modern Data Processing Technologies for Remote Sensing of the Earth). Moscow: Fizmatlit; 2015. 460 p. (in Russ.) ISBN 978-5-9221-1596-4
3. Somov Ye., Butyrin S., Somov S., Hajiyev C. Attitude guidance, navigation and control of land-survey mini-satellites. In: Proceedings of IFAC international workshop on advanced control and navigation for autonomous aerospace vehicles. Seville, 2015. P. 222–227. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2015.08.087>
4. Showengerdt R.A. Remote Sensing. Models and Methods for Image Processing. Burlington: Academic Press; 2007. 515 p.
5. Tikhonov A.N., Goncharsky A.V., Stepanov V.V. Inverse problems of image processing. In: *Nekorrektnye zadachi estestvoznaniya* (Incorrect Tasks of Natural Science). Moscow: MGU Publishing House; 1987. P. 185–195 (in Russ.)
6. Petit G., Luzum B. (Eds.) IERS Conventions (2010). (IERS Technical Note No.36). Frankfurt am Main: Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie; 2010. 179 p. ISBN 3-89888-989-6
7. Duboshin G.N. *Nebesnaya mekhanika. Osnovnye zadachi i metody* (Celestial Mechanics. Main tasks and methods). Moscow: Nauka; 1975. 800 p. (in Russ.)
8. Murray Carl D. Solar system dynamics Cambridge: Cambridge university press; 2009. 588 p. ISBN 978-5-9221-1121-8
9. Vil'ke V.G. *Teoreticheskaya mekhanika: uchebnik i praktikum dlya akademicheskogo bakalavriata* (Theoretical Mechanics: a textbook and a practical work for academic baccalaureate). Moscow: Yurait Publ.; 2016. 311 p. (in Russ.) ISBN 978-5-534-03481-3

Об авторах:

Геча Владимир Яковлевич, доктор технических наук, профессор, заместитель генерального директора, главный конструктор открытого акционерного общества «Научно-производственная корпорация «Космические системы мониторинга, информационно-управляющие и электромеханические комплексы» имени А.Г. Иосифьяна» (ОАО «Корпорация «ВНИИЭМ») (107078, Россия, Москва, Хоромный тупик, д. 4, строение 1).

Жиленев Михаил Юрьевич, старший научный сотрудник открытого акционерного общества «Научно-производственная корпорация «Космические системы мониторинга, информационно-управляющие и электромеханические комплексы» имени А.Г. Иосифьяна» (ОАО «Корпорация «ВНИИЭМ») (107078, Россия, Москва, Хоромный тупик, д. 4, строение 1).

Федоров Виктор Борисович, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики Института кибернетики РТУ МИРЭА («МИРЭА – Российский технологический университет») (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78).

Хрычев Дмитрий Аркадьевич, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики Института кибернетики РТУ МИРЭА («МИРЭА – Российский технологический университет») (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78).

Худак Юрий Иосифович, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики Института кибернетики РТУ МИРЭА («МИРЭА – Российский технологический университет») (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78).

Шатина Альбина Викторовна, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры высшей математики Института кибернетики РТУ МИРЭА («МИРЭА – Российский технологический университет») (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78).

About the authors:

Vladimir Ya. Gecha, Dr. Sci. (Engineering), Professor, Deputy General Director, Chief Designer of Open Joint Company ‘Research and Production Corporation ‘Space Monitoring Systems, Information & Control and Electromechanical Complexes’ named after A.G. Iosifian’ (‘VNIEM Corporation’ JC) (4/1, Khoromny tupik, Moscow 107078, Russia).

Mikhail Yu. Zhilenev, Senior Researcher of Open Joint Company ‘Research and Production Corporation’ Space Monitoring Systems, Information & Control and Electromechanical Complexes’ named after A.G. Iosifian’ (‘VNIEM Corporation’ JC) (4/1, Khoromny tupik, Moscow 107078, Russia).

Viktor B. Fyodorov, Cand. Sci. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics of the Institute of Cybernetics, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow 119454, Russia).

Dmitry A. Khrychev, Cand. Sci. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics of the Institute of Cybernetics, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow 119454, Russia).

Yury I. Hudak, Dr.Sci. (Engineering), Professor, Head of the Department of Higher Mathematics of the Institute of Cybernetics, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow 119454, Russia).

Albina V. Shatina, Dr.Sci. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Professor of the Department of Higher Mathematics of the Institute of Cybernetics, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow 119454, Russia).