

Математическое моделирование  
Mathematical modeling

УДК 001.57; 004.942

<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2026-14-3-115-130>

EDN MYWEJW



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

## Особенности аналитического моделирования нелинейных поверхностных волн в градиентных средах

С.Е. Савотченко <sup>1, @</sup>,  
Н.О. Афанасьева <sup>2</sup>

<sup>1</sup> МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, 119454 Россия

<sup>2</sup> Российский государственный геологоразведочный университет им. Серго Орджоникидзе,  
Москва, 117997 Россия

@ Автор для переписки, e-mail: savotchenkose@mail.ru

• Поступила: 13.10.2025 • Доработана: 10.11.2025 • Принята к опубликованию: 20.03.2026

### Резюме

**Цели.** Важную роль в современной физике и волноводной оптике играют и исследования, связанные с нахождением точных решений используемых при моделировании уравнений, позволяющие выявить классы точно решаемых моделей. Цель работы – изучение свойств поверхностных поперечных волн, распространяющихся вдоль границы раздела нелинейной и градиентной немагнитных сред без потерь.

**Методы.** В работе использованы методы математического моделирования, методы анализа и математической физики, дифференциальных уравнений и теории специальных функций. Использовались базовые принципы, методы и физические модели нелинейной и волноводной оптики.

**Результаты.** Проведено моделирование свойств поверхностных поперечных волн, распространяющихся вдоль границы раздела нелинейной и градиентной сред. В качестве модели нелинейности среды, описывающей нелинейно-оптический отклик среды на возмущения электрического поля, выбрана линейная форма зависимости диэлектрической проницаемости от интенсивности света. В качестве модели градиентной среды выбрана форма пространственного профиля диэлектрической проницаемости, описывающая ее изменение в зависимости от расстояния до границы раздела, для которой можно найти точное аналитическое решение стационарного волнового уравнения. Приведена математическая формулировка модели, которая представляет собой краевую задачу сопряжения для нелинейного уравнения с переменными коэффициентами. Найдены точные аналитические решения данной краевой задачи для случаев фокусирующей и дефокусирующей нелинейностей, которые описывают пространственные распределения напряженности электрического поля в поперечном направлении на границе раздела сред. Анализ модели позволил выявить существенные различия пространственного распределения интенсивности поля в поверхностных волнах, распространяющихся в фокусирующих и дефокусирующих средах. Проведен детальный анализ влияния значений параметров модели, характеризующих оптические свойства контактирующих сред, на пространственное распределение интенсивности света в поверхностных волнах.

**Выводы.** Полученные результаты дополняют существующую теорию нелинейной и волноводной оптики и могут найти применение при проектировании новых волноводных структур с определяемыми пользователями свойствами. Полученные новые решения расширяют класс точно решаемых моделей планарных волноводных структур с распределенными неоднородными и нелинейными свойствами.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, математическая модель, краевая задача, точное решение, поверхностная волна, волноводная оптика, нелинейная оптика

**Для цитирования:** Савотченко С.Е., Афанасьева Н.О. Особенности аналитического моделирования нелинейных поверхностных волн в градиентных средах. *Russian Technological Journal*. 2026;14(3):115–130. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2026-14-3-115-130>, <https://www.elibrary.ru/MYWEJW>

**Прозрачность финансовой деятельности:** Авторы не имеют финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## RESEARCH ARTICLE

# Features of analytical modeling of nonlinear surface waves in gradient media

Sergey E. Savotchenko <sup>1, @</sup>,  
Nadezhda O. Afanasyeva <sup>2</sup>

<sup>1</sup> MIREA – Russian Technological University, Moscow, 119454 Russia

<sup>2</sup> Sergo Ordzhonikidze Russian State Geological Prospecting University, Moscow, 117997 Russia

@ Corresponding author, e-mail: savotchenkose@mail.ru

• Submitted: 13.10.2025 • Revised: 10.11.2025 • Accepted: 20.03.2026

### Abstract

**Objectives.** An important role in modern physics, particularly in waveguide optics, is played by studies that involve the search for exact solutions to equations used in modeling to identify classes of exactly solvable models. This work set out to use analytical modeling methods to explore the properties of surface shear waves propagating without loss along the interface between a nonlinear and a graded-index nonmagnetic medium.

**Methods.** Methods of mathematical modeling, calculus, mathematical physics, differential equations, and the theory of special functions were used. Fundamental principles, methods, and physical models of nonlinear and waveguide optics were also applied.

**Results.** The properties of surface transverse waves propagating along the interface between a nonlinear and a graded-index medium are modeled. In order to model the nonlinearity of the medium to describe the nonlinear optical response of the medium to electric field perturbations, the linear dependence of permittivity on light intensity is chosen as a parameter. The graded-index medium is modeled using a spatial profile of permittivity as a function of distance from the interface for which an exact analytical solution to the stationary wave equation can be found. A mathematical formulation of the model is presented, consisting of a conjugation boundary value problem for a nonlinear equation with variable coefficients. Exact analytical solutions to this boundary value problem are found for the cases of focusing and defocusing nonlinearities to describe the spatial distributions of the electric field strength in the direction transverse to the interface. Analysis of the model revealed significant differences in the spatial distribution of the field intensity in surface waves propagating in the focusing and defocusing media. The effect of the values of model parameters used to characterize the optical properties of the contacting media on the spatial distribution of light intensity in surface waves was also studied in detail.

**Conclusions.** The obtained, which results supplement the existing theory of nonlinear and waveguide optics, can be applied in the design of new waveguide structures with user-defined properties. The obtained new solutions expand the class of exactly solvable models of planar waveguide structures with distributed inhomogeneous and nonlinear properties.

**Keywords:** mathematical modeling, mathematical model, boundary value problem, exact solution, surface wave, waveguide optics, nonlinear optics

**For citation:** Savotchenko S.E., Afanasyeva N.O. Features of analytical modeling of nonlinear surface waves in gradient media. *Russian Technological Journal*. 2026;14(3):115–130. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2026-14-3-115-130>, <https://www.elibrary.ru/MWWEJW>

**Financial disclosure:** The authors have no financial or proprietary interest in any material or method mentioned.

The authors declare no conflicts of interest.

## ВВЕДЕНИЕ

Математическое моделирование занимает центральное место в современной физике и волноводной оптике, в частности [1], т.к. позволяет выявить, описать и предсказать поведение физической системы, происходящее под влиянием различных параметров. В основе большинства математических моделей физических процессов лежат краевые задачи для дифференциальных уравнений в частных производных, которые при определенных условиях могут переходить в обыкновенные. Современные вычислительные системы позволяют не только находить численными методами решения таких задач, но визуализировать их. Однако в прикладных математических исследованиях важную роль играют и проблемы нахождения точных решений сформулированных уравнений, позволяющие выявить классы точно решаемых моделей. Существование точного решения, в отличие от численного, дает возможность не только быстро и наглядно анализировать влияние параметров модели на изучаемый процесс, но и получать асимптотические выражения и другие оценки в явной аналитической форме [2].

Данная работа посвящена нахождению точных решений краевых задач, возникающих при моделировании распространения поверхностных волн в планарных волноводных структурах [3]. Хотя направлению исследований волноводных свойств границ раздела сред с различными оптическими свойствами посвящено большое количество литературы [4–6], остается много неизученных проблем, связанных с аналитическим описанием свойств поверхностных волн в рамках моделей волноводов, допускающих нахождения точных решений. Такие модели часто называют точно решаемыми [7].

В нелинейной и волноводной оптике основным модельным уравнением является волновое, которое получается из уравнений Максвелла. При изучении установившихся во времени волновых процессов волновое уравнение переходит

в уравнение Гельмгольца [8]. Оптические свойства среды, в которой изучается волновой процесс, определяются показателем преломления или диэлектрической проницаемостью (для немагнитных сред). Поэтому выбор формы зависимости этих характеристик от функции процесса (например, интенсивности света) или пространственных переменных определяет возможность существования точного решения уравнения модели. Такие зависимости сами являются модельными и отражают оптический отклик среды на различные возмущения.

При описании нелинейного отклика среды используются модели, в которых диэлектрическая проницаемость зависит от интенсивности света, т.е. от квадрата амплитуды напряженности электрического (или магнитного) поля [9]. Многие из таких моделей допускают нахождение точных аналитических решений. К наиболее распространенным из них относится керровская нелинейность, в которой диэлектрическая проницаемость линейно зависит от интенсивности света. В такой модели нелинейности в зависимости от геометрии системы существуют различные классы точных решений нелинейных уравнений, известные как солитоны [10–12], кинки, кноидальные волны [13]. В частности, в [12] рассматривались не оптические солитоны, а другой физической природы, что подчеркивает широту применения однопольных математических моделей для широкого класса различных по физической природе явлений.

При описании пространственной неоднородности оптических свойств среды используются модели, в которых диэлектрическая проницаемость зависит от пространственных координат. В волноводной оптике среды, где показатель преломления плавно зависит от пространственной координаты, называют градиентными [14]. В этом случае уравнение содержит переменные (распределенные) коэффициенты, определяемые выбранной моделью неоднородности. Известны точные аналитические решения

для широкого класса моделей, выражаемые через различные специальные функции [15].

С физической точки зрения важным является изучение особенностей распространения волн вдоль границ разделов сред с различными оптическими свойствами. При моделировании таких процессов формулируются краевые задачи с условиями сопряжения на границе раздела сред. В ряде работ изучались различные поверхностные волны, распространяющиеся вдоль границ раздела нелинейных и неоднородных сред [16]. Были получены точные решения модельных краевых задач сопряжения, описывающие различные типы поверхностных волн [17, 18].

В недавней работе [19] изучались поверхностные волны вдоль поверхности оптически неоднородного кристалла с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ , моделируемой специального вида профилем, который представляет собой обобщение гиперболического ( $\varepsilon \sim 1/x$ ) [20] и обратного квадратического профилей ( $\varepsilon \sim 1/x^2$ ) [21]. Рассматривался контакт неоднородной среды с таким профилем с однородной линейной средой, в которой интенсивность поля экспоненциально убывает при удалении от границы раздела сред. Было найдено точное аналитическое решение поставленной краевой задачи сопряжения и показано, что его можно выразить через функцию Уиттекера.

