

Математическое моделирование
Mathematical modeling

УДК 51-74:621.791.92

<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-6-127-138>

EDN ORZKBC



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Нестационарная задача теплопроводности в технологии газотермического напыления защитных покрытий

М.Е. Соловьев ^{1, @}, С.С. Кокарев ², С.Л. Балдаев ³,
Л.Х. Балдаев ³, Д.В. Малышев ¹

¹ Ярославский государственный технический университет, Ярославль, 150023 Россия

² Региональный научно-образовательный центр «Логос», Ярославль, 150000 Россия

³ ООО «Технологические системы защитных покрытий», Москва, Щербинка, 108851 Россия

@ Автор для переписки, e-mail: me_s@mail.ru

• Поступила: 26.03.2025 • Доработана: 18.05.2025 • Принята к опубликованию: 06.10.2025

Резюме

Цели. Газотермическое напыление и порошковая лазерная наплавка – перспективные технологии, широко применяемые в различных отраслях промышленности, включая аэрокосмическую, энергетическую и машиностроительную отрасли. Одним из ключевых аспектов данных технологий является управление тепловыми процессами, возникающими при нанесении покрытий, т.к. они напрямую влияют на качество и долговечность получаемых материалов и изделий. В данной статье рассматривается нестационарная задача теплопереноса при однопроходном напылении на полупространство. Целью работы является моделирование распределения температуры в материальном полупространстве, на границе которого действует движущийся источник тепла.

Методы. Теоретическое исследование распределения температуры на поверхности и в толще обрабатываемого материала в процессе движения головки распылителя осуществлялось путем решения уравнения нестационарной теплопроводности в декартовых координатах. Особенностью уравнения является специальный вид функции плотности мощности источника тепла в виде тепловой полосы, моделирующей процесс теплопередачи от дорожки напыления в материальное полупространство основы детали.

Результаты. В результате исследования полученного решения, представляющего эволюцию во времени температуры в различных точках среды, установлено, что через некоторое время после прохождения импульса нагрева температура внутри среды довольно быстро достигает максимального значения, а затем она относительно медленно релаксирует к равновесной температуре окружающей среды. По мере углубления в толщу среды тепловой импульс расплывается, уменьшается его амплитуда и увеличивается ширина, а время достижения максимума монотонно увеличивается. Поперечное распределение температуры имеет вид симметричных пиков, менее выраженных в глубине.

Выводы. Полученное решение может быть полезным при описании общего температурного поля на некотором удалении от области действия головки распылителя, где конкретные детали нагрева не проявляются. В частности, в работе показано, что в окрестности действия первичной области напыления возникают значительные градиенты температур, которые вызывают заметные нестационарные температурные напряжения.

Ключевые слова: газотермическое напыление, порошковая лазерная наплавка, нестационарное уравнение теплопроводности, температурное поле, температурная волна, граничные условия Ньютона – Рихмана, функция Грина для уравнения теплопроводности

Для цитирования: Соловьев М.Е., Кокарев С.С., Балдаев С.Л., Балдаев Л.Х., Малышев Д.В. Нестационарная задача теплопроводности в технологии газотермического напыления защитных покрытий. *Russian Technological Journal*. 2025;13(6):127–138. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-6-127-138>, <https://www.elibrary.ru/ORZKBC>

Прозрачность финансовой деятельности: Авторы не имеют финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

RESEARCH ARTICLE

Unsteady heat transfer problem during single-pass spraying on a half-space

Mikhail E. Soloviev^{1, @}, Sergey S. Kokarev², Sergey L. Baldaev³,
Lev Kh. Baldaev³, Denis V. Malyshev¹

¹ Yaroslavl State Technical University, Yaroslavl, 150023 Russia

² Regional Scientific and Educational Center “Logos,” Yaroslavl, 150000 Russia

³ Technological Systems for Protective Coatings, Moscow, Shcherbinka, 108851 Russia

@ Corresponding author, e-mail: me_s@mail.ru

• Submitted: 26.03.2025 • Revised: 18.05.2025 • Accepted: 06.10.2025

Abstract

Objectives. Thermal spraying and powder laser cladding are promising technologies widely used in various industries, including aerospace, energy, and mechanical engineering. The efficiency of these technologies depends on the management of thermal processes occurring during coating application, which directly affect the quality and durability of the resulting materials and products. This article considers a nonstationary problem of heat transfer during single-pass spraying on a half-space. The research aim was to simulate the temperature distribution in a material half-space upon the action of a moving heat source on its boundary.

