

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ НА ОСНОВЕ СИСТЕМ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

В.Н. Исаков[@], ст. преподаватель

*Кафедра теоретической радиотехники и радиофизики МИРЭА
Московский технологический университет (МИРЭА), Москва, 119454 Россия
Автор для переписки, e-mail: vnisakov@rambler.ru*

В статье рассматриваются универсальные системы на основе элементарных функций, позволяющие проводить аппроксимацию импульсных сигналов различного вида и длительности и обеспечивать их простое математическое описание. Предложены степенные, многочленно-косинусоидальные, экспоненциально-многочленные, дробно-рациональные, В-сплайновые системы сигналов, а также системы сигналов с ограниченным спектром. Получены выражения для спектральных и корреляционных характеристик предложенных моделей сигналов.

На основе рассматриваемых моделей сигналов разработан многофункциональный интегрируемый программный модуль «Библиотека сигналов». Интерфейс модуля ориентирован на самостоятельное использование модуля (например, в качестве компьютерного справочника) и для применения во внешней программе, например, в качестве окна, который обеспечивает выбор пользователем того или иного сигнала и задания его параметров. В статье приводятся примеры результатов, получаемых с помощью указанных программ, а также пример графического оформления модуля библиотеки сигналов. Вопросы выбора той или иной системы функций определяются спецификой решаемой задачи.

Ключевые слова: аппроксимация, детерминированный сигнал, математическая модель сигнала, спектральная плотность, спектральный анализ сигналов, корреляционная функция, корреляционный анализ сигналов.

DETERMINATED SIGNALS MATHEMATICAL MODELS ON THE BASIS OF PRIMITIVE FUNCTION SYSTEMS

V.N. Isakov[@]

*Moscow Technological University (MIREA), Moscow, 119454 Russia
Corresponding author e-mail: vnisakov@rambler.ru*

The article deals with universal systems on the basis of primitive functions for approximating pulse signals of different types and duration and providing simple mathematical formulation as well. Power, polynomial-cosinusoidal, exponential-multinomial, linear fractional, B-spline signal systems and restricted spectrum systems have been presented. The expressions for spectral and correlation characteristics of the signal systems mentioned have been obtained.

Based on the analyzed signals models a multifunctional plug-in software module “Signals Library” has been developed.

The module interface is designed for module private use (for example, as a computer reference guide) or for the external program application, for example, as a window to provide a signal type

and signal parameters setting selection for users. The examples of the results obtained using the programs above mentioned as well as Signals Library module graphical presentation have been represented in the article. A matter of choice of this or that functions system can be determined by specifics of the task to be solved.

Keywords: approximation of determined signal, mathematical model of a signal, spectral density, spectral analysis of signals, correlation function, correlation analysis of signals.

1. Введение

Развитие информационных систем связано с анализом большого числа детерминированных сигналов различного вида (формы) и длительности, независимо от их физического наполнения. Анализ проводится как анализ временных функций, непрерывных или дискретных, с использованием общих подходов и методов. Это положение остается справедливым и в отношении любых характеристик сигналов. Таким образом, в дальнейшем, когда используется понятие «сигнал», подразумеваются и его характеристики, а само понятие используется как формализованное – функция времени, независимо от физического содержания. Такая формализация позволяет рассматривать методы анализа в самом общем виде и получать достаточно универсальные средства исследования.

Независимо от того, как проводится анализ – аналитически или с использованием численных методов на компьютере, наиболее удобной формой представления сигнала является его математическое описание. Большое разнообразие сигналов обуславливает и разнообразие форм их описания. В то же время необходимая систематика, начиная с методов анализа и заканчивая функциональными зависимостями, требует системы в выборе методов описания сигналов. Однако, попытки разработки универсальных систем функций для аппроксимации реальных сигналов обычно носят ограниченный характер [1–3].

Таким образом, в свете сказанного одной из актуальных задач, решение которой обеспечивает компьютерный анализ сигналов, представляется разработка универсальных методов аппроксимации сигналов. Для уменьшения ресурсоёмкости вычислительных алгоритмов и уменьшения объема хранимой информации желательно располагать общими аналитическими соотношениями, описывающими не какую-либо модель сигнала, а целые семейства таких моделей.

В настоящей работе рассматриваются универсальные системы на основе элементарных функций, позволяющие проводить аппроксимацию импульсных сигналов различного вида и длительности.

При выборе универсальных систем аппроксимирующих функций основным условием является простота описания реальных сигналов при достаточно высокой точности (степени идентичности). В данном случае понятие простоты включает, прежде всего, простоту перехода от временной области анализа к частотной и наоборот, а также возможность оперирования корреляционными характеристиками.

2. Системы аппроксимирующих функций

2.1. Система степенных сигналов

Несимметричный сигнал описывается выражением

$$s(t) = V_0 \left(\frac{t}{T_H} \right)^k \left(1 - \left(\frac{t}{T_H} \right)^j \right)^m \operatorname{rect} \left(\frac{t - 0.5 T_H}{T_H} \right), \quad (1)$$

где $V_0 = \left(\frac{k + ml}{k} \right)^{\frac{k}{j}} \left(\frac{k + ml}{ml} \right)^m$ – нормирующий множитель, соответствующий единичному максималь-

ному значению сигнала; $k, l, m = 0, 1, 2, \dots; l \neq 0$ – параметры системы сигналов; τ_H – длительность сигнала.

В рассматриваемую систему входит, в частности, прямоугольный импульс, несимметричный треугольный импульс.

Воспользовавшись биномом Ньютона, (1) представим в виде

$$s(t) = V_0 \sum_{i=0}^m (-1)^i C_m^i \left(\frac{t}{\tau_H} \right)^{il+k} \operatorname{rect} \left(\frac{t-0,5\tau_H}{\tau_H} \right), \quad (2)$$

где C_m^i – число сочетаний из m по i .