В данной работе рассматривается контакт неоднородной среды с таким же пространственным профилем, но с оптической нелинейной средой. В качестве модели нелинейного отклика выбирается керровская нелинейность. Показано, что при таком выборе моделей неоднородности и нелинейности поставленная краевая задача имеет точное решение. Полученное решение применено для выявления особенностей формирования пространственного профиля электрического поля в поперечном направлении в зависимости от варьирования оптических параметров модели.

Основным результатом работы является получение точного решения для данной конфигурации сред. Данное решение описывает новый тип волны, при этом под новизной типа волны здесь понимается форма ее профиля в поперечном направлении раздела сред. Кроме того, выявлена чувствительность свойств такой волны к изменениям оптических параметров сред.

## 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА МОДЕЛИ

Рассмотрим плоскую границу двух немагнитных сред без диэлектрических потерь с различными оптическими свойствами. Пусть плоскость границы

раздела сред расположена в координатной плоскости  $x = 0$  (плоскость  $yOz$  в пространстве), а ось  $Ox$  расположена перпендикулярно границе раздела, и ее направление совпадает с направлением распространения поверхностной волны. Если считать, что среды однородны вдоль границы их раздела, то распределение электрического поля в поперечной волне будет тоже однородным вдоль нее и характеризоваться пространственным различием только в поперечном направлении. При моделировании поверхностных волн в таких системах задача сводится к одномерной в направлении, перпендикулярном границе раздела сред, и ее решение описывает пространственное распределение  $y$ -вой компоненты вектора напряженности электрического поля в данном направлении.

Как известно [8], основное уравнение теории волноводной оптики, описывающее поперечное распределение  $u(x)$  электрического поля в поверхностной волне, может быть записано в виде:

$$u''(x) + \{k_0^2 \varepsilon(x, I) - \beta^2\} u(x) = 0, \quad (1)$$

где  $\varepsilon(x, I)$  – диэлектрическая проницаемость,  $I = u^2$  – интенсивность электрического поля (света),  $k_0 = 2\pi/\lambda_0$  – продольное волновое число,  $\lambda_0$  – длина волны подающегося излучения,  $\beta$  – константа распространения, которая связана с эффективным показателем преломления  $n$  выражением  $\beta = nk_0$ .

Уравнение (1) представляет собой в общем случае нелинейное уравнение с переменными коэффициентами.

Оптические свойства сред и их пространственное распределение полностью описывается диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon(x, I)$ . Поэтому различия в моделях сред описываются этой функцией. В случае плоской границы раздела сред такую функцию представляют в ступенчатом виде:

$$\varepsilon(x, I) = \begin{cases} \varepsilon_G(x), & x > 0, \\ \varepsilon_N(I), & x < 0, \end{cases} \quad (2)$$

где учтено, что моделируется контакт нелинейной среды с градиентной; при этом предполагается, что нелинейная среда занимает полупространство  $x < 0$ , а градиентная – полупространство  $x > 0$ .

В (2) функция  $\varepsilon_N(I)$  описывает зависимость диэлектрической проницаемости от интенсивности света в нелинейной среде. Ее конкретный вид определяется моделью нелинейности среды, обусловленной нелинейно-оптическим откликом среды на возмущения электрического поля, возникающим вследствие перераспределения внутренних зарядов при изменении интенсивности возбуждающего поверхностную волну лазерного излучения. Отметим, что существует большое разнообразие реальных материалов с керровской нелинейностью. К примеру,

это кристаллы, подобные  $\text{AgGaSe}_x\text{S}_{2(1+x)}$ , обладающие высокой нелинейностью, включая керровскую, в которых показатель преломления изменяется пропорционально квадрату напряженности светового поля, а также полупроводники GaP, InAs, InP и InSb.

Функция  $\varepsilon_G(I)$  фактически характеризует пространственную неоднородность профиля показателя преломления в градиентной среде. Ее конкретный вид определяется моделью градиентной среды, в которой изменение показателя преломления с расстоянием от поверхности обусловлено пространственным распределением зарядов, индуцированных, например, имплантированными ионами. При этом профиль показателя преломления может соответствовать пространственному распределению концентрации имплантированных ионов. Это означает, что если технологически возможно создать определенный концентрационный профиль ионов при имплантации, то получится соответствующий профиль показателя преломления, определяющий функцию  $\varepsilon_G(I)$ .

В данной работе будем рассматривать наиболее распространенную модель нелинейности в виде линейной зависимости диэлектрической проницаемости от интенсивности света (т.е. квадратичной относительно электрического поля). Такая модель описывает нелинейные среды, обладающие эффектом Керра, и называемые керровскими. Для случая керровской нелинейности функцию  $\varepsilon_N(I)$  можно записать в виде:

$$\varepsilon_N(I) = \varepsilon_{0N}(I) + \alpha I, \quad (3)$$

где  $\alpha$  – коэффициент керровской нелинейности,  $\varepsilon_{0N} = \varepsilon_N(I = 0)$  – невозмущенное значение диэлектрической проницаемости нелинейной среды. В нелинейной оптике положительное значение коэффициента керровской нелинейности моделирует среду с самофокусирующим эффектом распространения пучка света (фокусирующие среды), а отрицательное – с дефокусирующим (дефокусирующие среды) [9]. Выбор модели нелинейности в виде (3) в первую очередь связан с тем, что уравнение (1) с коэффициентом (3) имеет точные аналитические решения, конкретный вид которых определяется знаком коэффициента керровской нелинейности и дополнительными условиями (ограниченность, периодичность и др.).

Для моделирования пространственной неоднородности показателя преломления в градиентной среде в данной работе будем использовать функцию в виде:

$$\varepsilon_G(x) = e_0 + \frac{e_1}{x+h} + \frac{e_2}{(x+h)^2}, \quad (4)$$

где  $e_0, e_1, e_2, h$  – параметры пространственного профиля диэлектрической проницаемости. Выбор

модели градиентной среды в виде (4) в первую очередь связан с тем, что уравнение (1) с коэффициентом (4) имеет точные аналитические решения [19], конкретный вид которых определяется параметрами профиля и выражается через специальные функции математической физики. К тому же, форма профиля диэлектрической проницаемости в виде (4) представляет собой обобщение монотонной убывающих профилей показателя преломления, использованных ранее при моделировании поверхностных волн, распространяющихся вдоль контакта градиентных с керровской нелинейной средой. В частности, при  $e_0 = e_2 = 0$  (4) переходит в профиль  $\varepsilon_G(x) = e_1/(x+h)$ , использованный в [20], а при  $e_0 = e_1 = 0$  (4) переходит в профиль  $\varepsilon_G(x) = e_2/(x+h)^2$ , использованный в [21].

Резко спадающий монотонным (но не экспоненциальным) образом на узком участке профиль показателя преломления упоминался при разработке особых фотоннокристаллических гетероструктур в работах [22, 23]. Профиль в форме (4) представляет собой более общий вариант упомянутого в них гиперболического профиля. Подбор параметров профиля (4) позволяет более качественно аппроксимировать экспериментально получаемые профили подобного класса. В связи с этим возникает интерес теоретического изучения возможности построения кристаллической системы, как композиции из указанных типов оптических материалов, на основе которого могут быть выявлены новые свойства.

Поскольку коэффициент  $\varepsilon$  в уравнении (1) является в общем случае разрывным (со скачком), то его решение можно представить в виде:

$$u(x) = \begin{cases} u_G(x), & x > 0 \\ u_N(I), & x < 0, \end{cases} \quad (5)$$

где искомые функции  $u_G(x)$  и  $u_N(x)$  описывают пространственные поперечные распределения напряженности электрического поля в градиентной и нелинейной средах, соответственно, и определены на соответствующих полуосях. В результате вместо уравнения (1) с учетом (2)–(5) можно записать два уравнения на полуосях:

$$u_G''(x) + \left( e_0 + \frac{e_1}{x+h} + \frac{e_2}{(x+h)^2} - n^2 \right) \times \\ \times k_0^2 u_G(x) = 0, \quad x > 0, \quad (6)$$

$$u_N''(x) + \{ \varepsilon_{0N} + \alpha |u_N|^2 - n^2 \} k_0^2 u_N(x) = 0, \quad x < 0. \quad (7)$$

Требования непрерывности компонент электромагнитного поля при переходе из одной среды в другую приводит к необходимости использования граничных условий сопряжения на границе раздела сред при  $x = 0$ :

$$u_G(+0) = u_G(-0), \quad (8)$$

$$u'_G(+0) = u'_G(-0). \quad (9)$$

Здесь и далее понимаются односторонние пределы  $\lim_{x \rightarrow \pm 0} f(x) = f(\pm 0)$ .

Поскольку поле должно стремиться к нулю на бесконечности, то естественным образом возникают условия на бесконечности:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u_{G,N}(x) = 0. \quad (10)$$

Таким образом, математическая формулировка модели представляет собой краевую задачу нахождения непрерывных и ограниченных решений уравнений (6) и (7) на соответствующих полуосях, связанных условиями сопряжения (8) и (9) и удовлетворяющих условиям на бесконечности (10).

## 2. АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Уравнение (6) представляет собой уравнение с переменными коэффициентами, и его ограниченное на положительной полуоси решение может быть записано различными способами: через гипергеометрическую функцию, конфлюэнтную функцию Хойна, а также функцию Уиттекера. На наш взгляд предпочтительнее является форма представления решения посредством функции Уиттекера.

Ограниченным на положительной полуоси решением уравнения дифференциального уравнения Уиттекера [24]

$$y'' + \left( \frac{\mu}{z} - \frac{1}{4} + \frac{1/4 - \nu^2}{z^2} \right) y = 0$$

является функция Уиттекера  $W_{\mu,\nu}(z)$ . С помощью замены переменных уравнение (6) приводится к уравнению Уиттекера, и тогда его ограниченное на положительной полуоси решение можно записать в виде:

$$u_G(x) = u_0 \frac{W_{\mu,\nu}(p(x+h))}{W_{\mu,\nu}(ph)}, \quad (11)$$

где  $u_0$  – амплитуда напряженности электрического поля на границе раздела сред, и индексы и параметры функции Уиттекера определяются коэффициентами уравнения (6) как:

$$\mu = \frac{e_1 k_0}{2\sqrt{n^2 - e_0}}, \quad (12)$$

$$\nu = \sqrt{1 - 4k_0^2 e_2} / 2, \quad (13)$$

$$p = 2k_0 \sqrt{n^2 - e_0}. \quad (14)$$

Для существования такого решения должны выполняться условия:  $n^2 > e_0$  и  $k_0^2 > 1/4e_2$ . В силу выбора функции Уиттекера, решение (11) удовлетворяет условию на бесконечности (10), которое для него имеет вид  $u_G(x) \rightarrow 0, x \rightarrow +\infty$ .

