

## Динамическое программирование как метод сплайн-аппроксимации в САПР линейных сооружений

Д.А. Карпов,  
В.И. Струченков<sup>@</sup>

*МИРЭА – Российский технологический университет, Москва 119454, Россия*

*<sup>@</sup>Автор для переписки, e-mail: str1942@mail.ru*

В статье рассматриваются математические модели и алгоритмы решения задач, возникающих при автоматизации проектирования трасс линейных сооружений. Принципиальная особенность этих задач состоит в том, что план и продольный профиль трассы состоят из элементов заданного вида. В зависимости от вида сооружения в проектной практике используются отрезки прямых, дуги окружностей, парабол и клотоид. В любом случае необходимо получить гладкую кривую, состоящую из нужной последовательности элементов заданного вида. На стыках элементы имеют общую касательную, а в наиболее сложном случае и общую кривизну. При этом параметры элементов должны удовлетворять техническим ограничениям, которые формализуются в виде системы неравенств. Такого рода кривые принято называть сплайнами. Важно подчеркнуть, что число элементов искомого сплайна, как правило, неизвестно и определяется в процессе решения задачи. Это обстоятельство существенно усложняет и не позволяет применить для решения методы нелинейного программирования, так как неизвестна ее размерность. Кроме того, искомый сплайн – это экстремаль некоторого функционала. Ранее была решена задача аппроксимации плоской кривой, заданной последовательностью точек, сплайном, состоящим из отрезков парабол. В данной статье рассматривается сплайн, включающий элементы различного вида, в том числе и наиболее сложная задача поиска сплайна, состоящего из последовательности отрезков: прямая+клотоида+окружность+клотоида+прямая и т.д. Этот сплайн в статье называется сплайн с клотоидами. Приводится оригинальная формализация задачи, которая для поиска сплайнов позволяет применять динамическое программирование, а также новый алгоритм.

**Ключевые слова:** трасса, план и продольный профиль, сплайн, динамическое программирование, целевая функция, ограничения.

## Dynamic Programming as a Method of Spline Approximation in the CAD Systems of Linear Constructions

Dmitry A. Karpov,  
Valery I. Struchenkov<sup>@</sup>

MIREA – Russian Technological University, Moscow 119454, Russia  
<sup>@</sup>Corresponding author e-mail: str1942@mail.ru

Under study is a problem of the line structure routing of roads, railways and other linear constructions. Designing a trace plan and longitudinal profile are considered as non-linear programming tasks. Since the number of elements of the plan and the longitudinal profile is not known, the problem is solved in three stages. First, a search is performed for a polyline consisting of short elements. On the second stage it is used to determine the initial approximation of the desired line, which is optimized at the last stage. The required line consists of a given type elements and it is a spline with a number of features:

- In contrast to the polynomial elements considered in the theory of splines, when designing roads unknown spline is a sequence of elements: straight, clothoid, circle, clothoid, straight and so on.
- In this task, the spline does not have to be a single-valued function.
- The parameters of the elements of the desired spline must satisfy the constraints in the form of inequalities.

These features of the task do not allow the use of non-linear programming methods to solve it. Converting a broken line to a spline is carried out using dynamic programming. For this purpose a special formalization of this task is proposed. A new algorithm of dynamic programming is given. The result is used as an initial approximation to optimize the parameters of the spline using a previously developed non-linear programming program.

**Keywords:** route, plan view and longitudinal section, spline, dynamic programming, object function, constraint.

### Введение

К линейным сооружениям относятся железные и автомобильные дороги, траншеи для прокладки трубопроводов различного назначения, каналы, водоводы и др. Одна из основных задач в проектировании таких сооружений состоит в поиске положения трассы (оси сооружения) на местности. Трасса – это трехмерная кривая, которая традиционно представляется двумя плоскими кривыми: планом и продольным профилем [1]; план трассы – ее проекция на горизонтальную плоскость, а продольный профиль трассы – линия, являющаяся графиком зависимости координаты  $Z$  от длины кривой в плане, отсчитываемой от заданной начальной точки. Продольный профиль получится, если развернуть на плоскость цилиндрическую поверхность, проходящую через трассу, у которой образующая параллельна оси  $Z$ , а направляющая совпадает с планом трассы.

