

Математическое моделирование
Mathematical modeling

УДК 004.023, 519.677

<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2026-14-1-103-112>

EDN LDJQIL



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Экспериментальное исследование характеристик сходимости квазиньютоновского алгоритма на негладких и невыпуклых функциях

А.В. Смирнов [®]

МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, 119454 Россия

[®] Автор для переписки, e-mail: av_smirnov@mirea.ru

• Поступила: 02.04.2025 • Доработана: 14.06.2025 • Принята к опубликованию: 13.11.2025

Резюме

Цели. Целью работы является разработка методики исследования характеристик сходимости квазиньютоновского алгоритма (КНА) на негладких и невыпуклых целевых функциях (ЦФ) и выполнение экспериментов по этой методике.

Методы. Эксперименты выполнялись на тестовой функции, обеспечивающей возможность задания различных законов изменения ее значений по разным направлениям от точки минимума. Всего исследованы 18 примеров ЦФ с разными параметрами рельефа. Для каждого примера выполнялись 200 стартов КНА из случайных точек и фиксировались все значения ЦФ, полученные в процессе поиска. Затем по этим данным вычислялись значения Expected Run Time (ERT) – ожидаемого времени достижения заданного порогового уровня ЦФ. Далее выполнялась аппроксимация зависимости достигнутого порога ЦФ от ERT отдельно для отрезка, в котором все пороги достигаются во всех стартах для этого примера, и для отрезка, в котором пороги достигаются, но не во всех стартах.

Результаты. Эксперименты показали, что в большинстве примеров для отрезка, в котором все пороги достигаются во всех стартах, имеет место убывание ЦФ по закону геометрической прогрессии (линейная сходимость), а во втором отрезке преобладает сходимость по степенному закону. Также установлено, что наличие анизотропии рельефа ЦФ и нарушений гладкости приводят к замедлению сходимости и завершению поиска до достижения минимума с требуемой точностью.

Выводы. Исследование позволило выявить закономерности в сходимости КНА на ЦФ с различными свойствами рельефа. Дальнейшее развитие методики должно включать автоматизацию сбора и обработки данных и распространение на другие виды алгоритмов поиска оптимальных решений.

Ключевые слова: квазиньютоновский алгоритм, рельеф целевой функции, выпуклая функция, вогнутая функция, негладкая функция, аппроксимация, показатель степени, сходимость алгоритма

Для цитирования: Смирнов А.В. Экспериментальное исследование характеристик сходимости квазиньютоновского алгоритма на негладких и невыпуклых функциях. *Russian Technological Journal*. 2026;14(1):103–112. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2026-14-1-103-112>, <https://www.elibrary.ru/LDJQIL>

Прозрачность финансовой деятельности: Автор не имеет финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

RESEARCH ARTICLE

Experimental investigation of convergence characteristics of quasi-Newton algorithm on nonsmooth and nonconvex functions

Alexander V. Smirnov[@]

MIREA – Russian Technological University, Moscow, 119454 Russia

[@] Corresponding author, e-mail: av_smirnov@mirea.ru

• Submitted: 02.04.2025 • Revised: 14.06.2025 • Accepted: 13.11.2025

Abstract

Objectives. The aim of the paper is to develop a methodology for studying the convergence of the quasi-Newton minimization algorithm (QNA) on nonsmooth and nonconvex objective functions (OF), as well as to conduct related numerical experiments.

Methods. The experiments were performed on a flexible OF capable of mimicking various patterns of value changes in different directions away from the minimum. A total of 18 OF instances with different landscape parameters were studied. For each example, 200 QNA searches were performed from random starting points, and all corresponding OF values were recorded. Then, the Expected Run Time (ERT) to reach a given threshold level of the OF was computed based on the data. The dependence of the achieved OF threshold on ERT was approximated separately for the segment in which all thresholds were achieved in all searches, and for a segment in which the thresholds were achieved, but not in all searches.

Results. The experiments show that, for the majority of cases in which all thresholds are achieved in all takes, a decrease in the OF follows the geometric progression law (linear convergence). However, in the second segment, convergence follows the power law. It was also found that the presence of anisotropy of the OF landscape and a loss of smoothness lead to convergence slowdown, and premature termination of search process before reaching the minimum with the required accuracy.

Conclusions. The study identifies patterns in the QNA convergence on the objective functions with different landscape parameters. Further advancement of the methodology would involve automating data collection and processing, as well as extending it to other types of optimization algorithms.

Keywords: quasi-Newton algorithm, objective function landscape, convex function, concave function, nonsmooth function, approximation, exponent, algorithm convergence

For citation: Smirnov A.V. Experimental investigation of convergence characteristics of quasi-Newton algorithm on nonsmooth and nonconvex functions. *Russian Technological Journal*. 2026;14(1):103–112. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2026-14-1-103-112>, <https://www.elibrary.ru/LDJQIL>

Financial disclosure: The author has no financial or proprietary interest in any material or method mentioned.

The author declares no conflicts of interest.

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается задача поиска локального экстремума (ЛЭ) \mathbf{x}^* , конкретно минимума, целевой функции (ЦФ) $f(\mathbf{x})$ в некоторой области $\Omega_{\mathbf{x}}$ пространства поиска

$$\mathbf{x}^* = \arg \min_{\mathbf{x} \in \Omega_{\mathbf{x}}} (f(\mathbf{x})). \quad (1)$$

Во многих случаях эффективным средством решения задачи (1) являются квазиньютоновские алгоритмы (КНА), в которых для определения направления очередного шага поиска используется аппроксимация матрицы вторых частных производных ЦФ (гессиана) с использованием градиента ЦФ, т.е. только первых производных. Доказано, что для сходимости такого алгоритма к ЛЭ достаточно, чтобы функция была гладкой и выпуклой

в Ω_x [1, 2]. Программные реализации КНА входят в широко применяемые пакеты математических программ.

