

Математическое моделирование
Mathematical modeling

УДК 621.372.8
<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2026-14-1-91-102>
EDN KVXGWT



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Моделирование поверхностных волн в фотонных кристаллических структурах с профилем показателя преломления, убывающим с расстоянием от поверхности

С.Е. Савотченко[®]

МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, 119454 Россия
[®] Автор для переписки, e-mail: savotchenkose@mail.ru

• Поступила: 27.11.2024 • Доработана: 30.05.2025 • Принята к опубликованию: 18.11.2025

Резюме

Цели. Выявление закономерностей распространения поверхностных волн в неоднородных и нелинейных кристаллических структурах на основе математических моделей является важной фундаментальной задачей в физике конденсированного состояния, относящейся к волноводной оптике. При этом особой важностью обладают такие модели волноводных структур, в которых удается найти точное аналитическое решение. Цель работы – теоретическое изучение поверхностных электрических волн поперечной поляризации, распространяющихся вдоль фотонного кристалла с определенной формой профиля показателя преломления.

Методы. Применены методы математической физики, анализа, дифференциальных уравнений и теории специальных функций, а также физические модели волноводной оптики.

Результаты. Для описания пространственно неоднородного распределения оптических свойств фотонного кристалла предложен обобщенный гиперболический профиль диэлектрической проницаемости, который обладает широкими возможностями вариации формы, что позволяет его использовать для широкого круга задач, не ограничиваясь волноводной оптикой. Найдено точное аналитическое решение волнового уравнения для выбранного профиля диэлектрической проницаемости, выражаемое через функцию Уиттекера. Рассмотрены частые случаи обобщенного профиля, для которого указаны точные аналитические решения, выражаемые через функции Уиттекера и Макдональда. Описаны поверхностные поперечные электрические волны, поле в которых локализовано вблизи поверхности фотонного кристалла и убывает при удалении от нее. Полученное решение также описывает волноводные моды, в которых поле убывает при удалении от поверхности фотонного кристалла с осцилляциями. Выявлены новые особенности локализации поверхностных волн, обусловленные изменением параметров обобщенного гиперболического профиля, моделирующего зависимость диэлектрической проницаемости. Установлено, что в линейной поверхностной волне максимум интенсивности расположен в фотонном кристалле.

Выводы. Полученные результаты описания характеристик поверхностных волн расширяют теоретические представления волноводной оптики. Они могут быть полезны для прогнозирования оптических свойств различных фотонных кристаллических структур, а также при проектировании различных волноводных структур с требуемыми дисперсионно-оптическими характеристиками.

Ключевые слова: неоднородные оптические среды, фотонный кристалл, поверхностные волны, управляемые волны, волноводные моды

Для цитирования: Савотченко С.Е. Моделирование поверхностных волн в фотонных кристаллических структурах с профилем показателя преломления, убывающим с расстоянием от поверхности. *Russian Technological Journal*. 2026;14(1):91–102. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2026-14-1-91-102>, <https://www.elibrary.ru/KVXGWT>

Прозрачность финансовой деятельности: Автор не имеет финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

RESEARCH ARTICLE

Modeling of surface waves in photonic crystal structures with a refractive index profile decreasing with distance from the surface

Sergey E. Savotchenko [®]

MIREA – Russian Technological University, Moscow, 119454 Russia

[®] Corresponding author, e-mail: savotchenkose@mail.ru

• Submitted: 27.11.2024 • Revised: 30.05.2025 • Accepted: 18.11.2025

Abstract

Objectives. Identification of the propagation patterns of surface waves in inhomogeneous and nonlinear crystal structures using mathematical models is an important fundamental problem in condensed matter physics, specifically waveguide optics. Models of waveguide structures used to establish an exact analytical solution are of particular significance. The aim of this work is to carry out a theoretical study of transversely polarized surface electric waves propagating along a photonic crystal with a certain refractive index profile.

Methods. The methods of mathematical physics, analysis, differential equations, and theory of special functions, as well as physical models of waveguide optics, were used in this study.

Results. A generalized hyperbolic permittivity profile was proposed to describe the spatially inhomogeneous distribution of the optical properties of a photonic crystal. This profile has a wide range of possibilities for varying its shape, allowing it to be used for a wide range of problems not limited to waveguide optics. An exact analytical solution of the wave equation with the selected permittivity profile was found in terms of the Whittaker function. Frequent cases of the generalized profile for which exact analytical solutions were indicated were also considered. These are expressed through the Whittaker and Macdonald functions. The study also describes surface transverse electric waves, where the field is localized near the surface of the photonic crystal and decreases with distance from it. The solution obtained also describes waveguide modes in which the field decreases with distance from the surface of the photonic crystal with oscillations. New features of surface wave localization were established. These were caused by a change in the parameters of the generalized hyperbolic profile modeling the dependence of the permittivity. It was also established that the maximum intensity of the surface wave is located in the photonic crystal.

Conclusions. The results of the description of the characteristics of surface waves obtained expand the theoretical concepts of waveguide optics. They can be useful in predicting the optical properties of various photonic crystal structures, as well as in designing various waveguide structures with the required dispersion-optical characteristics.

Keywords: inhomogeneous optical media, photonic crystal, surface waves, guided waves, waveguide modes

For citation: Savotchenko S.E. Modeling of surface waves in photonic crystal structures with a refractive index profile decreasing with distance from the surface. *Russian Technological Journal*. 2026;14(1):91–102. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2026-14-1-91-102>, <https://www.elibrary.ru/KVXGWT>

Financial disclosure: The author has no financial or proprietary interest in any material or method mentioned.

The author declares no conflicts of interest.

ВВЕДЕНИЕ

Изучение свойств поверхностных волн в кристаллах, в т.ч. и фотонных гетероструктурах, на основе математического моделирования является важной фундаментальной задачей [1]. При этом особую роль играют такие модели волноводных структур, в рамках которых удастся найти точное аналитическое решение.

Выбор формы профиля показателя преломления (или диэлектрической проницаемости), моделирующего оптическую неоднородность, при описании реальных кристаллов производится на основе наилучшего согласия с экспериментальными данными. К примеру, в [2] исследована фотонная запрещенная зона в одномерных экспоненциально градиентных фотонных кристаллах, где использован экспоненциальный профиль для описания изменения показателя преломления между начальной и конечной границами градиентного слоя. В [3] свойства новой структуры фотонно-кристаллического резонатора также описываются с использованием экспоненциального профиля показателя преломления. Простой гиперболический профиль показателя преломления в виде $n \sim 1/x$, характеризующий его снижение с расстоянием x от поверхности контакта, использован при описании фотонных запрещенных зон [4, 5] и в новом подходе для достижения улучшенных характеристик чувствительности фотонного кристалла [6].

