

Микро- и нанoeлектроника. Физика конденсированного состояния  
Micro- and nanoelectronics. Condensed matter physics

УДК 537.632

<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2026-14-3-72-82>

EDN JXIQMS



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

## Применение метода Берремана при моделировании магнитооптических эффектов Керра в многослойных структурах

И.В. Гладышев, А.Н. Юрасов, М.М. Яшин ©

МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, 119454 Россия

© Автор для переписки, e-mail: [yashin@mirea.ru](mailto:yashin@mirea.ru)

• Поступила: 22.04.2025 • Доработана: 05.05.2025 • Принята к опубликованию: 24.03.2026

### Резюме

**Цели.** Материалы, состоящие из множества ультратонких слоев, каждый из которых имеет толщину порядка нескольких нанометров, являются перспективным классом композитных структур с уникальными физическими характеристиками, не присущими традиционным материалам. Они представляют значительный интерес в научной и промышленной сферах благодаря своей многофункциональности и широким возможностям применения. Особое внимание исследователей привлекают структуры, включающие как магнитные, так и немагнитные слои. Исследование магнитооптических явлений, в частности эффекта Керра, в данных структурах способствует углублению понимания их физических свойств и расширению возможностей их практического применения. Для корректной интерпретации экспериментальных данных необходимо учитывать возможные интерференционные эффекты. В связи с этим возникает потребность в разработке математической модели структуры и сопоставлении экспериментальных результатов с теоретическими расчетами. Целью настоящего исследования является анализ одного из методов моделирования многослойных структур, в которых всесторонне теоретически рассматриваются все три магнитооптических эффекта Керра (полярный, меридиональный, экваториальный) с получением универсальных формул.

**Методы.** Для моделирования всех трех магнитооптических эффектов Керра в многослойных тонкопленочных структурах применяется метод Берремана, основанный на матричном представлении дифференциальных уравнений Максвелла.

**Результаты.** Для оптически изотропных материалов получены матрицы Берремана, соответствующие экспериментальным геометриям, необходимым для наблюдения экваториального, полярного и меридионального эффектов Керра. Предложен метод учета толстых слоев в исследуемой структуре.

**Выводы.** Использование метода Берремана с применением матриц, представленных в данной работе, для анализа магнитооптических эффектов Керра в изотропной среде позволило получить точные формулы магнитооптических эффектов и обеспечило более точное моделирование сложных многослойных структур, а также способствует углубленному пониманию их физических характеристик, открывая возможности для анализа и поиска широкого спектра материалов.

**Ключевые слова:** магнитооптические эффекты Керра, метод Берремана, матрица Берремана, тензор диэлектрической проницаемости, многослойные структуры

**Для цитирования:** Гладышев И.В., Юрасов А.Н., Яшин М.М. Применение метода Берремана при моделировании магнитооптических эффектов Керра в многослойных структурах. *Russian Technological Journal*. 2026;14(3):72–82. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2026-14-3-72-82>, <https://www.elibrary.ru/JXIQMS>

**Прозрачность финансовой деятельности:** Авторы не имеют финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## RESEARCH ARTICLE

# Application of the Berreman formalism for modeling magneto-optical Kerr effects in multilayered structures

Igor V. Gladyshev, Alexey N. Yurasov, Maxim M. Yashin <sup>®</sup>

MIREA – Russian Technological University, Moscow, 119454 Russia

<sup>®</sup> Corresponding author, e-mail: [yashin@mirea.ru](mailto:yashin@mirea.ru)

• Submitted: 22.04.2025 • Revised: 05.05.2025 • Accepted: 24.03.2026

### Abstract

**Objectives.** Materials composed of numerous ultrathin layers, each having a thickness on the order of several nanometers, constitute an advanced class of composite structures exhibiting unique physical properties not typically found in conventional materials. These materials are of significant interest in both scientific and industrial sectors due to their adaptability and broad potential for application. Researchers are particularly intrigued by structures incorporating both magnetic and non-magnetic layers. The investigation of magneto-optical phenomena—particularly the Kerr effect—within these structures contributes to a deeper understanding of their physical characteristics, as well as enhancing prospects for their practical implementation. Since, to ensure the accurate interpretation of experimental data, it is imperative to consider potential interference effects, it becomes necessary to develop a mathematical model of the structure for comparing experimental findings with theoretical calculations. The purpose of this study is to analyze one of the modeling methods for multilayer structures in which magneto-optical Kerr effects can manifest themselves in individual or all layers.

**Methods.** The Berreman method, which is based on the matrix representation of Maxwell's differential equations, is used to model all three magneto-optical Kerr effects (polar, longitudinal, transverse) in multilayer thin-film structures.

**Results.** For optically isotropic materials, Berreman matrices have been derived for experimental configurations required to observe the transverse, polar, and longitudinal Kerr effects. A method is additionally proposed to account for the influence of thick layers within the investigated structure.

**Conclusions.** For the matrices presented in this paper, the Berreman method was used to analyze magneto-optical Kerr effects in an isotropic medium. As well as allowing us to obtain accurate formulas for magneto-optical effects, this provided more accurate modeling of complex multilayer structures, as well as contributing to an in-depth understanding of their physical characteristics, which provides new opportunities for analyzing and searching a wide range of materials.

**Keywords:** magneto-optical Kerr effects, Berreman method, Berreman matrix, dielectric constant tensor, multilayer structures

**For citation:** Gladyshev I.V., Yurasov A.N., Yashin M.M. Application of the Berreman formalism for modeling magneto-optical Kerr effects in multilayered structures. *Russian Technological Journal*. 2026;14(3):72–82. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2026-14-3-72-82>, <https://www.elibrary.ru/JXIQMS>

**Financial disclosure:** The authors have no financial or proprietary interest in any material or method mentioned.

The authors declare no conflicts of interest.

