УДК 536.5.62 *DOI: 10.32362/2500-316X-2019-7-2-49-60*

ТЕМПЕРАТУРНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Л.М. Ожерелкова[@],
Е.С. Савин

МИРЭА – Российский технологический университет, Москва 119454, Россия
[@]Автор для переписки, e-mail: lilom@list.ru

Предложена математическая модель процесса нестационарной теплопроводности твердых тел в случае, когда в уравнении теплопроводности нельзя пренебречь зависимостью теплофизических характеристик среды (теплоемкости, плотности и коэффициента теплопроводности) от температуры. На основании экспериментальных данных, по температурным зависимостям теплоемкости и коэффициента теплопроводности получены уравнения теплопроводности для случаев высоких ($T \gg \theta$) и низких ($T \ll \theta$) температур (θ – температура Дебая). Установлено, что в обоих случаях полученные зависимости имеют степенной характер, и это позволяет привести исходное уравнение теплопроводности к виду, допускающему применение классического метода разделения переменных при решении соответствующих краевых задач для уравнения теплопроводности. Решение уравнения теплопроводности рассматривается в приближении, в котором длина свободного пробега фононов ограничена и не зависит от температуры, так что температурное поведение коэффициента теплопроводности определяется только температурной зависимостью теплоемкости. Получены точные аналитические решения для краевых задач, моделирующих теплопроводность в диэлектриках и металлах, находящихся в поликристаллическом состоянии. Рассмотрены решения, относящиеся к областям с фиксированными и движущимися границами. При решении краевых задач с движущимися границами в рамках предложенной модели теплопроводности использовано функциональное преобразование специального вида, позволяющее свести исходную задачу к задаче с фиксированными границами, но с преобразованным уравнением теплопроводности. Полученные результаты могут быть использованы в инженерных исследованиях кинетики целого ряда физических и химико-технологических процессов в твердых телах и жидкостях: диффузии, седиментации, вязкого течения, замедления нейтронов, течения жидкостей через пористую среду, электрических колебаний, сорбции, сушки, горения и др.

Ключевые слова: уравнение нестационарной теплопроводности, температура Дебая, высокие и низкие температуры, фиксированные и движущиеся границы.

THE TEMPERATURE DEPENDENCE OF UNSTEADY HEAT CONDUCTION IN SOLIDS

L.M. Ozherelkova[@],
E.S. Savin

MIREA – Russian Technological University, Moscow 119454, Russia
[@]Corresponding author e-mail: lilom@list.ru

A mathematical model of the process of unsteady thermal conductivity of solids is proposed in the case where the dependence of the thermal characteristics of the medium (heat capacity, density and thermal conductivity coefficient) on temperature cannot be neglected in the heat conduction equation. Based on the experimental data equations of thermal conductivity are obtained for the cases of high ($T \gg \theta$) and low ($T \ll \theta$) temperatures (θ is the Debye temperature). Both in the case of high and low temperatures, the temperature dependences of the heat capacity and the thermal conductivity coefficient are power-law, which allows us to bring the original heat conduction equation to a form that allows the use of the classical method of variable separation in solving the corresponding boundary value problems for the heat conduction equation. The solution of the thermal conductivity equation is considered in the approximation, in which the free path of phonons is limited and does not depend on temperature, so that the temperature behavior of the thermal conductivity coefficient is determined only by the temperature dependence of the heat capacity. Exact analytical solutions for boundary value problems modeling thermal conductivity in dielectrics and metals in the polycrystalline state are obtained. The solutions relating to both areas with fixed and moving boundaries are considered. In order to solve boundary value problems with moving boundaries, in the framework of the proposed model of thermal conductivity, the functional transformation of a special kind is used. This allows reducing the original problem to the problem with fixed boundaries, but with the transformed heat conduction equation. The obtained results can be used in engineering studies of the kinetics of some physical and chemical processes in solids and liquids – diffusion, sedimentation, viscous flow, neutron deceleration, fluid flow through a porous medium, electrical oscillations, sorption, drying, combustion, etc.

Keywords: equation of unsteady thermal conductivity, Debye temperature, high and low temperatures, fixed and moving boundaries.