Methods. A theoretical study of the temperature distribution on the surface and in the bulk of the processed material during movement of the spray head was carried out by solving the equation of nonstationary thermal conductivity in Cartesian coordinates. This equation employs a special type of the heat source power density function in the form of a thermal strip, simulating the process of heat transfer from the spray path to the material half-space of the part base.

Results. The obtained solution representing the evolution of temperature in time at different points of the medium shows that at a certain point of time after the passage of the heating pulse, the temperature inside the medium reaches its maximum value rapidly followed by its relatively slow relaxation to the equilibrium temperature of the environment. Penetrating deeper into the bulk of the medium, the thermal pulse is spreading out while decreasing its amplitude and increasing its width, accompanied by a monotonic increase in the time to reach the maximum. The transverse temperature distribution has the form of symmetrical peaks, less pronounced in depth.

Conclusions. The obtained solution can be used when describing the general temperature field at some distance from the spray head area, where specific heating details are lacking. In particular, the work shows that significant temperature gradients arise in the vicinity of the primary spray area, which will cause noticeable nonstationary temperature stresses.

Keywords: gas-thermal spraying, powder laser cladding, nonstationary heat conduction equation, temperature field, temperature wave, Newton–Richmann boundary conditions, Green’s function for the heat equation

For citation: Soloviev M.E., Kokarev S.S., Baldaev S.L., Baldaev L.Kh., Malyshev D.V. Unsteady heat transfer problem during single-pass spraying on a half-space. *Russian Technological Journal*. 2025;13(6):127–138. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-6-127-138>, <https://www.elibrary.ru/ORZKBC>

Financial disclosure: The authors have no financial or proprietary interest in any material or method mentioned.

The authors declare no conflicts of interest.

ВВЕДЕНИЕ

В современном машиностроении широко используются технологии нанесения порошковых покрытий методом газотермического напыления [1, 2] и лазерной наплавки [3, 4]. Эти методы позволяют не только эффективно восстанавливать изношенные поверхности деталей, но и создавать специализированные покрытия с уникальным набором характеристик, включая повышенную теплостойкость, износостойкость и химическую стойкость [5, 6]. Лазерная наплавка также стала фундаментальной технологией в области аддитивного производства металлических изделий, в ходе которого деталь производится путем послойного нанесения порошкового материала [7, 8]. Суть этих технологий заключается в нагреве порошкообразных материалов до температур, превышающих их температуру плавления, с последующим нанесением на поверхность детали посредством высокоскоростного газового потока. Отличительной особенностью лазерной наплавки является использование инфракрасного лазера в качестве источника нагрева частиц. Лазерный луч фокусируется на поверхности детали или в непосредственной близости от нее, что обеспечивает более точный контроль температуры наплавляемого материала и прецизионное позиционирование дорожки наплавки. В случае обычного газотермического напыления разогрев материала производится непосредственно в головке распылителя. Элементарной технологической операцией данных процессов является однократный проход плазменной свечи вдоль обрабатываемой поверхности и как результат – появление одинарной тонкой расплавленной дорожки на этой поверхности со скоростью, равной скорости движения плазменной свечи. В настоящей работе рассматривается именно эта элементарная операция, поскольку именно она и формирует в основном качество покрытия.

Для оптимизации рассматриваемых технологий и повышения качества получаемых покрытий и изделий критически важно понимание теплофизических процессов, происходящих при взаимодействии расплавленного материала

с обрабатываемой поверхностью [9–11]. В частности, особый интерес представляет распределение температуры в материале подложки во время и после прохождения головки распылителя [12]. Отмечается также важность точного контроля тепловложения для получения желаемой микроструктуры покрытия [13, 14].