Выражение (7) представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение. Оно имеет несколько типов решений, зависящих от знака коэффициента нелинейности  $\alpha$ . Поэтому дальнейший анализ модели проводится отдельно для случаев  $\alpha > 0$  и  $\alpha < 0$ .

1) Случай фокусирующей нелинейности ( $\alpha > 0$ ).

При  $\alpha > 0$  ограниченное на отрицательной полуоси решение уравнение (7), удовлетворяющее условию на бесконечности (10), которое для него имеет вид  $u_N(x) \rightarrow 0, x \rightarrow -\infty$ , выражается через гиперболический косинус:

$$u_N(x) = \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \cdot \frac{q}{k_0 \operatorname{ch}(q(x - x_N))}, \quad (15)$$

где

$$q^2 = k^2(n^2 - \epsilon_{0N}), \quad (16)$$

а величина  $x_N$  характеризует положение максимума (при его наличии) интенсивности поверхностной волны в нелинейной среде, которое определяется из граничных условий.

Для определения амплитуды поля на границе раздела и  $x_N$  следует подставить решения (11) и (15) в граничные условия (8) и (9). В результате таких преобразований можно получить:

$$u_0 = \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \cdot \frac{q}{k_0 \operatorname{ch}(qx_N)}, \quad (17)$$

$$x_N = \frac{1}{q} \operatorname{arcth} \left( \frac{q_G}{q} \right), \quad (18)$$

где обозначено:

$$q_G = p \frac{W'_{\mu,\nu}(ph)}{W_{\mu,\nu}(ph)}. \quad (19)$$

С учетом (18) из (17) можно получить интенсивность поля на границе раздела сред в виде:

$$I_0 = |u_0|^2 = \frac{2}{\alpha} (n^2 - \epsilon_{0N} - q_G^2 / k_0^2). \quad (20)$$

Таким образом, всюду непрерывное, гладкое, ограниченное, исчезающее на бесконечности решение поставленной краевой задачи положительной нелинейности можно записать в виде:

$$u(x) = \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \cdot \begin{cases} \frac{W_{\mu,\nu}(p(x+h))}{W_{\mu,\nu}(ph)}, & x > 0, \\ \frac{q}{k_0 \operatorname{ch}(q(x - x_N))}, & x < 0. \end{cases} \quad (21)$$

Выражение (21) описывает нелинейную поверхностную волну, распространяющуюся вдоль границы раздела нелинейной фокусирующей и градиентной сред с выбранными моделями нелинейности и пространственного распределения показателя преломления.

2) Случай дефокусирующей нелинейности ( $\alpha < 0$ ).

При  $\alpha < 0$  ограниченное на отрицательной полуоси решение уравнение (7), удовлетворяющее условию на бесконечности (10), которое для него имеет вид  $u_N(x) \rightarrow 0, x \rightarrow -\infty$ , выражается через гиперболический синус:

$$u_N(x) = -\sqrt{\frac{2}{|\alpha|}} \cdot \frac{q}{k_0 \operatorname{sh}(q(x-x_N))}. \quad (22)$$

Для определения амплитуды поля на границе раздела и  $x_N$  следует подставить решения (11) и (22) в граничные условия (8) и (9). В результате таких преобразований можно получить:

$$u_0 = \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \cdot \frac{q}{k_0 \operatorname{sh}(qx_N)}, \quad (23)$$

$$x_N = \frac{1}{q} \operatorname{arcctth}\left(\frac{q_G}{q}\right). \quad (24)$$

С учетом (24) из (23) можно получить интенсивность поля на границе раздела сред в виде:

$$I_0 = \frac{2}{|\alpha|} (q_G^2 / k_0^2 + \varepsilon_{0N} - n^2). \quad (25)$$

Таким образом, всюду непрерывное, гладкое, ограниченное, исчезающее на бесконечности решение поставленной краевой задачи в случае отрицательной нелинейности можно записать в виде:

$$u(x) = \sqrt{\frac{2}{|\alpha|}} \cdot \begin{cases} \frac{W_{\mu,v}(p(x+h))}{W_{\mu,v}(ph)}, & x > 0, \\ \frac{q}{k_0 \operatorname{sh}(q(x-x_N))}, & x < 0. \end{cases} \quad (26)$$

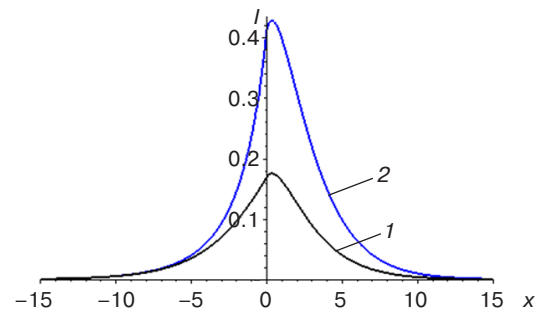
Выражение (26) описывает нелинейную поверхностную волну, распространяющуюся вдоль границы раздела нелинейной дефокусирующей и градиентной сред с выбранными моделями нелинейности и пространственного распределения показателя преломления.

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ СВОЙСТВ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН

В первую очередь отметим различия в пространственном распределении интенсивности поля  $I$  в поверхностных волнах, распространяющихся в фокусирующих и дефокусирующих средах,

контактирующих с градиентной средой в рассматриваемой модели неоднородности.

На рис. 1 приведены характерные поперечные профили интенсивности, построенные при использовании решений (21) и (26) для одних и тех же значений оптических параметров. Отметим, что выбрано  $|\alpha| = 1$ , т.е.  $\alpha = 1$  для случая фокусирующей среды при построении линии 1 и  $\alpha = -1$  для случая дефокусирующей среды при построении линии 2. Все остальные значения параметров совпадают, причем они выбраны так, чтобы их значения попадали в диапазоны существования обеих поверхностных волн.



**Рис. 1.** Пространственные распределения интенсивности поля в поверхностных волнах, определяемых выражениями (21) – линия 1, и (26) – линия 2, при значениях параметров системы (в условных безразмерных единицах):  $k_0 = 0.5, h = 0.5, e_0 = -0.1, e_1 = 0.8, e_2 = 0.2, \varepsilon_{0N} = 0.05, n = 0.44, a = 1$  (линия 1),  $\alpha = -1$  (линия 2)

Поверхностные волны характеризуются одним ярко выраженным максимумом пространственного распределения интенсивности поля, которое монотонно убывает при удалении от положения максимума в обе стороны от границы раздела сред. В выбранном диапазоне значений параметров максимум интенсивности поверхностных волн обоих типов располагается в градиентной среде. Как будет показано далее, в случае дефокусирующей нелинейности максимум интенсивности всегда располагается в градиентной среде, а в случае фокусирующей нелинейности он может располагаться и в нелинейной среде (не только в градиентной), но при других значениях параметров. Другими словами, в дефокусирующей нелинейной среде поле всегда затухает строго монотонно при любых значениях параметров. В фокусирующей среде затухание может быть немонотонным, с всплеском интенсивности вблизи границы раздела сред, причем в этом случае в градиентной среде затухание становится монотонным.

Высота интенсивности максимума в поверхностной волне в дефокусирующей среде (линия 2 на рис. 1) существенно превышает высоту интенсивности максимума в поверхностной волне в фокусирующей среде (линия 1 на рис. 1). К примеру, для выбранных на рис. 1 значений параметров это превышение более

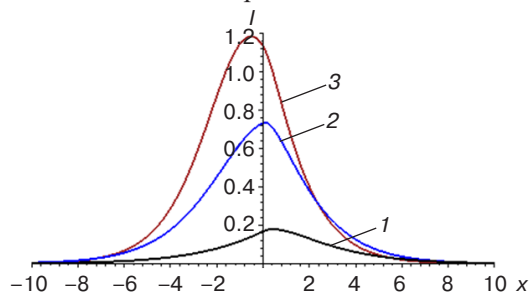
чем в два раза. Это обуславливает более высокую интенсивность света в поверхностной волне в дефокусирующей среде по сравнению с интенсивностью в поверхностной волне в фокусирующей среде на одном и том же расстоянии от границы раздела сред.

Далее приведем результаты моделирования свойств поверхностных волн, обусловленные изменениями оптических характеристик сред. Для случаев фокусирующей и дефокусирующей сред такой анализ проводится отдельно.

Отметим, что варьирование параметров моделей нелинейности (3) и градиентной сред (4) означает, что разным их значениям соответствуют различные среды. Варьирование эффективного показателя преломления  $n$  (что равносильно варьированию константы распространения  $\beta$ ) означает изменение угла падения луча, возбуждающего поверхностную волну в данной среде. Варьирование продольного волнового числа  $k_0$  означает изменение длины волны возбуждающего поверхностную волну излучения (к примеру, длины волны лазера).

1) Случай фокусирующей нелинейности ( $\alpha > 0$ ).

В результате моделирования с использованием аналитического решения (21) установлено, что поверхностная волна, распространяющаяся вдоль границы с фокусирующей нелинейной средой, в зависимости от значения эффективного показателя преломления может характеризоваться максимумом интенсивности, располагающимся как в нелинейной, так и в градиентной средах. В частности, при относительно небольших значениях эффективного показателя преломления положение максимума интенсивности находится в градиентной среде, и при его увеличении оно смещается ближе к границе раздела сред, а затем переходит в нелинейную среду (рис. 2). При этом его высота также возрастает. Глубина проникновения поля в нелинейную среду растет, а в градиентной среде она сначала возрастает, а затем начинает уменьшаться при увеличении эффективного показателя преломления.