Введение

В общем случае в уравнении нестационарной теплопроводности твердых тел при отсутствии внутренних источников тепловыделения [1]:

$$C\rho\frac{\partial T}{\partial t} = div(\lambda gradT) \tag{1}$$

теплофизические характеристики среды C, ρ и λ (C – теплоёмкость, ρ – плотность, λ – коэффициент теплопроводности) зависят от координат и температуры.

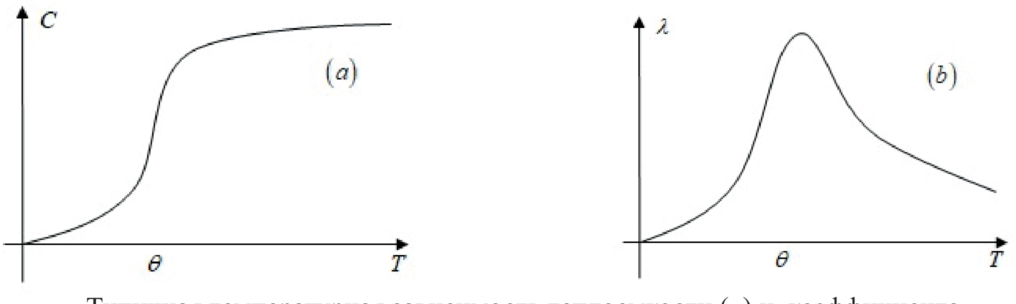
В основном рассматривают случаи, когда в уравнении (1) все коэффициенты считаются постоянными и равными средним их значениям. Такое предположение справедливо, если теплофизические свойства материала меняются незначительно (изотропное гомогенное твердое тело, узкий температурный интервал). На практике, однако, для ряда материалов неоднородность физических свойств оказывается настолько значительной, а изменение свойств по координатам столь существенно, что в (1) необходимо учитывать зависимость коэффициентов переноса от пространственных координат [1]. Зависимость коэффициентов переноса от температуры, когда процесс теплопроводности протекает в большом интервале изменения температуры, исследована в меньшей степени [2]. В последнем случае поток тепла становится нелинейным, и для определения температурного поля необходимо решать краевые задачи для нелинейного дифференциального уравнения, что связано с большими вычислительными трудностями.

В представленной работе рассматривается задача определения температурной зависимости нестационарной теплопроводности твердых тел.

Уравнение теплопроводности при решении данной задачи будет иметь вид[1]:

$$C(T)\rho(T)\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right) \tag{2}$$

В настоящее время полученные теоретические зависимости $C(T)$ и $\lambda(T)$ хорошо согласуются с экспериментальными данными во всей температурной области. В качестве примера на рисунке приведены типичные зависимости теплоемкости и коэффициента теплопроводности от температуры [3–6]. Видно, что в подавляющем числе случаев температурная зависимость $C(T)$ и $\lambda(T)$ при высоких ($T \gg \theta$) и низких ($T \ll \theta$) температурах носит степенной характер: $C = aT^{\beta}$; $\lambda = bT^{\alpha}$. В каждом из температурных интервалов показатели α и β имеют свое значение.



Типичная температурная зависимость теплоемкости (a) и коэффициента теплопроводности (b) для твердых тел. θ – температура Дебая [3].

Результаты и их обсуждение

Рассмотрим нестационарную теплопроводность твердых тел с фиксированными и подвижными границами.

1. Фиксированные границы

В температурных интервалах ($T \gg \theta$, $T \ll \theta$) для однородного стержня длины l с принятыми температурными зависимостями теплофизических параметров уравнение (2) принимает вид:

[1]В дальнейшем зависимостью $\rho(T)$ по сравнению с зависимостями $C(T)$ и $\lambda(T)$ будем пренебрегать.

$$A\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha T^{\alpha-\beta-1}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + T^{\alpha-\beta}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\ , \qquad (3)$$

где $A = \rho a / b$ – постоянная.