В зарубежных САПР, получивших широкое распространение в нашей стране<sup>1, 2, 3</sup>, и их отечественных аналогах<sup>4, 5</sup> проектные решения по плану и продольному профилю тем

<sup>1</sup>Bentley Rail Track. [Electronic resource]. URL: <http://www.bentley.com/>

<sup>2</sup>CARD/1. [Electronic resource]. URL: <http://www.card-1.com/en/home/>

<sup>3</sup>Autodesk. [Electronic resource]. URL: <https://www.architect-design.ru/autodesk/autocad/>

<sup>4</sup>Топоматик Robur. URL: <http://www.topomatic.ru>

<sup>5</sup>Credo-Dialog. URL: <https://credo-dialogue.ru/>

или иным способом задаются проектировщиками и могут быть скорректированы в интерактивном режиме. Компьютер используется для визуализации, вычислений необходимых показателей и выдачи выходной документации.

Альтернативный подход состоит в разработке математических моделей, алгоритмов оптимизации и проектирующих программ, то есть в использовании компьютера для выработки проектных решений, а не только для расчетов применительно к проектным решениям, заданным проектировщиками [1]. Поскольку число искомых элементов плана и профиля неизвестно, еще в 60-х годах прошлого века была предложена многоэтапная схема:

1. Искомая плоская кривая заменяется ломаной линией, состоящей из коротких элементов, параметры которых удовлетворяют соответствующим техническим ограничениям [2]. Компьютер проектирует такую линию, для которой величина принятого критерия оптимальности минимальна, например, объемов земляных работ или строительных затрат.

2. Результат первого этапа преобразуется к требуемому виду, и при этом определяется число элементов и их примерное положение.

3. Результат второго этапа используется как начальное приближение для алгоритма оптимизации параметров элементов сплайна.

Подготовка и анализ исходных данных, контроль процесса и анализ результатов каждого этапа остаются за проектировщиком.

Применительно к проектированию продольного профиля новых железных дорог такая схема была реализована еще в начале 1970-х годов на малопригодной для этой цели ЭВМ БЭСМ-4. Соответствующие программы использовались при проектировании БАМ [1], несмотря на отсутствие возможностей визуализации, организации интерактивного режима работы и т. д. По такой же схеме к 1976 г. была решена и задача проектирования продольного профиля автомобильных дорог [1, 3]. Аналогичный подход реализовали при проектировании каналов оросительной сети и магистральных трубопроводов [1].

Проектирование продольного профиля по заданным вариантам плана трассы независимо от вида сооружения на первом этапе формализовано как задача выпуклого программирования с системой линейных ограничений, имеющей специфическую структуру [1]. Это позволило создать эффективную реализацию методов нелинейного программирования. Решение задачи не требует задания начального приближения, так как проектирующая программа строит его автоматически. Результат первого этапа может использоваться для сравнения вариантов плана трассы, чтобы исключить из рассмотрения заведомо неконкурентные варианты. В последней версии системы компьютер проектирует продольный и поперечные профили земляного полотна железных и автомобильных дорог совместно, с учетом наличия различных слоев грунта, искусственных сооружений и др. [1].

Оптимизация плана трассы новых дорог должна выполняться одновременно с поиском оптимального продольного профиля. Исключения составляют участки напряженного хода, т. е. такие участки, на которых трасса идет предельным уклоном, и поэтому продольный профиль однозначно определяется по плану трассы простыми вычислениями [4]. Для этого случая в 80-е гг. XX века была разработана программа оптимизации плана трассы на ЭВМ ЕС. Экспериментально удалось показать, что эффективность совместного проектирования плана и профиля в несколько раз выше, чем при проектировании продольного профиля по заданному варианту плана трассы [4]. Совместное проектирование плана и продольного

профиля – это многоэкстремальная задача нелинейного программирования с нелинейной системой ограничений [4]. Решение таких задач методами нелинейного программирования требует хорошего начального приближения. Гарантировано только достижение окрестности локального минимума. Другими словами, речь может идти об улучшении варианта трассы, заданного проектировщиком. Результат должен быть преобразован в сплайн с клотоидами и подвергнут компьютерной оптимизации (см. выше 3 этап).