Для спектральной плотности (2) с учётом свойства линейности преобразования Фурье, получим

$$S(\omega) = V_0 \tau_H \sum_{i=0}^m (-1)^i C_m^i \gamma_{il+k}(0,1, \omega \tau_H), \quad (3)$$

$$\text{где } \gamma_n(t_1, t_2, \omega) = \int_{t_1}^{t_2} t^n e^{-j\omega t} dt = \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i!} \frac{t_1^i e^{-j\omega t_1} - t_2^i e^{-j\omega t_2}}{(j\omega)^{n-i+1}}.$$

Нетрудно установить, что

$$\gamma_n(t_1, t_2, 0) = \frac{t_2^{n+1} - t_1^{n+1}}{n+1}, \quad (4)$$

$$\operatorname{Re} \gamma_n(t_1, t_2, \omega) = \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i! \omega^{n-i+1}} \left(t_1^i \cos \left(\omega t_1 + (n-i+1) \frac{\pi}{2} \right) - t_2^i \cos \left(\omega t_2 + (n-i+1) \frac{\pi}{2} \right) \right), \quad (5)$$

$$\operatorname{Im} \gamma_n(t_1, t_2, \omega) = \sum_{i=0}^n \frac{n!}{i! \omega^{n-i+1}} \left(t_2^i \sin \left(\omega t_2 + (n-i+1) \frac{\pi}{2} \right) - t_1^i \sin \left(\omega t_1 + (n-i+1) \frac{\pi}{2} \right) \right). \quad (6)$$

Определим энергию сигнала. При этом учтём, что

$$s^2(k, l, m, t) = s(2k, l, 2m, t)$$

и, используя представление (2), запишем

$$E_{k,l,m} = V_0^2 \tau_H \sum_{i=0}^{2m} \frac{(-1)^i C_m^i}{il+2k+1}. \quad (7)$$

Для автокорреляционной функции сигнала, с учётом (2), можно получить

$$R(\tau) = V_0^2 \tau_H \sum_{i_1, i_2=0}^{m,m} (-1)^{i_1+i_2} C_m^{i_1} C_m^{i_2} r_{i_1 l+k, i_2 l+k} \left(\left| \frac{\tau}{\tau_H} \right|, 1, \left| \frac{\tau}{\tau_H} \right| \right) \operatorname{rect} \left(\frac{\tau}{2\tau_H} \right), \quad (8)$$

$$\text{где } r_{n_1, n_2}(a, b, \tau) = \int_a^b t^{n_1} (t-\tau)^{n_2} dt = \sum_{i=0}^{n_2} (-1)^i C_{n_2}^i \tau^i \frac{b^{n_1+n_2-i+1} - a^{n_1+n_2-i+1}}{n_1+n_2-i+1}.$$

Рассмотрим чётно-симметричные степенные сигналы, получаемые из (1), вместе с преобразованием масштаба, путём замены $\tau_H \rightarrow \frac{\tau_H}{2}$, чтобы параметр τ_H соответствовал длительности сигнала:

$$s^{(\text{чёт})}(t) = V_0 \left(2 \frac{|t|}{\tau_H} \right)^k \left(1 - \left(2 \frac{|t|}{\tau_H} \right)^l \right)^m \text{rect} \left(\frac{t}{\tau_H} \right). \quad (9)$$

Для спектральной плотности рассматриваемого сигнала получим

$$S^{(\text{чёт})}(\omega) = \text{Re } S(0,5\omega) = V_0 \tau_H \sum_{i=0}^m (-1)^i C_m^i \text{Re } Y_{il+k} \left(0,1, \frac{\omega \tau_H}{2} \right), \quad (10)$$

где $S(\omega)$ описывается (3).

Автокорреляционная функция чётно-симметричного степенного сигнала

$$\begin{aligned} R^{(\text{чёт})}(\tau) = & V_0^2 \frac{\tau_u}{2} \sum_{i_1=0}^m \sum_{i_2=0}^m (-1)^{i_1+i_2} C_m^{i_1} C_m^{i_2} \times \\ & \times \left(2r_{i_1l+k, i_2l+k} \left(\left| \frac{2\tau}{\tau_u} \right|, 1, \left| \frac{2\tau}{\tau_u} \right| \right) \text{rect} \left(\frac{\tau}{\tau_u} \right) + (-1)^{i_2l+k} r_{i_1l+k, i_2l+k} \left(0, \left| \frac{2\tau}{\tau_u} \right|, \left| \frac{2\tau}{\tau_u} \right| \right) \text{rect} \left(\frac{\tau}{\tau_u} \right) + \right. \\ & \left. + (-1)^{i_2l+k} r_{i_1l+k, i_2l+k} \left(\left| \frac{2\tau}{\tau_u} \right| - 1, 1, \left| \frac{2\tau}{\tau_u} \right| \right) \text{rect} \left(\frac{|2\tau| - 1,5\tau_u}{\tau_u} \right) \right) \end{aligned} \quad (11)$$

Для нечётно-симметричного степенного сигнала

$$s^{(\text{неч})}(t) = V_0 \left(2 \frac{|t|}{\tau_H} \right)^k \left(1 - \left(2 \frac{|t|}{\tau_H} \right)^l \right)^m \text{rect} \left(\frac{t}{\tau_H} \right) \text{sign}(t) \quad (12)$$

аналогично предыдущему получим спектральную плотность

$$S^{(\text{неч})}(\omega) = j \text{Im } S(0,5\omega) = j V_0 \tau_H \sum_{i=0}^m (-1)^i C_m^i \text{Im } Y_{il+k} \left(0,1, \frac{\omega \tau_H}{2} \right) \quad (13)$$

и автокорреляционную функцию

$$\begin{aligned} R^{(\text{неч})}(\tau) = & V_0^2 \frac{\tau_u}{2} \sum_{i_1=0}^m \sum_{i_2=0}^m (-1)^{i_1+i_2} C_m^{i_1} C_m^{i_2} \times \left(2r_{i_1l+k, i_2l+k} \left(\frac{2|\tau|}{\tau_u}, 1, \frac{2|\tau|}{\tau_u} \right) \text{rect} \left(\frac{\tau}{\tau_u} \right) - \right. \\ & \left. - (-1)^{i_2l+k} r_{i_1l+k, i_2l+k} \left(0, \frac{2|\tau|}{\tau_u}, \frac{2|\tau|}{\tau_u} \right) \text{rect} \left(\frac{\tau}{\tau_u} \right) - (-1)^{i_2l+k} r_{i_1l+k, i_2l+k} \left(\frac{2|\tau|}{\tau_u} - 1, 1, \frac{2|\tau|}{\tau_u} \right) \text{rect} \left(\frac{2|\tau| - 1,5\tau_u}{\tau_u} \right) \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Энергия сигналов (9) и (12), как нетрудно установить, совпадает с (7).

2.2. Система многочленно-косинусоидальных сигналов

Несимметричный сигнал системы описывается выражением

$$s(t) = V_0 \left(\frac{t}{\tau_H} \right)^k \left(1 - \left(\frac{t}{\tau_H} \right)^l \right)^m \cos^n \left(\frac{\pi}{2} \frac{t}{\tau_H} \right) \text{rect} \left(\frac{t-0,5\tau_H}{\tau_H} \right), \quad (15)$$

где V_0 – нормирующий множитель, получить выражение для которого в замкнутом виде затруднительно, но он, разумеется, может быть рассчитан для каждого конкретного набора параметров системы сигналов; τ_u – длительность сигнала; $k, l, m, n = 0, 1, 2, \dots$; $l \neq 0$ – параметры системы сигналов.