В случаях, когда условия гладкости и/или выпуклости ЦФ не выполняются, строгий анализ для КНА отсутствует. В то же время на практике КНА во многих случаях успешно применяются для поисков ЛЭ негладких и/или невыпуклых ЦФ. Условия и достижимые результаты такого применения мало исследованы. При этом известны исследования условий сходимости и оценки скорости сходимости на таких ЦФ для некоторых других типов алгоритмов поиска [1–7], однако эти алгоритмы сходятся медленнее КНА.

В работе [8] приведен теоретический анализ работы КНА на функции одной переменной $f(x) = |x|$, имеющей нарушение гладкости в точке ЛЭ. Доказано, что для достижения ЛЭ с погрешностью не более заданного $\varepsilon > 0$ необходимо выполнить порядка $\log_2(\varepsilon^{-1})$ итераций. Для случая функции $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$ при размерности пространства поиска $ND > 1$ теоретический анализ выполнить не удалось, но экспериментально показано, что имеет место линейная сходимость поиска, т.е. уменьшение значения ЦФ по закону геометрической прогрессии, знаменатель которой приближается к единице с ростом ND . В указанной работе используется только ЦФ одного вида с неизменяемыми параметрами рельефа, но результаты для ЦФ других типов могут оказаться другими.

В работе [9] приведены результаты экспериментальных исследований работы КНА и гибридного алгоритма на его основе на большом наборе тестовых функций. Но эта публикация не дает достаточно полной информации о характеристиках сходимости, т.к. приведены только конечные результаты – достигнутые значения ЛЭ и количества итераций. Отсутствуют сведения о зависимостях, связывающих количество выполненных итераций и изменение значения ЦФ в ЛЭ.

Сравнение работы нескольких алгоритмов, в числе которых есть и реализации КНА, выполнено в работе [10]. При этом используются стандартный набор тестовых функций [11] и статистические характеристики процессов сходимости. Однако указанный набор тестовых функций не дает возможности варьировать в широких пределах характеристики рельефа ЦФ в окрестностях ЛЭ, в частности выпуклость и асимметрию. В работе [12] в экспериментах использовались КНА и тестовая функция с возможностью регулировки некоторых ее характеристик. Но процессы сходимости не исследовались, а лишь фиксировались достигнутые значения ЦФ, а в экспериментах можно было задавать только два разных закона изменения ЦФ по координатам.

Цель данной работы – разработать методику и выполнить экспериментальные исследования сходимости КНА при различных параметрах рельефа ЦФ в окрестностях ЛЭ, включая нарушения гладкости, невыпуклость, анизотропию и асимметрию по координатам.

МЕТОДЫ И МАТЕРИАЛЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Экспериментальные исследования выполнялись с применением программ на языке *MATLAB*¹, реализованных в свободно распространяемой платформе *GNU Octave*². Квазиньютоновский алгоритм в ней реализуется функцией `fminunc(.)`. Но эта функция может возвращать только конечный результат поиска и общее количество вычислений ЦФ, а для анализа характеристик сходимости необходимы все значения ЦФ, рассчитанные в процессе поиска. Для этого была написана новая функция `QNLS_M(.)`, упрощенная структура которой приведена на рис. 1.

1. Вход: \mathbf{X} – стартовая точка, *Options* – настройки алгоритма.
2. Инициализация аппроксимации гессииана \mathbf{B} диагональной матрицей.
3. Расчет ЦФ F и ее градиента \mathbf{g} в стартовой точке.
4. Выполнять итерации поиска до выполнения условия его завершения.
 - 4.1. Определить по \mathbf{B} и \mathbf{g} направление поиска \mathbf{s} .
 - 4.2. Найти подходящую длину шага λ методом линейного поиска.
 - 4.3. Перейти в новую точку $\mathbf{X} = \mathbf{X} + \lambda\mathbf{s}$ и рассчитать значения F и \mathbf{g} в ней.
 - 4.4. Рассчитать \mathbf{B} в соответствии с алгоритмом BFGS³.
 - 4.5. Проверить условия завершения поиска.
5. Выход: **History** – массив, содержащий все рассчитанные в процессе поиска значения ЦФ в порядке, в котором они рассчитывались, и координаты точек, в которых выполнялся расчет.

Рис. 1. Структура функции `QNLS_M(.)`, реализующей КНА

Данная структура является стандартной за исключением п. 5 [1, 2]. В п. 4.2 используется алгоритм линейного поиска, описанный в [8]. В п. 4.4 осуществляется расчет новой аппроксимации гессииана \mathbf{B} при выполнении условия положительной кривизны ЦФ на данной итерации [2]. Расчеты градиента \mathbf{g} и производной по направлению шага линейного поиска проводятся методом конечных разностей. С целью минимизации количества расчетов ЦФ для оценки частной производной по каждой координате x_i

¹ <https://www.mathworks.com/products/matlab.html>. Дата обращения 26.08.2025. / Accessed August 26, 2025.

² <https://octave.org/>. Дата обращения 26.08.2025. / Accessed August 26, 2025.

³ Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno algorithm – Алгоритм Бройдена – Флетчера – Гольдфарба – Шанно – итерационный метод численной оптимизации. [The Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno (BFGS) algorithm is an iterative method for solving unconstrained nonlinear optimization problems.]

берется только одна дополнительная точка со смещением $\Delta x_i = 10^{-8}$.

Условия завершения поиска, значения признака причины завершения ExitFlag и пороговые значения, использовавшиеся в экспериментах, приведены в табл. 1.