Проблема нахождения точных решений волнового уравнения в нелинейных и неоднородных средах связана с выбором профиля показателя преломления (диэлектрической проницаемости) в неоднородных средах [7]. Несмотря на то, что известно много точно интегрируемых профилей показателя преломления [8–11], остается значительное число задач, связанных с нахождением явных аналитических выражений для поверхностных волн, которые описываются решениями не отдельных уравнений, а решениями краевых задач систем уравнений в определенных областях, удовлетворяющих условиям сопряжения на их границах [12–14].

В данной работе представлены результаты теоретического изучения поверхностных волн, а точнее электрических волн поперечной поляризации, распространяющихся вдоль фотонного кристалла

с определенной формой профиля показателя преломления. Для такой пространственной зависимости, представляющей собой обобщение гиперболического профиля [15], получено новое точное аналитическое решение. С его помощью описаны новые типы линейных и нелинейных поверхностных волн. Линейные поверхностные волны для простого гиперболического профиля диэлектрической проницаемости $\epsilon \sim 1/x$ были описаны недавно в [16]. Нелинейные поверхностные волны, распространяющиеся вдоль контакта неоднородной среды с таким профилем с нелинейной средой со ступенчатой нелинейностью, описаны в [17]. В представленной работе приведены результаты изучения поверхностных волн в случае ступенчатой нелинейности при использовании обобщенного гиперболического профиля диэлектрической проницаемости. Такой профиль обладает широкими возможностями вариации формы, что позволяет его использовать для широкого круга задач, не ограничиваясь волноводной оптикой [18].

1. МОДЕЛЬ ФОТОННОЙ КРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ С ПЕРЕМЕННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ ПРЕЛОМЛЕНИЯ

Рассмотрим фотонный кристалл, в котором значение показателя преломления снижается при удалении от его поверхности. Такой убывающий профиль можно получить путем инжестирования ионов специально подобранных примесей [5]. Технологии ионной имплантации хорошо развиты и позволяют формировать такое распределение ионов, которое будет обеспечивать требуемый пространственный профиль показателя преломления [2–6]. В данной работе будем рассматривать модели гетероструктур из немагнитных материалов, состоящих из фотонного кристалла, контактирующего со средой с однородными оптическими характеристиками.

Выберем ось Ox перпендикулярно поверхности фотонного кристалла, которая считается плоской (плоскость $x = 0$ и оси Oy и Oz в ней расположены). Пространственное распределение оптических свойств рассматриваемой фотонной гетероструктуры вдоль поверхности будем считать однородным, а их изменение формируется только в поперечном к поверхности направлении.

Будем рассматривать только поперечные монохроматические волны, распространяющиеся вдоль поверхности кристалла, с компонентой напряженности электрического поля:

$$E_y(x, z) = u(x)e^{i(knz - \omega t)}, \quad (1)$$

где $u(x)$ – поперечный профиль напряженности электрического поля, $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число, λ – длина волны, $n = ck/\omega$ – эффективный показатель преломления, ω – частота, c – скорость света в вакууме.

Уравнение для нахождения поперечного профиля напряженности электрического поля будет иметь вид [7]:

$$u''(x) + \{\varepsilon(x, I) - n^2\}k^2u(x) = 0, \quad (2)$$

где $\varepsilon(x, I)$ – диэлектрическая проницаемость фотонной гетероструктуры, которая в общем случае может отражать нелинейный отклик в виде определенной зависимости от интенсивности электрического поля $I = |u|^2$ (модели нелинейности среды), а также оптическую неоднородность, моделируемую зависимостью от пространственной координаты (пространственным профилем). Квадрат диэлектрической проницаемости определяет показатель преломления.

В рассматриваемом случае, когда фотонный кристалл плоской поверхностью контактирует с оптически однородной средой с нелинейным откликом (нелинейной средой) или без него (линейной средой), диэлектрическую проницаемость можно представить в виде [13]:

$$\varepsilon(x, I) = \begin{cases} \varepsilon_{\text{in}}(x), & x > 0, \\ \varepsilon_{\text{ho}}(I), & x < 0, \end{cases} \quad (3)$$

где $\varepsilon_{\text{in}}(x)$ моделирует неоднородность профиля диэлектрической проницаемости в зависимости от координаты перпендикулярно поверхности фотонного кристалла (in – inhomogeneous), а $\varepsilon_{\text{ho}}(I)$ моделирует нелинейный отклик оптически однородной среды, контактирующей с фотонным кристаллом (ho – homogeneous).

Если поперечный профиль напряженности электрического поля записать в виде:

$$u(x) = \begin{cases} u_{\text{in}}(x), & x > 0, \\ u_{\text{ho}}(I), & x < 0, \end{cases} \quad (4)$$

где $u_{\text{in}}(x)$ и $u_{\text{ho}}(I)$ – профили напряженности электрического поля в фотонном кристалле и в оптически однородной среде, соответственно, определенные на полуосях, то уравнение (2) разделяется на два уравнения на полуосях:

$$u_{\text{in}}''(x) + \{\varepsilon_{\text{in}}(x) - n^2\}k^2u_{\text{in}}(x) = 0, \quad x > 0, \quad (5)$$

$$u_{\text{ho}}''(x) + \{\varepsilon_{\text{ho}}(I) - n^2\}k^2u_{\text{ho}}(x) = 0, \quad x < 0. \quad (6)$$

Непрерывность компонент поля на поверхности фотонного кристалла определяет граничные условия сопряжения при $x = 0$:

$$u_{\text{in}}(+0) = u_{\text{ho}}(-0), \quad (7)$$

$$u_{\text{in}}'(+0) = u_{\text{ho}}'(-0). \quad (8)$$

Кроме того, следует добавить вытекающие из требования исчезновения поля на бесконечности условия: $u_{\text{ho}}(x) \rightarrow 0$, $u_{\text{in}}(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$.

В результате получаем формулировку модели в виде краевой задачи сопряжения (5)–(8), непрерывные и ограниченные всюду решения которой могут применяться для описания распространения поверхностных волн в фотонных кристаллических структурах.

2. МОДЕЛИРОВАНИЕ УБЫВАЮЩЕГО ПРОФИЛЯ ПОКАЗАТЕЛЯ ПРЕЛОМЛЕНИЯ ФОТОННОЙ КРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ

Для нахождения решений в явном виде необходимо выбрать конкретный вид профиля диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{\text{in}}(x)$ и модель нелинейности среды $\varepsilon_{\text{ho}}(I)$. Для моделирования неоднородности фотонной кристаллической структуры часто применяются убывающие профили [2–6], которые соответствуют снижению значения показателя преломления при удалении от поверхности в глубину фотонной структуры. Предлагается использовать зависимость в виде:

$$\varepsilon_{\text{in}}(x) = e_0 + \frac{e_1}{x + h_1} + \frac{e_2}{(x + h_2)^2}, \quad (9)$$

где e_0, e_1, e_2, h_1, h_2 – параметры пространственного профиля диэлектрической проницаемости.

Такая форма профиля диэлектрической проницаемости представляет собой обобщение гиперболического профиля, рассмотренного ранее [15–17], получаемого из (9) при $e_0 = e_2 = 0$.

