

Математическое моделирование  
Mathematical modeling

УДК 531.32

<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2026-14-1-64-81>

EDN JUUJON



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

# Математическое моделирование орбитального движения искусственного спутника Луны с использованием переменных Делоне

О.В. Мешкова, А.В. Шатина ©

МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, 119454 Россия

© Автор для переписки, e-mail: [shatina\\_av@mail.ru](mailto:shatina_av@mail.ru)

• Поступила: 19.05.2025 • Доработана: 10.07.2025 • Принята к опубликованию: 07.11.2025

## Резюме

**Цели.** Целью работы является вывод и исследование системы уравнений орбитального движения искусственного спутника Луны (ИСЛ) в гравитационном поле притягивающей планеты в переменных Делоне, обеспечивающей снижение вычислительной сложности при моделировании долгосрочных траекторий, а также анализ стационарных орбит Луны с учетом гравитационного влияния Земли как третьего тела.

**Методы.** Используются методы аналитической механики, асимптотические методы, в частности, метод усреднения, методы теории устойчивости, численные методы для интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

**Результаты.** Получены гамильтониан и уравнения движения ИСЛ в канонических переменных Делоне, на основе которых выведены усредненная и неусредненная системы уравнений движения ИСЛ в виде автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений относительно следующих параметров орбиты: большой полуоси, эксцентриситета, наклона, долготы восходящего узла, долготы перицентра от восходящего узла, истинных аномалий. Получена замкнутая система дифференциальных уравнений второго порядка относительно эксцентриситета орбиты и долготы перицентра от восходящего узла. Найдены ее стационарные решения, исследована их устойчивость, определены условия для существования стационарных движений в зависимости от значения константы первого интеграла усредненной системы уравнений. Построены интегральные кривые и фазовые портреты, демонстрирующие взаимосвязь параметров орбиты. Проведен сравнительный анализ с данными JPL Horizons<sup>1</sup> и ранее опубликованными работами.

**Выводы.** Разработанный метод позволяет оптимизировать проектирование траекторий для будущих лунных миссий (например, Artemis, «Луна-Глоб»), обеспечивая баланс между точностью и вычислительной эффективностью. Результаты подтверждают перспективность использования переменных Делоне для анализа долгосрочной орбитальной динамики в гравитационных полях сложной конфигурации.

<sup>1</sup> JPL Horizons – онлайн-сервис Национального управления по аэронавтике и исследованию космического пространства (США), который предоставляет доступ к ключевым данным о Солнечной системе и позволяет вычислять точные траектории объектов в ней. <https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons/>. Дата обращения 04.03.2025. [JPL Horizons is an online service from the National Aeronautics and Space Administration (USA) that provides access to key data about the solar system and enables the calculation of precise trajectories of objects in it. <https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons/>. Accessed March 04, 2025.]

**Ключевые слова:** искусственный спутник Луны, гравитационное поле притягивающего центра, гамильтониан, канонические переменные Делоне, система уравнений орбитального движения, параметры орбиты

**Для цитирования:** Мешкова О.В., Шатина А.В. Математическое моделирование орбитального движения искусственного спутника Луны с использованием переменных Делоне. *Russian Technological Journal*. 2026;14(1):64–81. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2026-14-1-64-81>, <https://www.elibrary.ru/JUUJON>

**Прозрачность финансовой деятельности:** Авторы не имеют финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## RESEARCH ARTICLE

# Mathematical modeling of the orbital motion of an artificial satellite of the Moon using Delaunay variables

Olga V. Meshkova, Albina V. Shatina<sup>®</sup>

MIREA – Russian Technological University, Moscow, 119454 Russia

<sup>®</sup> Corresponding author, e-mail: [shatina\\_av@mail.ru](mailto:shatina_av@mail.ru)

• Submitted: 19.05.2025 • Revised: 10.07.2025 • Accepted: 07.11.2025

### Abstract

**Objectives.** This work aims to derive and study the system of equations of orbital motion of an artificial satellite of the Moon (ASM) in the gravitational field of an attracting planet using Delaunay variables. This will ensure a reduction in computational complexity when modeling long-term trajectories, as well as provide an analysis of stationary orbits of the Moon taking into account the gravitational influence of the Earth as a third body.

**Methods.** The study uses analytical mechanics, asymptotic methods, in particular, the averaging method, methods of stability theory, numerical methods for integrating systems of ordinary differential equations.

**Results.** The Hamiltonian and equations of motion of the ASM in canonical Delaunay variables are obtained. Averaged and non-averaged systems of equations of motion of the ASM are derived in the form of autonomous systems of ordinary differential equations with respect to the following orbital parameters: semi-major axis, eccentricity, inclination, longitude of the ascending node, longitude of the pericenter from the ascending node, and true anomalies. A closed system of differential equations of the second order with respect to the orbital eccentricity and the pericenter longitude from the ascending node is obtained. Its stationary solutions are found, their stability is investigated, and conditions for the existence of stationary motions are determined depending on the value of the constant of the first integral of the averaged system of equations. Integral curves and phase portraits were constructed to demonstrate the interrelationship of orbital parameters. A comparative analysis was conducted using JPL Horizons<sup>2</sup> data and previously published works.

**Conclusions.** The method developed enables the design of trajectories for future lunar missions to be optimized (e.g., Artemis, Luna-Glob), thus providing a balance between accuracy and computational efficiency. The results confirm the prospects of using Delaunay variables for analyzing long-term orbital dynamics in gravitational fields of complex configuration.

**Keywords:** artificial satellite of the Moon, gravitational field of the attracting center, Hamiltonian, canonical Delaunay variables, system of equations of orbital motion, orbital parameters

<sup>2</sup> JPL Horizons is an online service from the National Aeronautics and Space Administration (USA) that provides access to key data about the solar system and enables the calculation of precise trajectories of objects in it. <https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons/>. Accessed March 04, 2025.

**For citation:** Meshkova O.V., Shatina A.V. Mathematical modeling of the orbital motion of an artificial satellite of the Moon using Delaunay variables. *Russian Technological Journal*. 2026;14(1):64–81. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2026-14-1-64-81>, <https://www.elibrary.ru/JUUJON>

**Financial disclosure:** The authors have no financial or proprietary interest in any material or method mentioned.

The authors declare no conflicts of interest.

## ВВЕДЕНИЕ

Математическое моделирование орбитального движения искусственного спутника Луны (ИСЛ) представляет собой одну из наиболее актуальных задач в космических исследованиях. Актуальность работы усиливается растущим интересом к долгосрочным лунным проектам, включая программы «Артемида» (Artemis NASA<sup>3</sup>, США, 2022 г.) [1], миссии Chang'E-5 и Chang'E-6 (CNSA<sup>4</sup>, КНР, 2020 г. и 2024 г.) [2, 3], Chandrayaan-3 (ISRO<sup>5</sup>, Индия, 2023 г.) [4, 5], российскую лунную программу [6], предусматривающую развертывание орбитальной станции. В контексте активизации лунной программы в России, которая включает в себя запуск новых миссий и исследовательских проектов, точные модели движения спутников становятся особенно востребованы. Луна рассматривается не только как объект научного изучения, но и как потенциальная база для дальнейших космических исследований [6].

Орбитальное движение вокруг Луны подчиняется законам Кеплера, однако существенные отклонения от идеализированной модели объясняются влиянием внешних возмущений. Основы анализа таких возмущений изложены в трудах Лапласа и Лагранжа, которые предложили методы решения уравнений движения для систем многих тел<sup>6</sup>.

Исследования эволюции орбит спутников планет при дважды усредненной возмущающей функции были выполнены в 60-х гг. XX в. Подробное исследование этой задачи началось с открытия нового первого интеграла усредненной системы уравнений. Это открытие было почти одновременно сделано в 1961 г. советским ученым М.Л. Лидовым [7] и американским ученым Y. Kozai [8] и получило название эффекта Лидова – Козаи. Впоследствии картина эволюции орбитального движения спутника, основанная на указанном эффекте, была развита в работах М.А. Вашковьяка [9, 10]. Лидов М.Л. впервые подробно исследовал влияние гравитационных

возмущений на движение спутников в системах с несколькими телами. В своих работах [7, 11] он рассмотрел эффекты, вызванные гравитацией третьего тела, которые приводят к долгопериодическим изменениям орбитальных параметров. Кроме того, он предложил методы упрощения сложных уравнений движения для практического применения.

В свою очередь, Т.А. Эли [12] сосредоточился на численном моделировании орбитального движения спутников Луны с учетом значимых внешних возмущений. В исследованиях, опубликованных в начале 2000-х гг., он рассматривал как краткосрочные, так и долгосрочные изменения орбитальных параметров под воздействием гравитации Земли, Солнца и масконов Луны. Эли Т.А. показал, что для спутников на низких орбитах вокруг Луны (low lunar orbit, LLO) основное влияние оказывают гравитационные аномалии Луны, тогда как для спутников на высоких орбитах (high lunar orbit, HLO) доминируют возмущения от Земли и Солнца.

В последние годы значительный прогресс достигнут в моделировании гравитационных аномалий Луны. В исследовании [13] продемонстрировано применение сферических гармоник высокого порядка для учета масконов, что критично для низких лунных орбит. Работа [14] посвящена анализу устойчивости орбит в рамках миссии «Артемида», где авторы используют гибридные методы (аналитические и численные) для прогнозирования долгосрочной эволюции. В 2022 г. в [15] предложены алгоритмы машинного обучения для ускорения расчетов орбитальных возмущений, что особенно актуально для задач в реальном времени. Кроме того, миссия Chandrayaan-3 [4, 5] предоставила новые данные о динамике высокоэллиптических орбит, подтверждающие теоретические модели. В работе [16] предложен подход к проектированию замороженных низких лунных орбит, основанный на последовательном применении неградиентных методов, байесовской оптимизации и метода Нелдера – Мида.