Методы математического моделирования широко используются для оптимизации технологии напыления и прогнозирования свойств формирующихся покрытий [15–17]. Для моделирования распределения температуры в дорожке напыления используются численные методы, такие как метод конечных элементов [13, 18, 19]. Авторы работы [20] с использованием метода конечных объемов исследовали влияние распределения температуры при лазерной наплавке на процесс плавления порошкообразного металла в дорожке наплавки и влияние эффекта Марангони на размер зоны плавления. Также данный метод был использован в работе [21] для численного моделирования процессов тепломассопереноса в трехмерной постановке задачи при моделировании порошковой лазерной наплавки нержавеющей стали. Показано, что распределение температуры в дорожке наплавки является критическим фактором, определяющим форму профиля ее сечения. Помимо мощности источника излучения на распределение температуры в дорожке напыления оказывает влияние скорость движения головки напыления относительно поверхности образца и расход порошка [22, 23].

Наряду с численными методами полезным оказывается использование и аналитических методов, применение которых позволяет описать движущийся источник тепла, предсказать скорость охлаждения [13, 24] и оценить форму бассейна расплавленного металла [25].

Если не интересоваться детальным распределением тепловых величин в объеме дорожки и их динамикой во времени, то процессы теплопереноса при напылении можно описать упрощенной моделью, в которой напыление порождает локализованный на линии действия плазменной струи и локализованный во времени источник тепла. В дальнейшем эту

модель можно принять за нулевое (главное) приближение и все остальные детали процесса учитывать в форме поправок, в которых параметром малости будет отношение ширины дорожки к характерному размеру обрабатываемой поверхности.

В настоящей статье рассматривается задача о нестационарном распределении температуры в бесконечном однородном полупространстве, на границе которого имеется растущая во времени «тепловая линия» – источник тепла, локализованный на геометрическом луче, начало которого движется на плоской границе с постоянной скоростью. В такой постановке задача несколько нестандартна, поскольку вместо начальных условий она имеет асимптотическое условие для поля температур: при $t \rightarrow -\infty$ поле температуры полупространства стремится к постоянному значению – температуре окружающей среды.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Абстрагируясь от размеров и формы поверхности напыления, рассмотрим эту поверхность как границу бесконечного полупространства, заполненного теплопроводящим веществом с постоянными температуропроводностью α и удельной объемной теплоемкостью c . На этой поверхности рассмотрим непрерывно растущую со скоростью \vec{v} тепловую полосу, которая состоит из точечных мгновенных источников тепла с мощностью выделения тепловой энергии $q_0(t)$ как некоторой убывающей функции времени (рис. 1).

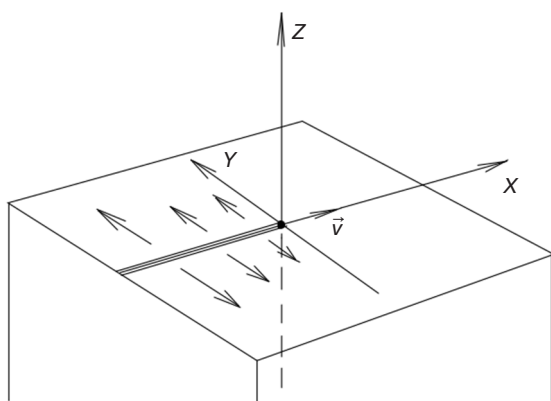


Рис. 1. Тепловая полоса на поверхности полубесконечного материального полупространства

Оси неподвижной системы координат ориентированы, как показано на рис. 1. В выбранной системе координат плотность мощности источников тепла рассматриваемого типа описывается соотношением

$$q(t, x, y, z) = q_0(t, x)\delta(z)\delta(y)\delta(x - vt), \quad (1)$$

где δ – дельта-функция Дирака. Условный момент $t = 0$ показан на рис. 1. Условному моменту $t = 0$

не соответствуют какие-либо начальные условия, поскольку тепловая полоса начинает формироваться при $t \rightarrow -\infty$.