Таблица 1. Значения признака причины завершения поиска

ExitFlag	Условие завершения поиска
0	Превышен предел числа итераций $\max_iter = 1000$
1	Выполнен критерий оптимальности 1-го порядка $\max(\ g\) \leq g_tol = 10^{-8}$
2	Выполнено условие на длину шага $\ \lambda s\ \leq \min_step = 10^{-12}$
3	Число итераций подряд, в которых относительное изменение ЦФ меньше $ftol = 1.00001$, превысило заданный порог $\max_Nftol = 4$
4	Не найден шаг, не приводящий к увеличению ЦФ
5	Значение ЦФ меньше заданного порога $FuncTol = 10^{-8}$

В экспериментах использовалась тестовая функция $TestLE6(x, x^*, R, W, K, NS)$, значение которой в точке x вычисляется следующим образом. Сначала выполняются смещение относительно заданного ЛЭ x^* и поворот координат, задаваемый матрицей R :

$$z = (x - x^*)^T R, \quad (2)$$

где T – операция транспонирования. Затем по координатам с индексами от 1 до $ND - NS$, где NS – целое число, выполняется интерполяция значений коэффициента k и показателя степени α и вычисление предварительного значения функции f :

$$k = \frac{1}{\|z\|^2} \sum_{n=1}^{ND-NS} (K_{1n} z_n^2 h(z_n) + K_{2n} z_n^2 h(-z_n)),$$

где $h(y) = \begin{cases} 1, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0, \end{cases} \quad (3)$

$$\alpha = \frac{1}{\|z\|^2} \sum_{n=1}^{ND-NS} (W_{1n} z_n^2 h(z_n) + W_{2n} z_n^2 h(-z_n)),$$

$$f = k \|z\|^\alpha.$$

Переменные K_{ij} и W_{ij} являются элементами матриц K и W , имеющих размеры $2 \times ND$, и представляют значения, соответственно, коэффициентов

и показателей степени по положительным и отрицательным направлениям всех координат пространства поиска. Данный алгоритм был предложен в [13] и обеспечивает возможность произвольного задания параметров степенной функции по разным координатам и плавных изменений этих параметров по промежуточным направлениям.

В случае $NS = 0$ полученное значение функции f является окончательным. В случае $NS > 0$ по координатам с индексами n от $ND - |NS| + 1$ до ND выполняется цикл вычисления:

$$f = f + \max \left[K_{1n} |z(n)|^{W_{1n}} \text{sign}(z(n)), -K_{2n} |z(n)|^{W_{2n}} \text{sign}(z(n)) \right]. \quad (4)$$

В случае же $NS < 0$ по указанным индексам выполняется цикл операций

$$f = \max \left[f, K_{1n} |z(n)|^{W_{1n}} \text{sign}(z(n)), -K_{2n} |z(n)|^{W_{2n}} \text{sign}(z(n)) \right]. \quad (5)$$

В результате формируются исходящие из точки ЛЭ линии, вдоль которых гладкость функции нарушена. При $NS = 0$ гладкость может нарушаться только в точке ЛЭ x^* . Задавая различные комбинации параметров, можно получать как многие известные одномерные ЦФ, так и функции с ранее не встречавшимися свойствами. На рис. 2 приведены примеры графиков функции $TestLE6(\cdot)$ в случае $ND = 2$ и разных значениях NS . Другие параметры функции при этом принимали следующие значения:

$$x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.75 & 1.0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Экспериментальные исследования проводились в виде отдельных опытов, в каждом из которых выполнялись 10 серий по 20 поисков ЛЭ. Стартовые точки поисков задавались случайно на гиперсфере единичного радиуса с центром в x^* . В каждом опыте задавались различные комбинации параметров W, K, NS , а в начале каждой серии поисков выполнялся поворот осей координат с применением формируемой из случайных чисел, а затем ортонормируемой матрицы R . В каждом поиске фиксировались координаты всех точек, в которых выполнялось вычисление ЦФ, и сами значения ЦФ.

В качестве характеристики, обобщающей результаты всех поисков данного опыта, применялась зависимость ожидаемого времени достижения заданного порога ЦФ от значения этого порога, известная в литературе по оптимизации как Expected Run Time и далее обозначаемая ERT. Эта функция определяется следующим образом [14, 15].

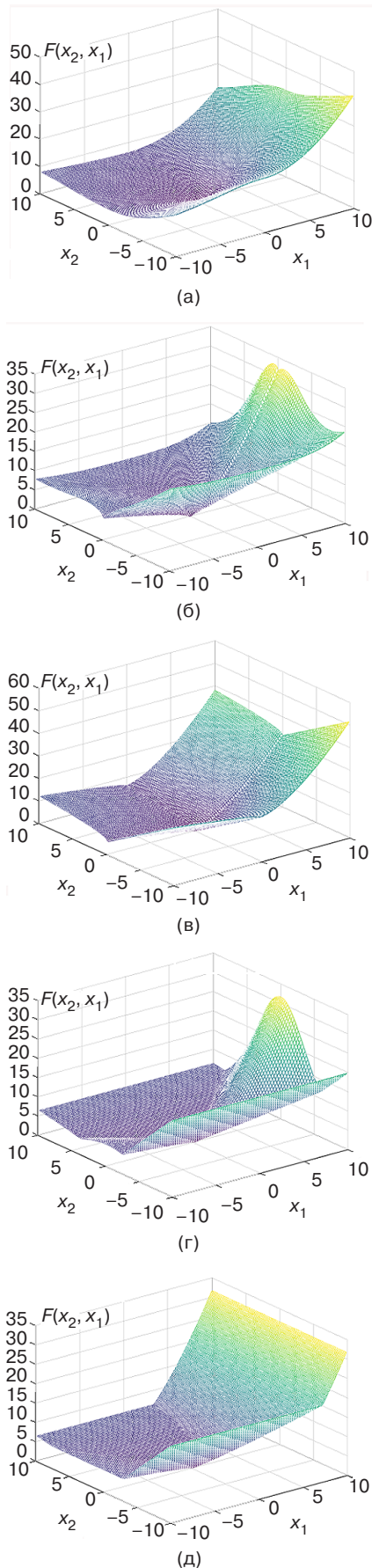


Рис. 2. Графики функции TestLE6(..): (а) $NS = 0$, (б) $NS = 1$, (в) $NS = 2$, (г) $NS = -1$, (д) $NS = -2$