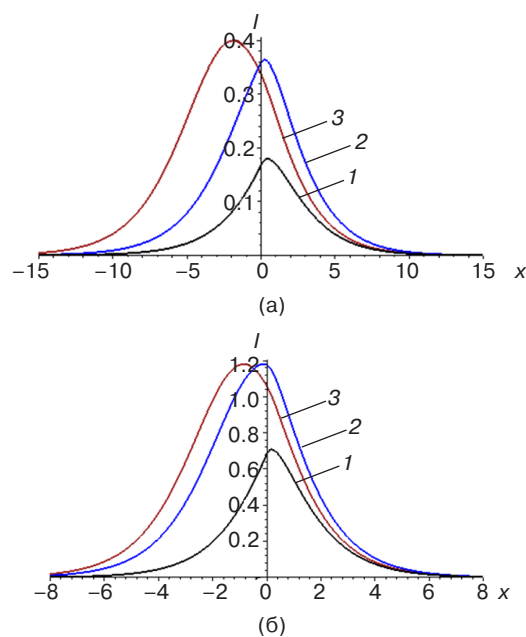
**Рис. 2.** Пространственные распределения интенсивности поля в поверхностных волнах в фокусирующей среде, определяемых (21), при значениях параметров системы (в условных безразмерных единицах):

$\alpha = 1, k_0 = 0.5, e_0 = -0.1, e_1 = 1, e_2 = 0.1, \epsilon_{ON} = 0.05, n = 0.5$  (линия 1),  $n = 0.65$  (линия 2),  $n = 0.8$  (линия 3)

Видно, что существуют два различных характерных вида распределения интенсивности поля в поверхностной волне, распространяющейся вдоль границы с фокусирующей нелинейной средой, при двух различных значениях эффективного показателя преломления. Одному виду соответствует максимум интенсивности в градиентной среде (линия 1 на рис. 2), а другому – максимум интенсивности в нелинейной среде (линия 3 на рис. 2).

Далее будем анализировать изменение пространственного распределения интенсивности поверхностной волны при данных двух характерных значениях эффективного показателя преломления при варьировании параметров моделей сред.

Влияние изменения значения параметра  $h$  градиентного профиля (4) на пространственное распределение интенсивности поверхностной волны показано на рис. 3. При увеличении значения  $h$  положение максимума интенсивности смещается из градиентной среды в нелинейную. Однако форма профилей поля зависит от эффективного показателя преломления. В частности, при малых значениях  $n$  (рис. 3а) интенсивность поля ниже, чем при больших (рис. 3б).



**Рис. 3.** Пространственные распределения интенсивности поля в поверхностных волнах в фокусирующей среде, определяемых (21), при значениях параметров системы (в условных безразмерных единицах):  
 $\alpha = 1, k_0 = 0.5, e_0 = -0.1, e_1 = 1, e_2 = 0.2, \epsilon_{ON} = 0.05,$   
(а)  $n = 0.5, h = 0.5$  (линия 1),  $h = 0.7$  (линия 2),  
 $h = 1.5$  (линия 3);  
(б)  $n = 0.8, h = 0.2$  (линия 1),  $h = 0.4$  (линия 2),  
 $h = 0.6$  (линия 3)

Влияние изменения значения параметра  $e_2$  градиентного профиля (4) на пространственное распределение интенсивности поверхностной волны

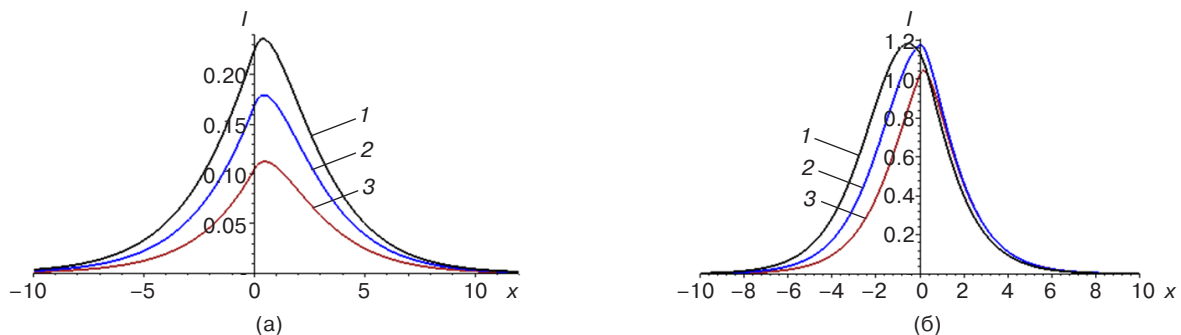
показано на рис. 4. Для малых значений эффективного показателя преломления (рис. 4а) при увеличении значения  $e_2$  положение максимума интенсивности, находящееся в градиентной среде, остается неизменным, а его высота снижается. Для больших значений эффективного показателя преломления (рис. 4б) при увеличении значения  $e_2$  положение максимума интенсивности, находящееся в нелинейной среде, смещается в градиентную среду, а его высота также снижается.

Влияние изменения значения параметра  $e_1$  градиентного профиля (4) на пространственное распределение интенсивности поверхностной волны показано на рис. 5. Для малых значений эффективного показателя преломления (рис. 5а) при увеличении значения  $e_1$  положение максимума интенсивности, находящееся в градиентной среде, перемещается в глубину градиентной среды, а его высота снижается. Для больших значений эффективного показателя преломления (рис. 5б) при увеличении значения  $e_1$  положение максимума интенсивности, находящееся в нелинейной среде, смещается в градиентную среду, а его высота также снижается.

Влияние изменения значения параметра  $e_0$  градиентного профиля (4) на пространственное

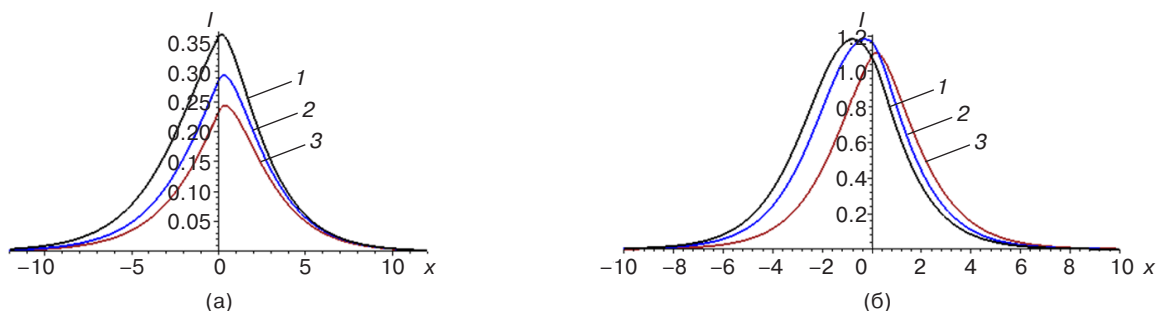
распределение интенсивности поверхностной волны показано на рис. 6. Для малых значений эффективного показателя преломления (рис. 6а) при уменьшении значения  $e_0$  положение максимума интенсивности, находящееся в градиентной среде, перемещается в глубину градиентной среды, а его высота увеличивается. Для больших значений эффективного показателя преломления (рис. 6б) при уменьшении значения  $e_0$  положение максимума интенсивности, находящееся в нелинейной среде, смещается в ее глубину, удаляясь от границы раздела сред, а его высота не меняется.

Влияние изменения значения параметра  $\varepsilon_{0N}$  модели нелинейности (3) на пространственное распределение интенсивности поверхностной волны показано на рис. 7. Для малых значений эффективного показателя преломления (рис. 7а) при увеличении значения  $\varepsilon_{0N}$  положение максимума интенсивности, находящееся в градиентной среде, не меняется, а его высота уменьшается. При больших значениях эффективного показателя преломления (рис. 7б) наблюдается аналогичный эффект, когда положение максимума интенсивности находится в нелинейной среде, однако снижение высоты максимума менее значительно, чем в случае малых  $n$  при одинаковом интервале вариации  $\varepsilon_{0N}$ .

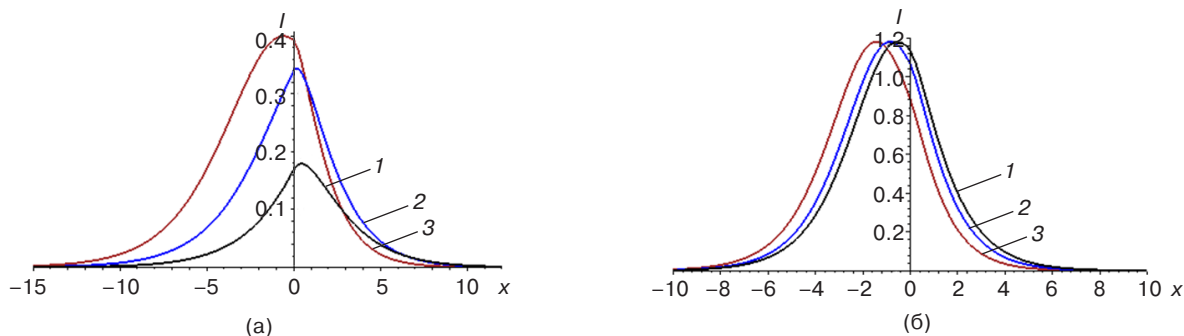


**Рис. 4.** Пространственные распределения интенсивности поля в поверхностных волнах в фокусирующей среде, определяемых (21), при значениях параметров системы (в условных безразмерных единицах):

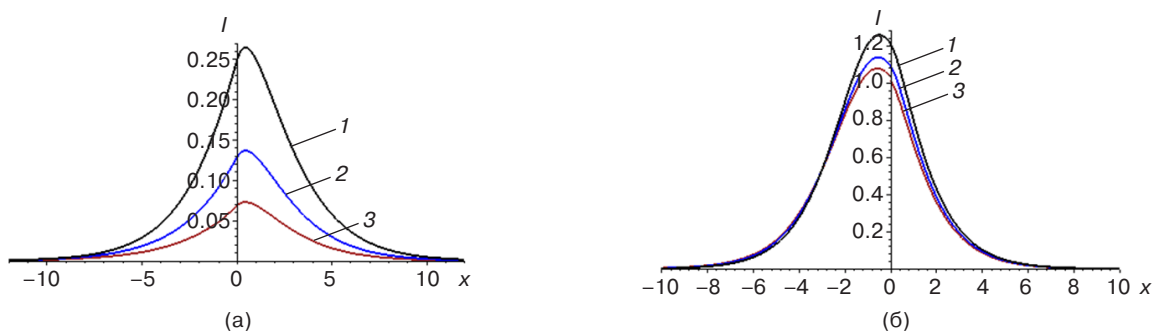
- $\alpha = 1, k_0 = 0.5, e_0 = -0.1, e_1 = 1, h = 0.5, \varepsilon_{0N} = 0.05,$   
 (а)  $n = 0.5, e_2 = 0.15$  (линия 1),  $e_2 = 0.2$  (линия 2),  $e_2 = 0.25$  (линия 3);  
 (б)  $n = 0.8, e_2 = 0.2$  (линия 1),  $e_2 = 0.5$  (линия 2),  $e_2 = 0.8$  (линия 3)