Подстановка профиля (9) в уравнение (5) приводит к уравнению:

$$u_{\text{in}}''(x) + \left(e_0 + \frac{e_1}{x + h_1} + \frac{e_2}{(x + h_2)^2} - n^2 \right) k^2 u_{\text{in}}(x) = 0. \quad (10)$$

Если воспользоваться определением конфлюэнтной функции Хойна (the Heun confluent function) $H_c(q, \alpha, \gamma, \delta, e, z)$ как решения $y(z)$

конфлюэнтного дифференциального уравнения Хойна [19]:

$$z(z-1)y'' + (\gamma(z-1) + \delta z + z(z-1)e)y' + (\alpha z - q)y = 0,$$

то общее решение уравнения (10) может быть записано с ее помощью в виде:

$$u_{in}(x) = (x+h_1)e^{n_0 k x} \left\{ C_1 (x+h_2)^{\frac{n_1+1}{2}} H_c \times \right. \\ \times \left(2kn_0(h_2-h_1), n_1, 1, k^2 e_1(h_2-h_1), \frac{1}{2}, \frac{x+h_2}{h_2-h_1} \right) + \\ \left. + C_2 (x+h_2)^{\frac{n_1+1}{2}} H_c \times \right. \\ \left. \times \left(2kn_0(h_2-h_1), -n_1, 1, k^2 e_1(h_2-h_1), \frac{1}{2}, \frac{x+h_2}{h_2-h_1} \right) \right\},$$

где $n_0 = \sqrt{n^2 - e_0}$ и $n_1 = \frac{1}{2}\sqrt{1 - 4k^2 e_2}$, C_1, C_2 – константы интегрирования.

Очевидно, что анализ такого решения весьма затруднителен. Однако, если считать, что $h_1 = h_2 = h$, то для профиля

$$\varepsilon_{in}(x) = e_0 + \frac{e_1}{x+h} + \frac{e_2}{(x+h)^2} \quad (11)$$

уравнение (10) имеет вид:

$$u_{in}''(x) + \left(e_0 + \frac{e_1}{x+h} + \frac{e_2}{(x+h)^2} - n^2 \right) k^2 u_{in}(x) = 0. \quad (12)$$

При таком упрощении оказывается, что общее решение уравнения (12) выражается через функции Уиттекера (the Whittaker functions) $W_{\mu, \nu}(z)$ и $M_{\mu, \nu}(z)$ как решения $y(z)$ дифференциального уравнения Уиттекера [19]:

$$y'' + \left(\frac{\mu}{z} - \frac{1}{4} + \frac{1/4 - \nu^2}{z^2} \right) y = 0,$$

которое, очевидно, является более простым по сравнению с дифференциальным уравнением Хойна.

Поскольку ограниченным и убывающим на бесконечности решением уравнения Уиттекера является функция Уиттекера $W_{\mu, \nu}(z)$, то поперечный профиль напряженности электрического поля в фотонной кристаллической структуре, определяемый решением уравнения (10), можно записать в виде:

$$u_{in}(x) = u_0 \frac{W_{\mu, \nu}(2n_0 k(x+h))}{W_{\mu, \nu}(2n_0 kh)}, \quad (13)$$

где u_0 – значение напряженности электрического поля на поверхности фотонного кристалла, и индексы функции Уиттекера определяются параметрами уравнения (11) как:

$$\mu = e_1 k / 2n_0 = e_1 k / 2\sqrt{n^2 - e_0},$$

$$\nu = n_1 = \sqrt{1 - 4k^2 e_2} / 2.$$

Отсюда следует, что решение (13) существует при условиях $n^2 > e_0$ и $k^2 > 1/4e_2$.

Таким образом, получено пространственное распределение напряженности электрического поля в фотонной кристаллической структуре с профилем диэлектрической проницаемости, убывающим при удалении от поверхности по обобщенному гиперболическому закону (11) в явном аналитическом виде (12).

Отметим, что использование обобщенного профиля (11) позволяет применять полученное решение (13) не только в теории волноводной оптики, но и в квантовой механике, поскольку уравнение (12) может рассматриваться как стационарное уравнение Шредингера [18] с обобщенным гиперболическим потенциалом, описываемым профилем (11). При этом, варьируя значения параметров профиля (11), можно получить его существенно различные формы (рис. 1), применимые для описания как монотонных (рис. 1а) и немонотонных потенциальных барьеров (рис. 1б), так и потенциальных ям (рис. 1в).

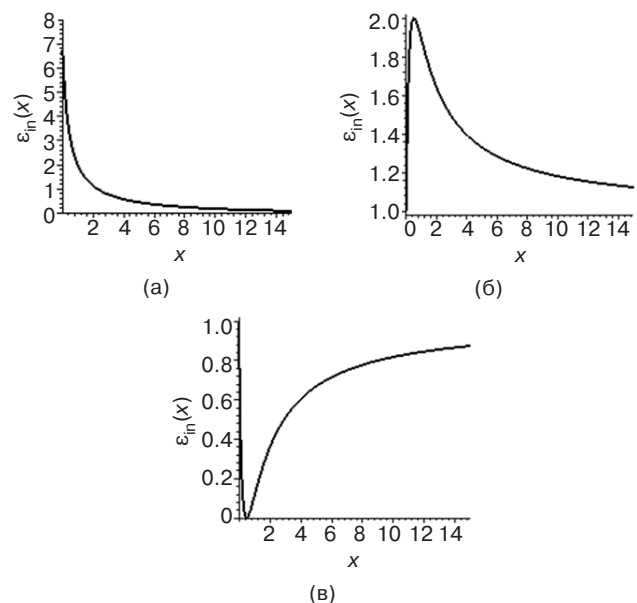


Рис. 1. Пространственные профили диэлектрической проницаемости (11) при различных значениях его параметров (в условных безразмерных единицах): (а) $e_0 = -0.1, e_1 = 3, e_2 = 0.2$; (б) $e_0 = -1, e_1 = 2, e_2 = -1$; (в) $e_0 = 1, e_1 = -2, e_2 = 1, h = 0.5$

Рассмотрим частные случаи профиля (9).

1) $e_2 = 0$. В этом случае профиль (9) принимает вид зависимости, убывающей по гиперболическому закону:

$$\varepsilon_{\text{in}}(x) = e_0 + \frac{e_1}{x+h}, \quad (14)$$

а уравнение (12) становится таким:

$$u_{\text{in}}''(x) + \left(e_0 + \frac{e_1}{x+h} - n^2 \right) k^2 u_{\text{in}}(x) = 0, \quad (15)$$

общее решение которого выражается через функции Уиттекера:

$$u_{\text{in}}(x) = C_1 W_{\mu,1/2}(2n_0 k(x+h)) + C_2 W_{\mu,1/2}(2n_0 k(x+h)), \quad (16)$$

где индексы функции Уиттекера $\mu = e_1 k / 2n_0 = e_1 k / 2\sqrt{n^2 - e_0}$ и $\nu = 1/2$.