Движение спутника Луны подвержено различным возмущениям, включая гравитационные влияния Земли, Солнца и других небесных тел, несферичность Луны, влияние масконов (концентраций массы) в ее литосфере, давление солнечного излучения, взаимодействие с космической средой и другие. В данной статье внимание будет сосредоточено на системе уравнений пространственного возмущенного движения ИСЛ, вызванного гравитационным

<sup>3</sup> National Aeronautics and Space Administration – Национальное управление по аэронавтике и исследованию космического пространства (США).

<sup>4</sup> China National Space Administration – Китайское национальное космическое управление.

<sup>5</sup> Indian Space Research Organization – Индийская организация космических исследований.

<sup>6</sup> Lagrange J.-L. *Mécanique Analytique*. Paris: Veuve Desaint, 1788.

полем Земли. Указанное возмущение является основным для спутников на высоких орбитах.

Современные системы расчета траекторий опираются на численные методы высокой сложности, требующие значительных ресурсов. Предложенная модель, основанная на уравнениях орбитального движения спутника в переменных Делоне, обеспечивает сопоставимую точность при сокращении времени вычислений. Это делает метод перспективным для предварительного анализа орбит на этапе проектирования миссий.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ГАМИЛЬТОНИАН

Рассмотрим модельную задачу о движении системы «небесное тело – спутник» в гравитационном поле притягивающего центра. Небесное тело, спутник, притягивающий центр будем моделировать материальными точками  $P, S, O$  с массами  $m_2, m_3, m_1$  соответственно (рис. 1). Будем считать, что  $m_3 \ll m_2 \ll m_1$ . Радиус-вектор центра масс  $C_0$  системы «небесное тело – спутник» обозначим вектором  $\mathbf{R}_1$ , а взаимное положение точек  $P$  и  $S$  – вектором  $\mathbf{R}_2$ , т.е.  $\mathbf{R}_1 = \overline{OC_0}$ ,  $\mathbf{R}_2 = \overline{PS}$ . Будем считать, что  $|\mathbf{R}_1| \gg |\mathbf{R}_2|$ .

Введем инерциальную систему координат  $OXYZ$  и оси Кёнига  $C_0\xi_1\xi_2\xi_3$ . Радиус-векторы точек  $P$  и  $S$  выражаются через  $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$  следующим образом:

$$\overline{OP} = \mathbf{R}_1 - \frac{m_3}{m_2 + m_3} \mathbf{R}_2, \quad \overline{OS} = \mathbf{R}_1 + \frac{m_2}{m_2 + m_3} \mathbf{R}_2. \quad (1.1)$$

Кинетическая энергия системы «небесное тело – спутник» определяется равенством:

$$T = \frac{1}{2} m_2 \left( \frac{d \overline{OP}}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m_3 \left( \frac{d \overline{OS}}{dt} \right)^2.$$

С учетом соотношений (1.1) получим:

$$T = \frac{1}{2} (m_2 + m_3) \dot{\mathbf{R}}_1^2 + \frac{1}{2} m_r \dot{\mathbf{R}}_2^2, \quad m_r = \frac{m_2 m_3}{m_2 + m_3}, \quad (1.2)$$

$m_r$  – присоединенная масса.

Потенциальная энергия сил взаимного притяжения в поставленной задаче представляется в виде:

$$\Pi = - \frac{f m_1 m_2}{\left| \mathbf{R}_1 - \frac{m_3}{m_2 + m_3} \mathbf{R}_2 \right|} - \frac{f m_1 m_3}{\left| \mathbf{R}_1 + \frac{m_2}{m_2 + m_3} \mathbf{R}_2 \right|} - \frac{f m_2 m_3}{|\mathbf{R}_2|}, \quad (1.3)$$

где  $f = 6.672 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \text{ кг}^{-1} \text{ с}^{-2}$  – универсальная гравитационная постоянная.

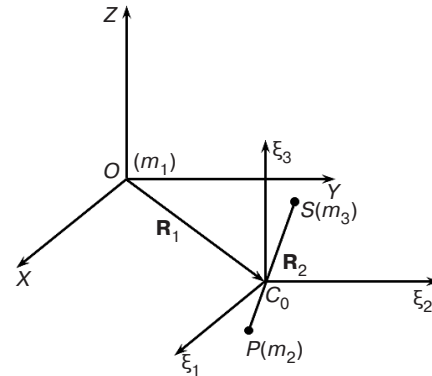


Рис. 1. Система «небесное тело – спутник»

С учетом того условия, что расстояние между небесным телом и спутником мало по сравнению с длиной радиус-вектора центра масс  $C_0$ , а также используя формулы для производящей функции многочленов Лежандра  $P_n(x)$  [17], сохраняя члены второго порядка малости по  $R_2/R_1$ , преобразуем выражение (1.3). Потенциал (1.3) примет следующий вид:

$$\Pi = - \frac{f m_1 (m_2 + m_3)}{R_1} - \frac{f m_2 m_3}{R_2} - \frac{f m_1 m_r}{2 R_1} (3 \cos^2 \psi_{12} - 1) \frac{R_2^2}{R_1^2}. \quad (1.4)$$

Здесь  $R_1 = |\mathbf{R}_1|$ ,  $R_2 = |\mathbf{R}_2|$ ,  $\psi_{12}$  – угол между векторами  $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$ .

В качестве базовой задачи рассмотрим задачу о движении спутника  $S_0$  массой  $m$  (материальной точки) в гравитационном поле притягивающего центра  $Q$ . В этом случае спутник движется по кеплеровской орбите – одному из конических сечений. Остановимся на случае эллиптической орбиты.

Для определения положения спутника на орбите вводятся следующие параметры:  $a$  – большая полуось эллипса;  $e$  – эксцентриситет;  $i$  – наклонение орбиты спутника;  $h$  – долгота восходящего узла (угол между  $Qx$  и линией  $QN_1$  пересечения плоскости орбиты спутника с плоскостью  $Qxy$ );  $g$  – долгота перицентра  $\pi$  от восходящего узла (ближайшей к центру  $Q$  точки орбиты спутника);  $\vartheta$  – истинная аномалия, угол между направлением на перицентр  $\pi$  и вектором  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{G} = \mathbf{R} \times m \dot{\mathbf{R}}$  – вектор момента количества движения точки  $S_0$  (рис. 2).

Величины  $h, i, g, e, n, a$  в невозмущенной задаче сохраняют постоянное значение, а истинная аномалия  $\vartheta$  является функцией времени:

$$\dot{\vartheta} = \frac{(1 + e \cos \vartheta)^2}{(1 - e^2)^{3/2}} n, \quad n = \sqrt{\frac{f_0}{a^3}},$$

$f_0 = f M_0$ ,  $M_0$  – масса притягивающего центра.



В рассматриваемой ограниченной постановке первое слагаемое в правой части формулы (1.6) является постоянной величиной. Поэтому гамильтониан задачи запишем в виде:

$$\mathcal{H} = -\frac{f^2(m_2 + m_3)^2 m_r^3}{2L_2^2} + \mathcal{H}_1. \quad (1.12)$$

С учетом (1.7)–(1.11) возмущающая часть гамильтониана  $\mathcal{H}_1$  в формуле (1.12) примет вид:

$$\mathcal{H}_1 = \frac{f^2 m_1^4 G_2^4 (m_2 + m_3)^4 (1 + e_1 \cos \vartheta_1)^3}{2G_1^6 m_r^3 (1 + e_2 \cos \vartheta_2)^2} (1 - 3 \cos^2 \psi_{12}), \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} \cos \psi_{12} = (\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) = & \cos(g_1 + \vartheta_1)[\cos h_2 \cos(g_2 + \vartheta_2) - \sin h_2 \cos i_2 \sin(g_2 + \vartheta_2)] + \\ & + \sin(g_1 + \vartheta_1)[\sin h_2 \cos(g_2 + \vartheta_2) + \cos h_2 \cos i_2 \sin(g_2 + \vartheta_2)]. \end{aligned}$$

## 2. ЭВОЛЮЦИЯ ОРБИТАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ СПУТНИКА

Проведем процедуру усреднения гамильтониана по «быстрым» угловым переменным – средним аномалиям  $l_1, l_2$ :

$$\langle (*) \rangle_{l_1, l_2} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (*) dl_1 dl_2 = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (*) \frac{(1 - e_1^2)^{3/2}}{(1 + e_1 \cos \vartheta_1)^2} \cdot \frac{(1 - e_2^2)^{3/2}}{(1 + e_2 \cos \vartheta_2)^2} d\vartheta_1 d\vartheta_2.$$

Возмущающая часть гамильтониана (1.13) в результате выполненной процедуры усреднения примет вид:

$$\langle \mathcal{H}_1 \rangle_{l_1, l_2} = \frac{f^2 m_1^4 (m_2 + m_3)^4}{16m_r^3} \cdot \frac{L_2^4}{G_1^3 L_1^3} \left\{ 2(1 - 3 \cos^2 i_2) + 3e_2^2 (1 - 3 \cos^2 i_2 - 5 \cos(2g_2) \sin^2 i_2) \right\}. \quad (2.1)$$

Выражая эксцентриситет  $e_2$  и наклонение  $i_2$  через переменные  $L_2, G_2, H_2$  согласно формулам (1.8), (1.9) и учитывая формулы (1.12), (2.1), перейдем к усредненному гамильтониану в переменных Делоне:

$$\langle \mathcal{H} \rangle_{l_1, l_2} = -\frac{f^2 (m_2 + m_3)^2 m_r^3}{2L_2^2} + \frac{f^2 m_1^4 (m_2 + m_3)^4}{16m_r^3} \cdot \frac{L_2^4}{G_1^3 L_1^3} \left\{ \left( 1 - 3 \frac{H_2^2}{G_2^2} \right) \left( 5 - 3 \frac{G_2^2}{L_2^2} \right) - 15 \cos(2g_2) \left( 1 - \frac{H_2^2}{G_2^2} \right) \left( 1 - \frac{G_2^2}{L_2^2} \right) \right\}. \quad (2.2)$$