**Рис. 5.** Пространственные распределения интенсивности поля в поверхностных волнах в фокусирующей среде, определяемых (21), при значениях параметров системы (в условных безразмерных единицах):  $\alpha = 1, k_0 = 0.5, e_0 = -0.1, e_2 = 0.2, h = 0.5, \varepsilon_{0N} = 0.05,$   
 (а)  $n = 0.5, e_1 = 0.8$  (линия 1),  $e_1 = 0.9$  (линия 2),  $e_1 = 0.95$  (линия 3);  
 (б)  $n = 0.8, e_1 = 0.9$  (линия 1),  $e_1 = 1.1$  (линия 2),  $e_1 = 1.5$  (линия 3)



**Рис. 6.** Пространственные распределения интенсивности поля в поверхностных волнах в фокусирующей среде, определяемых (21), при значениях параметров системы (в условных безразмерных единицах):  $\alpha = 1, k_0 = 0.5, e_1 = 1, e_2 = 0.2, h = 0.5, \epsilon_{0N} = 0.05,$   
 $e_0 = -0.1$  (линия 1),  $e_0 = -0.2$  (линия 2),  $e_0 = -0.4$  (линия 3);  
(а)  $n = 0.5$ , (б)  $n = 0.8$

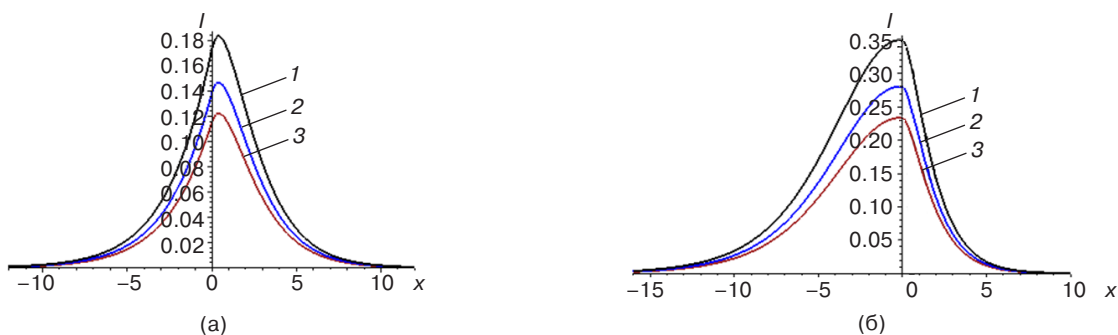


**Рис. 7.** Пространственные распределения интенсивности поля в поверхностных волнах в фокусирующей среде, определяемых (21), при значениях параметров системы (в условных безразмерных единицах):  $\alpha = 1, k_0 = 0.5, e_0 = -0.1, e_1 = 1, e_2 = 0.2, h = 0.5,$   
 $\epsilon_{0N} = 0.01$  (линия 1),  $\epsilon_{0N} = 0.07$  (линия 2),  $\epsilon_{0N} = 0.1$  (линия 3);  
(а)  $n = 0.5$ , (б)  $n = 0.8$

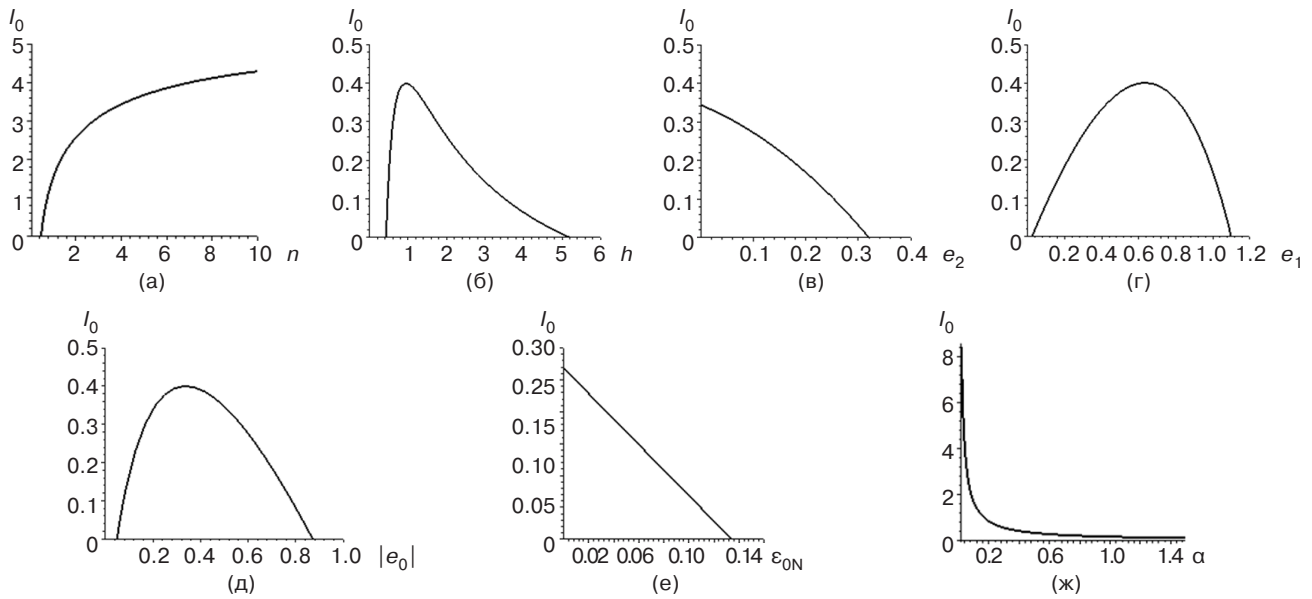
Влияние изменения значения коэффициента  $\alpha$  модели нелинейности (3) на пространственное распределение интенсивности поверхностной волны показано на рис. 8. Для малых (рис. 8а) и больших (рис. 8б) значений эффективного показателя преломления при увеличении значения  $\alpha$  положение максимума интенсивности не меняется, а его высота уменьшается. Однако при больших значениях  $n$

глубина проникновения поля в нелинейную среду снижается существеннее, чем при малых  $n$ .

Влияние изменения значения оптических параметров модели на интенсивность поверхностной волны на границе раздела сред  $I_0$ , определяемого (20), показано на рис. 9. Следует отметить, что зависимости интенсивность поверхностной волны на границе раздела от оптических параметров модели не все



**Рис. 8.** Пространственные распределения интенсивности поля в поверхностных волнах в фокусирующей среде, определяемых (21), при значениях параметров системы (в условных безразмерных единицах):  $k_0 = 0.5, e_0 = -0.1, e_1 = 1, e_2 = 0.2, h = 0.5, \epsilon_{0N} = 0.05,$   
 $\alpha = 0.8$  (линия 1),  $\alpha = 1$  (линия 2),  $\alpha = 1.2$  (линия 3);  
(а)  $n = 0.5$ , (б)  $n = 0.8$



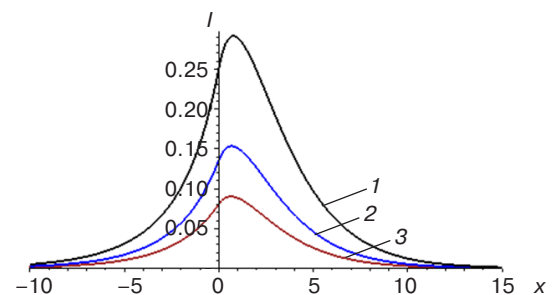
**Рис. 9.** Интенсивность поля на границе раздела сред, определяемая (20), при значениях параметров системы (в условных безразмерных единицах):  $k_0 = 0.5$ ,  
(а) зависимость от  $n$  при  $h = 0.5$ ,  $e_0 = -0.1$ ,  $e_1 = 1$ ,  $e_2 = 0.2$ ,  $\epsilon_{0N} = 0.05$ ,  $\alpha = 1$ ;  
(б) зависимость от  $h$  при  $n = 0.5$ ,  $e_0 = -0.1$ ,  $e_1 = 1$ ,  $e_2 = 0.2$ ,  $\epsilon_{0N} = 0.05$ ,  $\alpha = 1$ ;  
(в) зависимость от  $e_2$  при  $n = 0.5$ ,  $e_0 = -0.1$ ,  $e_1 = 1$ ,  $h = 0.5$ ,  $\epsilon_{0N} = 0.05$ ,  $\alpha = 1$ ;  
(г) зависимость от  $e_1$  при  $n = 0.5$ ,  $e_0 = -0.1$ ,  $e_2 = 0.2$ ,  $h = 0.5$ ,  $\epsilon_{0N} = 0.05$ ,  $\alpha = 1$ ;  
(д) зависимость от  $|e_0|$  при  $n = 0.5$ ,  $e_1 = 1$ ,  $e_2 = 0.2$ ,  $h = 0.5$ ,  $\epsilon_{0N} = 0.05$ ,  $\alpha = 1$ ;  
(е) зависимость от  $\epsilon_{0N}$  при  $n = 0.5$ ,  $e_0 = -0.1$ ,  $e_1 = 1$ ,  $e_2 = 0.2$ ,  $h = 0.5$ ,  $\alpha = 1$ ;  
(ж) зависимость от  $\alpha$  при  $n = 0.5$ ,  $e_0 = -0.1$ ,  $e_1 = 1$ ,  $e_2 = 0.2$ ,  $h = 0.5$ ,  $\epsilon_{0N} = 0.05$

являются монотонными, т.е. при определенных значениях ряда оптических параметров наблюдается максимум величины  $I_0$ . Анализ результатов моделирования показал, что при увеличении эффективного показателя преломления интенсивность поверхностной волны на границе раздела сред монотонно возрастает (рис. 9а). Интенсивность  $I_0$  монотонно убывает при увеличении таких оптических параметров как  $e_2$  (рис. 9в),  $\epsilon_{0N}$  (рис. 9е),  $\alpha$  (рис. 9ж). Максимумы интенсивности были обнаружены на зависимостях от таких оптических параметров как  $h$  (рис. 9б),  $e_1$  (рис. 9г),  $e_0$  (рис. 9д).

2) Случай дефокусирующей нелинейности ( $\alpha < 0$ ).