Функция $q_0(t, x)$ в рамках рассматриваемой модели задается внешним образом: она моделирует процесс теплопередачи от тепловой полосы в материал полупространства и зависит от многих физических параметров в процессе напыления. В настоящей статье примем простейшую модель «ступенчатого теплового высвечивания», в которой

$$q_0(t, x) = k(\theta(t - x/v) - \theta(t - x/v - \tau)), \quad (2)$$

где k – постоянная эффективная тепловая мощность высвечивания; τ – эффективное время теплового высвечивания (эффективные величины представляют упрощенную модель теплообмена линии источников тепла, в которой источник тепла движется вдоль линии со скоростью свечи и передает тепло материалу полупространства с постоянной мощностью k в течение конечного промежутка времени τ в каждой точке линии источников); $\theta(x)$ – стандартная ступенчатая функция Хевисайда.

Уравнение теплопроводности для рассматриваемой задачи будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \dot{T} - \alpha \Delta T = \\ = p\delta(y)\delta(z)\delta(x - vt)(\theta(t - x/v) - \theta(t - x/v - \tau)), \end{aligned} \quad (3)$$

где T – температура в рассматриваемой области, α – коэффициент температуропроводности, $p = k/c$ и область изменения переменных: $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $z \in (-\infty, 0)$, $t \in \mathbb{R}$.

Уравнение (3) должно быть дополнено граничными условиями Ньютона – Рихмана, заданными на границе полупространства в виде:

$$\left. \frac{-\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = \beta(T|_{z=0} - T_0), \quad (4)$$

где β – приведенный коэффициент теплоотдачи, равный отношению коэффициента теплопередачи на границе «материал-воздух» к теплопроводности материала; T_0 – температура окружающей среды (воздуха), которая совпадает с температурой в асимптотическом начальном условии, знак «минус» в левой части соответствует охлаждению

$$T|_{t \rightarrow \infty} = T_0 = \text{const}, \quad (5)$$

играющему роль начального условия в рассматриваемой постановке задачи и необходимому для ее корректной постановки.

РЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ

Будем искать частное решение неоднородного уравнения (3) с помощью функции Грина G для оператора теплопроводности

$$\left(\frac{\partial}{\partial t'} - \alpha \Delta'\right) G(t-t', \vec{r} - \vec{r}') = \delta(t-t') \delta^3(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (6)$$

которая с точностью до произвольного решения однородного уравнения определяется формулой:

$$G(t-t', \vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{(2\sqrt{\alpha\pi}(t-t'))^3} e^{-|\vec{r}-\vec{r}'|^2/4\alpha(t-t')} \theta(t-t'), \quad (7)$$

\vec{r} соответствует текущей точке (x, y, z) .

Частное решение $\bar{T}(t, \vec{r})$ уравнения (3), соответствующее (7), принимает вид:

$$\begin{aligned} \bar{T}(t, \vec{r}) = & \int_{-\infty}^t dt' \int_{\mathbb{R}^3} d^3\vec{r}' \frac{1}{(2\sqrt{\alpha\pi}(t-t'))^3} e^{-((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2)/4\alpha(t-t')} \times \\ & \times p \delta(y') \delta(z') \delta(x'-vt') (\theta(t'-x'/v) - \theta(t'-x'/v - \tau)). \end{aligned} \quad (8)$$

Интегрирование по y', z' приводит к следующей промежуточной формуле для частного решения:

$$\bar{T}(t, \vec{r}) = \frac{p}{(2\sqrt{\alpha\pi})^{3/2}} \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \frac{e^{-((x-x')^2 + y^2 + z^2)/4\alpha(t-t')}}{(t-t')^{3/2}} \delta(x'-vt') (\theta(t'-x'/v) - \theta(t'-x'/v - \tau)). \quad (9)$$

Для корректного интегрирования по переменным (x, t) перейдем к запаздывающей и опережающей комбинациям исходных переменных:

$$r = x' - vt', \quad s = x' + vt' \Leftrightarrow t' = \frac{s-r}{2v}, \quad x' = \frac{s+r}{2}. \quad (10)$$

Элемент объема заменится по правилу: $dt' dx' = ds dr / 2v$, область интегрирования (в координатах x', t' представляющая собой полуплоскость $t' \leq t$) перейдет в полуплоскость $s - r - 2vt \leq 0$.