Поскольку для описания поверхностных волн должно выполняться требование ограниченности решения на бесконечности, причем $u_{\text{in}}(x) \rightarrow 0$, при $|x| \rightarrow \infty$, то для дальнейшего применения решения (16) следует положить $C_2 = 0$. Для удовлетворения условию сопряжения (7) на границе раздела кристаллов допустимо выбрать $C_1 = u_0 / W_{\mu,1/2}(2n_0 kh)$, и тогда решение (16), которое можно будет использовать для решения краевой задачи сопряжения, примет вид:

$$u_{\text{in}}(x) = u_0 \frac{W_{\mu,1/2}(2n_0 k(x+h))}{W_{\mu,1/2}(2n_0 kh)}. \quad (17)$$

2) $e_1 = 0$. В этом случае профиль (9) принимает вид зависимости, убывающей по гиперболическому закону:

$$\varepsilon_{\text{in}}(x) = e_0 + \frac{e_2}{(x+h)^2}, \quad (18)$$

а уравнение (12) становится таким:

$$u_{\text{in}}''(x) + \left(e_0 + \frac{e_2}{(x+h)^2} - n^2 \right) k^2 u_{\text{in}}(x) = 0. \quad (19)$$

Автором найдено общее решение уравнения (19):

$$u_{\text{in}}(x) = \sqrt{x+h} \times \{ C_1 I_{\nu}(2n_0 k(x+h)) + C_2 K_{\nu}(2n_0 k(x+h)) \}, \quad (20)$$

где $I_{\nu}(z)$ и $K_{\nu}(z)$ – модифицированные цилиндрические функции мнимого аргумента первого и второго

рода, называемые также функциями Инфельда и Макдональда, соответственно, порядка $\nu = n_1 = \sqrt{1 - 4k^2 e_2} / 2$. Эти функции являются линейно независимыми решениями модифицированного дифференциального уравнения Бесселя [19]:

$$y'' + \frac{1}{z} y' - \left(1 + \frac{\nu^2}{z^2} \right) y = 0,$$

которое, очевидно, является более простым по сравнению как с дифференциальным уравнением Хойна, так и дифференциальным уравнением Уиттекера.

Поскольку функция Инфельда является неограниченной, то для дальнейшего применения решения (20) следует положить $C_1 = 0$. Для удовлетворения условию сопряжения (7) на границе раздела кристаллов допустимо выбрать $C_2 = u_0 \sqrt{h} / K_{\nu}(2n_0 kh)$, и тогда решение (20), которое можно будет использовать для решения краевой задачи сопряжения, примет вид:

$$u_{\text{in}}(x) = u_0 \sqrt{1 + \frac{x}{h}} \frac{K_{\nu}(2n_0 k(x+h))}{K_{\nu}(2n_0 kh)}. \quad (21)$$

Следует отметить, что решение (17) является таким частным случаем решения (13), которое получается при $e_2 = 0$ очевидным образом, а решение (21) не вытекает явным образом из решения (13) при $e_1 = 0$. Однако его форма является более предпочтительной для применения при построении решения краевой задачи сопряжения при моделировании поверхностных волн, поскольку функции Макдональда содержит на один параметр (индекс) меньше, чем функция Уиттекера, что упрощает анализ решения.

3. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ ВДОЛЬ ФОТОННОГО КРИСТАЛЛА С УБЫВАЮЩИМ ПОКАЗАТЕЛЕМ ПРЕЛОМЛЕНИЯ

В рассматриваемом случае, когда фотонный кристалл контактирует с воздухом или с оптически однородным диэлектриком без нелинейного отклика (линейной средой), диэлектрическая проницаемость в этом полупространстве считается постоянной и не зависящей от интенсивности поля: $\varepsilon_{\text{ho}}(I) = \varepsilon_0$.

В результате рассматриваемая фотонная кристаллическая структура будет характеризоваться диэлектрической проницаемостью:

$$\varepsilon(x, I) = \begin{cases} e_0 + \frac{e_1}{x+h} + \frac{e_2}{(x+h)^2}, & x > 0, \\ \varepsilon_0, & x < 0. \end{cases} \quad (22)$$

Тогда, с учетом сделанных предположений, уравнение (6), описывающее распределение поля в однородной среде, примет вид

$$u_{ho}''(x) - q_0^2 u_{ho}(x) = 0, x < 0, \quad (23)$$

где $q_0^2 = k^2(n^2 - \epsilon_0)$.

Убывающее на бесконечности решение уравнения (15) имеет вид:

$$u_{ho}(x) = u_0 e^{q_0 x}. \quad (24)$$

Поверхностная волна описывается решением краевой задачи сопряжения (5)–(8). Для нахождения этого решения необходимо определить параметры полученных решений на полуосях (13) и (24) так, чтобы они удовлетворяли граничным условиям (7) и (8). Видно, что решения (13) и (24) удовлетворяют условию непрерывности на поверхности фотонного кристалла (7). Для выполнения условия непрерывности производных, т.е. для обеспечения гладкости поперечного профиля поверхностной волны, решения (13) и (24) подставляются в граничное условие (8). В результате получается дисперсионное уравнение:

$$q_0 = \frac{k}{n_0} (n_0^2 - \epsilon_1 / 2) - \frac{W_{\mu+1,\nu}(2n_0 kh)}{h W_{\mu,\nu}(2n_0 kh)}. \quad (25)$$

Дисперсионное уравнение определяет непрерывный спектр значений эффективного показателя преломления n в зависимости от параметров профиля диэлектрической проницаемости (22). Результаты численного решения дисперсионного уравнения (25) представлены на рис. 2. Эффективный показатель преломления возрастает при увеличении таких параметров, как $e_0, e_1, e_2, \epsilon_0, k$, и снижается только при увеличении h .

Таким образом, решение краевой задачи (5)–(8), описывающее поверхностную волну, распространяющуюся вдоль поверхности фотонного кристалла, получается после подстановки в (4) решений (13) и (24):

$$u(x) = u_0 \begin{cases} \frac{W_{\mu,\nu}(2n_0 k(x+h))}{W_{\mu,\nu}(2n_0 kh)}, & x > 0, \\ e^{q_0 x}, & x < 0. \end{cases} \quad (26)$$

Поперечные профили напряженности электрического поля в поверхностной волне (26) приведены на рис. 3.

Видно, что электрическое поле локализовано в узких областях вблизи поверхности по обеим ее сторонам с максимумом интенсивности в фотонном кристалле. Интенсивность может быть больше в фотонном кристалле, чем в однородном диэлектрике, несмотря на то, что глубина проникновения поля в фотонный кристалл может быть меньше, чем в диэлектрике.