При $n = 0$ (15) описывает степенной сигнал (1), при $k = 0$ и $m = 0$ – семейство несимметричных косинусоидальных импульсов.

Для определения спектральной плотности сигналов рассматриваемого семейства воспользуемся разложением

$$\cos^n\left(\frac{\pi}{2} \frac{t}{\tau_H}\right) = \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^n C_n^i \cos(\omega_{n,i} t), \quad (16)$$

где $\omega_{n,i} = \frac{\pi(n-2i)}{2\tau_H}$, которое позволяет переписать (15) в виде

$$s(t) = \frac{a}{2^n} \sum_{i=0}^n C_n^i s_0(t) \cos(\omega_{n,i} t), \quad (17)$$

где $s_0(t)$ – несимметричный степенной сигнал (1); $a = \frac{V_0}{V_{s_0}}$, V_{s_0} – нормирующий множитель несимметричного степенного сигнала.

Используя свойства преобразования Фурье для спектральной плотности (17) получим

$$S(\omega) = \frac{a}{2^{n+1}} \sum_{i=0}^n C_n^i (S_0(\omega - \omega_{n,i}) + S_0(\omega + \omega_{n,i})), \quad (18)$$

где $S_0(\omega)$ – спектральная плотность несимметричного степенного сигнала, описываемая (3).

При определении энергии сигнала учтём, что

$$s^2(k, l, m, n, t) = s(2k, l, 2m, 2n, t),$$

поэтому

$$E = \int_0^{\tau_u} s(2k, l, 2m, 2n, t) dt = S(2k, l, 2m, 2n, 0) = \frac{v(2k, l, 2m, 2n)}{2^n} \sum_{i=0}^{2n} C_{2n}^i S_0^{(\text{чётр})}(2k, l, 2m, 2\omega_{2n,i}), \quad (19)$$

где $S_0^{(\text{чётр})}(\omega)$ – спектральная плотность чётно-симметричного степенного сигнала;

Для автокорреляционной функции (15), с учётом (2) и (17), получим

$$R_{k,l,m,n}(\tau) = \frac{V_0^2 \tau_u}{4^n} \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=0}^{n,m,n,m} (-1)^{i_2+i_4} C_n^{i_1} C_m^{i_2} C_n^{i_3} C_m^{i_4} \times q_{i_2l+k, i_4l+k} \left(\frac{|\tau|}{\tau_u}, 1, \omega_{n,i_1}, \omega_{n,i_2}, \frac{|\tau|}{\tau_u} \right) \text{rect} \left(\frac{\tau}{\tau_u} \right), \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} q_{n_1, n_2}(t_1, t_2, \omega_1, \omega_2, \tau) &= \int_{t_1}^{t_2} t^{n_1} (t - \tau)^{n_2} \cos(\omega_1 t) \cos(\omega_2 (t - \tau)) dt = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n_2} (-1)^i C_{n_2}^i \tau^i \times (\text{Re}(\gamma_{n_1+n_2-i}(t_1, t_2, \omega_1 + \omega_2) + \gamma_{n_1+n_2-i}(t_1, t_2, \omega_1 - \omega_2)) \cos(\omega_2 \tau) + \\ &\quad + \text{Im}(\gamma_{n_1+n_2-i}(t_1, t_2, \omega_1 - \omega_2) - \gamma_{n_1+n_2-i}(t_1, t_2, \omega_1 + \omega_2)) \sin(\omega_2 \tau)) \end{aligned} \quad (21)$$

Аналогично п. 2.1 для чётно-симметричного сигнала

$$s^{(\text{чётр})}(t) = V_0 \left(2 \frac{|\tau|}{\tau_H} \right)^k \left(1 - \left(2 \frac{|\tau|}{\tau_H} \right)^l \right)^m \cos^n \left(\pi \frac{t}{\tau_H} \right) \text{rect} \left(\frac{t}{\tau_H} \right), \quad (22)$$

получим

$$S^{(\text{чет})}(\omega) = \frac{V}{2^{n+1}} \sum_{i=0}^n C_n^i \left(S_0^{(\text{чет})}(\omega - \omega_{n,i}) + S_0^{(\text{чет})}(\omega + \omega_{n,i}) \right), \quad (23)$$

где $S_0^{(\text{чет})}(\omega)$ – спектральная плотность чётно-симметричного степенного сигнала (9);
 $\omega_{n,i} = \frac{\pi(n-2i)}{T_H}$.

Для нечётно-симметричного сигнала

$$s^{(\text{неч})}(t) = V_0 \left(2 \frac{|t|}{T_H} \right)^k \left(1 - \left(2 \frac{|t|}{T_H} \right)^l \right)^m \cos^n \left(\frac{\pi t}{T_H} \right) \text{rect} \left(\frac{t}{T_H} \right) \text{sign}(t), \quad (24)$$

$$S^{(\text{неч})}(\omega) = \frac{V}{2^{n+1}} \sum_{i=0}^n C_n^i \left(S_0^{(\text{неч})}(\omega - \omega_{n,i}) + S_0^{(\text{неч})}(\omega + \omega_{n,i}) \right), \quad (25)$$

$$\omega_{n,i} = \frac{\pi(n-2i)}{T_H}.$$

Энергия сигналов (22) и (24) описывается выражением (19).

2.3. Система многочленно-синусоидальных сигналов

Несимметричный сигнал системы описывается выражением

$$s(t) = V_0 \left(\frac{t}{T_H} \right)^k \left(1 - \left(\frac{t}{T_H} \right)^l \right)^m \sin^n \left(\frac{\pi t}{T_H} \right) \text{rect} \left(\frac{t-0,5T_H}{T_H} \right), \quad (26)$$

где V_0 – нормирующий множитель; T_H – длительность сигнала; $k, l, m, n = 0, 1, 2, \dots$; $l \neq 0$ – параметры сигнала.

При $n = 0$ (26) описывает степенной сигнал (1), при $k, m = 0$ – семейство несимметричных синусоидальных импульсов.

Для определения спектральной плотности сигналов рассматриваемого семейства воспользуемся разложением

$$\sin^n \left(\frac{\pi t}{T_H} \right) = \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i \cos[\omega_{n,i} t + \varphi_i]. \quad (27)$$

$$\text{где } \omega_{n,i} = \frac{\pi(n-2i)}{T_H}, \quad \varphi_i = -\frac{i\pi}{2}.$$

С учётом (27), выражение (26) перепишем в виде

$$s(t) = \frac{a}{2^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k s_0(t) \cos(\omega_{n,k} t + \varphi_n), \quad (28)$$

где $s_0(t)$ – несимметричный степенной сигнал (1); $a = \frac{V_0}{V_{s_0}}$, V_{s_0} – нормирующий множитель сигнала $s_0(t)$.