Пусть теперь на конце стержня $x = l$ поддерживается постоянная температура $T = 0$, а второй конец $x = 0$ изолирован, так что через него никакого изменения теплового потока не происходит. Этим предположениям отвечают граничные условия:

$$T(l,t) = 0;\ \frac{\partial T(0,t)}{\partial t} = 0 \qquad (4)$$

В начальный момент $t = 0$ распределение температуры в области $0 \le x \le l$ задается функцией $f_0(x)$:

$$T(x,0) = f_0(x) \qquad (5)$$

Граничные условия накладывают ограничения на функцию $f_0(x)$:

$$f_0(l);\ \frac{\partial f_0(0)}{\partial x} = 0$$

Частные решения уравнения (3) будем искать в виде произведения двух функций: $T(x,t) = \Phi(x)G(t)$. Выражение (3) преобразуется к виду:

$$AG^{\beta-\alpha-1}\frac{\partial G}{\partial t} = \alpha\Phi^{\alpha-\beta-2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \Phi^{\alpha-\beta-1}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \qquad (6)$$

Граничные условия при этом принимают вид:

$$\Phi(l,t) = 0; \qquad \frac{d\Phi(0,t)}{dx} = 0 \qquad (7)$$

Согласно (6), в исходном уравнении теплопроводности (3) переменные x и t разделились. С параметром разделения, равным постоянной величине γ^2, уравнение (6) разобьется на два:

$$AG^{\beta-\alpha-1}\frac{dG}{dt} = -\gamma^2 \qquad (8)$$

$$\Phi\frac{d^2\Phi}{dx^2} + \alpha\left(\frac{d\Phi}{dx}\right)^2 = -\gamma^2\Phi^{\beta-\alpha+2} \qquad (9)$$

Решением временного уравнения (8) при $\alpha \neq \beta$ является функция

$$G(t) = \left[\frac{\beta-\alpha}{A}(C_1 - \gamma^2 t)\right]^{\frac{1}{\beta-\alpha}}, \qquad (10)$$

где C_1 – постоянная.

После введения новой переменной $\Phi(x) = u^{\frac{1}{\alpha+1}}$ уравнение (9) принимает вид ($\alpha \neq -1$):

$$\frac{d^2u}{dx^2} + (\alpha+1)\gamma^2 u^{\frac{\beta+1}{\alpha+1}} = 0 \qquad (11)$$

Граничные условия (7) становятся следующими:

$$u(l) = 0\,,\ \frac{du(0)}{dx} = 0 \qquad (12)$$

Рассмотрим конкретные случаи, позволяющие получить решение уравнения (11) в явном виде.

Тепло в твердых телах переносится частицами и квазичастицами (электронами, фононами, спиновыми волнами, экситонами и др.). В металлах фактически большую часть тепла переносят свободные электроны, а решетке принадлежит лишь малая часть вклада в теплопроводность. В диэлектриках тепло переносится фононами – квантами поля колебаний атомов кристаллической решетки. Температурная зависимость теплоемкости диэлектриков хорошо изучена теоретически и экспериментально [7, 8]. Для оценки температурной зависимости коэффициента теплопроводности можно воспользоваться известной из кинетической теории газов формулой:

$$\lambda = Cvl_*,$$

где C – теплоемкость газа (в нашем случае газа фононов);

v – средняя величина тепловой скорости частиц (фононов);

l_* – их эффективная длина свободного пробега.

Величина скорости v имеет порядок величины скорости звука. Температурная зависимость v по сравнению с зависимостями $C(t)$ и $l_*(t)$ незначительна. Следовательно, температурная зависимость λ определяется произведением теплоемкости кристалла C и эффективной длины свободного пробега l_*. Эта зависимость будет различна для моно- и поликристаллов.

Монокристаллы, в отличие от поликристаллических и стеклообразных твердых тел, в целом обладают дальним порядком, и препятствовать распространению теплового потока будут только столкновения фононов друг с другом. Поскольку при высоких температурах ($T \gg \theta$) полное число фононов в кристалле пропорционально T, то вероятность рассеяния отдельного фонона, вносящего вклад в тепловой поток, тем выше, чем больше число других фононов, на которых он может рассеяться, поэтому длина свободного пробега должна падать с повышением температуры. Кроме того, поскольку при высоких температурах удельная теплоемкость подчиняется закону Дюлонга и Пти и не зависит от температуры, следует ожидать, что и теплопроводность будет падать с повышением температуры в пределе высоких температур.