## ВВЕДЕНИЕ

Открытие Майклом Фарадеем в 1845 г. взаимодействия света с намагниченным веществом привело впоследствии к открытию множества линейных и нелинейных, прямых и обратных магнитооптических эффектов как в видимой, так и в инфракрасной, ультрафиолетовой и рентгеновской областях спектра. Эта область физики получила название магнитооптики или магнитофотоники. Эффекты Керра, включая магнитооптические эффекты отражения, являются фундаментальной основой для метода магнитооптической керр-спектроскопии. Данный метод позволяет проводить анализ магнитного состояния локальных областей образца на глубине формирования магнитооптического сигнала. Исследование спектральных зависимостей магнитооптического эффекта Керра при различных длинах волн излучения предоставляет возможность получения информации о магнитооптических переходах, отражающих электронную, кристаллическую и магнитную структуру исследуемого локального участка образца [1–4]. Таким образом магнитооптическая спектроскопия является важным инструментом исследования микро- и наноструктур, включая многослойные системы.

Многослойные магнитные структуры обладают значительным потенциалом для применения в различных областях науки и техники, что делает их объектом повышенного интереса со стороны исследователей. В последние годы отмечается рост научного интереса к изучению и разработке данных структур, что сопровождается увеличением числа научных публикаций, посвященных их исследованию. Особое внимание уделяется системам, состоящим из сильномагнитных (ферромагнетики и ферримагнетики) и слабомагнитных материалов [5–8].

Однако моделирование структур, включающих слои материалов с магнитооптическими свойствами, представляет собой более сложную задачу по сравнению с расчетом оптических систем, состоящих из изотропных сред. Получение аналитических выражений для определенного количества магнитных слоев, таких как в [9], при возможном увеличении их числа представляет собой трудоемкую задачу, а при значительном количестве магнитных слоев становится нереализуемым. В рамках метода матриц Джонса, как правило, рассматривается случай нормального падения света на структуру.

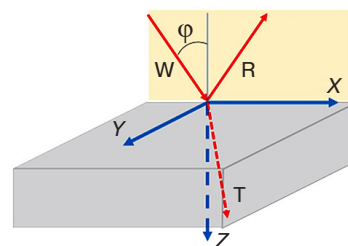
## МЕТОД БЕРРЕМАНА

Более полувека назад Берреман предложил метод расчета распространения электромагнитных волн с использованием комплексных матриц размером  $4 \times 4$ , основанный на матричном представлении уравнений Максвелла [10]. Этот метод отличается высокой

точностью и универсальностью, что позволяет учитывать особенности распространения света в сложных анизотропных структурах, включая многослойные системы. Однако, несмотря на его преимущества, метод Берремана не получил широкого распространения из-за высокой вычислительной сложности и сложности расчета матриц в общем случае. Тем не менее, при решении задач, связанных с оптической анизотропией (одноосной, двуосной) и необходимостью учета магнитной анизотропии или оптической активности среды, преимущества метода Берремана часто оказываются значительными, что делает его применение обоснованным в соответствующих условиях. Одной из наиболее сложных задач в методе Берремана является вычисление экспоненты матрицы. Однако существует ряд приемов, разработанных для вычисления данной экспоненты с различной степенью точности [11]. При недостаточной точности можно разделить рассчитываемый слой на более мелкие подслои. Кроме того, в научной литературе представлен достаточно точный и эффективный алгоритм, позволяющий вычислять матрицы Берремана для слоев значительной толщины [12]. В отдельных случаях, таких как одноосная среда, матрица Берремана может быть вычислена аналитически. В данной работе также приведены точные матрицы для однородных сред с индуцированной оптической активностью для геометрий, соответствующих экваториальному, полярному и меридиональному эффектам Керра.

В методе Берремана анализируется распространение плоской монохроматической волны через однородную среду. Одномерная неоднородная среда может быть описана посредством системы плоскопараллельных слоев, каждый из которых может считаться однородным.

Рассмотрим суть метода, используя систему координат, представленную на рис. 1. Предположим также, что по обеим сторонам исследуемого слоя находится воздух. Следовательно, среда, из которой свет падает на слой материала и в которую он проходит после прохождения через этот слой, является однородной, непоглощающей и имеет показатель преломления, равный единице.



**Рис. 1.** Используемая система координат:  $X, Y, Z$  – оси координат;  $\varphi$  – угол падения света;  $W$  – падающий,  $R$  – отраженный и  $T$  – прошедший лучи света

Поскольку волна является монохроматической, временная зависимость всех составляющих электрического ( $E$ ) и магнитного ( $H$ ) полей имеет следующую форму:  $e^{-i\omega t}$ . В рамках рассматриваемой геометрии проекция волнового вектора на ось  $x$ , обозначаемая как  $k_x$ , одинакова для всех волн и принимает следующее значение:

$$k_x = \frac{\omega}{c} \sin \varphi, \quad (1)$$

где  $\omega$  – частота,  $\varphi$  – угол падения,  $c$  – скорость света в вакууме.

Тогда систему уравнений Максвелла можно записать в виде:

$$\mathbf{R}\Psi = -i\omega\mathbf{M}\Psi, \quad (2)$$

где  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{M}$  – блочные матрицы размерности  $6 \times 6$ ,  $\Psi$  – матрица-столбец, содержащие следующие элементы:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{rot} \\ -\mathbf{rot} & \mathbf{O} \end{pmatrix}, \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \hat{\varepsilon} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \hat{\mu} \end{pmatrix}, \Psi = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \\ H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\mathbf{O}$  – нулевая матрица размерности  $3 \times 3$ , и для нашего случая,

$$\mathbf{rot} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & -ik_x \\ 0 & ik_x & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix},$$

$$\hat{\mu} = \mu_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$\varepsilon_0$ ,  $\mu_0$  – электрическая и магнитная постоянные, соответственно.

В процессе решения соотношения (2) формируется система, включающая два линейных однородных алгебраических уравнения и четыре дифференциальных уравнения. Алгебраические уравнения разрешаются относительно компонент поля  $E_z$  и  $H_z$ , после чего полученные выражения подставляются в дифференциальные уравнения. В результате

получается система из четырех линейных однородных дифференциальных уравнений 1-го порядка, содержащая неизвестные компоненты полей  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $H_x$  и  $H_y$ :

$$\frac{\partial}{\partial z} \xi = i\omega\Delta\xi, \quad (3)$$

где  $\xi$  – матрица-столбец вида:

$$\xi = \begin{pmatrix} E_x \\ H_y \\ E_y \\ -H_x \end{pmatrix},$$

а  $\Delta$  – дифференциальная матрица распространения для данной среды, размерности  $4 \times 4$ .