Для совместного проектирования плана и профиля разработаны математические модели и алгоритмы [1, 4], но компьютерных программ нет, так как в 1990-х годах работы в данном направлении в России были прекращены и программы оптимизации плана трассы на напряженном ходу утрачены. К настоящему времени о разработке программ аналогичного назначения сведений не имеется, если не считать некоторые алгоритмы, не имеющие математического обоснования, которые иногда ошибочно называются эвристическими. Разработки в области САПР линейных сооружений западные фирмы ведут в рамках принятого разделения функций проектировщика и компьютера, поддерживая устойчивый миф о том, что проектировщик в интерактивном режиме вырабатывает оптимальные решения. Этот миф был опровергнут Ю.С. Карихом еще в 1976 г. специально выполненными экспериментами [3]. Отсутствие публикаций по компьютерной выработке проектных решений на основе математического моделирования сложных проектных задач творческого характера и алгоритмов оптимизации, возможно, связано с высокой стоимостью соответствующих разработок и коммерческими соображениями по использованию их результатов.

Применительно к проектированию плана трассы задача преобразования последовательности точек на плоскости (иначе ломаной, состоящей из коротких элементов) в сплайн с клотоидами возникает при проектировании реконструируемых железных и автомобильных дорог. В последнем случае она известна как задача «восстановления оси», то есть исходная последовательность точек является не результатом первого этапа компьютерного проектирования, а результатом съемки дороги тем или иным способом.

Характерно, что преобразование последовательности точек в сплайн требуется и при компьютерном проектировании других сооружений, когда нет ограничения по непрерывности кривизны, и проектное решение можно искать в виде сплайна, состоящего из отрезков прямых и дуг окружностей. Поэтому алгоритм построения вышеупомянутого сплайна, состоящего из элементов трех видов, находит различные применения.

Ранее была решена задача аппроксимации плоской кривой, заданной последовательностью точек, сплайном, состоящим из отрезков парабол [5].

Цель настоящей статьи состоит в формализации задачи таким образом, чтобы можно было применить динамическое программирование, представить новый алгоритм построения сплайна с клотоидами, исходя из условия наилучшей аппроксимации исходных точек при соблюдении технических ограничений.

## **1. Постановка задачи и ее формализация**

Задана последовательность точек на плоскости, начальная и конечная точки искомого сплайна, начальное и, возможно, конечное направление (рис. 1). Требуется найти последовательность элементов: клотоида, окружность, клотоида, прямая и т. д., которая

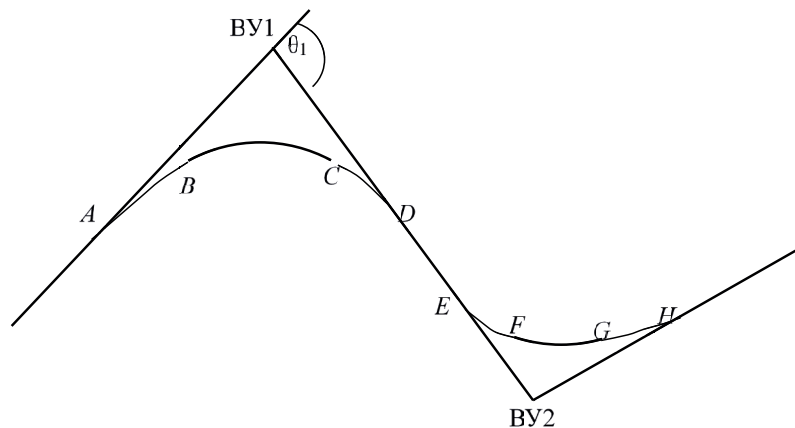
наилучшим образом в заданном смысле описывает исходные точки и удовлетворяет следующим ограничениям:

- кривизна искомого сплайна во всех точках находится в заданных пределах, иными словами, заданы  $R_{min}$  и  $R_{max}$  – соответственно, минимальный и максимальный радиусы окружностей, которые могут быть различны для различных элементов. Так как кривизна клотоиды меняется от нуля до кривизны окружности, этого достаточно для выполнения ограничения по кривизне на всем сплайне;

- заданы  $L_{кл}^{min}$ ,  $L_{окр}^{min}$  и  $L_{пр}^{min}$  – минимальные длины клотоиды, окружности и прямой, соответственно, а также максимальная длина клотоиды  $L_{кл}^{max}$ ;

- дополнительно могут быть заданы минимальный угол поворота, а также интервал допустимых значений скорости изменения кривизны клотоиды. Кривизна клотоиды  $\sigma$  линейно зависит от ее длины  $L$ , вычисляемой от точки с нулевой кривизной:  $\sigma = kL$ , и параметр  $k$  должен удовлетворять условию  $k_{min} \leq k \leq k_{max}$ . Если при длине клотоиды  $L$  радиус кривизны равен  $R$ , то получаем ограничение:

$$k_{min} \leq \frac{1}{(LR)} \leq k_{max}. \tag{1}$$



**Рис. 1.** Элементы искомого сплайна:  $AB, CD, EF, GH$  – клотоиды;  $BC, FG$  – окружности;  $DE$  – прямая вставка;  $\theta$  – угол поворота.

В отличие от сплайнов, рассматриваемых в теории [6], в нашей задаче элементы сплайна (клотоиды и окружности) не являются полиномами, и их границы (по оси абсцисс) не заданы, как и число элементов. Искомый сплайн не обязан быть графиком однозначной функции. Поэтому для оценки качества аппроксимации используются отклонения по нормальям. Поскольку число элементов сплайна неизвестно, нельзя применить методы нелинейного программирования. Это обстоятельство, а также многочисленные ограничения – неравенства на параметры сплайна – обуславливают необходимость поиска для оптимальной сплайн-аппроксимации одну из возможных реализаций метода динамического программирования [7].

Ключевое понятие в динамическом программировании – состояние системы [7]. Процесс поиска состоит из нескольких шагов, и на каждом из них система может находить-

ся в разных состояниях. Последовательность шаговых состояний образует траекторию (путь). Понятие «состояние системы» надо формализовать так, чтобы различные пути, приводящие в одно и то же состояние, были сравнимы, то есть множества их возможных продолжений должны совпадать. Тогда в соответствии с принципом оптимальности Р. Беллмана [7] в каждом состоянии можно оставить только один приводящий в него путь, наилучший по целевой функции.

Для формализации задачи выполняем следующие действия:

- исходные точки соединяем прямолинейными отрезками и получаем исходную ломаную линию;

- в каждой исходной точке, кроме начальной и конечной, строим нормаль, то есть прямую, соединяющую эту точку с центром кривизны окружности, проходящей через заданную точку и две смежных с ней (рис. 2); если три точки лежат на одной прямой, то берем нормаль к этой прямой;

- вычисляем и запоминаем ориентацию нормалей, то есть угол  $\gamma_i$  каждой из них с осью ОХ. Расстояние по нормали от исходной точки до точки пересечения со сплайном обозначим  $u_i$ . При этом  $u_i < 0$ , если точка пересечения находится справа (по ходу трассы) от исходной точки, и  $u_i > 0$ , если слева.

Целевая функция:  $\sum_{i=1}^n u_i^2 \rightarrow \min$  :

- на каждой нормали в обе стороны от исходной точки с координатами  $x_{i0}, y_{i0}$  откладываем заданное число  $m$  дискретов  $\Delta$ , вычисляем и запоминаем координаты полученных точек разбиения нормалей, используя формулы:

$$x_{ir} = x_{i0} + r \Delta \cos \gamma_i; y_{ir} = y_{i0} + r \Delta \sin \gamma_i.$$

Точки на каждой  $i$ -той нормали пронумерованы от исходной точки влево по ходу трассы со знаком плюс ( $r = 1, 2, \dots, m$ ) и вправо – со знаком минус ( $r = -1, -2, \dots, -m$ ).