Таким образом, получено усредненное по быстрым угловым переменным представление гамильтониана. Усредненные уравнения движения записываются в виде системы канонических уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{L}_2 = -\frac{\partial \langle \mathcal{H}_1 \rangle_{l_1, l_2}}{\partial l_2}, \quad \dot{G}_2 = -\frac{\partial \langle \mathcal{H}_1 \rangle_{l_1, l_2}}{\partial g_2}, \quad \dot{H}_2 = -\frac{\partial \langle \mathcal{H}_1 \rangle_{l_1, l_2}}{\partial h_2}, \quad \dot{l}_2 = \frac{\partial \langle \mathcal{H}_1 \rangle_{l_1, l_2}}{\partial L_2} + \frac{f^2 (m_2 + m_3)^2 m_r^3}{L_2^3}, \\ \dot{g}_2 = \frac{\partial \langle \mathcal{H}_1 \rangle_{l_1, l_2}}{\partial G_2}, \quad \dot{h}_2 = \frac{\partial \langle \mathcal{H}_1 \rangle_{l_1, l_2}}{\partial H_2}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

С учетом формулы (2.2) эволюционная система уравнений движения спутника в переменных Делоне (2.3) имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{L}_2 = 0, \quad \dot{H}_2 = 0, \\ \dot{G}_2 = -\frac{15 f^2 m_1^4 (m_2 + m_3)^4}{8m_r^3} \cdot \frac{L_2^4}{G_1^3 L_1^3} \left( 1 - \frac{H_2^2}{G_2^2} \right) \left( 1 - \frac{G_2^2}{L_2^2} \right) \sin(2g_2), \\ \dot{g}_2 = \frac{6 f^2 m_1^4 (m_2 + m_3)^4}{16m_r^3} \cdot \frac{L_2^4}{G_1^3 L_1^3 G_2} \left\{ 5 \frac{H_2^2}{G_2^2} (1 - \cos(2g_2)) - \frac{G_2^2}{L_2^2} (1 - 5 \cos(2g_2)) \right\}, \end{aligned}$$

$$\dot{i}_2 = \frac{-6f^2 m_1^4 (m_2 + m_3)^4}{16m_1^3 G_2} \cdot \frac{L_2^4}{G_1^3 L_1^3} \left( \frac{H_2}{G_2} \right) \left\{ 2 + \left( 1 - \frac{G_2^2}{L_2^2} \right) (3 - 5 \cos(2g_2)) \right\},$$

$$i_2 = \frac{f^2 (m_2 + m_3)^2 m_r^3}{L_2^3} + \frac{f^2 m_1^4 (m_2 + m_3)^4}{16m_1^3 G_1^3 L_1^3} 2L_2^3 \left\{ \left( 1 - 3 \frac{H_2^2}{G_2^2} \right) \left( 10 - 3 \frac{G_2^2}{L_2^2} \right) - 15 \cos(2g_2) \left( 1 - \frac{H_2^2}{G_2^2} \right) \left( 2 - \frac{G_2^2}{L_2^2} \right) \right\}.$$

Используя следующие обратные соотношения  $H_2^2/G_2^2 = \cos^2 i_2$ ,  $1 - (H_2^2/G_2^2) = \sin^2 i_2$ ,  $G_2^2/L_2^2 = 1 - e_2^2$ , полученные из уравнений (1.8), (1.9), выведем усредненную систему уравнений движений спутника в переменных Делоне (относительно «медленных» переменных):

$$\begin{aligned} \dot{L}_2 &= 0, \quad \dot{H}_2 = 0, \\ \dot{G}_2 &= -\frac{15fm_1m_r}{8} \cdot \frac{a_2^2 e_2^2}{a_1^3 (1-e_1^2)^{3/2}} \sin^2 i_2 \sin(2g_2), \\ \dot{i}_2 &= \frac{\sqrt{f(m_2+m_3)}}{a_2^{3/2}} + \frac{m_1 \sqrt{f}}{8\sqrt{(m_2+m_3)}} \cdot \frac{a_2^{3/2}}{a_1^3 (1-e_1^2)^{3/2}} \left\{ (-2 + 3\sin^2 i_2)(7 + 3e_2^2) - 15 \cos(2g_2) \sin^2 i_2 (1 + e_2^2) \right\}, \quad (2.4) \\ \dot{g}_2 &= \frac{3m_1 \sqrt{f}}{8\sqrt{(m_2+m_3)}} \cdot \frac{a_2^{3/2}}{a_1^3 (1-e_1^2)^{3/2} \sqrt{(1-e_2^2)}} \left\{ 4 + e_2^2 (1 - 5 \cos(2g_2)) - 5 \sin^2 i_2 (1 - \cos(2g_2)) \right\}, \\ \dot{h}_2 &= \frac{-3m_1 \sqrt{f}}{8\sqrt{(m_2+m_3)}} \cdot \frac{a_2^{3/2}}{a_1^3 (1-e_1^2)^{3/2} \sqrt{(1-e_2^2)}} \cos i_2 \left\{ 2 + e_2^2 (3 - 5 \cos(2g_2)) \right\}. \end{aligned}$$

Далее выполним преобразования в эволюционной системе уравнений движения для перехода к виду, зависящему от переменных  $e_2$ ,  $i_2$ ,  $g_2$ ,  $h_2$ , а также осуществим переход к безразмерному времени  $\tau = n_2 t$ ,  $n_2 = \sqrt{f(m_2+m_3)} a_2^{-3}$ . Итоговая система принимает вид:

$$\begin{aligned} a_2' &= 0, \\ e_2' &= \frac{15\mu a_0^3}{8} \cdot \frac{e_2 \sqrt{1-e_2^2}}{(1-e_1^2)^{3/2}} \sin^2 i_2 \sin(2g_2), \\ i_2' &= \frac{-15\mu}{16} \cdot \frac{a_0^3 e_2^2}{\sqrt{1-e_2^2} (1-e_1^2)^{3/2}} \sin(2i_2) \sin(2g_2), \\ l_2' &= 1 + \frac{\mu}{8} \cdot \frac{a_0^3}{(1-e_1^2)^{3/2}} \left\{ (-2 + 3\sin^2 i_2)(7 + 3e_2^2) - 15 \cos(2g_2) \sin^2 i_2 (1 + e_2^2) \right\}, \quad (2.5) \\ g_2' &= \frac{3\mu}{8} \cdot \frac{a_0^3}{(1-e_1^2)^{3/2} \sqrt{1-e_2^2}} \left\{ 4 + e_2^2 (1 - 5 \cos(2g_2)) - 5 \sin^2 i_2 (1 - \cos(2g_2)) \right\}, \\ h_2' &= \frac{-3\mu}{8} \cdot \frac{a_0^3}{(1-e_1^2)^{3/2} \sqrt{1-e_2^2}} \cos i_2 \left\{ 2 + e_2^2 (3 - 5 \cos(2g_2)) \right\}, \end{aligned}$$

где  $\mu = \frac{m_1}{m_2 + m_3}$ ,  $a_0^3 = \frac{a_2^3}{a_1^3}$  – массовый коэффициент (отношение массы притягивающего центра к сумме масс небесного тела и спутника) и осевой коэффициент (отношение больших полуосей орбит) соответственно.

Заметим, что значение большой полуоси  $a_2$  не подвержено изменениям в течение времени. Кроме того, правые части системы уравнений (2.5) зависят только от трех переменных: эксцентриситета  $e_2$ , наклона орбиты  $i_2$ , долготы перицентра  $g_2$ . Поэтому второе, третье и пятое уравнения системы отделяются от остальных уравнений, а четвертое и шестое уравнения могут быть проинтегрированы после того, как будут найдены функции  $e_2(\tau)$ ,  $i_2(\tau)$ ,  $g_2(\tau)$ . Угловая переменная  $l_2$  является «быстрой». По этой переменной было проведено усреднение. Поэтому ее можно исключить из рассмотрения. Система сокращается до четырех основных уравнений:

$$\begin{aligned} e_2' &= \frac{15k}{8} \cdot \frac{e_2 \sqrt{1-e_2^2}}{(1-e_1^2)^{\frac{3}{2}}} \sin^2 i_2 \sin(2g_2), \\ i_2' &= \frac{-15k}{16} \cdot \frac{e_2^2}{\sqrt{1-e_2^2} (1-e_1^2)^{\frac{3}{2}}} \sin(2i_2) \sin(2g_2), \\ g_2' &= \frac{3k}{8} \cdot \frac{1}{(1-e_1^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{1-e_2^2}} \left\{ 4 + e_2^2 (1 - 5 \cos(2g_2)) - 5 \sin^2 i_2 (1 - \cos(2g_2)) \right\}, \\ h_2' &= \frac{-3k}{8} \cdot \frac{\cos i_2}{(1-e_1^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{1-e_2^2}} \left\{ 2 + e_2^2 (3 - 5 \cos(2g_2)) \right\}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где  $k = \mu a_0^3$ .

Полученная система (2.6) с точностью до постоянного множителя, отвечающего за выбор безразмерного времени, совпадает с системой уравнений, полученной М.Л. Лидовым [7, 8], если пренебречь возмущениями, вызванными нецентральностью поля тяготения Луны. Система уравнений (2.6) имеет первые интегралы [7, 8]:

$$\cos^2 i_2 (1 - e_2^2) = C, \quad (2.7)$$

$$e_2^2 \left( \frac{2}{5} - \sin^2 g_2 \sin^2 i_2 \right) = D. \quad (2.8)$$

Из полученного соотношения (2.7) следует, что при увеличении значения  $e_2$  значение  $i_2$  будет уменьшаться, и наоборот. Перейдем к параметрам системы (2.6):

$$m_1 = 5.9736 \cdot 10^{24} \text{ кг} - \text{масса Земли},$$

$$m_2 = 7.349 \cdot 10^{22} \text{ кг} - \text{масса Луны},$$

$$m_3 = 10^3 \text{ кг} - \text{масса спутника},$$

$$\mu = \frac{m_1}{m_2 + m_3} = \frac{5.9736 \cdot 10^{24}}{7.349 \cdot 10^{22} + 10^3} \approx 81.28453.$$

В первом приближении можно считать, что Луна движется по эллиптической орбите с эксцентриситетом  $e_1 = 0.0549$  и большой полуосью геоцентрической орбиты  $a_1 = 384400 \cdot 10^3$  м.