Как было указано ранее, среда делится на слои, в пределах которых компоненты матрицы  $\Delta$  не зависят от координаты  $z$ . В каждом слое толщиной  $h$  решение соответствующего однородного дифференциального уравнения первого порядка (3) имеет вид:

$$\xi(z+h) = e^{i\omega h\Delta} \xi(z) \equiv \mathbf{P}(h)\xi(z).$$

Таким образом, матрица  $\mathbf{P}$  – матрица Берремана данного слоя выглядит следующим образом:

$$\mathbf{P}(h) = e^{i\omega h\Delta}. \quad (4)$$

Когда оптические параметры среды зависят от  $z$ , например, для структуры из однородных слоев, в пределах которых оптические параметры рассматриваются постоянными, интегрирование уравнения (3) сводится к перемножению соответствующих матриц для индивидуальных слоев:

$$\mathbf{P} = \prod_{j=1}^n \mathbf{P}_j.$$

Матрица следующего слоя умножается на предыдущие слева:

$$\xi(h) = \{\mathbf{P}_n \cdot \mathbf{P}_{n-1} \cdot \mathbf{P}_{n-2} \cdot \dots \cdot \mathbf{P}_3 \cdot \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{P}_1\} \xi(0).$$

Электромагнитное поле с одной стороны структуры определяется суперпозицией падающей и отраженной волн, а с другой имеется только прошедшая волна. Тогда:

$$\xi_T = \mathbf{P}(\xi_W + \xi_R). \quad (5)$$

Индексы W, R и T обозначают, соответственно, падающую, отраженную и прошедшую волны согласно обозначениям, представленным на рис. 1. Умножая обе части уравнения (5) слева на матрицу  $\mathbf{F} = \mathbf{P}^{-1}$ , обратную матрице Берремана слоя, получаем систему линейных уравнений, которая может быть решена относительно компонентов отраженной и прошедшей волн. Для идентификации

принадлежности к соответствующей волне, присвоим компонентам поля верхние индексы, соответствующие обозначениям на рис. 1. Нижние индексы компонентов поля указывают на направление проекции рассматриваемого компонента на соответствующую ось. Перечислим их, чтобы читатели могли применить их в своей деятельности.

$$E_y^T = \frac{2(\chi_1 E_y^W - \alpha \chi_2 E_x^W)}{d - ag}, E_x^T = \frac{2\chi_2 E_x^W - g E_y^T}{b},$$

$$E_y^R = \beta_3 E_x^T + \gamma_3 E_y^T - E_y^W, \quad (6)$$

$$E_x^R = \beta_1 E_x^T + \gamma_1 E_y^T - E_x^W,$$

где

$$a = \frac{\beta_4 + \chi_1 \beta_3}{\beta_2 + \chi_2 \beta_1}, b = \beta_2 + \chi_2 \beta_1, g = \gamma_2 + \chi_2 \gamma_1, d = \gamma_4 + \chi_1 \gamma_3,$$

$$\beta_1 = f_{11} + \chi_2 f_{12}, \gamma_1 = f_{13} + \chi_1 f_{14},$$

$$\beta_2 = f_{21} + \chi_2 f_{22}, \gamma_2 = f_{23} + \chi_1 f_{24},$$

$$\beta_3 = f_{31} + \chi_2 f_{32}, \gamma_3 = f_{33} + \chi_1 f_{34},$$

$$\beta_4 = f_{41} + \chi_2 f_{42}, \gamma_4 = f_{43} + \chi_1 f_{44},$$

$$\chi_1 = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cos \varphi, \chi_2 = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cdot \frac{1}{\cos \varphi},$$

$f_{11}, f_{12}, \dots, f_{44}$  – элементы матрицы  $\mathbf{F} = \mathbf{P}^{-1}$ , обратной матрице Берремана.

Зная величины компонент поля световой волны, можно рассчитать поворот поляризации, а также коэффициенты отражения  $K_R$  и пропускания  $K_T$ :

$$K_R = \frac{|E_x^R / \cos \varphi|^2 + |E_y^R|^2}{|E_x^W / \cos \varphi|^2 + |E_y^W|^2}, \quad (7)$$

$$K_T = \frac{|E_x^T / \cos \varphi|^2 + |E_y^T|^2}{|E_x^W / \cos \varphi|^2 + |E_y^W|^2},$$

но предварительно необходимо определить матрицы Берремана для моделируемой структуры и ее отдельных слоев.

## МАТРИЦЫ БЕРРЕМАНА ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ МАГНИТООПТИЧЕСКИХ ЭФФЕКТОВ КЕРРА

Магнитооптические явления проявляются в изменении оптических свойств пленки (структуры) в зависимости от наличия или отсутствия магнитного поля. В связи с этим, для их моделирования требуется определить матрицы Берремана для обоих сценариев. В рассматриваемых нами случаях, они все могут быть получены аналитически.

Путь для нахождения матрицы для изотропного слоя в отсутствие магнитного поля показан Берреманом в одной из первых работ [10]. Подставляя в уравнение (2) тензор диэлектрической проницаемости в виде:

$$\hat{\epsilon} = \epsilon_0 \epsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