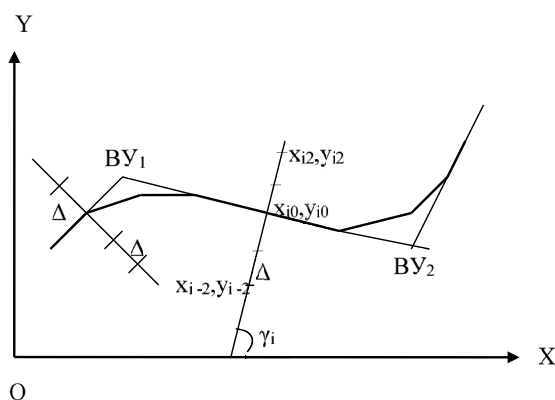


Рис. 2. Разбиение нормалей.

Состояние системы определим, как точку на нормали, которая будет началом очередной *левой* клотоиды (на рис.1 это клотоиды  $AB$  и  $EF$ ) плюс направление стороны угла поворота, которой принадлежит данная точка. Для возможных направлений сторон угла поворота зададим дискрет  $\varphi$ . От угла касательной  $\gamma_i + \pi/2$  в обе стороны отложим равное число дискретов  $\varphi$ . Таким образом, в каждой точке каждой нормали образуется набор направлений. Переход от одного состояния (начало левой клотоиды плюс направление

стороны угла поворота) к другому (начало следующей левой клотоиды плюс направление стороны угла поворота) это и есть шаговый переход.

Необходимо знать еще две величины:  $L_{min}$  и  $L_{max}$ , соответственно, минимальную и максимальную длину кривой от одного состояния системы до другого. На рис. 1 длина кривой записывается как  $AB+BC+CD+DE$ .  $L_{min}$  можно вычислить как  $2L_{кл}^{min} + L_{окр}^{min} + L_{np}^{min}$  (рис. 1). Значение  $L_{max}$  так же, как и дискреты  $\Delta$ ,  $\varphi$  и их количества, при разбивке нормалей и формировании множества состояний системы есть не что иное, как входные параметры. Принятая нами формализация понятия «состояние системы» позволяет при переходе от  $j$ -ого состояния к  $(j+1)$ -ому определять вершину угла поворота (ВУ) трассы как точку пересечения соответствующих прямых, а затем радиус окружности и длину клотоид – из условия наилучшей аппроксимации исходных точек в пределах от нормали  $j$ -ого состояния до нормали  $(j+1)$ -го состояния при соблюдении всех ограничений, включая ограничение на минимальную длину прямой вставки. Важно, что этот поиск можно выполнять независимо от всех остальных состояний. Таким образом, поиск сплайна с клотоидами сводится к определению координат нужных ВУ.

### Вспомогательные задачи

На каждом шаге поиска элементов сплайна нам придется решать несколько задач, а именно: в заданный угол поворота вписать клотоиду, окружность и снова клотоиду (рис. 3). Рассмотрим, как определить радиус кривой  $R$  и длину клотоиды  $L$ , соблюдая все ограничения.

Начало левой клотоиды (точка  $A$  на рис. 1) известно. С достаточной для практики точностью ее расстояние  $T$  от ВУ при угле поворота  $\theta$  (рис. 3) описывается формулой:

$$T = \left( R + \frac{L^2}{6R} \right) \operatorname{tg} \left( \frac{\theta}{2} \right) + \frac{L}{2} \quad (2)$$

При устройстве клотоиды центр окружности, вписанной в угол, сдвигается по биссектрисе на  $\frac{p}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ , где  $p$  – с достаточной для практики точностью равен  $\frac{L^2}{6R}$ .

На другой стороне угла расстояние  $S$  от ВУ до начала следующей левой клотоиды (рис. 1) известно:  $S - T = L_{np}$ , где  $L_{np}$  – длина прямой вставки. Если  $L_{np} < L_{np}^{min}$ , то соответствующий шаговый переход не допустим, в противном случае нужно искать  $R$  и  $L$  из условия наилучшей аппроксимации.