Будем рассматривать лунные орбиты с высотами от 500 до 20000 км (от 310 до 12430 миль), на которые гравитация Земли оказывает наибольшее воздействие и приводит к возмущениям орбит. Пусть  $a_2 = 6500 \cdot 10^3$  м – большая полуось орбиты спутника, тогда:

$$a_0^3 = \frac{a_2^3}{a_1^3} = \frac{6500 \cdot 10^3}{379739 \cdot 10^3} \approx 0.017117,$$

$$k = \mu a_0^3 \approx 81.28453 \cdot 0.017117 \approx 1.39135.$$

Проинтегрируем полученную систему (2.6) при помощи метода Рунге – Кутты четвертого порядка с постоянным шагом, задав начальные значения:  $e_{2_0} = 0.01$ ,  $i_{2_0} = \frac{j\pi}{180}$ ,  $g_{2_0} = 0$ ,  $h_{2_0} = 0$ ,  $j = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 85^\circ$ , и на данной основе построим интегральные кривые. На получившихся графиках (рис. 3) наглядно демонстрируется соблюдение взаимосвязи первого интеграла (2.7) рассматриваемой системы. Изменение значения эксцентриситета (степени эллиптичности орбиты) и угла наклона (угол между плоскостью орбиты и определенной эталонной плоскостью) на графике может быть как постепенным, так и резким.

### 3. СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ ЭВОЛЮЦИОННОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ИСЛ

Замороженные орбиты вокруг Луны, естественных спутников или астероидов представляют большой интерес, поскольку целью нескольких космических миссий является облет таких тел. Замороженными называются орбиты, у которых изменения наклона, эксцентриситета, долготы перицентра от восходящего узла сведены к минимуму. Для нахождения таких орбит найдем стационарные решения системы первых трех уравнений (2.6), определяемые условиями:

$$e'_2 = 0, i'_2 = 0, g'_2 = 0. \quad (3.1)$$

Так как рассматриваются эллиптические орбиты, то значения эксцентриситета  $e_2$  будем ограничивать промежутком  $[0; 1)$ :

$$0 \leq e_2 < 1. \quad (3.2)$$

Учитывая интеграл (2.7), получим замкнутую автономную систему второго порядка относительно  $g_2, e_2$ :

$$\begin{aligned} e'_2 &= 5k_1 e_2 \sqrt{1-e_2^2} (1-e_2^2 - C) \sin(2g_2), \\ g'_2 &= \frac{k_1}{(1-e_2^2)^{3/2}} \left\{ (1-e_2^2)(4+e_2^2 - 5e_2^2 \cos(2g_2)) - 5(1-e_2^2 - C)(1-\cos(2g_2)) \right\}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь

$$k_1 = \frac{3k}{8(1-e_1^2)^{3/2}}.$$

Найдем стационарные решения системы (3.3), приравняв нулю ее правые части. Учитывая условие (3.2), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} e_2(1-e_2^2 - C) \sin(2g_2) &= 0, \\ (1-e_2^2)(4+e_2^2 - 5e_2^2 \cos(2g_2)) - 5(1-e_2^2 - C)(1-\cos(2g_2)) &= 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Заметим, что согласно равенству (2.7), значение константы  $C$  ограничено отрезком  $[0; 1]$ .

Из первого уравнения системы (3.4) следует, что либо  $e_2 = 0$ , либо  $1-e_2^2 - C = 0$ , либо  $\sin(2g_2) = 0$ . В случае  $e_2 = 0$  из второго уравнения системы (3.4) получаем:

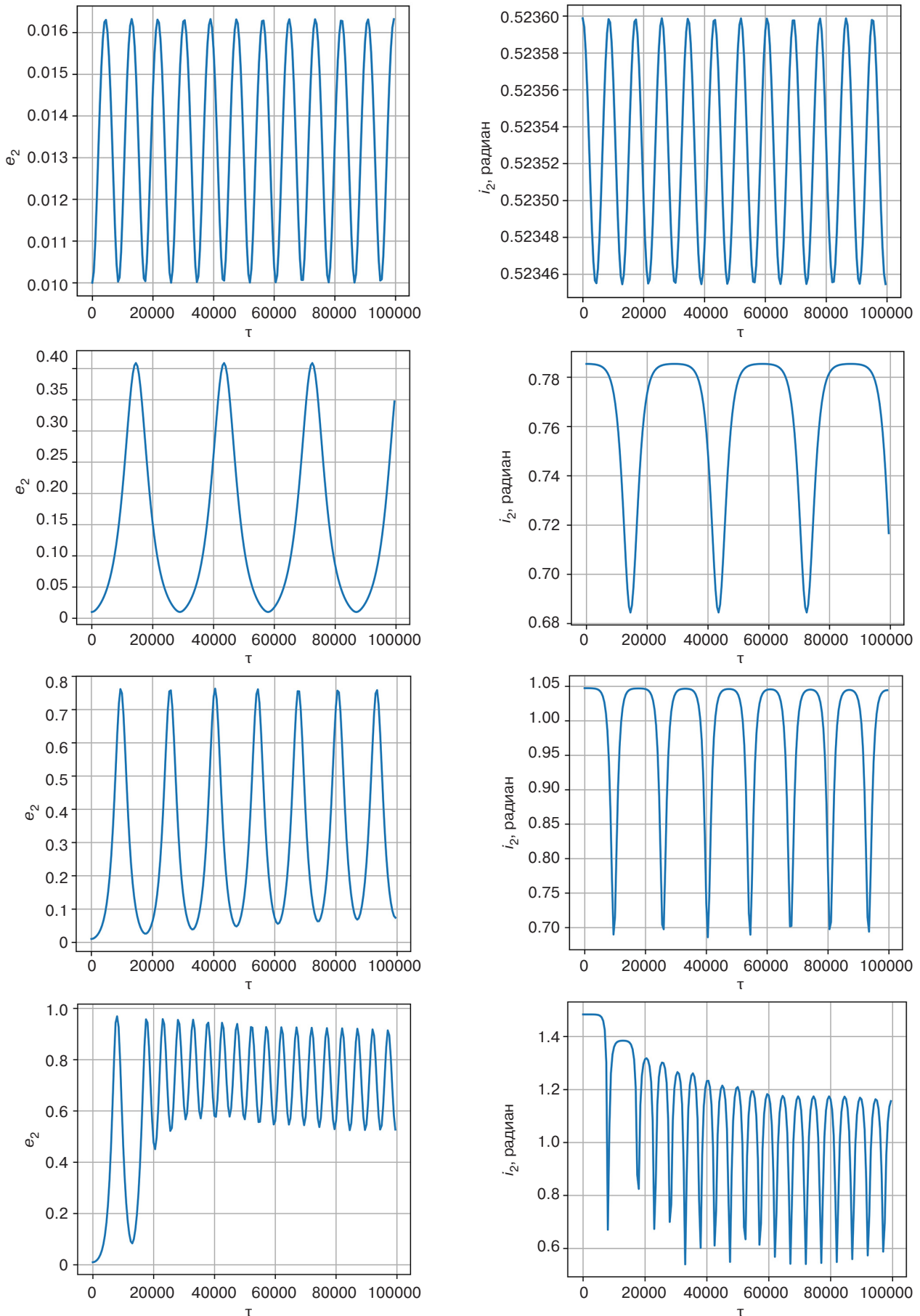
$$\cos(2g_2) = \frac{1-5C}{5(1-C)}. \quad (3.5)$$

Уравнение (3.5) имеет решение при условии  $0 \leq C \leq 0.6$ . Следовательно, при указанных значениях параметра  $C$  получим первую серию стационарных решений:

$$e_2^* = 0, g_2^* = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1-5C}{5(1-C)} + \pi m, m \in \mathbb{Z} (C \in [0; 0.6]). \quad (3.6)$$

Если  $1-e_2^2 - C = 0$ , то из второго уравнения системы (3.4) получим:

$$\cos(2g_2) = 1 + \frac{4C}{5(1-C)}.$$



**Рис. 3.** Интегральные кривые усредненной системы уравнений (2.6)  $e_2(\tau)$  и  $i_2(\tau)$  при  $i_{2_0} = \pi/6, \pi/4, \pi/3, 85\pi/180$

С учетом ограничений, наложенных на константу  $C$ , последнее равенство возможно, если  $C = 0$ . Но тогда  $e_2 = 1$ . Приходим к противоречию с (3.2).