получаем дифференциальную, размерности  $4 \times 4$ , матрицу распространения  $\Delta_0$  для данной среды:

$$\Delta_0 = \begin{pmatrix} 0 & U_a & 0 & 0 \\ U_b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & U_s \\ 0 & 0 & U_d & 0 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где

$$U_a = \frac{\mu_0}{\epsilon} (\epsilon - \sin^2 \varphi), U_b = \epsilon_0 \epsilon, U_s = \mu_0, \quad (9)$$

$$U_d = \epsilon_0 (\epsilon - \sin^2 \varphi).$$

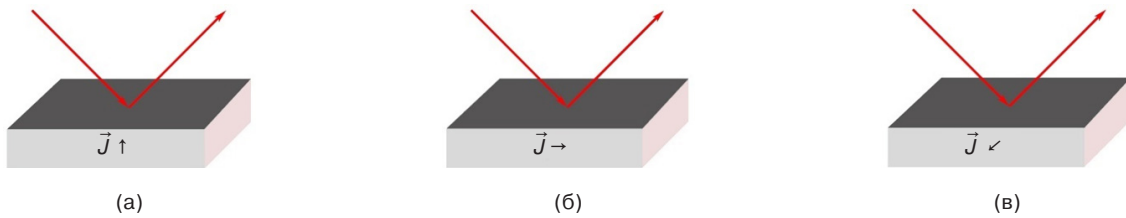
В соответствии с уравнением (4), для получения матрицы Берремана необходимо взять экспоненту от матрицы (8), умноженной на  $i\omega h$ . Наиболее простой и наглядный способ это сделать – разложить экспоненту в ряд Тейлора. Суммируя члены ряда, можно заметить, что элементы получающейся матрицы также представляют собой разложения в ряд Тейлора некоторых функций. В результате для матрицы Берремана изотропной однородной среды  $\mathbf{P}_0$  можно записать:

$$\mathbf{P}_0(h) = \begin{pmatrix} \cos(\omega h \chi_0) & i\beta_0 \sin(\omega h \chi_0) & 0 & 0 \\ i\beta_0^{-1} \sin(\omega h \chi_0) & \cos(\omega h \chi_0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\omega h \chi_0) & i\delta_0^{-1} \sin(\omega h \chi_0) \\ 0 & 0 & i\delta_0 \sin(\omega h \chi_0) & \cos(\omega h \chi_0) \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Здесь

$$\chi_0 = \frac{1}{c} \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi}, \beta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi}}{\varepsilon}, \delta_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi}. \quad (11)$$

В зависимости от конфигурации магнитного поля и падения света на пленку или структуру различают три магнитооптических эффекта Керра: полярный, меридиональный и экваториальный. Полярный эффект Керра возникает при ориентации вектора намагниченности  $\vec{J}$ , в частности, создаваемой внешним магнитным полем, перпендикулярно плоскости пленки и параллельно плоскости падения света (рис. 2а). Меридиональный эффект Керра проявляется, когда вектор намагниченности ориентирован параллельно поверхности пленки и лежит в плоскости падения света (рис. 2б). Экваториальный эффект Керра наблюдается при ориентации вектора намагниченности перпендикулярно плоскости падения света и параллельно структуре пленки (рис. 2в).



**Рис. 2.** Геометрия наблюдения магнитооптических эффектов Керра:

(а) полярного, (б) меридионального, (в) экваториального. Направления осей координат показаны на рис. 1

Необходимо отметить, что  $s$ - и  $p$ -компоненты электрического поля световой волны в данной геометрии связаны с проекциями на оси следующим образом:  $E_s = E_y, E_p = E_x / \cos \varphi$ . Зная  $E_s$  и  $E_p$ , можно вычислить угол поворота плоскости поляризации для плоскополяризованной волны  $\theta_0 = \arctg(|E_s|/|E_p|)$  или, при наличии ненулевой разности фаз  $\phi$  между  $E_s$  и  $E_p$ , азимутальный угол  $\theta_\phi$ , который составляет с плоскостью падения главная ось эллипса поляризации  $\theta_\phi = \arctg(|E_s|/|E_p|) \cos \phi$ . Эллиптичность  $e$  может быть рассчитана по формуле:  $e = \tg[0.5 \arcsin(-2 \operatorname{Im}(\Xi)/(1 - |\Xi|^2))]$ , где  $\Xi = (|E_s|/|E_p|) e^{i\phi}$  [13, 14]. Именно эти величины измеряются в меридиональном и полярном эффекте Керра, в экваториальном же эффекте главное – это изменение интенсивности отраженной электромагнитной волны.

Начнем рассмотрение именно с экваториального эффекта Керра (рис. 2в). В этом случае тензор диэлектрической проницаемости среды в принятой системе координат можно записать в виде:

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon_0 \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 & iQ \\ 0 & 1 & 0 \\ -iQ & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где  $Q$  – магнитооптический параметр.

В этом случае в результате решения уравнения (2) получаем следующую матрицу распространения  $\Delta_T$  (Т – экваториальный эффект Керра (англ. transverse Kerr effect)):

$$\Delta_T = \begin{pmatrix} i\eta & U_a & 0 & 0 \\ U_b^* & -i\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & U_s \\ 0 & 0 & U_d & 0 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Здесь

$$U_b^* = U_b(1 - Q^2), \eta = \frac{\sin \varphi}{c} Q.$$

Матрицу (12) можно представить в виде суммы матриц:

$$\Delta_T = \Delta_T^J + \Delta_T^* = \begin{pmatrix} i\eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & U_a & 0 & 0 \\ U_b^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & U_s \\ 0 & 0 & U_d & 0 \end{pmatrix}.$$

Ввиду того, что структура матрицы  $\Delta_T^*$  идентична структуре матрицы  $\Delta_0$ , экспонента матрицы  $\Delta_T^*$  будет иметь форму, аналогичную (10). Экспоненту матрицы  $\Delta_T^J$ , домноженной на  $i\omega h$ , также будем искать через разложение в ряд Тейлора. К счастью, в этом случае элементы получающейся матрицы также представляют из себя разложения в ряд. В результате получаем:

$$e^{i\omega h \Delta_T^J} = \begin{pmatrix} e^{-\omega h \eta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\omega h \eta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Окончательно, матрица Берремана в данном случае будет иметь вид:

$$\mathbf{P}_T(h) = e^{i\omega h \Delta_T^J} e^{i\omega h \Delta_T^*}, \quad (13)$$

$$\mathbf{P}_T(h) = \begin{pmatrix} e^{-\omega h \eta} \cos(\omega h \chi_T) & i e^{-\omega h \eta} \beta_T \sin(\omega h \chi_T) & 0 & 0 \\ i e^{\omega h \eta} \beta_T^{-1} \sin(\omega h \chi_T) & e^{\omega h \eta} \cos(\omega h \chi_T) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\omega h \chi_0) & i \delta_0^{-1} \sin(\omega h \chi_0) \\ 0 & 0 & i \delta_0 \sin(\omega h \chi_0) & \cos(\omega h \chi_0) \end{pmatrix}, \quad (14)$$

где

$$\chi_T = \chi_0 \sqrt{1 - Q^2}, \quad \beta_T = \beta_0 / \sqrt{1 - Q^2}.$$

В процессе вычисления матрицы (14) был осуществлен переход от операции сложения матриц к операции умножения их экспонент, которые также являются матрицами. Следует отметить, что операция умножения матриц, в отличие от операции сложения, в общем случае не является коммутативной. В случае использования обратного порядка умножения матрица (14) будет иметь другой вид – изменения затронут элементы  $P_{12}$  и  $P_{21}$ , входящие в них экспоненты поменяются местами.