Для определения радиуса  $R$  и длины клотоиды  $L$  имеем одно уравнение (2) с двумя неизвестными. Чтобы уравнение (2) имело решение относительно  $R$  при заданном  $L$ , необходимо:

$$L < \frac{T}{\left( 0.5 + \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right) \times \frac{\sqrt{6}}{3}}$$

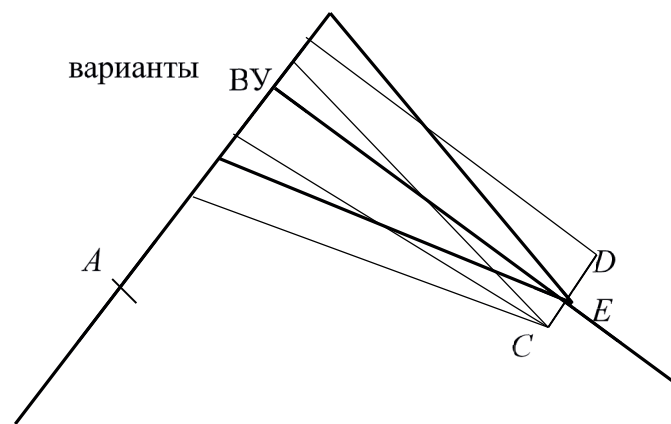




на следующей стороне угла (на рис. 1 от точки  $A$  до точки  $E$ ). Сумму запоминаем, увеличиваем  $L$  на 10 м и повторяем расчет. Если дальнейшее увеличение  $L$  смысла не имеет, то тогда (или по исчерпанию перебора) принимаем  $L$  и  $R$  равными минимальной сумме квадратов отклонений.

## 2. Алгоритм построения сплайна

*Первый шаг алгоритма.* Суммируя длины элементов исходной ломаной, определяем точку съемки, для которой эта сумма больше или равна  $L_{min}$ . Все точки соответствующей нормали рассматриваем последовательно как возможные начала левой клотоиды второго элемента (точка  $E$  на рис. 1). Для каждой из них перебираем направления и строим ВУ как точки пересечения с начальным направлением (рис. 4), и для каждой найденной ВУ наилучшие допустимые значения радиуса окружности и длину переходных кривых находим, как рекомендовано выше.



**Рис. 4.** Первый шаг алгоритма:  $A$  – начальное состояние;  $E, C, D$  – варианты состояний после первого шага.

Запоминаем для наилучшего варианта координаты ВУ, радиус, длину клотоид, окружности и прямой вставки, суммарную величину критерия оптимальности, а также предшествующее, в данном случае начальное состояние. Далее переходим к следующей нормали и повторяем описанные действия, пока не дойдем до нормали на расстоянии  $L_{max}$ . В результате будут построены все возможные в данной схеме варианты первой ВУ и, соответственно, первой кривой.

*Общий шаг алгоритма.* Берем первую нормаль, на которой есть точки и для которой удалось построить ВУ. В каждой из них имеется одно или несколько направлений. Каждую такую точку и каждое направление в ней будем рассматривать как начальные (рис. 5). На первом шаге была всего одна начальная точка и направление, а теперь их несколько. Для каждой такой точки и каждого направления выполняем все действия, как на первом шаге. Получаем варианты очередной ВУ и, соответственно, кривой, вписанной в угол. Далее переходим к следующей нормали и повторяем те же действия и т. д. Важно отметить, что на первом шаге могла быть связь только с одним предшествующим состоянием. Для дальнейших шагов таких связей может быть несколько, так как в одно и то же состояние можно прийти разными путями (рис. 5). Поскольку для каждого пути вычисляется критерий оптимальности, то в каждом состоянии из всех приводящих в него путей можно оставить только один и запомнить предыдущее состояние. Заметим, что сравнива-

ются пути достижения рассматриваемого состояния по целевой функции, вычисляемой от начальной точки до текущего состояния. Сравнимые пути могут содержать разное число кривых (ВУ). Процесс продолжается до тех пор, пока сумма длин элементов исходной ломаной до конечной точки больше, чем  $L_{min}$ . Иначе начинается поиск последней кривой (ВУ).