Если  $\sin(2g_2) = 0$ , то либо  $\cos(2g_2) = 1$ , либо  $\cos(2g_2) = -1$ . Если  $\cos(2g_2) = 1$ , то из второго уравнения системы (3.4) получаем  $e_2 = 1$ , поэтому этот случай не подходит. Если  $\cos(2g_2) = -1$ , то из второго уравнения системы (3.4) следует:

$$e_2^2 = 1 - \sqrt{\frac{5C}{3}}.$$

Это равенство возможно при условии:  $0 < C \leq 0.6$ . Таким образом, получили еще одну серию стационарных решений:

$$e_2^* = \sqrt{1 - \sqrt{\frac{5C}{3}}}, \quad g_2^* = \frac{\pi}{2} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z} \quad (C \in (0; 0.6]). \quad (3.7)$$

Проведем исследование устойчивости стационарных решений на основе возмущенной системы уравнений первого порядка. Положим  $e_2 = e_2^* + x_1$ ,  $g_2 = g_2^* + x_2$ . Правые части системы уравнений (3.3) обозначим соответственно  $F_1(e_2, g_2)$ ,  $F_2(e_2, g_2)$ . Тогда возмущенная система уравнений первого приближения запишется в виде:

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \quad x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \\ a_{11} &= \frac{\partial F_1(e_2^*, g_2^*)}{\partial e_2}, \quad a_{12} = \frac{\partial F_1(e_2^*, g_2^*)}{\partial g_2}, \quad a_{21} = \frac{\partial F_2(e_2^*, g_2^*)}{\partial e_2}, \quad a_{22} = \frac{\partial F_2(e_2^*, g_2^*)}{\partial g_2}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Частные производные правых частей эволюционной системы уравнений (3.3) имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1(e_2, g_2)}{\partial e_2} &= \frac{5k_1 \sin(2g_2)}{\sqrt{1-e_2^2}} \left\{ (1-e_2^2)(1-3e_2^2-C) - e_2^2(1-e_2^2-C) \right\}, \\ \frac{\partial F_1(e_2, g_2)}{\partial g_2} &= 10k_1 e_2 \sqrt{1-e_2^2} (1-e_2^2-C) \cos(2g_2), \\ \frac{\partial F_2(e_2, g_2)}{\partial e_2} &= \frac{3e_2 F_2(e_2, g_2)}{1-e_2^2} + \frac{4k_1 e_2}{\sqrt{1-e_2^2}} (1-5\cos(2g_2)), \\ \frac{\partial F_2(e_2, g_2)}{\partial g_2} &= \frac{10k_1 \sin(2g_2)}{(1-e_2^2)^{3/2}} \left( C - (1-e_2^2)^2 \right). \end{aligned}$$

Для стационарного решения (3.6) коэффициенты  $a_{ij}$  в правых частях уравнений (3.8) имеют вид:

$$a_{11} = 5k_1 \sin(2g_2^*)(1-C), \quad a_{12} = 0, \quad a_{21} = 0, \quad a_{22} = -2a_{11}.$$

Корни характеристического уравнения вещественные, разных знаков (тип особой точки – седло). Следовательно, стационарное решение (3.6) неустойчиво.

Для стационарного решения (3.7) получим:

$$a_{11} = 0, \quad a_{12} = -10k_1 e_2^* \sqrt{1-e_2^{*2}} \left( \sqrt{\frac{5C}{3}} - C \right) < 0, \quad a_{21} = \frac{24k_1 e_2^{*2}}{\sqrt{1-e_2^{*2}}} > 0, \quad a_{22} = 0.$$

Корни характеристического уравнения  $\lambda^2 - a_{12}a_{21} = 0$  являются чисто мнимыми. Поэтому в первом приближении стационарное решение устойчиво (тип особой точки – центр).

На рис. 4–7 изображены фазовые портреты системы уравнений (3.3) при различных значениях константы  $C$ .

Можем заметить, что характер изменения эксцентриситета – колебательный. Что касается эволюции аргумента перицентра, то его изменение демонстрирует либо систему незамкнутых траекторий монотонного характера, либо систему замкнутых траекторий осциллирующего характера, окружающих положения равновесия. Согласно проведенному аналитическому исследованию при  $C > 0.6$  система уравнений (3.3) не имеет стационарных решений. Этот случай изображен на рис. 7. Здесь изменения эксцентриситета носят колебательный характер, а долгота перицентра изменяется монотонно.

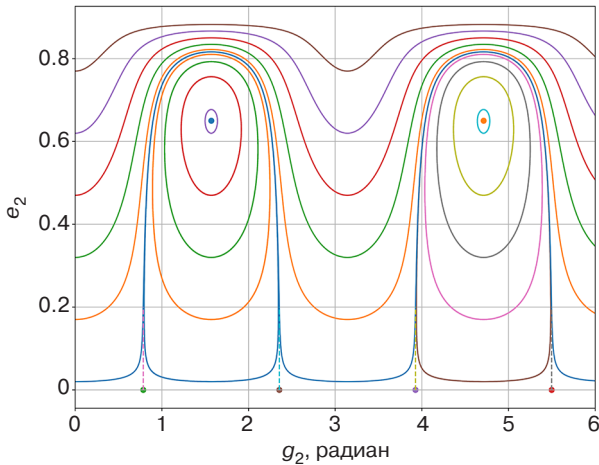


Рис. 4. Фазовый портрет системы уравнений (3.3) при  $C = 0.2$

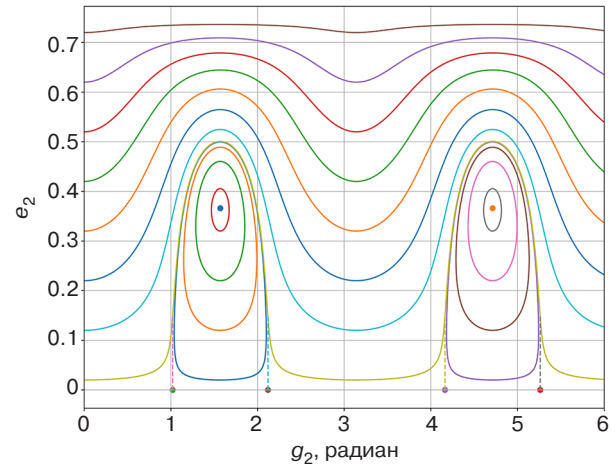


Рис. 5. Фазовый портрет системы уравнений (3.3) при  $C = 0.45$

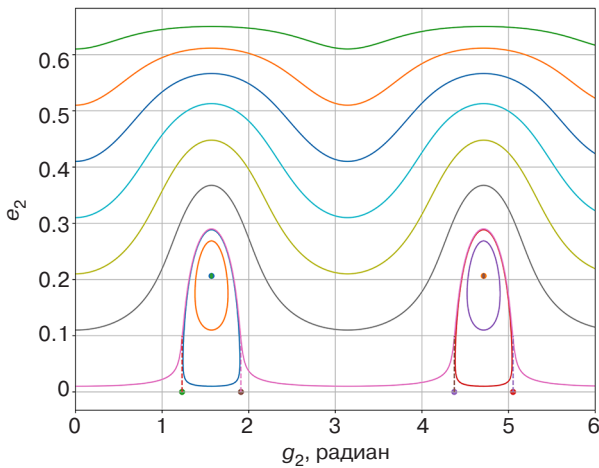


Рис. 6. Фазовый портрет системы уравнений (3.3) при  $C = 0.55$

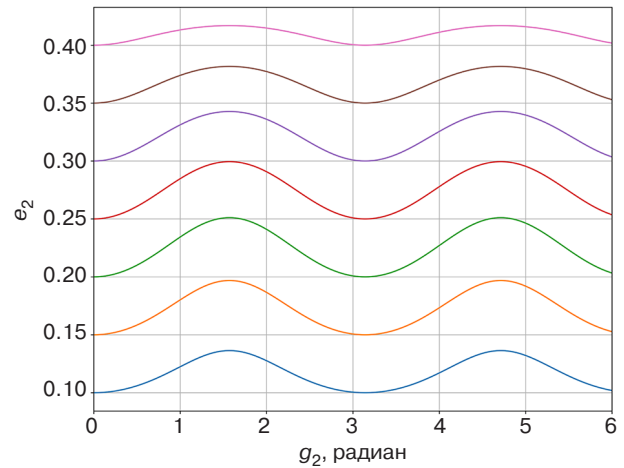


Рис. 7. Фазовый портрет системы уравнений (3.3) при  $C = 0.8$

#### 4. НЕУСРЕДНЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СПУТНИКА ДЛЯ ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ

Выведем неусредненную систему уравнений движения ИСЛ. Гамильтониан задачи имеет вид:

$$\mathcal{H} = -\frac{f^2 (m_2 + m_3)^2 m_r^3}{2L_2^2} + \mathcal{H}_1, \quad \mathcal{H}_1 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{f m_1 m_r R_2^2}{R_1^3} (3\Phi^2 - 1). \quad (4.1)$$

Слагаемое  $\mathcal{H}_1$  в выражении для гамильтониана зависит от переменных Делоне  $L_2, G_2, H_2, l_2, g_2, h_2$  через  $R_2 = R_2(L_2, G_2, l_2)$  согласно (1.8) и  $\Phi$ :

$$\Phi = \cos \psi_{12} = \cos(g_2 + \vartheta_2) \cos(g_1 + \vartheta_1 - h_2) + \cos i_2 \sin(g_2 + \vartheta_2) \sin(g_1 + \vartheta_1 - h_2). \quad (4.2)$$

Канонические уравнения движения спутника в переменных Делоне имеют вид:

$$\dot{L}_2 = -\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial l_2}, \quad \dot{G}_2 = -\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial g_2}, \quad \dot{H}_2 = -\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial h_2}, \quad \dot{l}_2 = \frac{f^2 (m_2 + m_3)^2 m_r^3}{L_2^3} + \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial L_2}, \quad \dot{g}_2 = \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial G_2}, \quad \dot{h}_2 = \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial H_2}. \quad (4.3)$$