Порядок умножения, показанный в (13), был выбран по следующим причинам. Во-первых, из общих соображений, модификации, вызванные магнитооптическим эффектом, проявляются после прохождения светового излучения через пленку (структуру), а не до его взаимодействия с ней, а, во-вторых, результаты расчетов [15] величины экваториального эффекта Керра для пленки кобальта на кремниевой подложке (рис. 3) демонстрируют, что при использовании порядка умножения (13) достигается результат, который по характеру спектральной зависимости и порядку величины согласуется с экспериментами. В то же время, применение обратного порядка умножения приводит к результатам моделирования, которые полностью не соответствуют экспериментальным данным.

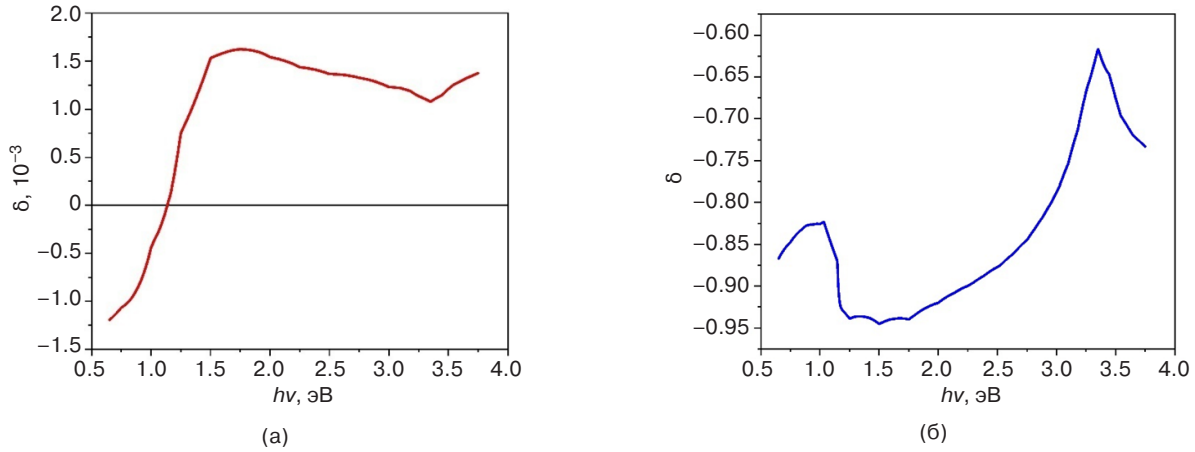
Для случая полярного эффекта Керра (рис. 2а) тензор диэлектрической проницаемости в используемых координатах может быть представлен как

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon_0 \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & iQ & 0 \\ -iQ & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из (2) получаем:

$$\Delta_P = \begin{pmatrix} 0 & U_a & 0 & 0 \\ U_b & 0 & i\zeta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & U_s \\ -i\zeta & 0 & U_d & 0 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

где  $\zeta = \varepsilon_0 \varepsilon Q$ .



**Рис. 3.** Результаты моделирования спектральной зависимости экваториального эффекта Керра ( $\delta$ ) пленки кобальта на кремниевой подложке с учетом порядка перемножения матриц: (а) представленного в (13), (б) обратного.  $h\nu$  – энергия фотона

Здесь также можно рассмотреть сумму матрицы (7) и

$$\Delta_P^J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\zeta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i\zeta & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

В силу того, что уже вторая степень матрицы (16) равняется нулю,

$$e^{i\omega h \Delta_P^J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\omega h \zeta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \omega h \zeta & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Порядок умножения матриц рассмотрен при выводе выражения для экваториального эффекта. В результате матрица Берремана для полярного эффекта принимает вид:

$$\mathbf{P}_P(h) = \begin{pmatrix} \cos(\omega h \chi_0) & i\beta_0 \sin(\omega h \chi_0) & 0 & 0 \\ i\beta_0^{-1} \sin(\omega h \chi_0) & \cos(\omega h \chi_0) & -\omega h \zeta \cos(\omega h \chi_0) & -i\omega h \zeta \delta_0^{-1} \sin(\omega h \chi_0) \\ 0 & 0 & \cos(\omega h \chi_0) & i\delta_0^{-1} \sin(\omega h \chi_0) \\ \omega h \zeta \cos(\omega h \chi_0) & i\omega h \zeta \beta_0 \sin(\omega h \chi_0) & i\delta_0 \sin(\omega h \chi_0) & \cos(\omega h \chi_0) \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Применяя аналогичные рассуждения, можно вывести матрицу Берремана для случая меридионального эффекта Керра (рис. 2б). В этом случае:

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon_0 \varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & iQ \\ 0 & -iQ & 1 \end{pmatrix}$$