В поликристаллических материалах также происходит рассеяние фононов границами зерен, причем эффективность этого процесса выше эффективности фононных столкновений. Вероятность рассеяния границами зерен не зависит от длины волны фонона, так что в таких веществах в широком интервале температур l_* постоянна и, следовательно, теплопроводность пропорциональна теплоемкости. Таким образом, в области температур $T \gg \theta$ и $T \ll \theta$ для поликристаллов и стекол можно принять $\alpha = \beta$. В этом случае решение временного уравнения (8) будет иметь вид:

$$G(t) = C_1 e^{-\frac{\gamma^2}{A}t} \tag{13}$$

Выполнив интегрирование в (11), получим координатное решение:

$$u(x) = A_1 \cos(\gamma\sqrt{\alpha+1}\, x) + B_1 \sin(\gamma\sqrt{\alpha+1}\, x)\,, \tag{14}$$

где A_1, B_1 – постоянные, $\alpha > -1$.

Из второго граничного условия (12) следует $B_1 = 0$, и, чтобы выполнялось первое условие (12), необходимо $\gamma\sqrt{\alpha+1}\, l = \pi(2n-1)/2$ (n = 1, 2,...). Обозначив $C_1A_1 \equiv a_n$, частное решение исходного уравнения получим в виде:

$$T_n(x,t) = e^{-\frac{\gamma_n^2}{A}t}\left[a_n \cos(\gamma_n\sqrt{\alpha+1}\, x)\right]^{\frac{1}{\alpha+1}}\,, \tag{15}$$

Общее решение возьмем в форме ряда:

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\gamma_n^2}{A}t}\left[a_n \cos(\gamma_n\sqrt{\alpha+1}\, x)\right]^{\frac{1}{\alpha+1}} \tag{16}$$

Коэффициенты a_n в (16) находятся из начального условия

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(\gamma_n\sqrt{\alpha+1}\, x)\right]^{\frac{1}{\alpha+1}} = f_0(x) \tag{17}$$

Разложим функции, входящие в это уравнение, в ряд Фурье по косинусам:

$$\begin{gathered}\left[\cos\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right]^{\frac{1}{\alpha+1}} = \sum_{m=1}^{\infty} b_m(n)\cos\frac{\pi(2m-1)x}{2l} \qquad f_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\frac{\pi(2n-1)x}{2l} \\ b_m(n) = \frac{2}{l}\int_0^l\left[\cos\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right]^{\frac{1}{\alpha+1}}\cos\frac{\pi(2m-1)x}{2l}dx \qquad C_n = \frac{2}{l}\int_0^l f_0(x)\cos\frac{\pi(2n-1)x}{2l}dx\end{gathered} \tag{18}$$

С учетом выражений (18) уравнение (17) переписывается в виде:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\frac{1}{\alpha+1}} \sum_{m=1}^{\infty} b_m(n)\cos\frac{\pi(2m-1)x}{2l} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\frac{\pi(2n-1)x}{2l} \tag{19}$$

Умножая обе части уравнения (19) на $\cos\frac{\pi(2k-1)x}{2l}$ (k = 1, 2,...) и интегрируя по x от 0 до l, получим систему алгебраических уравнений для нахождения коэффициентов a_n:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\frac{1}{\alpha+1}} b_k(n) = C_k \tag{20}$$

Вопрос о разрешимости данной бесконечной системы в общем виде не ставится, исследование возможно в частных случаях, при конкретных входных параметрах задачи.

В области высоких температур ($T \gg \theta$) для диэлектриков, находящихся в поликристаллическом состоянии, теплоемкость и коэффициент теплопроводности не зависят от температуры, так что $\alpha = 0$, и из (16) следует:

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\gamma_n^2}{A}t} a_n \cos\frac{\pi(2n-1)}{2l}x \qquad (21)$$

Выражение (21) совпадает с результатом, полученным в [9].