Используя свойства преобразования Фурье для спектральной плотности (27), получим

$$S(\omega) = \frac{a}{2^{n+1}} \sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i \left(S_0(\omega - \omega_{n,i}) e^{i\varphi_i} + S_0(\omega + \omega_{n,i}) e^{-i\varphi_i} \right). \quad (29)$$

Для определения энергии сигнала учтём, что $s^2(k, l, m, n, t) = s(2k, l, 2m, 2n, t)$, поэтому

$$E = \int_0^{\tau_n} s(2k, l, 2m, 2n, t) dt = S(2k, l, 2m, 2n, 0) = \frac{a(2k, l, 2m, 2n)}{2^{2n}} \sum_{i=0}^{2n} C_{2n}^i S_0^{(\text{чёт})}(2k, l, 2m, 2\omega_{2n,i}) \cos \phi_i, \quad (30)$$

где $S_0^{(\text{чёт})}(\omega)$ – спектральная плотность чётно-симметричного степенного сигнала (9).

Для чётно-симметричного сигнала

$$s^{(\text{чёт})}(t) = V_0 \left(\frac{|t|}{\tau_n} \right)^k \left(1 - \left(\frac{|t|}{\tau_n} \right)^l \right)^m \left| \sin \left(\frac{\pi t}{\tau_n} \right) \right|^n \text{rect} \left(\frac{t}{\tau_n} \right), \quad (31)$$

получим

$$S^{(\text{чёт})}(\omega) = \frac{a}{2^{n+1}} \sum_{i=0}^n C_n^i \left(S_0^{(\text{чёт})}(\omega - \omega_{n,i}) + S_0^{(\text{чёт})}(\omega + \omega_{n,i}) \right) \cos \phi_i, \quad (32)$$

$$\text{где } \omega_{n,i} = \frac{2\pi(n-2i)}{\tau_n}.$$

Для нечётно-симметричного сигнала

$$s^{(\text{неч})}(t) = V_0 \left(\frac{|t|}{\tau_n} \right)^k \left(1 - \left(\frac{|t|}{\tau_n} \right)^l \right)^m \left| \sin \left(\frac{\pi t}{\tau_n} \right) \right|^n \text{rect} \left(\frac{t}{\tau_n} \right) \text{sign}(t), \quad (33)$$

$$S^{(\text{неч})}(\omega) = \frac{a}{2^{n+1}} \sum_{i=0}^n C_n^i \left(S_0^{(\text{неч})}(\omega - \omega_{n,i}) + S_0^{(\text{неч})}(\omega + \omega_{n,i}) \right) \sin \phi_i, \quad (34)$$

где $S_0^{(\text{неч})}(\omega)$ – спектральная плотность нечётно-симметричного сигнала (12);

$$\omega_{n,i} = \frac{2\pi(n-2i)}{\tau_n}.$$

Энергия сигналов (31) и (32) описывается выражением (30).

2.4. Система экспоненциально-многочленных сигналов

Несимметричный сигнал рассматриваемой системы описывается выражением вида

$$s(t) = V_0 \sigma(t) t^k (1 + \alpha t)^m e^{-\alpha t} \quad (35)$$

где $\sigma(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$ – функция Хевисайда;

$V_0 = t^{-k} (1 + \alpha t)^{-m} e^{\alpha t} \Big|_{t=\frac{(k+m-1) + \sqrt{(k+m-1)^2 + 4k}}{2\alpha}}$ – нормирующий множитель, соответствующий единичному максимальному значению сигнала; α – параметр временного масштаба сигнала; $k, m = 0, 1, 2, \dots$ – параметры сигнала.

Воспользовавшись биномиальным разложением, (35) представим в виде

$$s(t) = V_0 \sigma(t) \sum_{i=0}^m \alpha^i C_m^i t^{k+i} e^{-\alpha t}. \quad (36)$$

При определении спектральной плотности рассматриваемого сигнала учтём, что

$$\sigma(t)t^n e^{-\alpha t} \leftrightarrow j^n \frac{d^n}{d\omega^n} \frac{1}{\alpha + j\omega} = \frac{n!}{(\alpha + j\omega)^{n+1}}, \quad (37)$$

а также свойство линейности преобразования Фурье. Тогда получим

$$S(\omega) = V_0 \sum_{i=0}^m \frac{\alpha^i C_m^i (k+i)!}{(\alpha + j\omega)^{k+i+1}}. \quad (38)$$

Энергия сигнала

$$E = V_0^2 \int_0^\infty t^{2k} (1 + \alpha t)^{2m} e^{-2\alpha t} dt = \frac{V_0^2}{\alpha^{2k+1}} \sum_{i=0}^{2m} C_{2m}^i \frac{(2k+i)!}{2^{2k+i+1}}. \quad (39)$$

Выражение для автокорреляционной функции сигнала рассматриваемого семейства получим, используя (36)

$$R(\tau) = V_0^2 \sum_{i_1=0}^m \sum_{i_2=0}^m \alpha^{i_1+i_2} C_m^{i_1} C_m^{i_2} \beta_{k+i_1, k+i_2}(\alpha, |\tau|), \quad (40)$$

$$\text{где } \beta_{n_1, n_2}(a, \tau) = e^{a\tau} \int_{\tau}^{\infty} (t-\tau)^{n_2} e^{-2at} dt = \sum_{i_3=0}^{n_2} \sum_{i_4=0}^{n_1+n_2} C_{n_2}^{i_3} \frac{n_2!}{i_4!} \frac{\tau^{n_2-i_3+i_4} e^{-a\tau}}{a^{n_1+n_2-i_4+1}}.$$

Для чётно-симметричного сигнала

$$s^{(\text{чёт})}(t) = V_0 |t|^k (1 + \alpha |t|)^m e^{-\alpha |t|} \quad (41)$$

запишем

$$S^{(\text{чёт})}(\omega) = 2 V_0 \sum_{i_1=0}^m \sum_{i_2=0}^{k+i_1+1} \frac{\alpha^{i_1+i_2} C_m^{i_1} C_{k+i_1+1}^{i_2} (k+i_1)! \omega^{k+i_1-i_2+1}}{(\alpha^2 + \omega^2)^{2(k+i_1+1)}} \cos\left(\frac{\pi(k+i_1-i_2+1)}{2}\right); \quad (42)$$

$$E = \frac{2 V_0^2}{\alpha^{2k+1}} \sum_{i=0}^{2m} C_{2m}^i \frac{(2k+i)!}{2^{2k+i+1}}. \quad (43)$$