и

$$\mathbf{P}_M(h) = \begin{pmatrix} \cos(\omega h \chi_0) & i\beta_0 \sin(\omega h \chi_0) & -\rho \cos(\omega h \chi_M) & -i\rho \delta_M^{-1} \sin(\omega h \chi_M) \\ i\beta_0^{-1} \sin(\omega h \chi_0) & \cos(\omega h \chi_0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\omega h \chi_M) & i\delta_M^{-1} \sin(\omega h \chi_M) \\ i\rho \beta_0^{-1} \sin(\omega h \chi_0) & \rho \cos(\omega h \chi_0) & i\delta_M \sin(\omega h \chi_M) & \cos(\omega h \chi_M) \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Здесь

$$\rho = \frac{\omega}{c} Q \sin \varphi, \quad \chi_M = \frac{1}{c} \sqrt{\varepsilon(1+Q^2) - \sin^2 \varphi}, \quad \delta_M = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \sqrt{\varepsilon(1+Q^2) - \sin^2 \varphi}.$$

## УЧЕТ ТОЛСТЫХ СЛОЕВ

В методе Берремана учитываются интерференционные эффекты. Однако в моделируемых структурах могут присутствовать достаточно толстые слои, толщина которых превосходит длину когерентности источника света  $l_{\text{coh}}$ . Такие слои, как правило, представляют собой подложки, на которые наносятся пленки и сложные структуры, но при этом и исследуемые структуры могут включать в себя определенное количество толстых слоев. Принцип учета таких слоев основывается на методе усреднения, при котором отклонения от когерентности рассматриваются как случайные величины, подчиняющиеся нормальному распределению [16]. Данный подход требует привлечения дополнительных вычислительных мощностей, однако он позволяет учитывать слои промежуточной толщины, в которых наблюдается частичное нарушение условия когерентности. В элементах матрицы Берремана толстого слоя производится замена частоты  $\omega$  на сумму  $(\omega + w)$ , где  $w$  – случайная величина, распределенная по нормальному закону. Все характеристики среды, зависящие от частоты, при этом не изменяются. Таким образом, введение переменной  $w$  влияет только на изменение фазы. Математическое ожидание  $M_w = 0$ . Среднеквадратическое отклонение  $\sigma_w$  зависит от толщины слоя и берется из условия, что при толщине слоя, равном длине когерентности излучения, произойдет набег фазы  $\pi$ :

$$\sigma_w = \frac{h}{l_{\text{coh}}} \pi.$$

Усреднению подлежит величина рассчитываемого эффекта для всей структуры. Рассмотрим случай, когда тонкопленочная структура наносится на толстую подложку с толщиной  $h_{\text{sub}}$ . Тогда отражение от такой структуры вычисляется как:

$$\langle R \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi^3}} \cdot \frac{l_{\text{coh}}}{h_{\text{sub}}} \int_{-\infty}^{\infty} R'(w) e^{-\frac{l_{\text{coh}}^2 - w^2}{2\pi^2 h_{\text{sub}}^2}} dw.$$

Значения  $R'(w)$  определяются в соответствии с уравнением (7) для частоты излучения  $\omega_0$ . При этом в матрицах всех слоев, кроме слоя, подвергающегося усреднению, берется  $\omega = \omega_0$ . В усредняемом слое берется  $\omega = \omega_0 + w$ . Все характеристики материалов для всех слоев берутся для частоты  $\omega_0$ . Если толстых слоев несколько, проводится кратное интегрирование.

Другая проблема толстых слоев связана с тем, что при большом поглощении в процессе выполнения промежуточных вычислений для матрицы или ее обратной матрицы может возникнуть ситуация

переполнения. Для решения данной проблемы предлагается ввести определенную погрешность в расчеты. Максимальная допустимая толщина поглощающих слоев будет определяться, исходя из условия, что при прохождении этих слоев амплитуда световой волны уменьшается на 5–7 порядков. Это позволит избежать ситуации переполнения данных, и при этом внесенная погрешность будет заведомо меньше погрешностей эксперимента.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках проведенного исследования предложено использовать метод Берремана для моделирования всех трех магнитооптических эффектов Керра – полярного, меридионального и экваториального. Матричный метод Берремана, представленный в данной работе, позволяет системно анализировать магнитооптические эффекты Керра в изотропной среде в рамках полученных точных формул магнитооптических эффектов. Это обеспечивает хорошую базу для более точного моделирования сложных многослойных структур, а также способствует углубленному пониманию их физических характеристик, открывая возможности для поиска широкого спектра перспективных магнитных материалов. В работе предложены подходы к учету наличия в моделируемой структуре пленок, толщина которых превышает длину когерентности источника света, что расширяет рассматриваемые классы микро- и наноструктур.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Государственное задание для университетов № ФГФЗ-2023-0005).

## ACKNOWLEDGMENTS

The work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (State Assignment for Universities No. FGFZ-2023-0005).