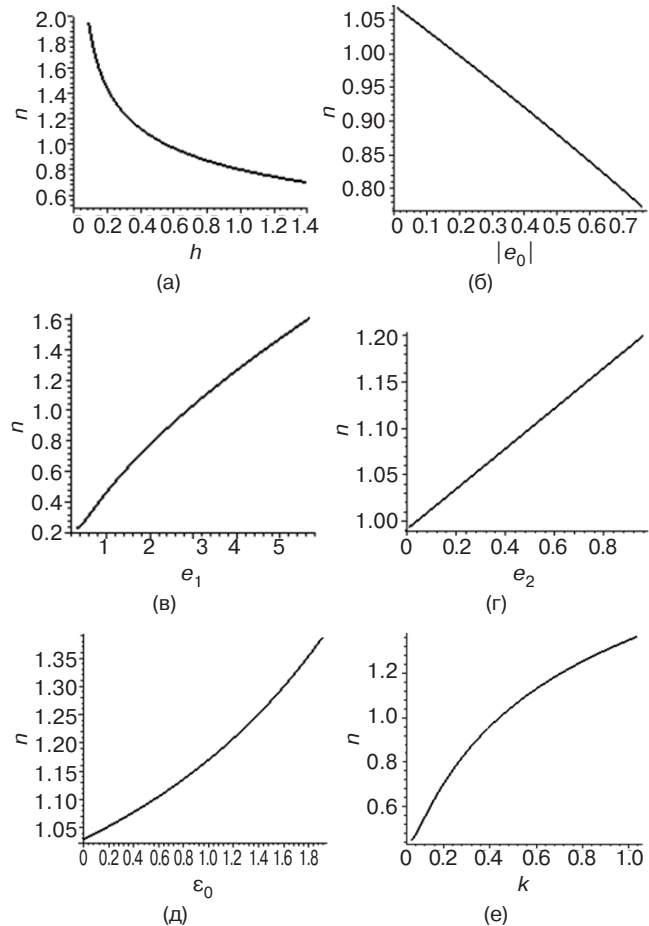


Рис. 2. Зависимости эффективного показателя преломления (в условных безразмерных единицах): (а) от h при $e_0 = -0.1, e_1 = 3, e_2 = 0.2, \epsilon_0 = 0.05, k = 0.5$; (б) от e_0 при $h = 0.5, e_1 = 3, e_2 = 0.2, \epsilon_0 = 0.05, k = 0.5$; (в) от e_1 при $h = 0.5, e_0 = -0.1, e_2 = 0.2, \epsilon_0 = 0.05, k = 0.5$; (г) от e_2 при $h = 0.5, e_0 = -0.1, e_1 = 3, \epsilon_0 = 0.05, k = 0.5$; (д) от e_0 при $h = 0.5, e_0 = -0.1, e_1 = 3, e_2 = 0.2, k = 0.5$; (е) от k при $h = 0.5, e_0 = -0.1, e_1 = 3, e_2 = 0.2, \epsilon_0 = 0.05$

Увеличение параметра h приводит к увеличению ширины локализации поля, максимум интенсивности сдвигается в глубину фотонного кристалла, а его интенсивность возрастает (рис. 3а). При снижении параметра e_0 (его увеличении по модулю) наблюдается увеличение глубины проникновения поля в однородный диэлектрик и ее снижение в фотонном кристалле, максимум интенсивности сдвигается к поверхности, а его интенсивность снижается (рис. 3б). Увеличение параметра e_1 приводит к уменьшению ширины локализации поля, интенсивность максимума возрастает, а его положение не меняется (рис. 3в). Увеличение параметра e_2 приводит также к уменьшению ширины локализации поля, но интенсивность максимума снижается, а его положение смещается к поверхности (рис. 3г). Почти к такому же эффекту приводит увеличение

параметра ε_0 , за исключением того, что наблюдается увеличение глубины проникновения поля в однородный диэлектрик (рис. 3д). Увеличение значения волнового числа (уменьшения длины волны) приводит к уменьшению ширины локализации поля, интенсивность максимума возрастает, а его положение незначительно смещается к поверхности (рис. 3е).

Из проведенного анализа следует, что глубина проникновения поля в фотонный кристалл

уменьшается с ростом эффективного показателя преломления. Следовательно, регулируя угол падения лазерного луча, возбуждающего поверхностную волну, можно изменять глубину проникновения поля в фотонный кристалл.

Важным моментом является то, что полученное решение (26) сформулированной краевой задачи (5)–(8) описывает не только поверхностную волну, в которой профиль напряженности электрического