После вычисления частных производных получим:

$$\begin{aligned} \dot{L}_2 &= \frac{fm_1 m_r R_2^2}{R_1^3} \cdot \frac{(1+e_2 \cos \vartheta_2)}{(1-e_2^2)^{3/2}} \left\{ (3\Phi^2 - 1)e_2 \sin \vartheta_2 + 3(1+e_2 \cos \vartheta_2)\Phi\Phi_2 \right\}, \\ \dot{G}_2 &= \frac{3fm_1 m_r R_2^2}{R_1^3} \Phi\Phi_2, \quad \dot{H}_2 = \frac{3fm_1 m_r R_2^2}{R_1^3} \Phi\Phi_3, \\ \dot{l}_2 &= n_2 - \frac{fm_1 m_r R_2^2}{R_1^3 L_2 e_2} \left\{ (2e_2 - \cos \vartheta_2 - e_2 \cos^2 \vartheta_2)(3\Phi^2 - 1) + 3\Phi\Phi_2 \sin \vartheta_2 (2 + e_2 \cos \vartheta_2) \right\}, \\ \dot{g}_2 &= \frac{fm_1 m_r R_2^2}{R_1^3 e_2 G_2} \left\{ (1+e_2 \cos \vartheta_2) \cos \vartheta_2 (1-3\Phi^2) + 3\Phi\Phi_2 \sin \vartheta_2 (2 + e_2 \cos \vartheta_2) + \right. \\ &\quad \left. + 3\Phi e_2 \cos i_2 \sin(g_2 + \vartheta_2) \sin(g_1 + \vartheta_1 - h_2) \right\}, \\ \dot{h}_2 &= -\frac{3fm_1 m_r R_2^2}{R_1^3 G_2} \Phi \sin(g_2 + \vartheta_2) \sin(g_1 + \vartheta_1 - h_2). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Здесь

$$\begin{aligned} n_2 &= \frac{f^2 (m_2 + m_3)^2 m_r^3}{L_2^3}, \\ \Phi_2 &= \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta_2} = -\sin(g_2 + \vartheta_2) \cos(g_1 + \vartheta_1 - h_2) + \cos i_2 \cos(g_2 + \vartheta_2) \sin(g_1 + \vartheta_1 - h_2), \\ \Phi_3 &= \frac{\partial \Phi}{\partial h_2} = \cos(g_2 + \vartheta_2) \sin(g_1 + \vartheta_1 - h_2) - \cos i_2 \sin(g_2 + \vartheta_2) \cos(g_1 + \vartheta_1 - h_2). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Таким образом, получена система уравнения (3.4) движения спутника шестого порядка в переменных Делоне. Первое уравнение с  $\dot{L}_2$  отвечает за изменение общего орбитального действия по времени, второе с  $\dot{G}_2$  – за изменение полного углового момента по времени, третье с  $\dot{H}_2$  – за изменение азимутального углового момента по времени. Остальные три уравнения отвечают за изменения элементов орбиты: средней аномалии  $l_2$ , аргумента перигентра  $g_2$  и долготы восходящего узла  $h_2$ . Точка  $C_0$  движется по невозмущенной кеплеровской эллиптической орбите в плоскости  $OXY$ , поэтому  $R_1, \vartheta_1$  в (4.4), (4.5) являются заданными функциями времени согласно (1.10), а долгота перигентра  $g_1$ , большая полуось  $a_1$  и эксцентриситет  $e_1$  являются постоянными величинами.

Осуществим переход к безразмерным переменным  $n_{20}, e_2, i_2, g_2, \vartheta_2, h_2$ , где

$$n_{20} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{f^2 (m_2 + m_3)^2 m_r^3}{L_2^3 n_1}, \quad n_1 = \sqrt{\frac{fm_1}{a_1^3}}.$$

Кроме того, перейдем к безразмерному времени  $\tau = n_1 t / (2\pi)$  – числу оборотов барицентра  $C_0$  относительно точки  $O$ . Проведем преобразование правых частей уравнений системы (4.4), учитывая (1.10) и опираясь на известные соотношения для переменных Делоне:

$$\begin{aligned} L_2 &= m_r \sqrt{f(m_2 + m_3) a_2}, \quad G_2 = m_r \sqrt{f(m_2 + m_3) a_2 (1 - e_2^2)}, \\ H_2 &= m_r \sqrt{f(m_2 + m_3) a_2 (1 - e_2^2) \cos i_2}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

В результате получим:

$$n'_{20} = -\frac{6\pi \sqrt{1 - e_2^2} (1 + e_1 \cos \vartheta_1)^3}{(1 - e_1^2)^3 (1 + e_2 \cos \vartheta_2)} \left\{ (3\Phi^2 - 1)e_2 \sin \vartheta_2 + 3(1 + e_2 \cos \vartheta_2)\Phi\Phi_2 \right\},$$

$$\begin{aligned}
 e_2' &= \frac{2\pi\sqrt{(1-e_2^2)^3}(1+e_1\cos\vartheta_1)^3}{(1-e_1^2)^3(1+e_2\cos\vartheta_2)^2 n_{20}} \left\{ (3\Phi^2 - 1)\sin\vartheta_2(1+e_2\cos\vartheta_2) + 3\Phi\Phi_2(2\cos\vartheta_2 + e_2\cos^2\vartheta_2 + e_2) \right\}, \\
 i_2' &= -\frac{6\pi\sqrt{(1-e_2^2)^3}(1+e_1\cos\vartheta_1)^3}{(1-e_1^2)^3(1+e_2\cos\vartheta_2)^2 n_{20}} \Phi \sin i_2 \cos(g_2 + \vartheta_2) \sin(g_1 + \vartheta_1 - h_2), \\
 g_2' &= \frac{2\pi\sqrt{(1-e_2^2)^3}(1+e_1\cos\vartheta_1)^3}{(1-e_1^2)^3(1+e_2\cos\vartheta_2)^2 e_2 n_{20}} \left\{ (1+e_2\cos\vartheta_2)\cos\vartheta_2(1-3\Phi^2) + 3\Phi\Phi_2\sin\vartheta_2(2+e_2\cos\vartheta_2) + \right. \\
 &\quad \left. + 3\Phi e_2 \cos i_2 \sin(g_2 + \vartheta_2) \sin(g_1 + \vartheta_1 - h_2) \right\}, \\
 \vartheta_2' &= \frac{2\pi(1+e_2\cos\vartheta_2)^2 n_{20}}{(1-e_2^2)^{3/2}} + \frac{2\pi\sqrt{(1-e_2^2)^3}(1+e_1\cos\vartheta_1)^3}{(1-e_1^2)^3(1+e_2\cos\vartheta_2)^2 e_2 n_{20}} \times \\
 &\quad \times \left\{ (1+e_2\cos\vartheta_2)\cos\vartheta_2(3\Phi^2 - 1) - 3\Phi\Phi_2\sin\vartheta_2(2+e_2\cos\vartheta_2) \right\}, \\
 h_2' &= -\frac{6\pi\sqrt{(1-e_2^2)^3}(1+e_1\cos\vartheta_1)^3}{(1-e_1^2)^3(1+e_2\cos\vartheta_2)^2 n_{20}} \Phi \sin(g_2 + \vartheta_2) \sin(g_1 + \vartheta_1 - h_2), \\
 \vartheta_1' &= \frac{2\pi(1+e_1\cos\vartheta_1)^2}{(1-e_1^2)^{3/2}}.
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Проведем численное интегрирование усредненной и неусредненной систем уравнений (2.6), (4.7) и сравним полученные численные результаты с современными временными изменениями эксцентриситета и наклона, представленными в [12]. В качестве начальных значений, следуя [12], для усредненной системы уравнений (2.6) возьмем

$$e_2(0) = 0.61, i_2(0) = 55.9^\circ = 55.9\pi/180 \text{ рад}, g_2(0) = \pi/2, h_2(0) = 0. \tag{4.8}$$

В качестве безразмерного времени в системе (2.6) используется  $\tau = n_2 t$ ,  $n_2 = \sqrt{f(m_2 + m_3)a_2^{-3}}$ , поэтому для рассмотрения двойного периода  $2T = 2.5$  года или  $2.5 \cdot 365$  дней необходимо задать временной диапазон  $\tau = \frac{2.5 \cdot 365}{0.0874} \cong 10440$ . На рис. 8 изображены интегральные кривые усредненной системы уравнений (2.6).

Получаем следующие предсказанные отклонения средних значений элементов:  $\Delta e_2 \sim 0.08$ ,  $\Delta i_2 \sim 3.7^\circ$  (0.07 рад), что является близким совпадением к результатам из [12], отражая таким образом основной характер изменений элементов, но упуская короткопериодические гравитационные эффекты.