Для нечётно-симметричного сигнала

$$s^{(\text{неч})}(t) = V_0 |t|^k (1 + \alpha |t|)^m e^{-\alpha |t|} \text{sign}(t); \quad (44)$$

$$S^{(\text{неч})}(\omega) = -2j V_0 \sum_{i_1=0}^m \sum_{i_2=0}^{k+i_1+1} \frac{\alpha^{i_1+i_2} C_m^{i_1} C_{k+i_1+1}^{i_2} (k+i_1)! \omega^{k+i_1-i_2+1}}{(\alpha^2 + \omega^2)^{2(k+i_1+1)}} \sin\left(\frac{\pi(k+i_1-i_2+1)}{2}\right). \quad (45)$$

Энергия чётно-симметричного и нечётно-симметричного сигнала равна удвоенному значению энергии несимметричного сигнала (39).

2.5. Система дробно-рациональных сигналов

Дробно-рациональный сигнал описывается симметричной функцией вида

$$s(t) = V_0 \frac{t^k}{(1 + (\alpha t)^2)^m}, \quad (46)$$

где $V_0 = \alpha^k \left(\frac{2m}{2m-k} \right)^m \sqrt{\left(\frac{2m-k}{k} \right)^k}$ – нормирующий множитель; $k = 0, 1, 2, \dots$; $m = 1, 2, \dots$; $k < 2m$ – параметры

сигнала; α – параметр временного масштаба.

Чётным значениям соответствуют чётно-симметричные сигналы, а нечётным соответствуют нечётно-симметричные сигналы.

При определении спектральной плотности используем соответствие, приведённое в [1]:

$$\frac{1}{(1 + (\alpha t)^2)^m} \leftrightarrow \frac{2\pi}{\alpha 2^{2m-1} (m-1)!} e^{-\left(\frac{|\omega|}{\alpha}\right)} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(2m-i-2)!}{i! (m-i-1)!} \left(\frac{2|\omega|}{\alpha}\right)^i.$$

Так как умножение сигнала на t приводит к дифференцированию его спектральной плотности, запишем

$$S(\omega) = j^k V_0 \sum_{i_2=0}^k \sum_{i_1=0}^{m-1} \frac{1}{\alpha^{k+1}} \varepsilon_{k,m,i_1,i_2} \left(\frac{|\omega|}{\alpha}\right)^{i_1-i_2} e^{-\left(\frac{|\omega|}{\alpha}\right)} \text{sign} \delta_k^q(\omega), \quad (47)$$

$$\text{где } \varepsilon_{k,m,i_1,i_2} = \frac{\pi(-1)^{k-i_2} C_k^{i_2} A_{i_1}^{i_2} (2m-i_1-2)!}{2^{2m-i_1-2} i_1! (m-i_1-1)! (m-1)!} \alpha(i_1-i_2); \quad A_{i_1}^{i_2} = \frac{i_1!}{(i_1-i_2)!}; \quad \alpha(i) = \begin{cases} 0, & i < 0 \\ 1, & i \geq 0 \end{cases}; \quad \delta_k^q = \frac{1-(-1)^k}{2}.$$

2.8. Сигналы на основе В-сплайнов

Чётно-симметричный сигнал описывается выражением

$$s(t) = \frac{V_m}{(m-1)!} \sum_{k=0}^m (-1)^k C_m^k \left(m \frac{t}{\tau_H} + \frac{m}{2} - k \right)^{m-1} \sigma \left(m \frac{t}{\tau_H} + \frac{m}{2} - k \right), \quad (48)$$

где τ_H – длительность сигнала; $V_m = \frac{(m-1)!}{\sum_{k=0}^{m/2} (-1)^k C_m^k \left(\frac{m}{2} - k \right)^{m-1}}$ – нормирующий множитель;

$m = 1, 2, 3, \dots$ – параметр.

Графики рассматриваемых сигналов являются кусочно-степенными, непрерывными и имеют $m-1$ непрерывных производных. Выражение (48) получается как результат m -кратной свёртки прямоугольного импульса с самим собой. Можно показать, что при неограниченном увеличении m (48) стремится к функции Гаусса.

Спектральная плотность сигнала

$$S(\omega) = \frac{V_m \tau_H}{m} \text{sinc}^m \left(\frac{\omega \tau_H}{2m} \right). \quad (49)$$

Спектральная плотность энергии

$$W(\omega) = \left(\frac{V_m \tau_H}{m} \right)^2 \text{sinc}^{2m} \left(\frac{\omega \tau_H}{2m} \right) = \frac{V_m^2 \tau_H}{V_{2m} m} \frac{V_{2m} (2\tau_H)}{2m} \text{sinc}^{2m} \left(\frac{\omega 2\tau_H}{4m} \right)$$

Обратное преобразование Фурье спектральной плотности энергии позволяет получить следующее выражение для автокорреляционной функции

$$R(\tau) = \frac{V_m^2 \tau_H}{V_{2m} m} s \left(2m \frac{\tau_H}{2} \right). \quad (50)$$

Энергия сигнала

$$E = \frac{V_m^2 T_H}{V_{2m} T_H} \quad (51)$$

2.9. Сигналы с ограниченным спектром

Чётно-симметричный сигнал с ограниченным спектром можно получить из (10):

$$s^{(\text{чёр})}(t) = V_0 \sum_{i=0}^m (-1)^i C_m^i \operatorname{Re} V_{il+k}(0, 1, \omega_m t), \quad (52)$$

где $k, l, m = 0, 1, 2, \dots$; $l \neq 0$ – параметры сигнала; ω_m – максимальная частота в спектре сигнала;

$$V_0 = \left(\sum_{i=0}^m \frac{(-1)^i C_m^i}{il + k + 1} \right)^{-1} \text{ – нормирующий множитель.}$$

Используя свойство симметрии преобразования Фурье, для спектральной плотности рассматриваемого сигнала запишем

$$S^{(\text{чёр})}(\omega) = \frac{\pi V_0}{\omega_m} \left(\frac{|\omega|}{\omega_m} \right)^k \left(1 - \left(\frac{|\omega|}{\omega_m} \right)^l \right)^m \operatorname{rect} \left(\frac{\omega}{2\omega_m} \right) \quad (53)$$

Рассмотрим выражение для спектральной плотности энергии

$$W^{(\text{чёр})} = \left(\frac{\pi V_0}{\omega_m} \right)^2 \left(\frac{|\omega|}{\omega_m} \right)^{2k} \left(1 - \left(\frac{|\omega|}{\omega_m} \right)^l \right)^{2m} \operatorname{rect} \left(\frac{\omega}{2\omega_m} \right), \quad (54)$$