В результате моделирования с использованием аналитического решения (26) установлено, что поверхностная волна, распространяющаяся вдоль границы с дефокусирующей нелинейной средой, характеризуется всегда одним максимумом интенсивности, расположенным в градиентной среде. При увеличении значения эффективного показателя преломления его высота уменьшается (рис. 10). Ширина локализации поля уменьшается при этом, а положение максимума незначительно смещается к границе раздела сред. Этот эффект влияния эффективного показателя преломления в случае границы с дефокусирующей средой противоположен эффекту,

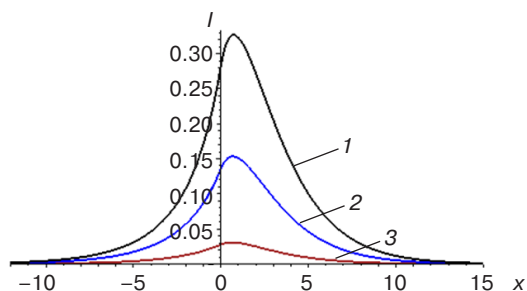
наблюдаемому в случае границы с фокусирующей средой (можно сравнить рис. 3 и 10). Следовательно, изменение угла падения луча, возбуждающего поверхностную волну, оказывает различное (а точнее – противоположное) влияние на распределение поля в поверхностных волнах в фокусирующей и дефокусирующей средах.



**Рис. 10.** Пространственные распределения интенсивности поля в поверхностных волнах в дефокусирующей среде, определяемых (26), при значениях параметров системы (в условных безразмерных единицах):  $\alpha = -1$ ,  $k_0 = 0.5$ ,  $h = 0.5$ ,  $e_0 = -0.1$ ,  $e_1 = 1$ ,  $e_2 = 0.2$ ,  $\epsilon_{0N} = 0.05$ ,  $n = 0.42$  (линия 1),  $n = 0.44$  (линия 2),  $n = 0.45$  (линия 3)

Влияние изменения значения параметра  $h$  градиентного профиля (4) на пространственное распределение интенсивности поверхностной волны,

определяемой решением (26), показано на рис. 11. При увеличении значения  $h$  наблюдается эффект, аналогичный увеличению эффективного показателя преломления.

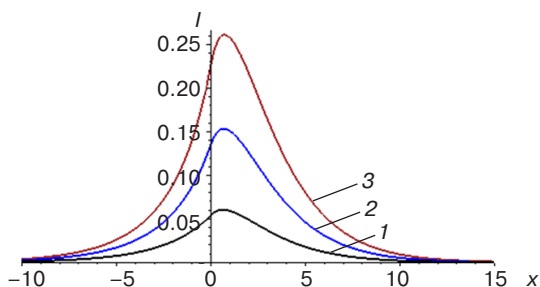


**Рис. 11.** Пространственные распределения интенсивности поля в поверхностных волнах в дефокусирующей среде, определяемых (26), при значениях параметров системы (в условных безразмерных единицах):

$$\alpha = -1, k_0 = 0.5, e_0 = -0.1, e_1 = 1, \\ e_2 = 0.2, \varepsilon_{0N} = 0.05, n = 0.44,$$

$h = 0.45$  (линия 1),  $h = 0.50$  (линия 2),  $h = 0.55$  (линия 3)

Влияние изменения значения параметра  $e_2$  градиентного профиля (4) на пространственное распределение интенсивности поверхностной волны, определяемой решением (26), показано на рис. 12. При увеличении значения  $e_2$  положение максимума интенсивности, находящееся в градиентной среде, остается неизменным, его высота увеличивается, а также растет ширина локализации поля.



**Рис. 12.** Пространственные распределения интенсивности поля в поверхностных волнах в дефокусирующей среде, определяемых (26), при значениях параметров системы (в условных безразмерных единицах):

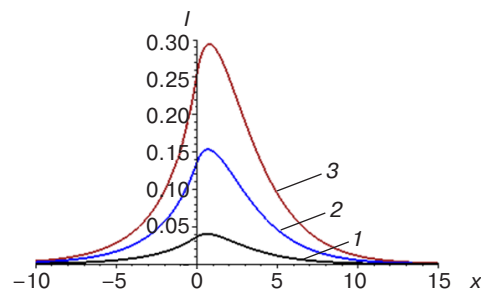
$$\alpha = -1, k_0 = 0.5, e_0 = -0.1, e_1 = 1, h = 0.5, \\ \varepsilon_{0N} = 0.05, n = 0.44,$$

$e_2 = 0.15$  (линия 1),  $e_2 = 0.2$  (линия 2),  $e_2 = 0.25$  (линия 3)

Влияние изменения значения параметра  $e_1$  градиентного профиля (4) на пространственное распределение интенсивности поверхностной волны, определяемой решением (26), показано на рис. 13. При увеличении значения  $e_1$  наблюдается эффект, аналогичный увеличению параметра  $e_2$  градиентного профиля (4).

Влияние изменения значения параметра  $e_0$  градиентного профиля (4) на пространственное

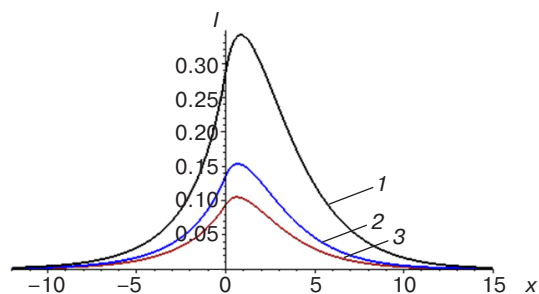
распределение интенсивности поверхностной волны, определяемой решением (26), показано на рис. 14. При уменьшении значения  $e_0$  наблюдается эффект, аналогичный увеличению эффективного показателя преломления и параметра  $h$ .



**Рис. 13.** Пространственные распределения интенсивности поля в поверхностных волнах в дефокусирующей среде, определяемых (26), при значениях параметров системы (в условных безразмерных единицах):

$$\alpha = -1, k_0 = 0.5, e_0 = -0.1, e_2 = 0.2, \\ h = 0.5, \varepsilon_{0N} = 0.05, n = 0.5,$$

$e_1 = 0.95$  (линия 1),  $e_1 = 1.0$  (линия 2),  $e_1 = 1.05$  (линия 3)



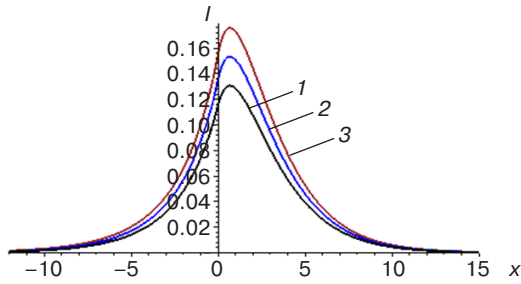
**Рис. 14.** Пространственные распределения интенсивности поля в поверхностных волнах в дефокусирующей среде, определяемых (26), при значениях параметров системы (в условных безразмерных единицах):

$$\alpha = -1, k_0 = 0.5, e_1 = 1, e_2 = 0.2, h = 0.5, \\ \varepsilon_{0N} = 0.05, n = 0.44,$$

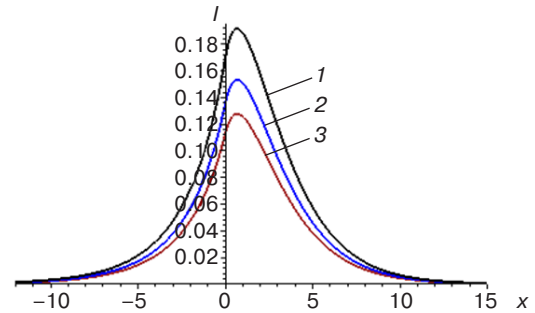
$e_0 = -0.07$  (линия 1),  $e_0 = -0.10$  (линия 2),  $e_0 = -0.11$  (линия 3)

Влияние изменения значения параметра  $\varepsilon_{0N}$  модели нелинейности (3) на пространственное распределение интенсивности поверхностной волны, определяемой решением (26), показано на рис. 15. При увеличении значения  $\varepsilon_{0N}$  наблюдается эффект, аналогичный увеличению параметров  $e_1$  и  $e_2$  градиентного профиля (4).

Влияние изменения значения коэффициента  $\alpha$  модели нелинейности (3) на пространственное распределение интенсивности поверхностной волны, определяемой решением (26), показано на рис. 16. При уменьшении коэффициента керровской нелинейности (т.е. при увеличении абсолютного значения  $\alpha$ ) наблюдается эффект, аналогичный увеличению эффективного показателя преломления и параметра  $h$ .



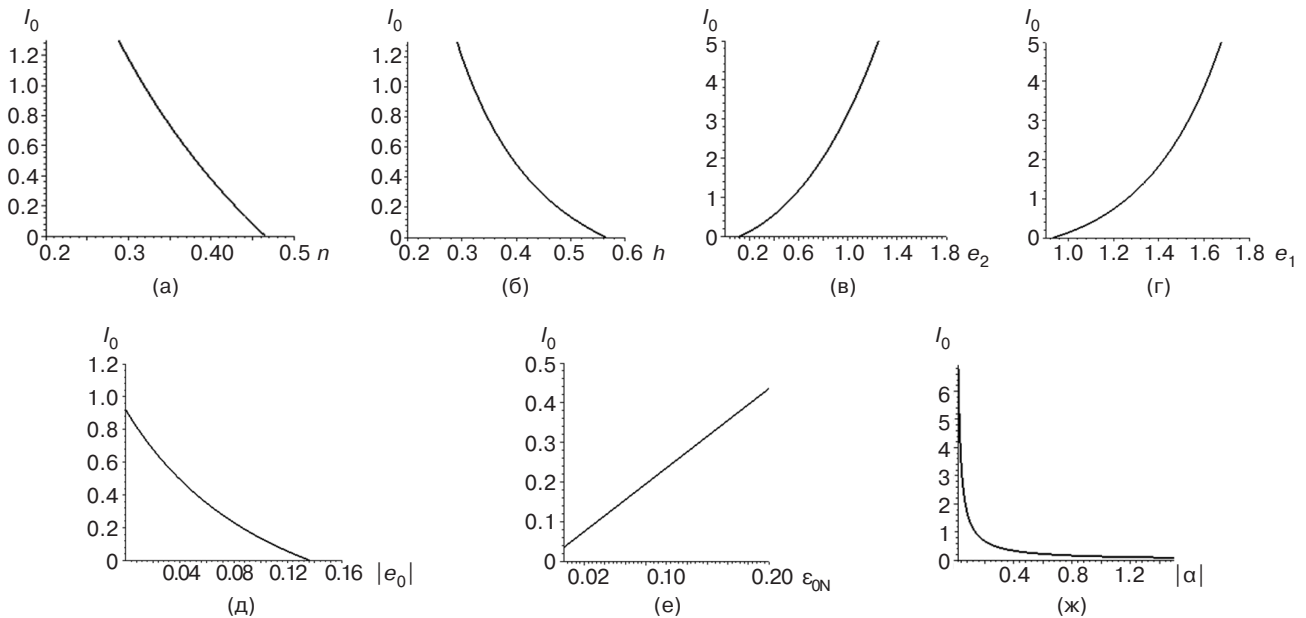
**Рис. 15.** Пространственные распределения интенсивности поля в поверхностных волнах в дефокусирующей среде, определяемых (26), при значениях параметров системы (в условных безразмерных единицах):  $\alpha = -1, k_0 = 0.5, e_0 = -0.1, e_1 = 1, e_2 = 0.2, h = 0.5, n = 0.44,$   
 $\epsilon_{0N} = 0.04$  (линия 1),  $\epsilon_{0N} = 0.05$  (линия 2),  
 $\epsilon_{0N} = 0.06$  (линия 3)