Введем переменную

$$h = -\lg(f), \quad (6)$$

где f – значение ЦФ. Зададим шкалу пороговых уровней

$$h_k = -2 + 0.02(k - 1), \quad k = \overline{1, 51}. \quad (7)$$

Соответствующие пороговые значения ЦФ f_k , получаемые из (6), занимают диапазон от 10^2 до 10^{-8} . Обозначим $Nr_i(h_k)$ – количество вычислений ЦФ выполненных в i -м поиске до достижения порога h_k ; Ne_i – количество вычислений ЦФ до завершения i -го поиска; Ir_k – подмножество поисков, в которых порог h_k достигнут; $|Ir_k|$ – количество таких поисков; Inr_k – подмножество поисков, в которых порог h_k не достигнут. Тогда

$$ERT(h_k) = \frac{\sum_{i \in Ir_k} Nr_i(h_k) + \sum_{i \in Inr_k} Ne_i}{|Ir_k|}. \quad (8)$$

Если порог h_k не достигнут ни в одном из поисков, значение $ERT(h_k)$ оказывается бесконечно большим.

Для сравнения характеристик работы КНА введем определяемые по ERT показатели. Для этого определим следующие границы на шкале порогов:

h_{start} – значение порога, достигнутое в стартовой точке опыта;

h_{all} – максимальное значение порога, достигнутое во всех поисках опыта;

h_{finish} – максимальное значение порога, достигнутое хотя бы в одном из поисков опыта.

Если $h_{all} = 8$, т.е. верхней границе шкалы, то устанавливается $h_{finish} = h_{all}$.

Затем в отрезке $[h_{start}, h_{all}]$ с применением функции *MATLAB/Octave regress(..)* выполняем аппроксимацию зависимости $\lg(f)$ от ERT:

$$\lg(f) = b_{11} \cdot ERT + b_{12} \cdot \lg(ERT) + b_{13}. \quad (9)$$

Определяем также коэффициенты детерминации первых двух слагаемых.

Если отрезок $[h_{all}, h_{finish}]$ содержит больше 2, но меньше 9 делений шкалы порогов, то на всем этом отрезке выполняем аппроксимацию вида (9) и определяем коэффициенты b_{31}, b_{32}, b_{33} и соответствующие коэффициенты детерминации. Если же этот отрезок занимает не меньше 9 делений шкалы порогов, то он разбивается на два отрезка, границу которых на шкале порогов обозначим h_b , и аппроксимацию вида (9) выполняем отдельно на каждом из этих отрезков. При этом коэффициенты аппроксимации

на первом отрезке будем обозначать b_{21}, b_{22}, b_{23} , а на втором – b_{31}, b_{32}, b_{33} . Поиск значения h_b осуществляется методом перебора возможных значений в отрезке $[h_{all}, h_{finish}]$ с расчетом аппроксимаций на двух его частях и последующим выбором значения h_b , при котором среднеквадратическая погрешность аппроксимации минимальна. Разделение отрезка $[h_{all}, h_{finish}]$ позволяет, как показали эксперименты, получать более точные аппроксимации зависимости $\lg(f)$ от ERT на этом участке.

Затем, выполняя потенцирование (9), получаем

$$f = (10^{b_{11}})^{ERT} \cdot ERT^{b_{12}} \cdot 10^{b_{13}}. \quad (10)$$

Обозначим $10^{b_{11}} = q_1, \quad b_{12} = p_1, \quad 10^{b_{13}} = a_1$. Тогда (10) принимает вид:

$$f = a_1 \cdot q_1^{ERT} \cdot ERT^{p_1}. \quad (11)$$

Второй сомножитель в (11) изменяется по закону геометрической прогрессии, что соответствует линейной сходимости [1, 4]. Третий сомножитель изменяется как степенная функция. Таким образом, значения q_1 и p_1 характеризуют законы и скорости сходимости поиска на отрезке $[h_{start}, h_{all}]$. Аналогично определяются значения q_3, p_3 для отрезка $[h_{all}, h_{finish}]$, если этот отрезок не разделяется на два, или значения q_2, p_2 для отрезка $[h_{all}, h_b]$ и значения q_3, p_3 для отрезка $[h_b, h_{finish}]$, если отрезок $[h_{all}, h_{finish}]$ разделяется на два.

Границы отрезков и коэффициенты аппроксимации на этих отрезках могут служить показателями для сравнения сходимости алгоритмов поиска на ЦФ с разными свойствами. В изложенном методе вместо значения ЦФ может рассматриваться расстояние от достигнутой точки x до ЛЭ x^* , во многих случаях используемое в качестве показателя сходимости

поиска [1, 5, 6]. Возможна также аппроксимация зависимости ERT(f) для получения оценок требуемого количества вычислений ЦФ до достижения заданного значения ЦФ – еще одной используемой в ряде случаев характеристики [4, 7].

РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Параметры функции TestLE6(x, x^*, R, W, K, NS), задававшиеся в 18 опытах, приведены в табл. 2. Положение ЛЭ всегда задавалось в начале координат $x^* = 0$.

В опытах 1–6 размерность пространства $ND = 4$, ЦФ – изотропные по всем направлениям. При этом в опытах 1–3 ЦФ выпуклые, в опыте 4 ЦФ изменяется по линейному закону, а в 5 и 6 ЦФ – вогнутые. Целевая функция в опыте 1 всюду гладкая, а в опытах 2–5 нарушение гладкости есть в ЛЭ. В последующих опытах за основу берутся ЦФ из опытов 2 и 5, и в них изменяются какие-либо свойства. В опытах 7–10 вводится анизотропия по направлениям, в 11–14 – увеличивается размерность пространства, в 15–18 – создаются нарушения гладкости на линиях, исходящих из ЛЭ.