обратное преобразование Фурье которого позволяет получить автокорреляционную функцию в виде:

$$R(\tau) = \frac{\pi}{\omega_m} \frac{(V_0(k, l, m))^2}{V_0(2k, l, 2m)} s^{(\text{чёр})}(2k, l, 2m, \tau). \quad (55)$$

Энергия рассматриваемого сигнала

$$E = \frac{\pi}{\omega_m} \frac{V_0^2(k, l, m)}{V_0(2k, l, 2m)}. \quad (56)$$

Нечётно-симметричный сигнал с ограниченным спектром можно получить из (13)

$$s^{(\text{неч})}(t) = V_0 \sum_{i=0}^m (-1)^i C_m^i \operatorname{Im} V_{il+k}(0, 1, \omega_m t), \quad (57)$$

где $k, l, m = 0, 1, 2, \dots$; $l \neq 0$ – параметры сигнала; ω_m – максимальная частота в спектре сигнала;

$$V_0 = \left(\sum_{i=0}^m \frac{(-1)^i C_m^i}{il + k + 1} \right)^{-1} \text{ – нормирующий множитель.}$$

Используя свойство симметрии преобразования Фурье, для спектральной плотности нечётно-симметричного сигнала запишем

$$S^{(\text{неч})}(\omega) = \frac{j\pi V_0}{\omega_m} \left(\frac{|\omega|}{\omega_m} \right)^k \left(1 - \left(\frac{|\omega|}{\omega_m} \right)^l \right)^m \operatorname{rect} \left(\frac{\omega}{2\omega_m} \right) \operatorname{sign}(\omega). \quad (58)$$

Нетрудно установить, что выражение для спектральной плотности энергии по структуре совпадает с (54) и, соответственно, АКФ сигнала описывается выражением (55), а энергия сигнала также выражается (56).

Аналогично, рассматривая (49), получим следующую систему чётно-симметричных сигналов

$$s(t) = \text{sinc}^n\left(\frac{\omega_m t}{n}\right) \quad (59)$$

где ω_m – максимальная частота в спектре сигнала; n – параметр сигнала; со спектральной плотностью

$$S(\omega) = \frac{2n}{\omega_m} \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \cdot \left(\frac{n\omega}{2\omega_m} + \frac{n}{2} - k\right)^{n-1} \sigma\left(\frac{n\omega}{2\omega_m} + \frac{n}{2} - k\right). \quad (60)$$

3. Практическая реализация

Математические модели сигналов, рассмотренные в п. 2, положены в основу реализации разработанного автором специального программного модуля – библиотеки моделей сигналов.

Интерфейсное окно модуля показано на рис. 1. Пользователь может выбирать систему сигналов и задавать различные параметры системы, определяющие вид сигнала, а также длительность и масштабный множитель. При этом одновременно можно наблюдать временную диаграмму сигнала и его амплитудный спектр. В отдельное поле выводятся соответствующие формулы для сигнала и его спектральной плотности.

Модуль может использоваться самостоятельно, например, в качестве справочника или в составе какого-либо приложения Windows в качестве окна выбора сигнала для дальнейшей обработки в соответствии с предназначением основной программы.

Библиотека моделей сигналов использована автором при разработке программного обеспечения для лабораторных работ по дисциплине Радиотехнические цепи и сигналы.

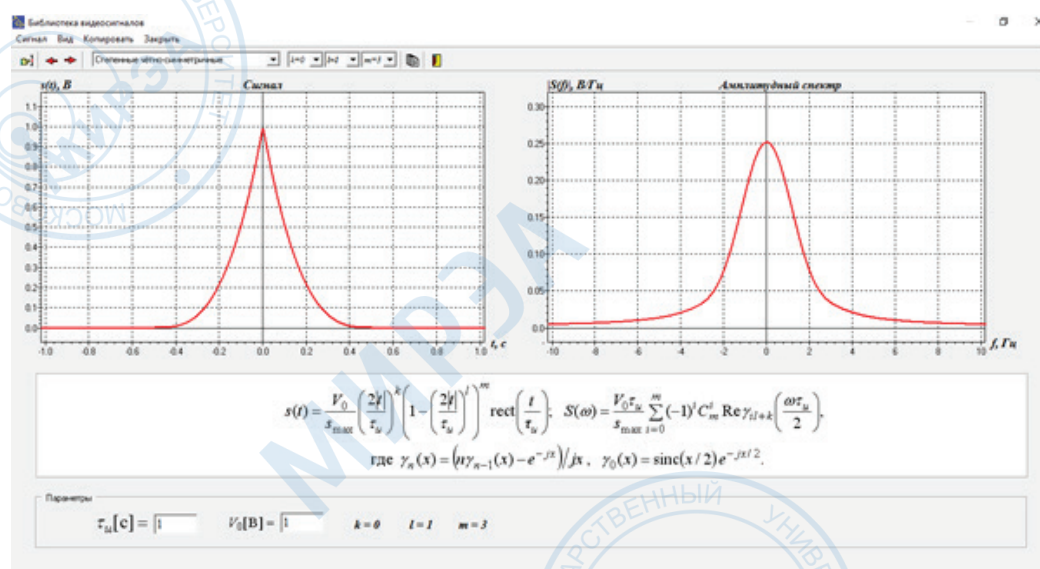


Рис. 1. Интерфейсное окно модуля библиотеки моделей сигналов.

В программе «Спектральный анализ дискретных и аналоговых сигналов» (автор Исаков В.Н.) формируется дискретный сигнал, соответствующий выбранному пользователем в библиотеке сигналов, рассчитывается амплитудный и фазовый спектр исходного сигнала, дискретного сигнала и дискретное преобразование Фурье (см. рис. 2).