В диэлектриках перенос тепла осуществляется фононами, и при низких температурах ($T \ll \theta$) теплоемкость C и коэффициент теплопроводности λ пропорциональны T^3 [3]. Соответственно, тогда $\alpha = 3$, так что решение (16) примет вид:

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\gamma_n^2}{A}t} \left[a_n \cos\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right]^{\frac{1}{4}} \qquad (22)$$

В металлах при низких температурах ($T \ll \theta$) теплоемкость может быть записана в виде суммы двух слагаемых, одно из которых описывает вклад электронов проводимости, а второе – вклад решетки [7, 8]:

$$C(T) = A_1 T + A_2 T^3, \qquad (23)$$

где A_1, A_2 – постоянные, характерные для данного металла.

Первое слагаемое (электронная часть теплоемкости) линейно зависит от температуры T и поэтому доминирует при достаточно низких температурах $T \ll (A_1/A_2)^{1/2}$. В этой же области температур коэффициент теплопроводности $\lambda = A_3 T$, где A_3 – постоянная.

Следовательно, параметр $\alpha = 1$, и решение будет иметь вид:

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\gamma_n^2}{A}t} \left[a_n \cos\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (24)$$

2. Движущиеся границы

Существуют различные подходы при решении краевых задач теплопроводности в области с произвольно движущейся границей [10, 11]. К нашей задаче применимо функциональное преобразование специального вида, основанное на введении подвижной системы координат, в которой подвижная граница становится неподвижной. В результате исходное уравнение теплопроводности преобразуется к виду, допускающему применение классического метода разделения переменных. Рассмотрим поликристаллические материалы, для которых характерна температурная независимость эффективной длины свободного пробега фононов, так что, согласно (12), температурное поведение коэффициента теплопроводности определяется только теплоемкостью. Для случая высоких ($T \gg \theta$) и низких ($T \ll \theta$) температур зависимость теплоемкости от температуры носит степенной характер $C \sim T^{\alpha}$, где α – параметр, имеющий различное значение в разных частях температурного интервала. В этих условиях уравнение теплопроводности записывается так:

$$A\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\alpha}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{25}$$

Граничные условия выберем в виде

$$T(l,t)=T_0\,,\ \frac{\partial T(0,t)}{\partial x}=0\,, \tag{26}$$

где по условию $l=l(t)=l_0 f(t)$, $f(t)$ – заданная функция времени. Начальное условие выберем в виде $T(x,0)=f_0(x)$.

Введение новой переменной $y=x/f(t)$ преобразует (25) к виду:

$$A\left[f^2\frac{\partial T}{\partial t}-\frac{y}{2}\frac{d}{dt}(f^2)\frac{\partial T}{\partial y}\right]=\frac{\alpha}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{27}$$

Функция $T(y,t)$ удовлетворяет граничным условиям на неподвижных границах:

$$T(l_0,t)=T_0\,,\ \frac{\partial T(0,t)}{\partial y}=0 \tag{28}$$

Начальное условие – $T(y,0)=f_0(y)$.

Для произвольного вида функции $f(t)$ точное решение уравнения (27) невозможно. Приближенное решение может быть найдено, в частности, по теории возмущений – в случае, если $f(t)$ слабо зависит от времени. Из вида выражения (27) следует, что при специальном выборе $f(t)$, а именно, если f^2 линейно зависит от времени, переменные y и t разделяются. Таким особым случаем, в частности, является функция

$$f(t)=\sqrt{1+\frac{t}{t_0}}\,, \tag{29}$$

где t_0 – произвольная постоянная.

Такой выбор $f(t)$ удовлетворяет, в частности, начальному условию $f(0)=1$, т. е. $l(0)=l_0$.