### Вклад авторов

**И.В. Гладышев** – разработка методики, моделирование, обсуждение результатов, подготовка статьи и ее редактирование.

**А.Н. Юрасов, М.М. Яшин** – обсуждение результатов, подготовка статьи и ее редактирование.

### Authors' contributions

**I.V. Gladyshev** – methodology development, modeling, discussion of the results, drafting an article and its editing.

**A.N. Yurasov, M.M. Yashin** – discussion of the results, preparation of the article and its editing.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рыльков В.В., Емельянов А.В., Николаев С.Н., Никируй К.Э., Ситников А.В., Фадеев Е.А., Демин В.А., Грановский А.Б. Транспортные свойства магнитных наногранулированных композитов с диспергированными ионами в изолирующей матрице. *Журнал экспериментальной и теоретической физики (ЖЭТФ)*. 2020;158(1):164–183. <https://doi.org/10.31857/S0044451020070159>
2. Martyshev M.N., Emelyanov A.V., Demin V.A., et al. Multifilamentary Character of Anticorrelated Capacitive and Resistive Switching in Memristive Structures Based on  $(\text{Co-Fe-B})_x(\text{LiNbO}_3)_{100-x}$  Nanocomposite. *Phys. Rev. Appl.* 2020;14:034016. <https://doi.org/10.1103/PhysRevApplied.14.034016>
3. Gao C.N., Yang Y.X., Xiong Y.Q., et al. Low critical current density for spin-transfer torque in Fe-MgO granular film at room temperature. *J. Phys. D*. 2014;47(4):045003. <https://doi.org/10.1088/0022-3727/47/4/045003>
4. Ганьшина Е.А., Гаршин В.В., Перова Н.Н., Припеченков И.М., Юрасов А.Н., Яшин М.М., Рыльков В.В., Грановский А.Б. Магнитооптическая Керр-спектроскопия нанокompозитов. *Журнал экспериментальной и теоретической физики (ЖЭТФ)*. 2023;164(4):662–672.
5. Павлов В.В., Усачев П.А., Неведов С.Г., Стогний А.И., Новицкий Н.Н., Писарев Р.В. Оптические и магнитооптические свойства многослойных наноразмерных пленок  $[\text{Co}/\text{TiO}_2]_n$ . *Физика твердого тела (ФТТ)*. 2018;60(11):2203–2212. <https://doi.org/10.21883/FTT.2018.11.46664.26NN>
6. Gladyshev I.V., Ganshina E.A., Simdyanova M.A., et al. Optical and Magneto-Optical Properties of Multilayer Magnetic Structures Based on Permalloy. *Bull. Russ. Acad. Sci. Phys.* 2024;88(1):S76–S79. <https://doi.org/10.1134/S1062873824708821>
7. Яшин М.М., Рябухин В.Е., Юрасов А.Н. Магнитооптический экваториальный эффект Керра в нанокompозитах  $\text{Co}_x(\text{CoO})_{1-x}$ . *Russian Technological Journal*. 2025;13(1):115–121. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-1-115-121>
8. Макаров Д.Г., Данилов В.В., Коваленко В.Ф. Многослойные структуры с управляемым магнитным полем пропусканием света. *Журнал технической физики (ЖТФ)*. 2004;74(5):77–82.
9. Маевский В.М. Теория магнитооптических эффектов в многослойных системах с произвольной ориентацией намагниченности. *Физика металлов и металловедение*. 1985;50(2):213–219.
10. Berreman D.W. Optics in Stratified and Anisotropic Media: 4x4-Matrix Formulation. *J. Opt. Soc. Am.* 1972;62(4):502–510. <https://doi.org/10.1364/JOSA.62.000502>
11. Moler C., Van Loan C. Nineteen Dubious Ways to Compute the Exponential of a Matrix, Twenty-Five Years Later. *SIAM Review*. 2003;45(1):3–49. <https://doi.org/10.1137/s00361445024180>
12. Палто С.П. Алгоритм решения оптической задачи для слоистых анизотропных сред. *Журнал экспериментальной и теоретической физики (ЖЭТФ)*. 2001;119(4):638–648. [https://jetp.ras.ru/cgi-bin/dn/r\\_119\\_0638.pdf](https://jetp.ras.ru/cgi-bin/dn/r_119_0638.pdf)
13. Наседкина Ю.Ф., Семенов Д.И. Распределение поляризации в гауссовом пучке, отраженном от резонансной среды. *Письма в Журнал технической физики*. 2006;32(8):1–9.
14. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. *Теория волн. Линейные и нелинейные волны*. М.: Ленанд; 2019, 448 с.
15. Гладышев И.В. *Программа расчета величины экваториального эффекта Керра многослойной тонкопленочной структуры*: Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. 2025617039 РФ. Заявка № 2025615502; заявл. 13.03.2025; опубл. (зарег.) 21.03.2025.
16. Гладышев И.В. Отражение света от многослойных структур, включающих как когерентные, так и некогерентные слои. В сб.: *Оптические технологии, материалы и системы («Оптотех 2024»)*: сборник докладов конференции. Москва. 2024. С. 520–525. <https://www.elibrary.ru/otpmij>

### REFERENCES

1. Rylkov V.V., Emelyanov A.V., Nikolaev S.N., et al. Transport Properties of Magnetic Nanogranular Composites with Dispersed Ions in an Insulating Matrix. *J. Exp. Theor. Phys.* 2020;131(1):160–176. <https://doi.org/10.1134/S1063776120070109> [Original Russian Text: Rylkov V.V., Emelianov A.V., Nikolaev S.N., Nikiryu K.E., Sitnikov A.V., Fadeev E.A., Demin V.A., Granovskii A.B. Transport Properties of Magnetic Nanogranular Composites with Dispersed Ions in an Insulating Matrix. *Zhurnal Eksperimental'noi i Teorieticheskoi Fiziki (ZhETF)*. 2020;158(1):164–183 (in Russ.). <https://doi.org/10.31857/S0044451020070159> ]
2. Martyshev M.N., Emelyanov A.V., Demin V.A., et al. Multifilamentary Character of Anticorrelated Capacitive and Resistive Switching in Memristive Structures Based on  $(\text{Co-Fe-B})_x(\text{LiNbO}_3)_{100-x}$  Nanocomposite. *Phys. Rev. Appl.* 2020;14:034016. <https://doi.org/10.1103/PhysRevApplied.14.034016>
3. Gao C.N., Yang Y.X., Xiong Y.Q., et al. Low critical current density for spin-transfer torque in Fe-MgO granular film at room temperature. *J. Phys. D*. 2014;47(4):045003. <https://doi.org/10.1088/0022-3727/47/4/045003>
4. Gan'shina E.A., Garshin V.V., Perova N.N., et al. Magneto-optical Kerr spectroscopy of nanocomposites. *J. Exp. Theor. Phys.* 2023;137(4):572–581. <https://doi.org/10.1134/S1063776123100151> [Original Russian Text: Gan'shina E.A., Garshin V.V., Perova N.N., Pripechenkov I.M., Yurasov A.N., Yashin M.M., Ryl'kov V.V., Granovskii A.B. Magneto-optical Kerr spectroscopy of nanocomposites. *Zhurnal Eksperimental'noi i Teorieticheskoi Fiziki (ZhETF)*. 2023;164(4):662–672 (in Russ.).]
5. Pavlov V.V., Usachev P.A., Nefedov S.G., et al. Optical and magneto-optical properties of multilayer nanosized  $[\text{Co}/\text{TiO}_2]_n$  films. *Phys. Solid State*. 2018;60(11):2244–2253. <https://doi.org/10.1134/S1063783418110239> [Original Russian Text: Pavlov V.V., Usachev P.A., Nefedov S.G., Stognii A.I., Novitskii N.N., Pisarev R.V. Optical and magneto-optical properties of multilayer nanosized  $[\text{Co}/\text{TiO}_2]_n$  films. *Fizika tverdogo tela (FTT)*. 2018;60(11):2203–2212 (in Russ.). <https://doi.org/10.21883/FTT.2018.11.46664.26NN> ]