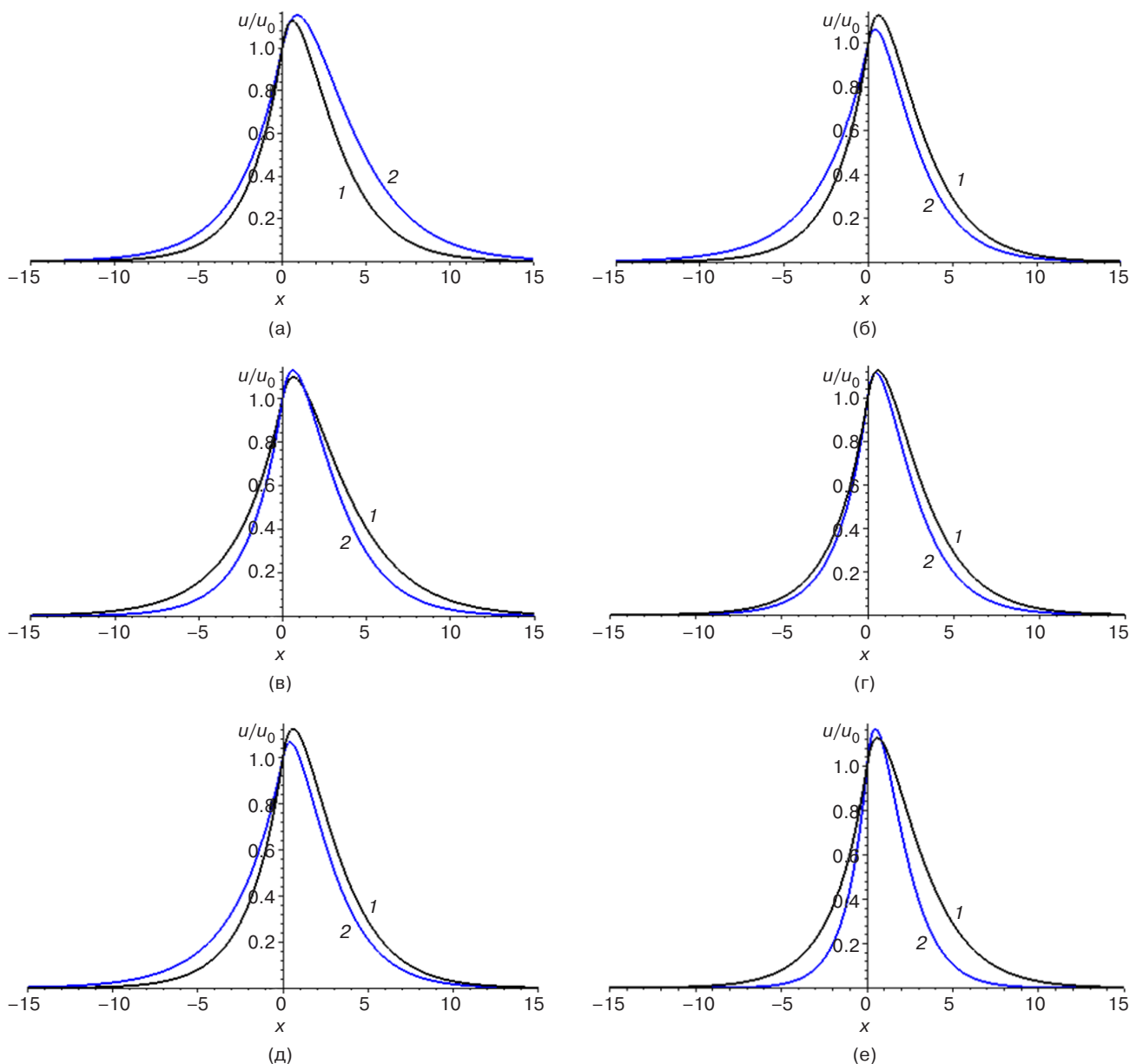


Рис. 3. Поперечные профили напряженности электрического поля в поверхностной волне (26) при различных значениях параметров системы (в условных безразмерных единицах):

- (а) $h = 0.5$ (линия 1), $h = 0.9$ (линия 2), $\varepsilon_0 = -0.1$, $\varepsilon_1 = 3$, $\varepsilon_2 = 0.2$, $\varepsilon_0 = 0.05$, $k = 0.5$;
- (б) $h = 0.5$, $\varepsilon_0 = -0.1$ (линия 1), $\varepsilon_0 = -0.9$ (линия 2), $\varepsilon_1 = 3$, $\varepsilon_2 = 0.2$, $\varepsilon_0 = 0.05$, $k = 0.5$;
- (в) $h = 0.5$, $\varepsilon_0 = -0.1$, $\varepsilon_1 = 2$ (линия 1), $\varepsilon_1 = 3$ (линия 2), $\varepsilon_2 = 0.2$, $\varepsilon_0 = 0.05$, $k = 0.5$;
- (г) $h = 0.5$, $\varepsilon_0 = -0.1$, $\varepsilon_1 = 3$, $\varepsilon_2 = 0.2$ (линия 1), $\varepsilon_2 = 0.9$ (линия 2), $\varepsilon_0 = 0.05$, $k = 0.5$;
- (д) $h = 0.5$, $\varepsilon_0 = -0.1$, $\varepsilon_1 = 3$, $\varepsilon_2 = 0.2$, $\varepsilon_0 = 0.05$ (линия 1), $\varepsilon_0 = 0.5$ (линия 2), $k = 0.5$;
- (е) $h = 0.5$, $\varepsilon_0 = -0.1$, $\varepsilon_1 = 3$, $\varepsilon_2 = 0.2$, $\varepsilon_0 = 0.05$, $k = 0.5$ (линия 1), $k = 0.7$ (линия 2)

поля достаточно быстро убывает с ростом расстояния от поверхности, но волноводные моды, в которых профиль напряженности электрического поля убывает с осцилляциями. Волноводные моды возбуждаются при определенных значениях параметров. Их характерные профили показаны на рис. 4. Амплитуды осцилляций волноводных мод спадают по мере их расположения к поверхности кристалла. Можно называть порядком волноводной моды количество максимумов интенсивности $I = |u|^2$ (количество максимумов и минимумов напряженности электрического поля).

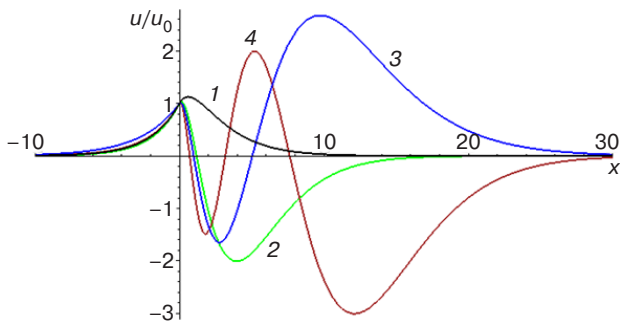


Рис. 4. Поперечные профили напряженности электрического поля волноводных мод (26) при фиксированных значениях (в условных безразмерных единицах) $h = 0.5$, $e_0 = -0.1$, $e_2 = 0.2$, $e_0 = 0.05$, $k = 0.5$ и различных e_1 : $e_1 = 3$ (линия 1), $e_1 = 9.1$ (линия 2), $e_1 = 10.1$ (линия 3), $e_1 = 17.5$ (линия 4)

Рассмотрим теперь кратко частный случай профиля (9) при $e_1 = 0$. Тогда рассматриваемая фотонная кристаллическая структура будет характеризоваться диэлектрической проницаемостью:

$$\varepsilon(x, I) = \begin{cases} e_0 + \frac{e_2}{(x+h)^2}, & x > 0, \\ \varepsilon_0, & x < 0. \end{cases} \quad (27)$$

Математическое описание поверхностной волны теперь конструируется из решения (21) и (24). Для нахождения решения задачи сопряжения (5)–(8) в этом случае необходимо определить параметры полученных решений на полуосях (21) и (24) так, чтобы они удовлетворяли граничным условиям (7) и (8). Видно, что решения (21) и (24) удовлетворяют условию непрерывности на поверхности фотонного кристалла (7). В результате получается решение краевой задачи сопряжения (5)–(8) в виде:

$$u(x) = u_0 \begin{cases} \sqrt{1 + \frac{x}{h} \frac{K_\nu(2n_0k(x+h))}{K_\nu(2n_0kh)}}, & x > 0, \\ e^{q_0x}, & x < 0. \end{cases} \quad (28)$$

Аналогичным образом получается дисперсионное уравнение, которое можно записать в виде:

$$\sqrt{\xi^2 - \varepsilon_0(kh)^2} = \frac{1}{2} + \nu - \xi \frac{K_{\nu+1}(\xi)}{K_\nu(\xi)}, \quad (29)$$

где $\xi = n_0kh$.

Дисперсионное уравнение (29) определяет непрерывный спектр значений эффективного показателя преломления

$$n^2 = e_0 + (\xi/kh)^2, \quad (30)$$

где ξ – положительный корень уравнения (29).

Подробный анализ решения (28) и корней дисперсионного уравнения в частном случае $e_0 = 0$ приведен в работе [20].

Таким образом, получены точные аналитические решения краевой задачи, описывающие в двух случаях разными функциями поверхностные волны и волноводные моды, распространяющиеся вдоль фотонного кристалла с убывающим показателем преломления в соответствии с обобщенным гиперболическим профилем, контактирующего с оптически однородной средой.