Подставляя (29) в (27) и перенося начало отсчета времени заменой $t+t_0=\tau$, получаем:

$$A\left(\frac{\tau}{t_0}\frac{\partial T}{\partial \tau}-\frac{y}{2t_0}\frac{\partial T}{\partial y}\right)=\frac{\alpha}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{30}$$

Представим функцию $T(y,\tau)$ в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от времени, другая – от координаты:

$$T(y,\tau)=G(\tau)F(y) \tag{31}$$

В уравнении (30) с функцией $T(y,\tau)$ вида (31) переменные разделяются, и мы получаем два уравнения для нахождения $F(y)$ и $G(\tau)$:

$$A\frac{\tau}{t_0}\frac{1}{G}\frac{dG}{d\tau}=-\gamma^2\,, \tag{32}$$

$$\frac{d^2F}{dy^2}+\frac{\alpha}{F}\left(\frac{dF}{dy}\right)^2+\frac{A}{2t_0}y\frac{dF}{dy}=-\gamma^2 F\,,(33)$$

где γ^2 – параметр разделения.

Решением временного уравнения (32) является функция

$$G(\tau) = C_1 \tau^{\frac{-\gamma_n^2}{A} t_0} \tag{34}$$

Уравнение (33) после введения новой переменной $F = u^{\frac{1}{\alpha+1}}$ ($\alpha \neq -1$) становится линейным:

$$\frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{A}{2t_0} y \frac{du}{dy} + (\alpha+1)\gamma^2 u = 0 \tag{35}$$

Введение переменных $u = \varphi \exp(-t)$, $y = (4t_0 t/A)^{\frac{1}{2}}$ приводит уравнение (35) к стандартному виду вырожденного гипергеометрического уравнения:

$$t \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \left(\frac{1}{2} - t\right) \frac{d\varphi}{dt} - \left[\frac{1}{2} - \frac{t_0}{A}(\alpha+1)\gamma^2\right] \varphi = 0 \tag{36}$$

Согласно [12], его решением является функция

$$\varphi(t) = C_2 \Phi\left(a_1, \frac{1}{2}; t\right) + C_3 t^{1/2} \Phi\left(a_1 + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; t\right),$$

где C_2, C_3 –постоянные;

$\Phi(a,b;c)$ – вырожденная гипергеометрическая функция;

$$a_1 = \frac{1}{2} - \frac{t_0}{A}(\alpha+1)\gamma^2 .$$

Для функции $u(y)$ получаем ($k = A/4t_0$):

$$u(y) = e^{-ky^2} \left[C_2 \Phi\left(a_1, \frac{1}{2}; ky^2\right) + C_3 \sqrt{k}\, y \Phi\left(a_1 + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; ky^2\right) \right] \tag{37}$$

Используя граничное условие $\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{y=0} = 0$, так что $\partial u/\partial y = 0$, получим $C_3 = 0$.

Выражение (37) принимает вид:

$$u = C_2 e^{-ky^2} \Phi\left(a_1, \frac{1}{2}; ky^2\right) \tag{38}$$

Коэффициент C_2 находится из второго граничного условия ($u(l_0) = T_0$):

$$C_2^{-1} = \frac{1}{T_0} e^{-kl_0^2} \Phi\left(a_1, \frac{1}{2}; kl_0^2\right)$$

Так как решение уравнения (25) должно быть ограниченной функцией для любых значений координаты x ($0 \le x \le l(t)$), то и функция $u(y)$ должна быть ограниченной при всех значениях координаты y ($0 \le y \le l_0$). Необходимо, чтобы вырожденная гипергеометрическая функция $\Phi(a,b;c)$ была полиномом степени $|a|$. Выполнение этого условия требует, чтобы первый аргумент a функции $\Phi(a,b;c)$ принимал целые отрицательные значения (или ноль). Таким образом, должно быть $a_1 = -n$ ($n = 0,1,\dots$). С учетом явного вида a_1, получим:

$$\gamma \equiv \gamma_n = \sqrt{\frac{A(n+1/2)}{t_0(\alpha+1)}}$$

Частное решение будет иметь вид:

$$u_n(y) = C_2 e^{-ky^2}\Phi\left(-n,\frac{1}{2};ky^2\right) \tag{39}$$

Выражение (39) представим через более простую функцию – четный полином Эрмита [13]:

$$H_{2n}(z) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}\Phi\left(-n,\frac{1}{2};z^2\right) \tag{40}$$