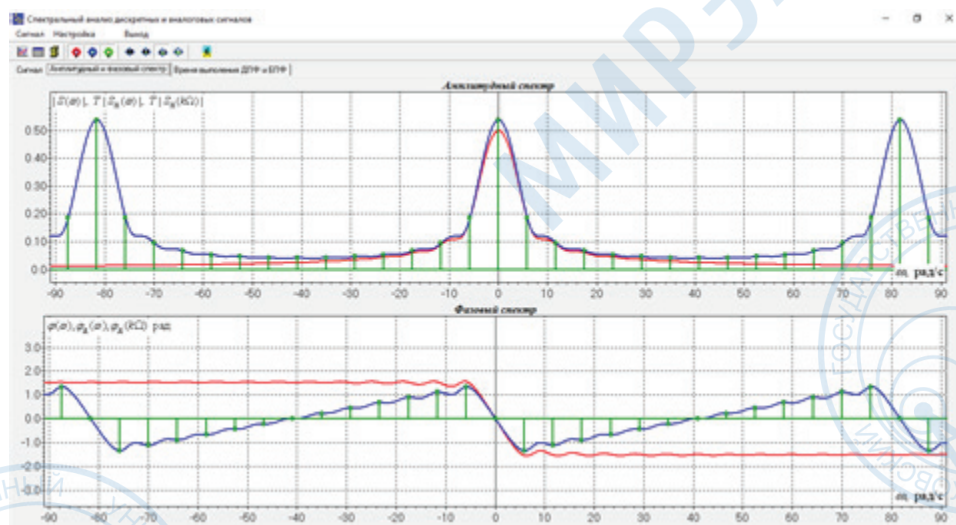
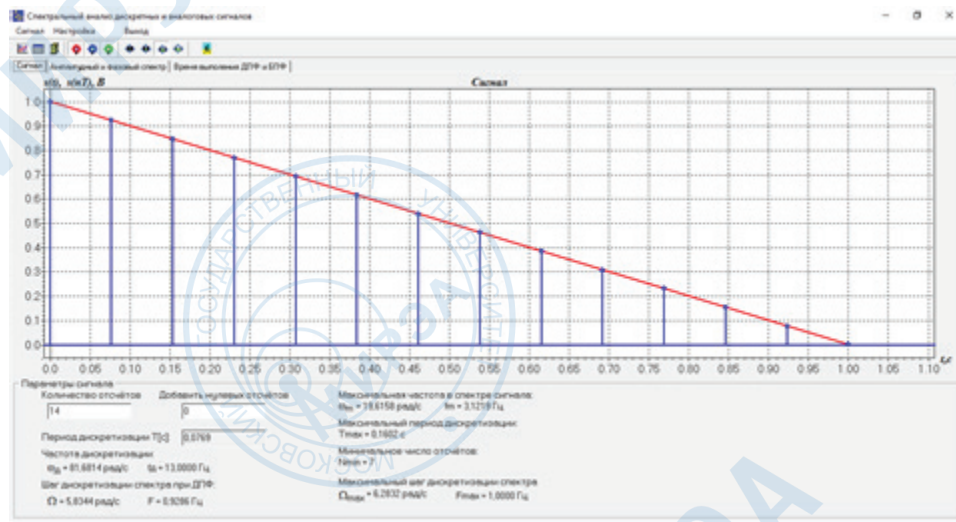


Рис. 2. Примеры результатов для программы «Спектральный анализ дискретных и аналоговых сигналов».

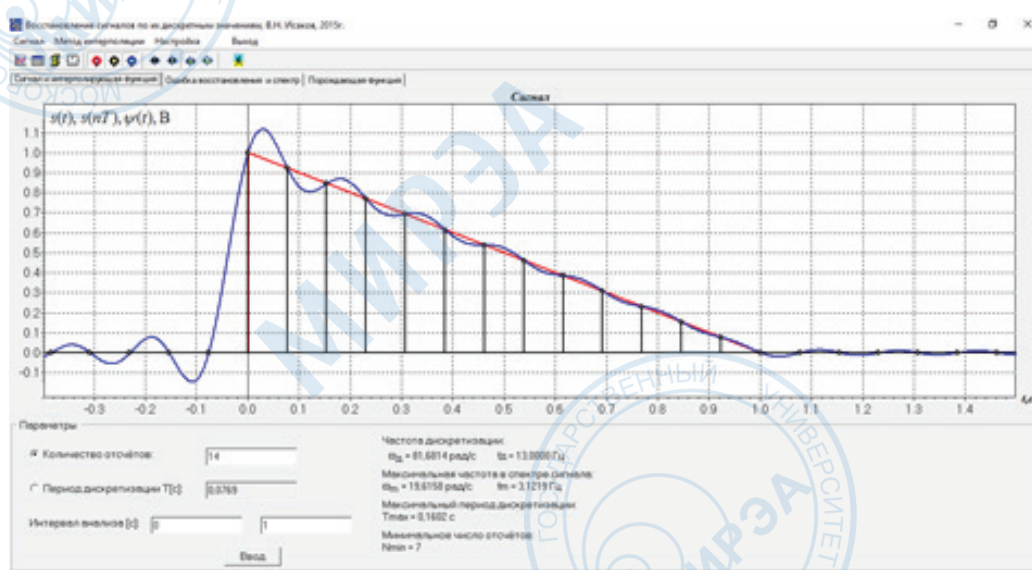


Рис. 3. Пример результатов выполнения программы «Восстановление аналоговых сигналов по их дискретным значениям».