Сформулированные модели и описанные характеристики линейных и нелинейных поверхностных волн могут быть полезны для прогнозирования оптических свойств различных фотонных кристаллических структур, многослойных композитных оптических структур [21, 22], используемых в оптоэлектронной инженерии и фотонике [23]. Также результаты работы можно использовать при проектировании различных волноводных структур, в т.ч. слоистых, с требуемыми дисперсионно-оптическими характеристиками.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложены модели фотонных гетероструктур с пространственным профилем диэлектрической проницаемости, допускающим нахождение точного аналитического решения. Для моделирования такого пространственного распределения использован обобщенный гиперболический профиль. Найдены точные аналитические решения волнового уравнения для выбранных профилей диэлектрической проницаемости, выражаемые через функции Уиттекера и Макдональда.

Для описания поверхностных волн и волноводных мод, распространяющихся вдоль поверхности фотонного кристалла, сформулирована краевая задача. При нахождении ее решения использовано точное решение для обобщенного гиперболического профиля. Рассмотрены случаи контакта фотонного

кристалла с однородным диэлектриком и с нелинейно оптической средой. Получены выражения, описывающие поверхностные поперечные электрические волны, поле в которых локализовано вблизи поверхности фотонного кристалла и убывает при удалении от нее.

В случае контакта фотонного кристалла с однородным диэлектриком подробно проанализировано влияние оптических характеристик системы, таких как параметры обобщенного гиперболического профиля диэлектрической проницаемости, диэлектрической

константы однородной среды и волнового числа. Получено и численно проанализировано дисперсионное уравнение, описывающее зависимость эффективного показателя преломления от оптических параметров системы. Выявлены условия для управляющих параметров, позволяющие контролировать локализацию электрического поля вблизи поверхности фотонного кристалла. Показано, что решение краевой задачи также описывает волноводные моды, в которых поле убывает при удалении от поверхности фотонного кристалла с осцилляциями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Agrawal G.P. *Physics and Engineering of Graded-Index Media*. New York: Cambridge University Press; 2023, 348 p. <https://doi.org/10.1017/9781009282086>
2. Singh B.K., Bambole V., Tiwari S., Shukla K.K., Pandey P.C., Rastogi V. Photonic band gap consequences in one-dimensional exponential graded index photonic crystals. *Optik*. 2021;240:166854. <https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2021.166854>
3. Dash D., Saini J., Goyal A.K., Massoud Y. Exponentially index modulated nanophotonic resonator for high-performance sensing applications. *Sci. Rep.* 2023;13(1):1431. <https://doi.org/10.1038/s41598-023-28235-6>
4. Singh B.K., Bijalwan A., Pandey P.C., Rastogi V. Photonic bandgaps engineering in double graded hyperbolic, exponential and linear index materials embedded one-dimensional photonic crystals. *Eng. Res. Express*. 2019;1(2):025004. <https://doi.org/10.1088/2631-8695/ab48a0>
5. Singh B.K., Bambole V., Rastogi V., Pandey P.C. Multi-channel photonic bandgap engineering in hyperbolic graded index materials embedded one-dimensional photonic crystals. *Opt. Laser Technol.* 2020;129(17):106293. <https://doi.org/10.1016/j.optlastec.2020.106293>
6. Dash D., Saini J. Hyperbolic Graded Index Biophotonic Cholesterol Sensor with Improved Sensitivity. *Progress In Electromagnetics Research M*. 2023;116:165–176. <https://doi.org/10.2528/PIERM23032302>
7. Chen C-L. *Foundations for Guided-Wave Optics*. New York: John Wiley & Sons Inc.; 2005, 462 p. <https://doi.org/10.1002/0470042222>
8. Lachance R.L., Belanger P.-A. Modes in divergent parabolic graded-index optical fibers. *Journal of Lightwave Technology (JLwT)*. 1991;9(11):1425–1430. <https://doi.org/10.1109/50.97628>
9. Touam T., Yergeau F. Analytical solution for a linearly graded-index-profile planar waveguide. *Appl. Opt.* 1993;32(3):309–312. <https://doi.org/10.1364/AO.32.000309>
10. Шварцбург А.Б. Дисперсия электромагнитных волн в слоистых и нестационарных средах (точно решаемые модели). *Успехи физических наук (УФН)*. 2000;170(12):1297–1324. <https://doi.org/10.3367/UFNr.0170.200012b.1297>
11. Svendsen B.B., Söderström M., Carlens H., Dalarsson M. Analytical and Numerical Models for TE-Wave Absorption in a Graded-Index GNP-Treated Cell Substrate Inserted in a Waveguide. *Appl. Sci.* 2022;12(14):7097. <https://doi.org/10.3390/app12147097>
12. Almawgani A.H.M., Taya S.A., Hussein A.J., Colak I. Dispersion properties of a slab waveguide with a graded-index core layer and a nonlinear cladding using the WKB approximation method. *J. Opt. Soc. Am. B*. 2022;39(6):1606–1613. <https://doi.org/10.1364/JOSAB.458569>
13. Савотченко С.Е. Модели волноводов, сочетающих градиентные и нелинейно-оптические слои. *Russian Technological Journal*. 2023;11(4):84–93. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2023-11-4-84-93>
14. Савотченко С.Е. Модели симметричных трехслойных волноводных структур с градиентной сердцевиной и нелинейно-оптическими обкладками. *Russian Technological Journal*. 2024;12(5):77–89. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-5-77-89>
15. Savotchenko S.E. Nonlinear surface waves propagating along an interface between the Kerr nonlinear and hyperbolic graded-index crystals. *J. Opt.* 2025;54:2363–2371. <https://doi.org/10.1007/s12596-024-01907-w>
16. Savotchenko S.E. New surface waves in a hyperbolic graded-index crystal. *Rom. Rep. Phys.* 2024;76(4):406. <https://doi.org/10.59277/RomRepPhys.2024.76.406>
17. Savotchenko S.E. Features of the surface wave propagation along the interface between the hyperbolic graded-index layer and nonlinear medium with a step change in the dielectric constant. *Phys. Lett. A*. 2024;524(11):129822. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2024.129822>
18. Kaplan I.G. *Intermolecular Interactions: Physical Picture, Computational Methods and Model Potentials*. Hoboken: John Wiley & Sons; 2006, 367 p. <https://doi.org/10.1002/047086334X>
19. Andrews G.E., Askey R., Roy R. *Special Functions*. UK: Cambridge University Press; 1999, 664 p. <https://doi.org/10.1017/CBO9781107325937>

20. Savotchenko S.E. Surface waves in a medium with spatial monotonic attenuation of the refractive index. *Rom. Rep. Phys.* 2025;77(1):402. <https://doi.org/10.59277/RomRepPhys.2025.77.402>
21. Юрасов А.Н., Яшин М.М., Гладышев И.В., Семенова Д.В., Ганьшина Е.А., Каназакова Е.С. Влияние размерных эффектов и распределения гранул по размерам на оптические и магнитооптические свойства нанокompозитов. *Russian Technological Journal.* 2021;9(3):49–57. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2021-9-3-49-57>
22. Zhang X., Shao J., Yan C., Qin R., Lu Z., Geng H., Xu T., Ju L. A review on optoelectronic device applications of 2D transition metal carbides and nitrides. *Materials & Design.* 2021;200:109452. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2021.109452>
23. Santiago S. *Optoelectronics, Photonics and Sensors.* Prague: Czech Technical University of Prague; 2017, 40 p.