Принимая во внимание (40), для координатной функции $F(y)$ получим:

$$F_n^{\alpha+1}(y) = C_2\left[\frac{(-1)^n n!}{(2n!)}\right]e^{-ky^2}H_{2n}(\sqrt{k}y) \tag{41}$$

Для общего решения $T(y,\tau)$, являющегося суперпозицией частных решений (34) и (41), находим:

$$T(y,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \tau^{-\frac{\gamma_n^2 t_0}{A}}\left[e^{-ky^2}H_{2n}(\sqrt{k}y)\right]^{\frac{1}{\alpha+1}}, \tag{42}$$

где $C_n = C_1\left[\dfrac{(-1)^n n! C_2}{(2n)!}\right]^{\frac{1}{\alpha+1}}$

Коэффициенты C_n находятся из начального условия $T(y,\tau_0) = f_0(y)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n t_0^{-\frac{\gamma_n^2 t_0}{A}}\left[e^{-ky^2}H_{2n}(\sqrt{k}y)\right]^{\frac{1}{\alpha+1}} = f_0(y) \tag{43}$$

Разложим функции, входящие в (43), в ряд Фурье по косинусам:

$$\left[e^{-ky^2}H_{2n}(\sqrt{k}y)\right]^{\frac{1}{\alpha+1}} = \sum_{m=1}^{\infty} b_m(n)\cos\frac{\pi m y}{l_0}$$

$$b_m(n) = \frac{2}{l_0}\int_0^{l_0}\left[e^{-ky^2}H_{2n}(\sqrt{k}y)\right]^{\frac{1}{\alpha+1}}\cos\frac{\pi m y}{l_0}dy$$

$$f_0(y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\cos\frac{\pi n y}{l_0}, \quad C_n = \frac{2}{l_0}\int_0^{l_0} f_0(y)\cos\frac{\pi n y}{l_0}dy$$

Поступив далее так же, как и в первом случае, для нахождения коэффициентов a_n получим систему алгебраических уравнений вида (20).

Заключение

К настоящему времени наиболее полно изучено решение уравнения нестационарной теплопроводности для случая высоких температур ($T \gg \theta$), поскольку в данной области температур теплофизические характеристики уравнения (теплоемкость C и коэффициент теплопроводности λ), согласно экспериментальным и теоретическим данным, не зависят от температуры и считаются постоянными. В общем случае температурной зависимости $C(T)$ и $\lambda(T)$ общее решение уравнения теплопроводности получить не удается. В рассматриваемом нами частном случае, когда зависимость C и λ от температуры в определенных частях температурного интервала носит степенной характер, получено точное аналитическое решение уравнения нестационарной теплопроводности как с фиксированными, так и с движущимися границами.

Полученные результаты можно применить в современных инженерных исследованиях в машиностроительной, энергетической, атомной промышленности, в технологических процессах химической, строительной, текстильной, пищевой, геологической и других отраслей.

Литература:

1. Карташов Э.М., Кудинов В.А. Аналитические методы теории теплопроводности и ее приложений. М.: Ленанд, 2018. 1072 с.

2. Голодная В.В., Савин Е.С. Нестационарная теплопроводность цепных структур при низких температурах // Тонкие химические технологии. 2017. Т. 12. № 4. С. 91–97.

3. Займан Дж. Электроны и фононы. М.: Изд-во иностранной литературы, 1962. 488 с.

4. Епифанов Г.И. Физика твердого тела. СПб.: Лань, 2011. 288 с.

5. Киттель Ч. Введение в физику твердого тела. М.: Наука, 1978. 792 с.

6. Бутягин П.Ю. Химическая физика твердого тела. М.: Издательство МГУ, 2006. 272 с.

7. Василевский А.С. Физика твердого тела. М.: Дрофа, 2010. 208 с.

8. Ашкрофт Н., Мермин Н. Физика твердого тела. Т. 2. М.: Мир, 1979. 422 с.

9. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. М.: Физматлит, 2008. 728 с.

10. Карташов Э.М., Антонова И.В. Гиперболические модели нестационарной теплопроводности // Тонкие химические технологии. 2016. Т.11. № 2. С. 74–80.