Поясним введение анизотропии. Правило расчета элементов W следующее:

$$W_{1i} = W_{2i} = W_{\min} + \frac{(W_{\max} - W_{\min})(i-1)}{ND-1}, \quad i = \overline{1, ND}. \quad (12)$$

В случае $W_{\max} = W_{\min}$ получается $W_{1i} = W_{2i} = W_{\max}$, $i = \overline{1, ND}$, и показатель степени α в (5) не зависит от направления. Аналогично определяются и значения элементов матрицы K . В опыте 9 дополнительно выполнена случайная перестановка элементов строк W , например

$$W(\text{Опыт } 8) = \begin{pmatrix} 0.75 & 1 & 1.25 & 1.5 \\ 0.75 & 1 & 1.25 & 1.5 \end{pmatrix},$$

Таблица 2. Параметры тестовой функции в опытах

Опыт	ND	W_{\max}	W_{\min}	K_{\max}	K_{\min}	NS	Опыт	ND	W_{\max}	W_{\min}	K_{\max}	K_{\min}	NS
1	4	2.00	2.00	1	1	0	10	4	0.75	0.75	1	0.1	0
2	4	1.50	1.50	1	1	0	11	8	1.50	1.50	1	1	0
3	4	1.25	1.25	1	1	0	12	16	1.50	1.50	1	1	0
4	4	1.00	1.00	1	1	0	13	8	0.75	0.75	1	1	0
5	4	0.75	0.75	1	1	0	14	16	0.75	0.75	1	1	0
6	4	0.50	0.50	1	1	0	15	4	1.50	1.50	1	1	2
7	4	1.50	1.50	10	1	0	16	4	1.50	1.50	1	1	-2
8	4	1.50	0.75	1	1	0	17	4	0.75	0.75	1	1	2
9	4	1.50*	0.75*	1	1	0	18	4	0.75	0.75	1	1	-2

$$W(\text{Опыт 9}) = \begin{pmatrix} 1 & 1.25 & 1.5 & 0.75 \\ 0.75 & 1.5 & 1 & 1.25 \end{pmatrix}.$$

В табл. 3 приведены причины завершения поиска в опытах (табл. 1). Здесь EF_1 (Exit Flag) – признак чаще всего встретившейся в данном опыте причины, PEF_1 – вероятность этой причины. Далее по убыванию вероятности приводятся другие встретившиеся в опыте причины остановки. Эти данные показывают, что если хотя бы по части координат функция выпуклая, т.е. среди элементов матрицы W есть превышающие 1, то поиск доходит до значения $f = 10^{-8}$. В противном случае поиск останавливается раньше по другим причинам.

На рис. 3 и рис. 4 представлены графики ERT, полученные в выполненных экспериментах, а в табл. 4 – результаты аппроксимации этих зависимостей. Для лучшей наглядности в качестве аргумента используются не пороги h_k , а получаемые из них с помощью (6) значения f с теми же индексами, например, $f_{all} = 10^{-h_{all}}$. Значения $\lg(f_{start})$ в таблице не приведены, их можно определить по точке начала увеличения ERT. Коэффициенты аппроксимации отображаются в формате P/R^2 , где P – значение q или p ; R^2 – соответствующий коэффициент детерминации. На графиках показаны только точки, в которых значения ERT конечные.

Перейдем к анализу результатов экспериментов. В случае изотропной квадратичной функции в опыте 1 КНА после первой же итерации точно находит ЛЭ, что отображается горизонтальной линией на рис. 3. Аппроксимация вида (9) при этом оказывается крайне неточной. Соответствующие значения в табл. 4 выделены жирным шрифтом.

В опытах 4 и 6, в которых показатель степени ЦФ равен, соответственно, 1 и 0.5, КНА после первой итерации также скачком переходит в точки

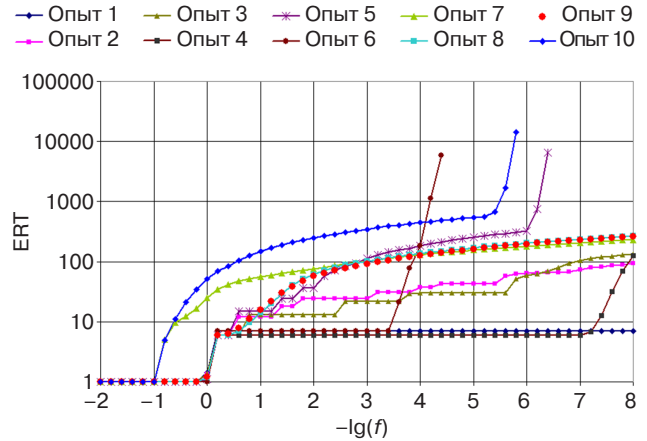


Рис. 3. Графики ERT опытов с 1 по 10

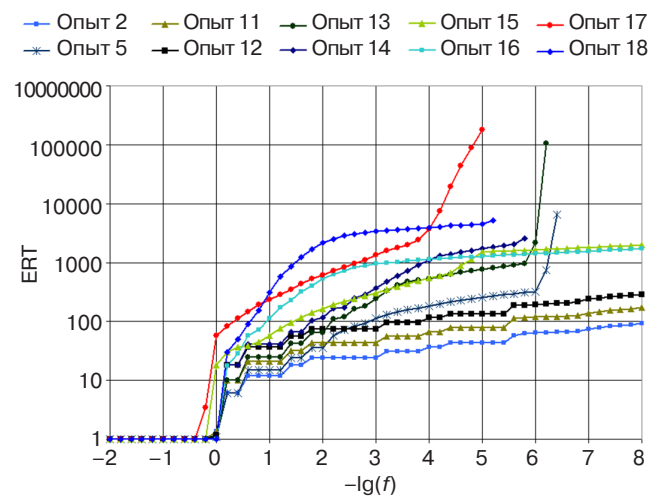


Рис. 4. Графики ERT опытов 2, 5 и с 11 по 18

с $f = f_{all}$. На отрезках $[f_{all}, f_{finish}]$ поиск замедляется, и эти участки с хорошей точностью аппроксимируются степенным законом, а убывание по закону геометрической прогрессии отсутствует, т.к. $q_3 = 1.00$. В опытах 2, 3 и 5, в которых показатели степени равны, соответственно, 1.5, 1.25 и 0.75, такого