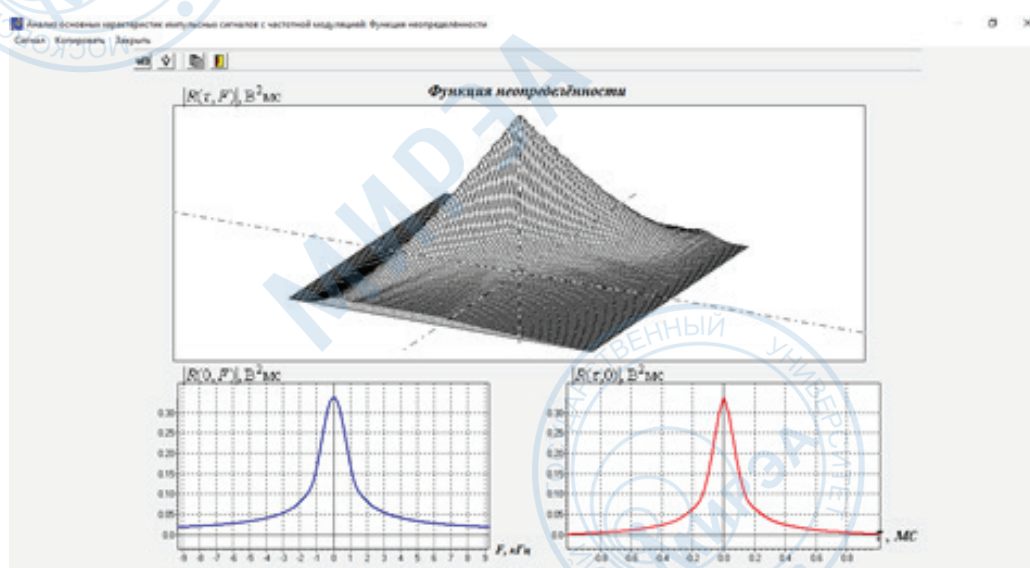
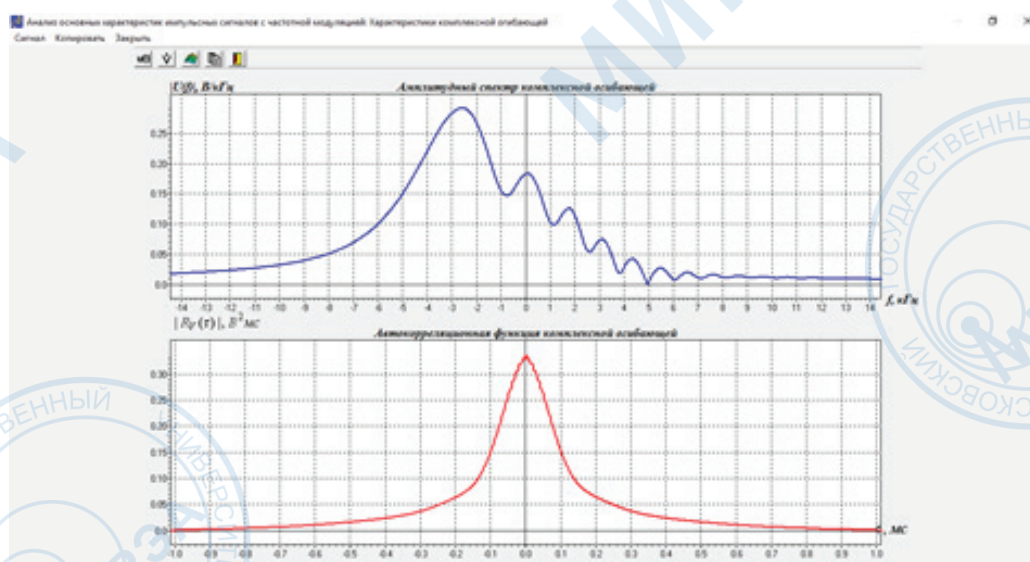
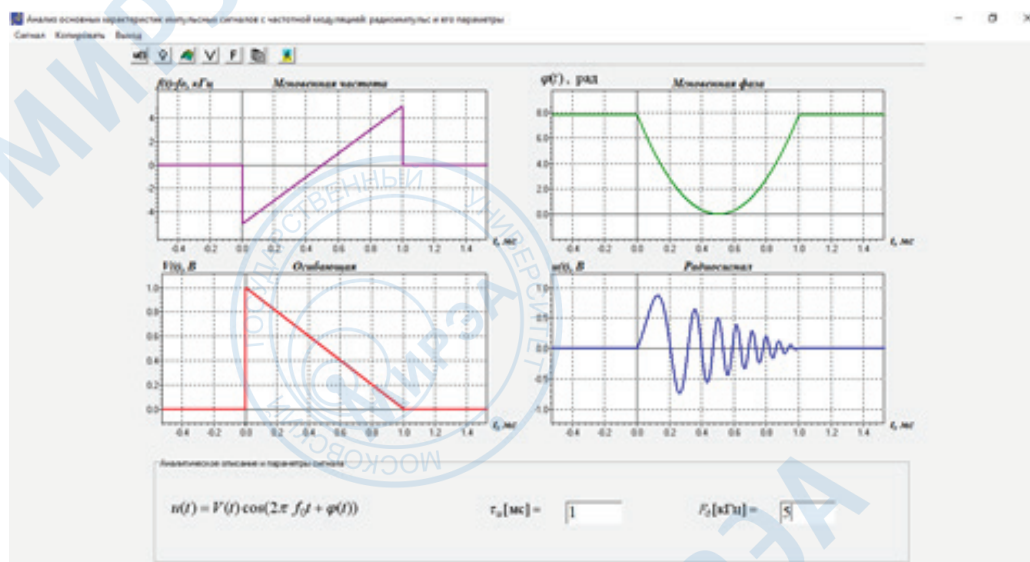


Рис. 4. Пример результатов выполнения программы «Анализ основных характеристик импульсных сигналов с частотной модуляцией».

В программе «Восстановление аналоговых сигналов по их дискретным значениям» (автор Исаков В.Н.) формируется дискретный сигнал на основе выбранного в библиотеке. Пользователь имеет возможность наблюдать графики исходного сигнала и интерполирующей функции, график ошибки интерполяции, спектральные диаграммы. В программе предусмотрено 12 различных методов интерполяции (рис. 3).

В программе «Анализ основных характеристик импульсных сигналов с частотной модуляцией» (авторы Денисенко А.Н., Исаков В.Н., Огурцова Л.А.) библиотека используется для выбора вида огибающей импульсного сигнала с частотной модуляцией. Программа представляет спектральные и корреляционные характеристики импульсных сигналов с частотной модуляцией (рис. 4).

4. Заключение

В статье рассмотрены простейшие модели сигналов на основе универсальных систем элементарных функций, приведён пример их практического использования, получены общие выражения для спектральных и корреляционных характеристик.

Количество математических моделей сигналов, которые могут быть получены при конкретизации параметров предложенных систем, не ограничено, однако практически полезными (по оценке автора) могут оказаться порядка пятисот.

За рамками статьи осталось рассмотрение вопроса об автоматизированном выборе той или иной модели сигнала при решении различных практических задач, в которых сигнал оказывается задан графически или, например, дискретно, но допускает удовлетворительную аппроксимацию на основе элементарных функций. Реализация такого выбора требует наличия обширных библиотек моделей сигналов, среди которых могут найти место и предложенные модели.

Литература:

1. Денисенко А.Н. Сигналы. Теоретическая радиотехника. Справочное пособие. М.: Горячая линия-Телеком, 2005.
2. Кук Ч., Бернфельд М. Радиолокационные сигналы. Пер. с англ. под ред. В.С. Кельзона М.: Советское радио, 1971.
3. Свистов В.М. Радиолокационные сигналы и их обработка. М.: Советское радио, 1977.
4. Хургин Я.И., Яковлев В.П. Фinitные функции в физике и технике. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1971.
5. Справочник по радиолокации / Под ред. М.И. Скольникова. М.: Техносфера, 2014.
6. Антипенский Р.В., Ложкин К.Ю., Поддубный В.Н., Тюлин А.Е. Аналитические сигналы в статистической радиотехнике. М: Радиотехника, 2016.
7. Исаков В.Н. Фундаментальные интерполяционные базисы и спектральный анализ при локальной интерполяции обобщёнными сплайнами // Вестник МГТУ МИРЭА (электронный сетевой научно-методический журнал). 2015. №1 (6). С. 144–154.