REFERENCES

1. Agrawal G.P. *Physics and Engineering of Graded-Index Media.* New York: Cambridge University Press; 2023, 348 p. <https://doi.org/10.1017/9781009282086>
2. Singh B.K., Bambole V., Tiwari S., Shukla K.K., Pandey P.C., Rastogi V. Photonic band gap consequences in one-dimensional exponential graded index photonic crystals. *Optik.* 2021;240:166854. <https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2021.166854>
3. Dash D., Saini J., Goyal A.K., Massoud Y. Exponentially index modulated nanophotonic resonator for high-performance sensing applications. *Sci. Rep.* 2023;13(1):1431. <https://doi.org/10.1038/s41598-023-28235-6>
4. Singh B.K., Bijalwan A., Pandey P.C., Rastogi V. Photonic bandgaps engineering in double graded hyperbolic, exponential and linear index materials embedded one-dimensional photonic crystals. *Eng. Res. Express.* 2019;1(2):025004. <https://doi.org/10.1088/2631-8695/ab48a0>
5. Singh B.K., Bambole V., Rastogi V., Pandey P.C. Multi-channel photonic bandgap engineering in hyperbolic graded index materials embedded one-dimensional photonic crystals. *Opt. Laser Technol.* 2020;129(17):106293. <https://doi.org/10.1016/j.optlastec.2020.106293>
6. Dash D., Saini J. Hyperbolic Graded Index Biophotonic Cholesterol Sensor with Improved Sensitivity. *Progress In Electromagnetics Research M.* 2023;116:165–176. <https://doi.org/10.2528/PIERM23032302>
7. Chen C-L. *Foundations for Guided-Wave Optics.* New York: John Wiley & Sons Inc.; 2005, 462 p. <https://doi.org/10.1002/0470042222>
8. Lachance R.L., Belanger P.-A. Modes in divergent parabolic graded-index optical fibers. *Journal of Lightwave Technology (JLwT).* 1991;9(11):1425–1430. <https://doi.org/10.1109/50.97628>
9. Touam T., Yergeau F. Analytical solution for a linearly graded-index-profile planar waveguide. *Appl. Opt.* 1993;32(3):309–312. <https://doi.org/10.1364/AO.32.000309>
10. Shvartsburg A.B. Dispersion of electromagnetic waves in stratified and nonstationary media (exactly solvable models). *Phys. Usp.* 2000;43(12):1201–1228. <https://doi.org/10.1070/PU2000v043n12ABEH000827>
[Original Russian Text: Shvartsburg A.B. Dispersion of electromagnetic waves in stratified and nonstationary media (exactly solvable models). *Uspekhi Fizicheskikh Nauk.* 2000;170(12):1297–1324 (in Russ.). <https://doi.org/10.3367/UFNr.0170.200012b.1297>]
11. Svendsen B.B., Söderström M., Carlens H., Dalarsson M. Analytical and Numerical Models for TE-Wave Absorption in a Graded-Index GNP-Treated Cell Substrate Inserted in a Waveguide. *Appl. Sci.* 2022;12(14):7097. <https://doi.org/10.3390/app12147097>
12. Almagani A.H.M., Taya S.A., Hussein A.J., Colak I. Dispersion properties of a slab waveguide with a graded-index core layer and a nonlinear cladding using the WKB approximation method. *J. Opt. Soc. Am. B.* 2022;39(6):1606–1613. <https://doi.org/10.1364/JOSAB.458569>
13. Savotchenko S.E. Models of waveguides combining gradient and nonlinear optical layers. *Russian Technological Journal.* 2023;11(4):84–93 (in Russ.). <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2023-11-4-84-93>
14. Savotchenko S.E. Models of symmetric three-layer waveguide structures with graded-index core and non-linear optical liners. *Russian Technological Journal.* 2024;12(5):77–89 (in Russ.). <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-5-77-89>
15. Savotchenko S.E. Nonlinear surface waves propagating along an interface between the Kerr nonlinear and hyperbolic graded-index crystals. *J. Opt.* 2025;54:2363–2371. <https://doi.org/10.1007/s12596-024-01907-w>
16. Savotchenko S.E. New surface waves in a hyperbolic graded-index crystal. *Rom. Rep. Phys.* 2024;76(4):406. <https://doi.org/10.59277/RomRepPhys.2024.76.406>
17. Savotchenko S.E. Features of the surface wave propagation along the interface between the hyperbolic graded-index layer and nonlinear medium with a step change in the dielectric constant. *Phys. Lett. A.* 2024;524(11):129822. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2024.129822>
18. Kaplan I.G. *Intermolecular Interactions: Physical Picture, Computational Methods and Model Potentials.* Hoboken: John Wiley & Sons; 2006, 367 p. <https://doi.org/10.1002/047086334X>
19. Andrews G.E., Askey R., Roy R. *Special Functions.* UK: Cambridge University Press; 1999, 664 p. <https://doi.org/10.1017/CBO9781107325937>
20. Savotchenko S.E. Surface waves in a medium with spatial monotonic attenuation of the refractive index. *Rom. Rep. Phys.* 2025;77(1):402. <https://doi.org/10.59277/RomRepPhys.2025.77.402>
21. Yurasov A.N., Yashin M.M., Gladyshev I.V., Semyonova D.V., Gan'shina E.A., Kanazakova E.S. Influence of size effects and granule distribution by size on optical and magneto-optical properties of nanocomposites. *Russian Technological Journal.* 2021;9(3):49–57 (in Russ.). <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2021-9-3-49-57>

22. Zhang X., Shao J., Yan C., Qin R., Lu Z., Geng H., Xu T., Ju L. A review on optoelectronic device applications of 2D transition metal carbides and nitrides. *Materials & Design*. 2021;200:109452. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2021.109452>
23. Santiago S. *Optoelectronics, Photonics and Sensors*. Prague: Czech Technical University of Prague; 2017, 40 p.

Об авторе

Савотченко Сергей Евгеньевич, д.ф.-м.н, доцент, профессор кафедры высшей математики, Институт перспективных технологий и промышленного программирования, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: savotchenkose@mail.ru. Scopus Author ID 6603577988, SPIN-код РИНЦ 2552-4344, <https://orcid.org/0000-0002-7158-9145>

About the Author

Sergey E. Savotchenko, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor, Professor, High Mathematics Department, Institute for Advanced Technologies and Industrial Programming, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: savotchenkose@mail.ru. Scopus Author ID 6603577988, RSCI SPIN-code 2552-4344, <https://orcid.org/0000-0002-7158-9145>