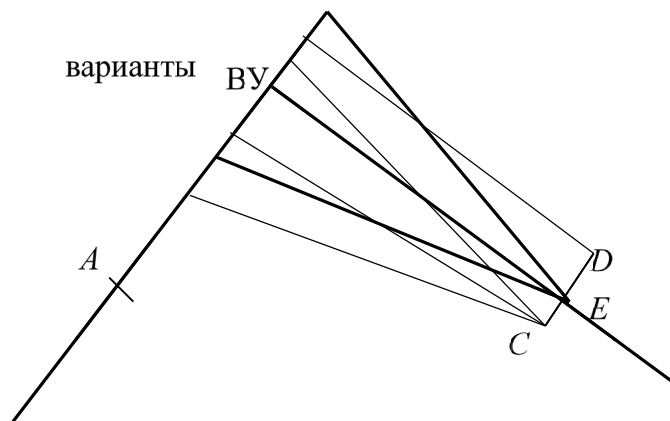


Рис. 5. Общий шаг алгоритма (начальных состояний – много).

*Последний шаг алгоритма.* Начинаем с нормали, отстоящей от конечной точки на  $L_{max}$ . Для всех относящихся к ней состояний (точек и направлений) последовательно строим пересечения с конечным направлением. Если оно не задано, то приходится последовательно рассматривать несколько таких направлений в конечной точке. Для каждого образовавшегося угла решаем, как и ранее, задачу «поиска оптимального значения радиуса окружности и длины клотоид». Отличие в том, что прямая вставка может не требоваться, то есть конечная точка может быть концом правой клотоиды, а не началом левой клотоиды следующего элемента.

Вычисляем суммарное значение критерия оптимальности, оставляем и запоминаем наилучший путь, приводящий в конечное состояние. Переходим к следующей нормали и выполняем те же действия. Процесс заканчивается при достижении последней нормали (на расстоянии  $L_{min}$  до конца), для которой выполнялись вычисления до перехода к поиску последней ВУ. Рассмотрев все допустимые варианты последней ВУ, выбираем и запоминаем наилучший по целевой функции.

*Восстановление искомого сплайна.* Поскольку в каждом из состояний запоминали то состояние, переход из которого дает суммарно (от начальной точки) наименьшее значение целевой функции, то обратным разворотом восстанавливаем ВУ, соответствующие оптимальному варианту, и все параметры вписанных кривых. Можно было бы запоминать и координаты концов клотоид и окружностей для упрощения последующих расчетов.

### Заключение

Результат, получаемый по новому алгоритму, не окончательный, так как на втором этапе ставилась цель найти число элементов и построить начальное приближение для оптимизации их параметров с помощью алгоритма нелинейного программирования (третий этап). Результат второго этапа может быть окончательным только при использовании

малых величин дискретов  $\Delta$  и  $\varphi$  при разбиении нормалей, создании веера направлений и использовании большого количества этих дискретов. Но, как показал опыт эксплуатации программы построения параболических сплайнов с помощью динамического программирования, такой подход может потребовать большого времени счета. Программа третьего этапа разработана несколько лет тому назад и показала хорошие результаты как при проектировании плана трассы реконструируемых железных дорог, так и при восстановлении оси автодорог. Отметим, что начальное приближение приходилось рассчитывать путем задания прямых вставок вручную в графическом режиме. Реализация изложенного алгоритма позволит автоматизировать и этот процесс.