Таблица 3. Статистика причин завершения поиска в опытах

Опыт	EF_1	PEF_1	EF_2	PEF_2	Опыт	EF_1	PEF_1	EF_2	PEF_2	EF_3	PEF_3	EF_4	PEF_4
1	5	0.970	1	0.03	10	2	1.000	–	–	–	–	–	–
2	5	1.000	–	–	11	5	1.000	–	–	–	–	–	–
3	5	1.000	–	–	12	5	1.000	–	–	–	–	–	–
4	2	0.530	5	0.47	13	2	1.000	–	–	–	–	–	–
5	2	1.000	–	–	14	2	1.000	–	–	–	–	–	–
6	2	0.990	4	0.01	15	5	0.650	2	0.340	3	0.010	–	–
7	5	1.000	–	–	16	5	0.685	2	0.155	3	0.140	4	0.020
8	5	1.000	–	–	17	2	0.895	4	0.080	3	0.025	–	–
9	5	1.000	–	–	18	2	0.450	4	0.300	3	0.250	–	–

скачкообразного уменьшения ЦФ не наблюдается. Отрезок $[f_{start}, f_{all}]$ в опытах 2 и 5 достаточно точно аппроксимируется геометрической прогрессией.

В последующих опытах изменялись параметры ЦФ из опытов 2 и 5. Как видно из графиков на рис. 3, введение в ЦФ вида (5) анизотропии как по коэффициенту (опыты 7 и 10), так и по показателю степени (опыты 8 и 9), приводит к смещению ERT вверх, т.е. к замедлению поиска. При этом случайная перестановка показателей степени по координатам в опыте 9 не изменила ERT по сравнению с опытом 8. Во всех этих опытах отрезок $[f_{start}, f_{all}]$ с высокой точностью аппроксимируется геометрической прогрессией, а отрезок $[f_{all}, f_{finish}]$, имеющий место в опыте 10, – степенной функцией.

Влияние размерности ND пространства поиска отображено на рис. 4 (опыты 11–14). Как и следовало ожидать, при увеличении ND сходимость замедляется. При этом в случае выпуклой ЦФ (опыты 2, 11 и 12) каждое увеличение ND в 2 раза приводит к равному смещению ERT вверх на логарифмической шкале при сохранении линейной сходимости. В случае вогнутой ЦФ (опыты 5, 13 и 14) явных закономерностей не наблюдается.

Введение нарушений гладкости вдоль полубесконечных линий, начинающихся в ЛЭ, в случае

выпуклой ЦФ (опыты 2, 15 и 16), приводит к замедлению поиска, который теперь достигает предела $f = 10^{-8}$ далеко не во всех стартах. В случае вогнутой ЦФ (опыты 5, 17 и 18), помимо этого, увеличивается значение достигаемого хотя бы в одном старте минимума f_{all} . Во всех опытах 15–18 отрезок $[f_{start}, f_{all}]$ с хорошей точностью аппроксимируется геометрической прогрессией, а в аппроксимацию отрезков $[f_b, f_{finish}]$ и $[f_b, f_{finish}]$ основной вклад вносит степенная функция, т.к. значения q_2, q_3 близки к единице. Необычно большие значения $|p_2|$ и $|p_3|$ в результатах некоторых опытов, возможно, получаются вследствие медленного изменения ERT на соответствующих участках.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из результатов экспериментов можно сделать вывод, что разделение диапазона порогов ERT на отрезки предложенным способом и аппроксимация вида (9) на этих отрезках зависимостей $f(ERT)$ позволяют выявить некоторые закономерности. Наличие выпуклости ЦФ хотя бы по части направлений обеспечивает достижение минимального порога $f = 10^{-8}$. На отрезках $[f_{start}, f_{all}]$, включающих значения ЦФ, достигаемые во всех поисках, сходимость