11. Карташов Э.М. Кудинов В.А. Аналитическая теория теплопроводности и прикладной термоупругости. М.: Либроком, 2018. 656 с.

12. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Физматлит, 2001. 576 с.

13. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. СПб.: Лань, 2010. 368 с.

References:

1. Kartashov E.M., Kudinov V.M. Analytical methods of heat conduction theory and its applications. M.: Lenand Publ., 2018. 1072 p. (in Russ.)

2. Golodnaya V.V., Savin E.S. Unsteady thermal conductivity of chain structures at low temperatures. *Tonkie khimicheskie tekhnologii (Fine Chemical Technologies)*. 2017; 12(4): 91-97. (in Russ.)

3. Ziman J.M. Electrons and phonons. M.: Izdatel'stvo inostrannoy literatury (Foreign Literature Publishing House), 1962. 488 p. (in Russ.)

4. Epifanov G.I. Physics of the solid state. St. Petersburg: Lan' Publ., 2011. 288 p. (in Russ.)

5. Kittel C. Introduction to solid state physics. Moscow: Nauka Publ., 1978. 792 p. (in Russ.)

6. Butyagin P.Yu. The chemical physics of solid body. Moscow: MSU Publishing House, 2006. 272 p. (in Russ.)

7. Vasilevsky A.S. Physics of the solid state. M.: Drofa Publ., 2010. 208 p. (in Russ.)

8. Ashcroft N., Mermin N. Physics of the solid state. V. 2. Moscow: Mir Publ., 1979. 422 p. (in Russ.)

9. Fichtenholz G.M. Course of differential and integral calculus. V. 3. Moscow: Fizmatlit Publ., 2008. 728 p. (in Russ.)

10. Kartashov E.M., Antonova I.V. Hyperbolic models of unsteady thermal conductivity. *Tonkie khimicheskie tekhnologii (Fine Chemical Technologies)*. 2016; 11(2): 74-80. (in Russ.)

11. Kartashov E.M., Kudinov V.M. Analytical theory of heat conduction and applied thermoelasticity. Moscow: Librokom Publ., 2018. 656 p. (in Russ.)

12. Zaytsev V.F., Polyanin A.D. Ordinary differential equations. Moscow: Fizmatlit Publ., 2001. 576 p. (in Russ.)

13.Lebedev N.N. Special functions and their applications. St. Petersburg: Lan' Publ., 2010. 368 p. (in Russ.)

Об авторах:

Ожерелкова Лилия Мухарамовна, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры высшей и прикладной математики Института тонких химических технологий имени М.В. Ломоносова ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119571, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 86).

Савин Евгений Степанович, кандидат физико-математических наук, заведующий лабораторией кафедры высшей и прикладной математики Института тонких химических технологий имени М.В. Ломоносова ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119571, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 86).

About the authors:

Liliya M. Ozherelkova, Ph.D. (Eng.), Docent, Associate Professor of the Chair of Higher and Applied Mathematics, M.V. Lomonosov Institute of Fine Chemical Technologies, MIREA – Russian Technological University (86, Vernadskogo pr., Moscow 119571, Russia).

Evgeniy S. Savin, Ph.D. (Phys.-Math.), Head of Laboratory of the Chair of Higher Mathematics and Applied Mathematics, M.V. Lomonosov Institute of Fine Chemical Technologies, MIREA – Russian Technological University (86, Vernadskogo pr., Moscow 119571, Russia).

Для цитирования: Ожерелкова Л.М., Савин Е.С. Температурная зависимость нестационарной теплопроводности твердых тел // Российский технологический журнал. 2019. Т. 7. № 2. С. 49–60. DOI: 10.32362/2500-316X-2019-7-2-49-60

For citation: Ozherelkova L.M., Savin E.S. The temperature dependence of unsteady heat conduction in solids. *Rossiyskiy tekhnologicheskiy zhurnal* (Russian Technological Journal). 2019; 7(2): 49-60. (in Russ.). DOI: 10.32362/2500-316X-2019-7-2-49-60