**Рис. 16.** Пространственные распределения интенсивности поля в поверхностных волнах в дефокусирующей среде, определяемых (26), при значениях параметров системы (в условных безразмерных единицах):  $k_0 = 0.5, e_0 = -0.1, e_1 = 1, e_2 = 0.2, h = 0.5, \epsilon_{0N} = 0.05, n = 0.44,$   
 $\alpha = -0.8$  (линия 1),  $\alpha = -1.0$  (линия 2),  $\alpha = -1.2$  (линия 3)

Таким образом, видно, что влияние значений оптических параметров модели на профили пространственного распределения интенсивности в поверхностных волнах, распространяющихся вдоль границ раздела, существенно зависит от знака коэффициента нелинейности, а наблюдаемые эффекты зачастую противоположны в фокусирующих и дефокусирующих средах.

Влияние изменения значения оптических параметров модели на интенсивность поверхностной волны на границе раздела сред  $I_0$ , определяемого (25), показано на рис. 17. Следует отметить, что зависимости интенсивности поверхностной волны на границе раздела с дефокусирующей средой от оптических параметров модели все являются монотонными в отличие от случая контакта с фокусирующей



**Рис. 17.** Интенсивность поля на границе раздела сред, определяемая (25), при значениях параметров системы (в условных безразмерных единицах):  $k_0 = 0.5,$   
(а) зависимость от  $n$  при  $h = 0.5, e_0 = -0.1, e_1 = 1, e_2 = 0.2, \epsilon_{0N} = 0.05, \alpha = -1;$   
(б) зависимость от  $h$  при  $n = 0.44, e_0 = -0.1, e_1 = 1, e_2 = 0.2, \epsilon_{0N} = 0.05, \alpha = -1;$   
(в) зависимость от  $e_2$  при  $n = 0.44, e_0 = -0.1, e_1 = 1, h = 0.5, \epsilon_{0N} = 0.05, \alpha = -1;$   
(г) зависимость от  $e_1$  при  $n = 0.44, e_0 = -0.1, e_2 = 0.2, h = 0.5, \epsilon_{0N} = 0.05, \alpha = -1;$   
(д) зависимость от  $|e_0|$  при  $n = 0.44, e_1 = 1, e_2 = 0.2, h = 0.5, \epsilon_{0N} = 0.05, \alpha = -1;$   
(е) зависимость от  $\epsilon_{0N}$  при  $n = 0.44, e_0 = -0.1, e_1 = 1, e_2 = 0.2, h = 0.5, \alpha = -1;$   
(ж) зависимость от  $|\alpha|$  при  $n = 0.44, e_0 = -0.1, e_1 = 1, e_2 = 0.2, h = 0.5, \epsilon_{0N} = 0.05$

средой. Анализ результатов моделирования показал, что интенсивность поверхностной волны на границе раздела сред монотонно уменьшается при увеличении эффективного показателя преломления (рис. 17а), параметра  $h$  (рис. 17б) и абсолютного значения  $e_0$  (рис. 17д). Интенсивность  $I_0$  монотонно возрастает при увеличении таких оптических параметров как  $e_2$  (рис. 17в),  $e_1$  (рис. 17г) и  $\epsilon_{0N}$  (рис. 17е). В этих случаях наблюдаемые в дефокусирующей среде эффекты противоположны наблюдаемым в фокусирующей среде. Увеличение абсолютного значения коэффициента керровской нелинейности (рис. 17ж) полностью аналогично увеличению  $\alpha$  в фокусирующей среде (рис. 9ж).

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе приведены результаты аналитического моделирования поверхностных поперечных волн, распространяющихся вдоль границы раздела нелинейной и градиентной немагнитных сред без потерь. В качестве модели нелинейности среды, описывающей нелинейно-оптический отклик среды на возмущения электрического поля, выбрана линейная форма зависимости диэлектрической проницаемости от интенсивности света. В качестве модели градиентной среды выбрана специальная форма пространственного профиля диэлектрической проницаемости, описывающая ее изменение в зависимости от расстояния до границы раздела, для которой можно найти точное аналитическое решение стационарного волнового уравнения.

Приведена математическая формулировка модели, которая представляет собой краевую задачу сопряжения для нелинейного уравнения с переменными коэффициентами. Найдены точные аналитические решения данной краевой задачи для случаев фокусирующей и дефокусирующей нелинейностей. Данные решения описывают пространственные распределения напряженности электрического поля в поперечном направлении на границе раздела сред на направлении в поверхностных волнах.

В результате анализа модели выявлены различия пространственного распределения интенсивности поля в поверхностных волнах, распространяющихся в фокусирующих и дефокусирующих средах. В случае дефокусирующей нелинейности максимум интенсивности всегда располагается в градиентной среде, а в случае фокусирующей нелинейности он может располагаться как градиентной, так

и в нелинейной среде, но при других значениях параметров. Кроме того, в поверхностной волне в дефокусирующей среде интенсивность света выше по сравнению с интенсивностью в поверхностной волне в фокусирующей среде на одном и том же расстоянии от границы раздела сред при одинаковых значениях параметров модели.

Проведен подробный анализ влияния значений параметров модели, характеризующих оптические свойства контактирующих сред, на пространственное распределение интенсивности света в поверхностных волнах. Результаты моделирования показали, что изменение одних и тех же параметров оказывает различное (а точнее – противоположное) влияние на распределение поля в поверхностных волнах в фокусирующей и дефокусирующей средах. В частности, при увеличении значения эффективного показателя преломления высота максимума распределения интенсивности в фокусирующей среде увеличивается, а в дефокусирующей уменьшается.

В данной работе модель контактирующих оптических сред выбрана иная, чем та, что рассматривалась в наших предыдущих работах. Полученные новые аналитические решения отличаются от полученных ранее, поэтому возникают различия в свойствах описываемых ими поверхностных волн, в частности, касаясь чувствительности формы их профилей к изменениям оптических параметров сред.

Полученные результаты дополняют существующую теорию нелинейной и волноводной оптики. Они могут найти применение при проектировании новых волноводных структур с требуемыми дисперсионными свойствами, определяемыми интенсивностью поверхностных волн и оптическими характеристиками нелинейных и градиентных сред. Полученные новые решения расширяют класс точно решаемых моделей планарных волноводных структур с распределенными неоднородными и нелинейными свойствами.