6. Gladyshev I.V., Ganshina E.A., Simdyanova M.A., et al. Optical and Magneto-Optical Properties of Multilayer Magnetic Structures Based on Permalloy. *Bull. Russ. Acad. Sci. Phys.* 2024;88(1):S76–S79. <https://doi.org/10.1134/S1062873824708821>
7. Yashin M.M., Ryabukhin V.E., Yurasov A.N. Magneto-optical transverse Kerr effect in  $\text{Co}_x(\text{CoO})_{1-x}$  nanocomposites. *Russian Technological Journal.* 2025;13(1):115–121. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-1-115-121>
8. Makarov D.G., Danilov V.V., Kovalenko V.F. Multilayer structures with light transmission controlled by a magnetic field. *Zhurnal Tekhnicheskoi Fiziki.* 2004;74(5):77–82 (in Russ.).
9. Maevskii V.M. Theory of magneto-optical effects in multilayer systems with arbitrary orientation of magnetization. *Fizika metallov i metallovedenie = Physics of Metals and Metallography.* 1985;59(2):213–219 (in Russ.).
10. Berreman D.W. Optics in Stratified and Anisotropic Media: 4x4-Matrix Formulation. *J. Opt. Soc. Am.* 1972;62(4):502–510. <https://doi.org/10.1364/JOSA.62.000502>
11. Moler C., Van Loan C. Nineteen Dubious Ways to Compute the Exponential of a Matrix, Twenty-Five Years Later. *SIAM Review.* 2003;45(1):3–49. <https://doi.org/10.1137/s00361445024180>
12. Palto S.P. An algorithm for solving the optical problem for stratified anisotropic media. *J. Exp. Theor. Phys.* 2001;92(4):552–560. <https://doi.org/10.1134/1.1371338>  
[Original Russian Text: Palto S.P. An algorithm for solving the optical problem for stratified anisotropic media. *Zhurnal Eksperimental'noi i Teoreticheskoi Fiziki (ZhETF).* 2001;119(4):638–648 (in Russ.). [https://jetp.ras.ru/cgi-bin/dn/r\\_119\\_0638.pdf](https://jetp.ras.ru/cgi-bin/dn/r_119_0638.pdf)]
13. Nasedkina Yu.F., Sementsov D.I. Polarization distribution in a Gaussian beam reflected from a resonant medium. *Tech. Phys. Lett.* 2006;32(4):323–326. <https://doi.org/10.1134/S1063785006040158>  
[Original Russian Text: Nasedkina Yu.F., Sementsov D.I. Polarization distribution in a Gaussian beam reflected from a resonant medium. *Pis'ma v Zhurnal Tekhnicheskoi Fiziki (Pis'ma v ZhTF).* 2006;32(8):1–9 (in Russ.).]
14. Vinogradova M.B., Rudenko O.V., Suhorukov A.P. *Teoriya voln. Lineinye i nelineinye volny. (Theory of Waves. Linear and Nonlinear Waves).* Moscow: Lenand; 2019, 448 p. (In Russ.).
15. Gladyshev I.V. *Program for Calculating the Magnitude of the Equatorial Kerr Effect of a Multilayer Thin-Film Structure:* Certificate of state registration of computer program. 2025617039 RF. Publ. (registered) 21.03.2025 (in Russ.).
16. Gladyshev I.V. Reflection of light from multilayer structures, including both coherent and incoherent layers. In: *Optical Technologies, Materials and Systems (“Optotech 2024”):* Conference Proceedings. Moscow. 2024. P. 520–525 (in Russ.).

## Об авторах

**Гладышев Игорь Васильевич**, к.ф.-м.н., доцент, кафедра нанoeлектроники, Институт перспективных технологий и индустриального программирования, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: i\_gladyshev@mirea.ru. ResearcherID N-1535-2016, Scopus Author ID 6701612553, SPIN-код РИНЦ 6735-1887, <https://orcid.org/0000-0002-7627-4978>

**Юрасов Алексей Николаевич**, д.ф.-м.н., профессор, кафедра нанoeлектроники, Институт перспективных технологий и индустриального программирования, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: alexey\_yurasov@mail.ru. ResearcherID M-3113-2016, Scopus Author ID 6602974416, SPIN-код РИНЦ 4259-8885, <https://orcid.org/0000-0002-9104-3529>

**Яшин Максим Михайлович**, к.ф.-м.н., доцент, кафедра нанoeлектроники, Институт перспективных технологий и индустриального программирования, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: ihkamax@mail.ru. ResearcherID G-6809-2017, Scopus Author ID 57210607470, SPIN-код РИНЦ 2438-6135, <https://orcid.org/0000-0001-8022-9355>

## About the Authors

**Igor V. Gladyshev**, Cand. Sci. (Phys.–Math.), Associate Professor, Department of Nanoelectronics, Institute for Advanced Technologies and Industrial Programming, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: i\_gladyshev@mirea.ru. ResearcherID N-1535-2016, Scopus Author ID 6701612553, RSCI SPIN-code 6735-1887, <https://orcid.org/0000-0002-7627-4978>

**Alexey N. Yurasov**, Dr. Sci. (Phys.–Math.), Professor, Department of Nanoelectronics, Institute for Advanced Technologies and Industrial Programming, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: alexey\_yurasov@mail.ru. ResearcherID M-3113-2016, Scopus Author ID 6602974416, RSCI SPIN-code 4259-8885, <https://orcid.org/0000-0002-9104-3529>

**Maxim M. Yashin**, Cand. Sci. (Phys.–Math.), Associate Professor, Department of Nanoelectronics, Institute for Advanced Technologies and Industrial Programming, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: ihkamax@mail.ru. ResearcherID G-6809-2017, Scopus Author ID 57210607470, RSCI SPIN-code 2438-6135, <https://orcid.org/0000-0001-8022-9355>