Таблица 4. Результаты аппроксимации ERT в опытах

Опыт	$\lg f_{all}$	$\lg f_b$	$\lg f_{finish}$	ERT(f_{all})	ERT(f_b)	ERT(f_{all})	q_1	p_1	q_2	p_2	q_3	p_3
1	-8.0	-	-8.0	7.00	-	-	0.15/0.14	0.74/0.14	-	-	-	-
2	-8.0	-	-8.0	93.2	-	-	0.84/0.96	-1.06/0.78	-	-	-	-
3	-8.0	-	-8.0	134	-	-	0.96/0.78	-3.39/0.87	-	-	-	-
4	-7.2	-	-8.0	6.77	-	126	0.00/0.19	14.0/0.17	-	-	1.00/0.94	-0.56/1.00
5	-5.8	-	-6.4	308	-	$6.56 \cdot 10^3$	0.97/0.96	-0.97/0.87	-	-	1.00/0.79	-0.58/0.94
6	-3.4	-	-4.4	7.00	-	$5.86 \cdot 10^3$	0.00/0.30	66.7/0.29	-	-	1.00/0.70	-0.33/0.98
7	-8.0	-	-8.0	232	-	-	0.91/1.00	0.057/0.72	-	-	-	-
8	-8.0	-	-8.0	270	-	-	0.94/1.00	-0.11/0.75	-	-	-	-
9	-8.0	-	-8.0	263	-	-	0.94/1.00	-0.28/0.76	-	-	-	-
10	-5.2	-	-5.8	563	-	$14.3 \cdot 10^3$	0.98/1.00	-0.26/0.73	-	-	1.00/0.80	-0.58/0.95
11	-8.0	-	-8.0	170	-	-	0.91/0.96	-0.84/0.74	-	-	-	-
12	-8.0	-	-8.0	290	-	-	0.94/0.96	-0.60/0.68	-	-	-	-
13	-5.8	-	-6.2	951	-	$106 \cdot 10^3$	0.99/0.92	-1.01/0.88	-	-	-	-
14	-4	-5.4	-5.8	1.11k	$1.96 \cdot 10^3$	$2.53 \cdot 10^3$	1.00/0.75	-1.04/0.88	1.00/0.99	-6.66/1.00	1.02/0.89	-52.4/0.90
15	-4.2	-5.2	-8.0	602	$1.53 \cdot 10^3$	$1.98 \cdot 10^3$	0.94/0.99	-0.39/0.83	1.07/0.86	-14.8/0.90	0.75/0.99	64.0/0.99
16	-0.8	-3.6	-8.0	71.9	$1.09 \cdot 10^3$	$1.73 \cdot 10^3$	0.98/0.98	-0.064/0.80	0.99/0.98	0.19/0.91	0.99/1.00	-11.4/1.00
17	-0.6	-3.8	-5.0	140	$2.45 \cdot 10^3$	$177 \cdot 10^3$	0.99/0.97	-0.33/0.84	1.00/0.94	-2.14/0.99	1.00/0.77	-0.61/0.99
18	-0.6	-3	-5.2	89.3	$3.40 \cdot 10^3$	$5.25 \cdot 10^3$	0.97/0.98	-0.894/0.80	1.00/0.99	-0.19/0.90	1.01/0.91	-51.3/0.94

может считаться линейной с достаточно высокой точностью, а на отрезках $[f_{\text{all}}, f_{\text{finish}}]$, где значения ЦФ достигаются не во всех поисках, преобладает сходимость по степенному закону вида ERT^p .

Некоторые результаты вызывают вопросы. На отрезках $[f_{\text{all}}, f_{\text{finish}}]$ значения ЦФ достигаются не во всех поисках. В случаях, когда ЦФ анизотропная (опыты 10 и 15–17), это объяснимо. Но в опытах 4–6 и 14 ЦФ изотропная, и все стартовые точки должны давать одинаковый результат поиска. Возможно, что в этих случаях разброс конечных результатов поиска связан со случайными ошибками округления при вычислениях в КНА.

Проведенные исследования, конечно, не дают полной информации о зависимостях характеристик сходимости КНА от свойств рельефа ЦФ, т.к. в них эти свойства изменялись по отдельности

и в ограниченных диапазонах. Для получения более полной картины необходимо менять свойства рельефа в разных сочетаниях и с большим количеством значений параметров. При этом потребуется большой объем экспериментов и обработки данных. Реализация такой программы, видимо, будет возможна с использованием автоматизации планирования экспериментов, сбора и обработки данных, в т.ч. с применением технологий искусственного интеллекта.

Еще одно представляющее интерес направление – распространение метода на другие виды алгоритмов поиска оптимальных решений, в частности, на популяционные алгоритмы. Это позволит сравнивать характеристики сходимости разных алгоритмов, что необходимо для выбора наилучших алгоритмов для задач разных типов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поляк Б.Т. *Введение в оптимизацию*. М.: Наука; 1983, 384 с.
2. Nocedal J., Wright S. *Numerical Optimization*: 2nd ed. Springer; 2006, 684 p.
3. Демьянов В.Ф., Васильев Л.В. *Недифференцируемая оптимизация*. М.: Наука; 1981, 384 с.
4. Воронцова Е.А., Хильдебранд Р.Ф., Гасников А.В., Стонякин Ф.С. *Выпуклая оптимизация*. М.: МФТИ; 2021, 364 с. ISBN 978-5-7417-0776-0
5. Пучинин С.М., Корольков Е.Р., Стонякин Ф.С., Алкуса М.С., Выгузов А.А. Субградиентные методы с шагом типа Б.Т. Поляка для задач минимизации квазивыпуклых функций с ограничениями-неравенствами и аналогами острого минимума. *Компьютерные исследования и моделирование*. 2024;16(1):105–122. <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2024-16-1-105-122>
6. Bento G.C., Mordukhovich B.S., Mota T.S., Nesterov Yu. Convergence of Descent Methods under Kurdyka-Lojasiewicz Properties. *arXiv Preprint*. 2024. <http://arxiv.org/pdf/2407.00812v1>
7. Grimmer B., Jia Zh. Goldstein Stationarity in Lipschitz Constrained Optimization. *Optim. Lett.* 2025;19:225–235. <https://doi.org/10.1007/s11590-024-02158-1>
8. Lewis A.S., Overton M.L. Nonsmooth optimization via quasi-Newton methods. *Math. Program.* 2013;141:135–163. <https://doi.org/10.1007/s10107-012-0514-2>
9. Tor A.H. Comparative numerical results on HANSO (Hybrid Algorithm for Nonsmooth Optimization). *arXiv Preprint*. 2020. <http://arxiv.org/pdf/2009.01037v1>
10. Varelas K., Dahito M.-A. Benchmarking Multivariate Solvers of SciPy on the Noiseless Testbed. In: *GECCO 2019 Companion – The Genetic and Evolutionary Computation Conference*, Jul. 2019, Prague, Czech Republic. 2019. P. 1946–1954. <https://doi.org/10.1145/3319619.3326891>
11. Hansen N., Finck S., Ros R., Auger A. *Real-Parameter Black-Box Optimization Benchmarking 2009: Noiseless Functions Definitions*. [Research Report] RR-6829. INRIA; 2009. URL: <https://hal.inria.fr/inria-00362633v2>. Дата обращения 26.08.2025. / Accessed August 26, 2025.
12. Смирнов А.В. Исследование влияния степени овражности целевой функции на погрешность определения координат ее минимума. *Russian Technological Journal*. 2023;11(6):57–67. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2023-11-6-57-67>
13. Смирнов А.В. Метод оценки выпуклости рельефа целевых функций в процессе поиска экстремума. *Russian Technological Journal*. 2025;13(2):121–131. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-2-121-131>
14. Hansen N., Auger A., Ros R., Mersmann O., Tusar T., Brockhoff D. COCO: A Platform for Comparing Continuous Optimizers in a Black-Box Setting. *Optim. Meth. Software*. 2021;36(1):114–144. <https://doi.org/10.1080/10556788.2020.1808977>
15. Wang H., Vermetten D., Ye F., Doerr C., Back T. IOHanalyzer: Detailed Performance Analyses for Iterative Optimization Heuristics. *ACM Transaction on Evolutionary Learning and Optimization*. 2022;2(1):1–29. <https://doi.org/10.1145/3510426>