#### Вклад авторов

**С.Е. Савотченко** – концептуализация, методология, аналитические вычисления, визуализация, написание текста статьи.

**Н.О. Афанасьева** – численные вычисления, исследования, визуализация, написание текста статьи.

#### Authors' contributions

**S.E. Savotchenko** – conceptualization, methodology, analytical calculations, visualization, writing the manuscript.

**N.O. Afanasyeva** – numerical calculations, investigations, visualization, and writing the manuscript.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боголюбов А.Н., Мосунова Н.А., Петров Д.А. Математические модели киральных волноводов. *Матем. моделирование*. 2007;19(5):3–24. <https://www.elibrary.ru/hzwrxp>
2. Svendsen B.B., Söderström M., Carlens H., Dalarsson M. Analytical and Numerical Models for TE-Wave Absorption in a Graded-Index GNP-Treated Cell Substrate Inserted in a Waveguide. *Appl. Sci.* 2022;12(14):7097. <https://doi.org/10.3390/app12147097>
3. Adams M.J. *An Introduction to Optical Waveguides*. Chichester: Wiley; 1981, 401 p.
4. Mihalache D. Localized structures in optical media and Bose-Einstein condensates: An overview of recent theoretical and experimental results. *Rom. Rep. Phys.* 2024;76(2):402. <https://doi.org/10.59277/RomRepPhys.2024.76.402>
5. Goyal A.K., Husain M., Massoud Y.Y. Analysis of interface mode localization in disordered photonic crystal structure. *J. Nanophoton.* 2022;16(4):046007. <https://doi.org/10.1117/1.JNP.16.046007>
6. Kubica J.M. Analysis of planar waveguides with a thin overlayer and nonlinear cladding. *Opt. Quant. Electron.* 2023;55(12):137. <https://doi.org/10.1007/s11082-022-04390-4>
7. Шварцбург А.Б. Дисперсия электромагнитных волн в слоистых и нестационарных средах (точно решаемые модели). *Успехи физических наук (УФН)*. 2000;170(12):1297–1324. <https://doi.org/10.3367/UFNr.0170.200012b.1297>
8. Chen C-L. *Foundations for Guided-Wave Optics*. New York: John Wiley & Sons Inc.; 2005, 462 p. <https://doi.org/10.1002/0470042222>
9. Kivshar Yu.S., Agrawal G.P. *Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals*. San Diego: Academic Press; 2003, 540 p.
10. Kudryashov N.A. Stationary solitons of the model with nonlinear chromatic dispersion and arbitrary refractive index. *Optik.* 2022;259(7):168888. <https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2022.168888>
11. Liang N., Mihalache D., Ma M., Rao J., Liu Y. The multiple bright soliton pairs of the fully PT-symmetric nonlocal Davey-Stewartson I equation. *Rom. Rep. Phys.* 2024;76(2):106. <https://doi.org/10.59277/RomRepPhys.2024.76.106>
12. Каданцев В.Н., Гольцов А.Н. Латеральный протонный транспорт, индуцированный распространением акустических солитонов в липидных мембранах. *Russian Technological Journal.* 2025;13(2):111–120. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-2-111-120>
13. Черняев А.П., Черняева С.А. Вырождение кноидальных волн в неограниченные решения для уравнения Кортевега – Де Фриза. *Журнал радиоэлектроники*. 2018;6:8. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2018.6.5>
14. Agrawal G.P. *Physics and Engineering of Graded-Index Media*. New York: Cambridge University Press; 2023, 348 p. <https://doi.org/10.1017/9781009282086>
15. Touam T., Yergeau F. Analytical solution for a linearly graded-index-profile planar waveguide. *Appl. Opt.* 1993;32(3):309–312. <https://doi.org/10.1364/AO.32.000309>
16. Almawgani A.H.M., Taya S.A., Hussein A.J., Colak I. Dispersion properties of a slab waveguide with a graded-index core layer and a nonlinear cladding using the WKB approximation method. *J. Opt. Soc. Am. B.* 2022;39(6):1606–1613. <https://doi.org/10.1364/JOSAB.458569>
17. Савотченко С.Е. Модели волноводов, сочетающих градиентные и нелинейно-оптические слои. *Russian Technological Journal.* 2023;11(4):84–93. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2023-11-4-84-93>
18. Савотченко С.Е. Модели симметричных трехслойных волноводных структур с градиентной сердцевиной и нелинейно-оптическими обкладками. *Russian Technological Journal.* 2024;12(5):77–89. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-5-77-89>
19. Савотченко С.Е. Моделирование поверхностных волн в фотонных кристаллических структурах с профилем показателя преломления, убывающим с расстоянием от поверхности. *Russian Technological Journal.* 2026;14(1):91–102. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2026-14-1-91-102>
20. Savotchenko S.E. New surface waves in a hyperbolic graded-index crystal. *Rom. Rep. Phys.* 2024;76(4):406. <https://doi.org/10.59277/RomRepPhys.2024.76.406>
21. Savotchenko S.E. Surface waves in a medium with spatial monotonic attenuation of the refractive index. *Rom. Rep. Phys.* 2025;77(1):402. <https://doi.org/10.59277/RomRepPhys.2025.77.402>
22. Singh B.K., Bijalwan A., Pandey P.C., Rastogi V. Photonic bandgaps engineering in double graded hyperbolic, exponential and linear index materials embedded one-dimensional photonic crystals. *Eng. Res. Express.* 2019;1(2):025004. <https://doi.org/10.1088/2631-8695/ab48a0>
23. Singh B.K., Bambole V., Rastogi V., Pandey P.C. Multi-channel photonic bandgap engineering in hyperbolic graded index materials embedded one-dimensional photonic crystals. *Opt. Laser Technol.* 2020;129(17):106293. <https://doi.org/10.1016/j.optlastec.2020.106293>
24. Andrews G.E., Askey R., Roy R. *Special Functions*. UK: Cambridge University Press; 1999, 664 p. <https://doi.org/10.1017/CBO9781107325937>

## REFERENCES

1. Bogolyubov A.N., Mosunova N.A., Petrov D.A. Mathematical models of chirowaveguides. *Matematicheskoe modelirovanie = Mat. Model.* 2007;19(5):3–24 (in Russ.). <https://www.elibrary.ru/hzwrxp>
2. Svendsen B.B., Söderström M., Carlens H., Dalarsson M. Analytical and Numerical Models for TE-Wave Absorption in a Graded-Index GNP-Treated Cell Substrate Inserted in a Waveguide. *Appl. Sci.* 2022;12(14):7097. <https://doi.org/10.3390/app12147097>
3. Adams M.J. *An Introduction to Optical Waveguides*. Chichester: Wiley; 1981, 401 p.
4. Mihalache D. Localized structures in optical media and Bose-Einstein condensates: An overview of recent theoretical and experimental results. *Rom. Rep. Phys.* 2024;76(2):402. <https://doi.org/10.59277/RomRepPhys.2024.76.402>

5. Goyal A.K., Husain M., Massoud Y.Y. Analysis of interface mode localization in disordered photonic crystal structure. *J. Nanophoton.* 2022;16(4):046007. <https://doi.org/10.1117/1.JNP.16.046007>
6. Kubica J.M. Analysis of planar waveguides with a thin overlayer and nonlinear cladding. *Opt. Quant. Electron.* 2023;55(12):137. <https://doi.org/10.1007/s11082-022-04390-4>
7. Shvartsburg A.B. Dispersion of electromagnetic waves in stratified and nonstationary media (exactly solvable models). *Phys. Usp.* 2000;43(12):1201–1228. <https://doi.org/10.1070/PU2000v043n12ABEH000827>  
[Original Russian Text: Shvartsburg A.B. Dispersion of electromagnetic waves in stratified and nonstationary media (exactly solvable models). *Uspekhi Fizicheskikh Nauk.* 2000;170(12):1297–1324 (in Russ.). <https://doi.org/10.3367/UFNr.0170.200012b.1297> ]
8. Chen C.-L. *Foundations for Guided-Wave Optics*. New York: John Wiley & Sons Inc.; 2005, 462 p. <https://doi.org/10.1002/0470042222>
9. Kivshar Yu.S., Agrawal G.P. *Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals*. San Diego: Academic Press; 2003, 540 p.
10. Kudryashov N.A. Stationary solitons of the model with nonlinear chromatic dispersion and arbitrary refractive index. *Optik.* 2022;259(7):168888. <https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2022.168888>
11. Liang N., Mihalache D., Ma M., Rao J., Liu Y. The multiple bright soliton pairs of the fully PT-symmetric nonlocal Davey-Stewartson I equation. *Rom. Rep. Phys.* 2024;76(2):106. <https://doi.org/10.59277/RomRepPhys.2024.76.106>
12. Kadantsev V.N., Goltsov A.N. Lateral proton transport induced by acoustic solitons propagating in lipid membranes. *Russian Technological Journal.* 2025;13(2):111–120. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-2-111-120>
13. Chernyaev A. P., Chernyaeva S. A. Degeneration of cnoidal waves into unbounded solutions for the Korteweg-De Vries equation. *Zhurnal radioelektroniki = Journal of Radio Electronics.* 2018;6:8 (in Russ.). <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2018.6.5>
14. Agrawal G.P. *Physics and Engineering of Graded-Index Media*. New York: Cambridge University Press; 2023, 348 p. <https://doi.org/10.1017/9781009282086>
15. Touam T., Yergeau F. Analytical solution for a linearly graded-index-profile planar waveguide. *Appl. Opt.* 1993;32(3):309–312. <https://doi.org/10.1364/AO.32.000309>
16. Almawgani A.H.M., Taya S.A., Hussein A.J., Colak I. Dispersion properties of a slab waveguide with a graded-index core layer and a nonlinear cladding using the WKB approximation method. *J. Opt. Soc. Am. B.* 2022;39(6):1606–1613. <https://doi.org/10.1364/JOSAB.458569>
17. Savotchenko S.E. Models of waveguides combining gradient and nonlinear optical layers. *Russian Technological Journal.* 2023;11(4):84–93. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2023-11-4-84-93>
18. Savotchenko S.E. Models of symmetric three-layer waveguide structures with graded-index core and nonlinear optical liners. *Russian Technological Journal.* 2024;12(5):77–89. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-5-77-89>
19. Savotchenko S.E. Modeling of surface waves in photonic crystal structures with a refractive index profile decreasing with distance from the surface. *Russian Technological Journal.* 2026;14(1):91–102. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2026-14-1-91-102>
20. Savotchenko S.E. New surface waves in a hyperbolic graded-index crystal. *Rom. Rep. Phys.* 2024;76(4):406. <https://doi.org/10.59277/RomRepPhys.2024.76.406>
21. Savotchenko S.E. Surface waves in a medium with spatial monotonic attenuation of the refractive index. *Rom. Rep. Phys.* 2025;77(1):402. <https://doi.org/10.59277/RomRepPhys.2025.77.402>
22. Singh B.K., Bijalwan A., Pandey P.C., Rastogi V. Photonic bandgaps engineering in double graded hyperbolic, exponential and linear index materials embedded one-dimensional photonic crystals. *Eng. Res. Express.* 2019;1(2):025004. <https://doi.org/10.1088/2631-8695/ab48a0>
23. Singh B.K., Bambole V., Rastogi V., Pandey P.C. Multi-channel photonic bandgap engineering in hyperbolic graded index materials embedded one-dimensional photonic crystals. *Opt. Laser Technol.* 2020;129(17):106293. <https://doi.org/10.1016/j.optlastec.2020.106293>
24. Andrews G.E., Askey R., Roy R. *Special Functions*. UK: Cambridge University Press; 1999, 664 p. <https://doi.org/10.1017/CBO9781107325937>

### Об авторах

**Савотченко Сергей Евгеньевич**, д.ф.-м.н., доцент, профессор кафедры высшей математики – 3, Институт перспективных технологий и промышленного программирования ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: savotchenkose@mail.ru. Scopus Author ID 6603577988, SPIN-код РИНЦ 2552-4344, <https://orcid.org/0000-0002-7158-9145>

**Афанасьева Надежда Олеговна**, аспирант, кафедра высшей математики и физики, ФГБОУ ВО «Российский государственный геологоразведочный университет имени Серго Орджоникидзе» (МГРИ) (117997, Россия, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 23). E-mail: noafanasieva@mail.ru. <https://orcid.org/0009-0009-0044-7930>

### About the Authors

**Sergey E. Savotchenko**, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor, Professor, High Mathematics Department – 3, Institute for Advanced Technologies and Industrial Programming, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: savotchenkose@mail.ru. Scopus Author ID 6603577988, RSCI SPIN-code 2552-4344, <https://orcid.org/0000-0002-7158-9145>

**Nadezhda O. Afanasyeva**, Postgraduate Student, High Mathematics and Physics Department, Sergo Ordzhonikidze Russian State University for Geological Prospecting (MGRI) (23, Miklukho-Maklaya ul., Moscow, 117997 Russia). E-mail: noafanasieva@mail.ru. <https://orcid.org/0009-0009-0044-7930>