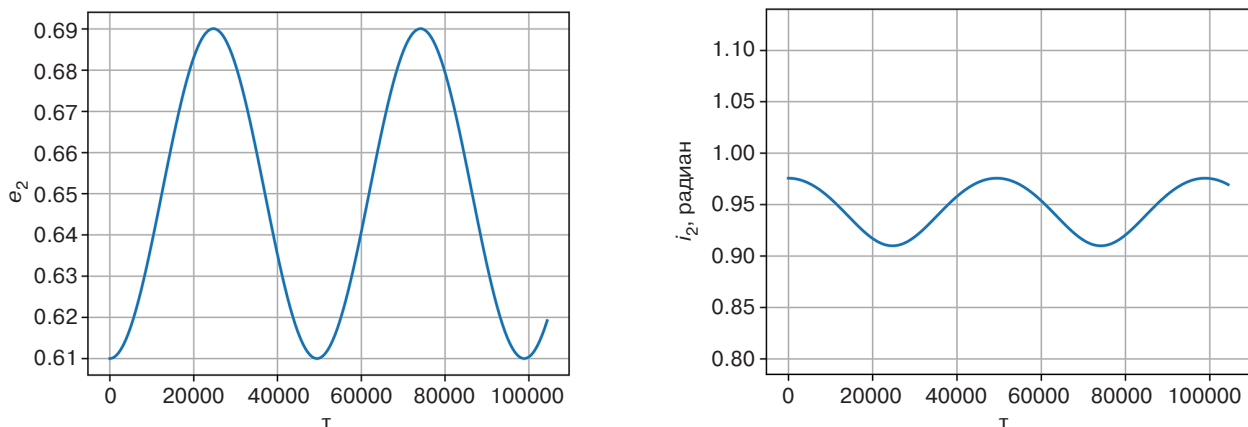
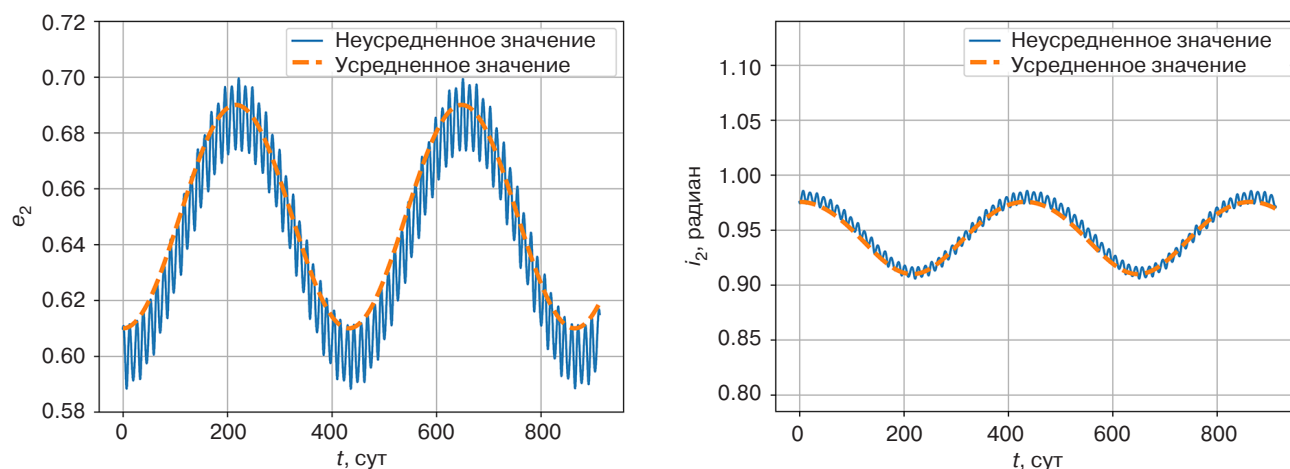


Рис. 8. Интегральные кривые  $e_2(\tau)$  и  $i_2(\tau)$  усредненной системы уравнений

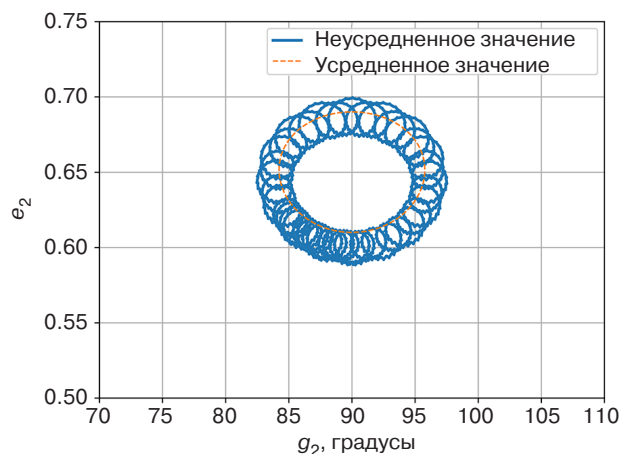
Далее проинтегрируем неусредненную систему (4.7). Для этого необходимо задать начальные значения эксцентриситета, большой полуоси, долготы перицентра орбиты Луны и начальное значение ее истинной аномалии. Данные собраны при помощи утилиты *Horizons System*<sup>7</sup> со следующими параметрами: целевой объект – Луна, координатный центр – Земля, время – 2009-07-15 01:00:00. Так как в [12] даны только 4 начальных значения (4.8), оставшиеся недостающие значения истинной и средней аномалии также собраны при помощи *Horizons System* для функционирующего на тот момент ИСЛ: LRO 2009-031A<sup>8</sup>. В качестве безразмерного времени в системе (4.7) используется  $\tau = n_1 t / (2\pi)$ , поэтому для рассмотрения двойного периода  $2T = 2.5$  года или  $2.5 \cdot 365$  дней необходимо задать временной диапазон в  $\tau^* = \frac{2.5 \cdot 365}{27.0632} \cong 34$ .

На рис. 9 изображены интегральные кривые  $e_2(t)$  и  $i_2(t)$  усредненной и неусредненной систем уравнений. На рис. 10 построены интегральные кривые систем уравнений (2.6) и (4.7) с теми же начальными условиями в плоскости  $(g_2, e_2)$ , которые имеют общее сходство с аналогичными кривыми, представленными в [12]. Наблюдается характерное устойчивое колебательное движение, долгота перицентра зависит от эксцентриситета в соответствии с периодическим законом. Отмечается изменение эксцентриситета  $e_2$  в пределах от 0.61 до 0.69, что является относительно схожим с  $\Delta e \sim 0.09$  в работе [12].



**Рис. 9.** Интегральные кривые  $e_2(t)$  и  $i_2(t)$  усредненной и неусредненной систем уравнений орбитального движения спутника

На полученных графиках также демонстрируется периодическое поведение и основной период, как и у усредненной модели, но с наложенными на него высокочастотными колебаниями. Общая амплитуда колебаний соответствует амплитуде усредненной линии, но мгновенные значения эксцентриситета и наклона отклоняются от усредненного значения. Усредненная система представляет собой «сглаженную» версию неусредненной системы. Интегральные кривые неусредненной системы уравнений содержат больше деталей и информации о кратковременных изменениях элементов орбиты. Усредненная система может быть полезна для долгосрочного прогнозирования и анализа общих тенденций. Неусредненная система необходима для точного моделирования и предсказания поведения спутника на коротких временных интервалах. Неусредненная система, хоть и сложнее для анализа, предоставляет более полную картину поведения спутника.



**Рис. 10.** Интегральные кривые усредненной и неусредненной систем уравнений орбитального движения спутника в плоскости  $(g_2, e_2)$

<sup>7</sup> <https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons/#api>. Дата обращения 04.02.2025. / Accessed February 04, 2025.

<sup>8</sup> Lunar Reconnaissance Orbiter – роботизированный космический корабль, вращающийся вокруг Луны. Запущен 18 июня 2009 г. <https://www.n2yo.com/satellite/?s=35315>. Дата обращения 04.02.2025. [Lunar Reconnaissance Orbiter is a robotic spacecraft orbiting the Moon. Launched on June 18, 2009. <https://www.n2yo.com/satellite/?s=35315>. Accessed February 04, 2025.]

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведенного исследования выведены усредненная и неусредненная системы уравнений движения ИСЛ с учетом возмущения, вызванного гравитационным полем Земли, на основе системы уравнений движения спутника в канонических переменных Делоне, позволяющие проследить изменение его орбитальных параметров во времени.

Найдены стационарные решения усредненной системы уравнений, проведено исследование их устойчивости. Получены условия существования «замороженных» орбит, у которых изменения наклона, эксцентриситета, долготы перицентра от восходящего узла сведены к минимуму. Построены фазовые портреты для усредненной системы уравнений при различных значениях параметра задачи, зависящего от начальных значений наклона и эксцентриситета орбиты. Построены интегральные кривые неусредненной системы уравнений.

Стоит отметить, что исследование учитывает влияние основного фактора на орбиту движения спутника – гравитационного внешнего возмущения. Дальнейшее изучение этого вопроса может позволить более точно описать движение спутников вокруг небесных тел. Исследование имеет практическое

значение для разработки и планирования космических миссий, связанных с исследованием Луны и ее окрестностей. Полученные уравнения могут быть использованы для более точного прогнозирования орбитального движения спутников и определения оптимальных параметров их орбит.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Работа проведена в рамках инициативной научно-исследовательской работы кафедры высшей математики Института искусственного интеллекта РТУ МИРЭА (№ 192-ИИИ(ВМ)).

## ACKNOWLEDGMENTS

The work was carried out as part of the initiative research work of the Department of Higher Mathematics of the Institute of Artificial Intelligence at RTU MIREA (No. 192-III(VM)).

### Вклад авторов

Все авторы в равной степени внесли свой вклад в исследовательскую работу.

### Authors' contribution

All authors contributed equally to the research work.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Woodard M., Folta D.C., Woodfork D.W. ARTEMIS The First Mission to the Lunar Libration Orbits. In: *Conference: Internation Symposium on Space Flight Dynamics*. 2009. URL: <https://www.researchgate.net/publication/235990349>. Дата обращения 04.02.2025. / Accessed February 04, 2025.
2. Li C., Hu H., Yang M.-F., et al. Characteristics of the lunar samples returned by the Chang'E-5 mission. *Natl. Sci. Rev.* 2022;9(2):nwab188. <https://doi.org/10.1093/nsr/nwab188>
3. Li C., Hu H., Yang M.-F., et al. Nature of the lunar far-side samples returned by the Chang'E-6 mission. *Natl. Sci. Rev.* 2024;11(11):nwae328. <https://doi.org/10.1093/nsr/nwae328>
4. Mathavaraj S., Negi K. Chandrayaan-3 Trajectory Design: Injection to Successful Landing. *J. Spacecraft Rockets*. 2025;62(1):159–166. <https://doi.org/10.2514/1.A35980>
5. Kanu N.J., Gupta E., Verma N.J. An insight into India's Moon mission – Chandrayan-3: The first nation to land on the southernmost polar region of the Moon. *Planet. Space Sci.* 2024;242(5):105864. <https://doi.org/10.1016/j.pss.2024.105864>
6. Зеленый Л.М., Митрофанов И.Г., Третьяков В.И., Литвак М.Л., Калашников Д.В., Суров А.В., Прохоров В.Г. Научная программа исследований космического аппарата «Луна-25». В кн.: *Автоматический космический аппарат нового поколения «Луна-25» – от исследования к освоению лунных ресурсов*: в 2 т. Химки: Научно-производственное объединение им. С.А. Лавочкина; 2023. С. 8–28. <https://elibrary.ru/lggmqz>
7. Лидов М.Л. Эволюция орбит искусственных спутников планет под действием гравитационных возмущений внешних тел. *Искусственные спутники Земли*. 1961;8:5–45.
8. Kozai Y. Secular perturbations of asteroids with high inclination and eccentricity. *The Astronomical Journal*. 1962;67(9):591–598.
9. Вашковьяк М.А., Тесленко Н.М. Уточненная модель эволюции далеких спутниковых орбит. *Письма в Астрономический журнал*. 2009;35(12):934–950. <https://elibrary.ru/kygisd>
10. Вашковьяк М.А. Конструктивно-аналитическое решение эволюционной задачи Хилла. *Астрономический вестник*. 2010;44(6):560–573. <https://elibrary.ru/nbsuhf>
11. Лидов М.Л. О приближенном анализе эволюции орбит искусственных спутников. В кн.: *Проблемы движения искусственных небесных тел*. М.: Изд-во АН СССР; 1963. С. 119–134.
12. Ely T.A. Stable Constellations of Frozen Elliptical Inclined Lunar Orbits. *J. Astronaut. Sci.* 2005;53(3):301–316. <https://doi.org/10.1007/BF03546355>