### Литература:

1. Струченков В.И. Методы оптимизации трасс в САПР линейных сооружений. М: Солон-Пресс, 2015. 271 с.
2. Михалеви́ч В.С., Шор Н.З. Математические основы решения задачи выбора оптимального очертания продольного профиля // Труды Всесоюзн. науч.-исслед. ин-та трансп. стр-ва. Вып. 51. М.: Транспорт, 1964. С. 12–24.
3. Карих Ю.С. Оценка существующих методов проектирования продольного профиля // В сб. трудов ГипродорНИИ. Вып. 17. Повышение экономической эффективности капиталовложений в строительство, ремонт и содержание автомобильных дорог. М.: Издание ГипродорНИИ, 1976. С. 105–112.
4. Шейдвассер Д.М. Оптимизация трассы железных дорог на напряженных ходах // В Сб. научных трудов ВНИИ трансп. стр-ва. Автоматизация проектирования объектов транспортного строительства. М.: Транспорт, 1986. С. 16–29.
5. Струченков В.И. Использование параболических сплайнов в САПР линейных сооружений // Российский технологический журнал. 2018. Т. 6. № 1. С. 40–51.
6. Альберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения: пер. с англ. М.: Мир, 2012. 319 с.
7. Беллман Р. Динамическое программирование. М.: Изд-во Иностранной литературы, 1960. 402 с.

### References:

1. Struchenkov V.I. Methods to optimize the routes in CAD linear structures. Moscow, Solon Press Publ., 2014. 271 p. (in Russ.)
2. Mikhalevich V.S., Shor N.Z. Mathematical foundations for solving the problem of choice optimal outline of the longitudinal profile. *Trudy Vsesoyuznogo nauchno-issledovatel'skogo instituta transportnogo stroitel'stva* (Proceed. of the All-Union Scientific Research Institute of Transport Construction). 1964. Is. 51. Moscow: Transport Publ., 1964. P. 12-24. (in Russ.)
3. Karikh Yu.S. Evaluation of existing longitudinal profile design methods. In the Collection of works of GiprodorNII: Improving the economic efficiency of investment in the construction, repair and maintenance of roads. M.: GiprodorNII Publ., 1976. P. 105-112. (in Russ.)
4. Sheidvasser D.M. Optimization of the route of the railways on tight passages. In the Collection of scientific works of the All-Union Scientific Research Institute of Transport Construction: Automation of the design of transport construction objects. M.: Transport Publ.,

1986. P. 16-29. (in Russ.)

5. Struchenkov V.I. The use of parabolic splines in CAD of linear structures. *Rossiyskiy tekhnologicheskii zhurnal* ( Russian Technological Journal). 2018; 6(1):40-51. (in Russ.)

6. Alberg J., Nilson E., Walsh J. The theory of splines and its applications. Moscow: Mir Publ., 2012. 312 p. (in Russ.)

7. Bellman R. Dynamic programming. Moscow: Inostrannaya literatura Publ., 1960. 402 p. (in Russ.)

**Об авторах:**

**Карпов Дмитрий Анатольевич**, кандидат технических наук, заведующий кафедрой общей информатики Института кибернетики ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (Россия, 119454, Москва, пр. Вернадского, д. 78).

**Струченков Валерий Иванович**, доктор технических наук, профессор кафедры общей информатики Института кибернетики ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (Россия, 119454, Москва, пр. Вернадского, д. 78).

**About the authors:**

**Dmitry A. Karpov**, Ph.D. (Engineering), Head of the Chair of General Informatics, Institute of Cybernetics, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow 119454, Russia).

**Valery I. Struchenkov**, D.Sc. (Engineering), Professor of the Department of General Informatics of the Institute of Cybernetics of Chair of General Informatics, Institute of Cybernetics, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow 119454, Russia).

**Для цитирования:** Карпов Д.А., Струченков В.И. Динамическое программирование как метод сплайн-аппроксимации в САПР линейных сооружений // Российский технологический журнал. 2019. Т. 7. № 3. С. 77–88. DOI: 10.32362/2500-316X-2019-7-3-77-88

**For citation:** Karpov D.A., Struchenkov V.I. Dynamic Programming as a Method of Spline Approximation in the CAD Systems of Linear Constructions. *Rossiyskiy tekhnologicheskii zhurnal* (Russian Technological Journal). 2019; 7(3):77-88. (in Russ.). DOI: 10.32362/2500-316X-2019-7-3-77-88