REFERENCES

1. Polyak B.T. *Vvedenie v optimizatsiyu (Introduction into Optimization)*. Moscow: Nauka; 1983, 384 p. (In Russ.).
2. Nocedal J., Wright S. *Numerical Optimization*: 2nd ed. Springer; 2006, 684 p.
3. Dem'yanov V.F., Vasil'ev L.V. *Nedifferentsiruemaya optimizatsiya (Non-differentiable Optimization)*. Moscow: Nauka; 1981, 384 p. (In Russ.).

4. Vorontsova E.A., Hilderbrand R.F., Gasnikov A.V., Stonyakin F.S. *Vypuklaya optimizatsiya (Convex Optimization)*. Moscow: MPTI; 2021, 364 p. (In Russ.). ISBN 978-5-7417-0776-0
5. Puchinin S.M., Korolkov E.R., Stonyakin F.S., Alkousa M.S., Vyuzov A.A. Subgradient methods with B.T. Polyak-type step for quasiconvex minimization problems with inequality constraints and analogs of the sharp minimum. *Komp'yuternye issledovaniya i modelirovanie = Computer Research and Modeling*. 2024;16(1):105–122 (in Russ.). <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2024-16-1-105-122>
6. Bento G.C., Mordukhovich B.S., Mota T.S., Nesterov Yu. Convergence of Descent Methods under Kurdyka-Lojasiewicz Properties. *arXiv. Preprint*. 2024. <http://arxiv.org/pdf/2407.00812v1>
7. Grimmer B., Jia Zh. Goldstein Stationarity in Lipschitz Constrained Optimization. *Optim. Lett.* 2025;19:225–235. <https://doi.org/10.1007/s11590-024-02158-1>
8. Lewis A.S., Overton M.L. Nonsmooth optimization via quasi-Newton methods. *Math. Program.* 2013;141:135–163. <https://doi.org/10.1007/s10107-012-0514-2>
9. Tor A.H. Comparative numerical results on HANSO (Hybrid Algorithm for Nonsmooth Optimization). *arXiv. Preprint*. 2020. <http://arxiv.org/pdf/2009.01037v1>
10. Varelas K., Dahito M.-A. Benchmarking Multivariate Solvers of SciPy on the Noiseless Testbed. In: *GECCO 2019 Companion – The Genetic and Evolutionary Computation Conference*, Jul. 2019, Prague, Czech Republic. 2019. P. 1946–1954. <https://doi.org/10.1145/3319619.3326891>
11. Hansen N., Finck S., Ros R., Auger A. *Real-Parameter Black-Box Optimization Benchmarking 2009: Noiseless Functions Definitions*. [Research Report] RR-6829. INRIA; 2009. Available from URL: <https://hal.inria.fr/inria-00362633v2>. Accessed August 26, 2025.
12. Smirnov A.V. Investigation of influence of objective function valley ratio on the determination error of its minimum coordinates. *Russian Technological Journal*. 2023;11(5):57–67. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2023-11-6-57-67>
13. Smirnov A.V. The method of estimation of objective functions landscapes convexity during extremum search. *Russian Technological Journal*. 2025;13(2):121–131. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-2-121-131>
14. Hansen N., Auger A., Ros R., Mersmann O., Tusar T., Brockhoff D. COCO: A Platform for Comparing Continuous Optimizers in a Black-Box Setting. *Optim. Meth. Software*. 2021;36(1):114–144. <https://doi.org/10.1080/10556788.2020.1808977>
15. Wang H., Vermetten D., Ye. F., Doerr C., Back T. IOHalyzer: Detailed Performance Analyses for Iterative Optimization Heuristics. *ACM Transaction on Evolutionary Learning and Optimization*. 2022;2(1):1–29. <https://doi.org/10.1145/3510426>

Об авторе

Смирнов Александр Витальевич, к.т.н., доцент, профессор кафедры телекоммуникаций, Институт радиоэлектроники и информатики, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: av_smirnov@mirea.ru. Scopus Author ID 56380930700, SPIN-код РИНЦ 1616-0120, <https://orcid.org/0000-0002-2696-8592>

About the Author

Alexander V. Smirnov, Cand. Sci. (Eng.), Professor, Department of Telecommunications, Institute of Radio Electronics and Informatics, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: av_smirnov@mirea.ru. Scopus Author ID 56380930700, RSCI SPIN-code 1616-0120, <https://orcid.org/0000-0002-2696-8592>