13. Goossens S., Sabaka T.J., Wieczorek M.A., Neumann G.A., Mazarico E., Lemoine F.G., et al. High-resolution gravity field models from GRAIL data and implications for models of the density structure of the Moon's crust. *Journal of Geophysical Research: Planets (JGR Planets)*. 2020;125(2):e2019JE006086. <https://doi.org/10.1029/2019JE006086>
14. Folta D.C., Pavlak T.A., Haapala A.F., Howell K.C., Woodard M.A. Earth–Moon libration point orbit stationkeeping: Theory, modeling, and operations. *Acta Astronautica*. 2013;94(1):421–433. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2013.01.022>
15. Jadala G., Meedinti G.N., Delhibabu R. Satellite Orbit Prediction Using a Machine Learning Approach. *ICAI Workshops*. 2022. P. 28–46.
16. Ovchinnikov M., Shirobokov M., Trofimov S. Lunar Satellite Constellations in Frozen Low Orbits. *Aerospace*. 2024;11(11):918. <https://doi.org/10.3390/aerospace11110918>
17. Аксенов Е.П. *Специальные функции в небесной механике*. М.: Наука; 1986, 320 с.
18. Дубошин Г.Н. *Небесная механика. Основные задачи и методы*. М.: Наука; 1975, 800 с.
19. Мюррей К., Дермотт С. *Динамика Солнечной системы*: пер. с англ. М.: Физматлит; 2010, 588 с. ISBN 978-5-9221-1121-8
20. Вильке В.Г. *Механика систем материальных точек и твердых тел*. М.: Физматлит; 2013, 268 с. ISBN 978-5-9221-1481-3

## REFERENCES

1. Woodard M., Folta D.C., Woodfork D.W. ARTEMIS The First Mission to the Lunar Libration Orbits. In: *Conference: International Symposium on Space Flight Dynamics*. 2009. Available from URL: <https://www.researchgate.net/publication/235990349>. Accessed February 04, 2025.
2. Li C., Hu H., Yang M.-F., et al. Characteristics of the lunar samples returned by the Chang'E-5 mission. *Natl. Sci. Rev.* 2022;9(2):nwab188. <https://doi.org/10.1093/nsr/nwab188>
3. Li C., Hu H., Yang M.-F., et al. Nature of the lunar far-side samples returned by the Chang'E-6 mission. *Natl. Sci. Rev.* 2024;11(11):nwae328. <https://doi.org/10.1093/nsr/nwae328>
4. Mathavaraj S., Negi K. Chandrayaan-3 Trajectory Design: Injection to Successful Landing. *J. Spacecraft Rockets*. 2025;62(1):159–166. <https://doi.org/10.2514/1.A35980>
5. Kanu N.J., Gupta E., Verma N.J. An insight into India's Moon mission – Chandrayan-3: The first nation to land on the southernmost polar region of the Moon. *Planet. Space Sci.* 2024;242(5):105864. <https://doi.org/10.1016/j.pss.2024.105864>
6. Zelenyi L.M., Mitrofanov I.G., Tret'yakov V.I., Litvak M.L., Kalashnikov D.V., Surov A.V., Prokhorov V.G. Scientific program for the study of the spacecraft “Luna-25”. In: *Automatic Spacecraft of the New Generation “Luna-25” – from Research to the Development of Lunar Resources*: in 2 v. Khimki; 2023. P. 8–28 (in Russ.). <https://elibrary.ru/lggmqz>
7. Lidov M.L. The evolution of orbits of artificial satellites of planets under the action of gravitational perturbations of external bodies. *Planet. Space Sci.* 1962;9(10):719–759. [https://doi.org/10.1016/0032-0633\(62\)90129-0](https://doi.org/10.1016/0032-0633(62)90129-0)  
[Original Russian Text: Lidov M.L. The evolution of orbits of artificial satellites of planets under the action of gravitational perturbations of external bodies. *Iskusstvennye Sputniki Zemli*. 1961;8:5–45 (in Russ.).]
8. Kozai Y. Secular perturbations of asteroids with high inclination and eccentricity. *The Astronomical Journal*. 1962;67(9): 591–598.
9. Vashkov'yak M.A., Teslenko N.M. Refined model for the evolution of distant satellite orbits. *Astron. Lett.* 2009;35(12): 850–865. <https://doi.org/10.1134/S1063773709120056>  
[Original Russian Text: Vashkov'yak M.A., Teslenko N.M. Refined model for the evolution of distant satellite orbits. *Pis'ma v Astronomicheskii zhurnal*. 2009;35(12):934–950 (in Russ.). <https://elibrary.ru/kygisd> ]
10. Vashkov'yak M.A. Constructive analytical solution of the evolution hill problem. *Sol. Syst. Res.* 2010;44(6):527–540. <https://doi.org/10.1134/S0038094610060067>  
[Original Russian Text: Vashkov'yak M.A. Constructive analytical solution of the evolution hill problem. *Astronomicheskii Vestnik*. 2010;44(6):560–573 (in Russ.). <https://elibrary.ru/nbsuhf> ]
11. Lidov M.L. On the approximate analysis of the evolution of artificial satellite orbits. In: *Problemy dvizheniya iskusstvennykh nebesnykh tel (Problems of the Motion of Artificial Celestial Bodies)*. Moscow: USSR Academy of Sciences; 1963. P. 119–134 (in Russ.).
12. Ely T.A. Stable Constellations of Frozen Elliptical Inclined Lunar Orbits. *J. Astronaut. Sci.* 2005;53(3):301–316. <https://doi.org/10.1007/BF03546355>
13. Goossens S., Sabaka T.J., Wieczorek M.A., Neumann G.A., Mazarico E., Lemoine F.G., et al. High-resolution gravity field models from GRAIL data and implications for models of the density structure of the Moon's crust. *Journal of Geophysical Research: Planets (JGR Planets)*. 2020;125(2):e2019JE006086. <https://doi.org/10.1029/2019JE006086>
14. Folta D.C., Pavlak T.A., Haapala A.F., Howell K.C., Woodard M.A. Earth–Moon libration point orbit stationkeeping: Theory, modeling, and operations. *Acta Astronautica*. 2013;94(1):421–433. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2013.01.022>
15. Jadala G., Meedinti G.N., Delhibabu R. Satellite Orbit Prediction Using a Machine Learning Approach. *ICAI Workshops*. 2022. P. 28–46.
16. Ovchinnikov M., Shirobokov M., Trofimov S. Lunar Satellite Constellations in Frozen Low Orbits. *Aerospace*. 2024;11(11):918. <https://doi.org/10.3390/aerospace11110918>
17. Aksekov E.P. *Spetsial'nye funktsii v nebesnoi mekhanike (Special Functions in Celestial Mechanics)*. Moscow: Nauka; 1986, 320 p. (In Russ.).
18. Duboshin G.N. *Nebesnaya mekhanika. Osnovnye zadachi i metody (Celestial Mechanics. Basic Problems and Methods)*. Moscow: Nauka; 1975, 800 p. (In Russ.).

19. Murray C., Dermott S. *Dinamika Solnechnoi sistemy (Solar System Dynamics)*; transl. from Engl. Moscow: Fizmatlit; 2010, 588 p. (In Russ.). ISBN 978-5-9221-1121-8  
[Murray C.D., Dermott S.F. *Solar System Dynamics*. Cambridge University Press; 1999, 592 p.]
20. Vil'ke V.G. *Mekhanika sistem material'nykh toчек i tverdykh tel (Mechanics of Systems of Material Points and Rigid Bodies)*. Moscow: Fizmatlit; 2013, 268 p. (In Russ.). ISBN 978-5-9221-1481-3

#### Об авторах

**Мешкова Ольга Вячеславовна**, магистрант, кафедра высшей математики, Институт искусственного интеллекта, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: oxn.lar5@yandex.ru . <https://orcid.org/0009-0002-2917-1025>

**Шатина Альбина Викторовна**, д.ф.-м.н., доцент, заведующая кафедрой высшей математики, Институт искусственного интеллекта, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: shatina\_av@mail.ru. Scopus Author ID 6506958326, SPIN-код РИНЦ 8714-6450, <https://orcid.org/0000-0001-5016-5899>

#### About the Authors

**Olga V. Meshkova**, Master Student, Department of Higher Mathematics, Institute of Artificial Intelligence, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: oxn.lar5@yandex.ru. <https://orcid.org/0009-0002-2917-1025>

**Albina V. Shatina**, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Docent, Head of the Department of Higher Mathematics, Institute of Artificial Intelligence, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: shatina\_av@mail.ru. Scopus Author ID 6506958326, RSCI SPIN-code 8714-6450, <https://orcid.org/0000-0001-5016-5899>