В новых переменных интеграл (9) примет вид

$$\bar{T}(t, \vec{r}) = \frac{p}{2v(2\sqrt{\alpha\pi})^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} ds \int_{s-2vt}^{+\infty} dr \frac{e^{-((x-(s+r)/2)^2 + y^2 + z^2)/4\alpha(t-(s-r)/2v)}}{(t-(s-r)/2v)^{3/2}} \delta(r) (\theta(-r/v) - \theta(-r/v - \tau)). \quad (11)$$

Интегрирование по переменной r вместо δ -функции дает 0, если $s - 2vt > 0$ и 1 при противоположном дополнительном равенстве при подстановке $r = 0$ во все вхождения переменной r . Эта ситуация универсальным образом описывается множителем $\theta(2vt - s)$, что в итоге приводит к интегралу

$$\begin{aligned} \bar{T}(t, \vec{r}) = & \frac{p}{2v(2\sqrt{\alpha\pi})^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} ds \frac{e^{-((x-s/2)^2 + y^2 + z^2)/4\alpha(t-s/2v)}}{(t-s/2v)^{3/2}} \theta(2vt-s) = \\ = & \frac{p}{2v(2\sqrt{\alpha\pi})^{3/2}} \int_{-\infty}^{2vt} ds \frac{e^{-((x-s/2)^2 + y^2 + z^2)/4\alpha(t-s/2v)}}{(t-s/2v)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Введем новую переменную $u = t - s/2v$, для которой интеграл примет вид:

$$\bar{T}(t, \vec{r}) = \frac{p}{(2\sqrt{\alpha\pi})^{3/2}} \int_0^{+\infty} du \frac{e^{-((x-v(t-u))^2 + y^2 + z^2)/4\alpha u}}{u^{3/2}}. \quad (13)$$

Интеграл (13) вычисляется в элементарных функциях, и окончательный результат имеет вид:

$$\bar{T}(t, \vec{r}) = \frac{p}{4\alpha\pi} \cdot \frac{e^{-\left(\sqrt{(x-vt)^2 + y^2 + z^2} + x-vt\right)v/2\alpha}}{\sqrt{(x-vt)^2 + y^2 + z^2}}. \quad (14)$$

Фактически, решение (14) описывает аксиально-симметричную тепловую волну, центр которой движется со скоростью v вдоль оси x . В сопутствующей инерциальной системе отсчета $x = vt$ формула (14) приобретает вид цилиндрической волны

$$\bar{T}'(t, \vec{r}) = \frac{p}{4\alpha\pi} \cdot \frac{e^{-\rho v/2\alpha}}{\rho}, \quad (15)$$

где $\rho = \sqrt{y^2 + z^2}$, s осью, совпадающей с прямой источников тепла.

При $t \rightarrow \pm\infty$ решение (13) стремится к нулю по разным причинам: при $t \rightarrow -\infty$ тепло еще не успело выделиться, а при $t \rightarrow +\infty$ бесконечное выделившееся на всей тепловой линии тепло успевает релаксировать по бесконечному объему, который в результате возвращается в состояние с нулевой температурой. В типичной точке на некотором расстоянии ρ от тепловой оси характер эволюции температуры от времени показан на рис. 2. Он имеет вид теплового импульса, быстро нарастающего сразу после прохождения волны включения теплового импульса на тепловой прямой (момент прохождения лазерной свечи мимо координаты $x = 0$ точки наблюдения) и сравнительно медленно (по закону обратной пропорциональности) релаксирующего к равновесному состоянию с нулевой температурой. Полученное решение еще пока не имеет физического смысла, релевантного поставленной задаче: это решение необходимо дополнить общим решением однородного уравнения, с помощью которого можно реализовать граничные условия (4).

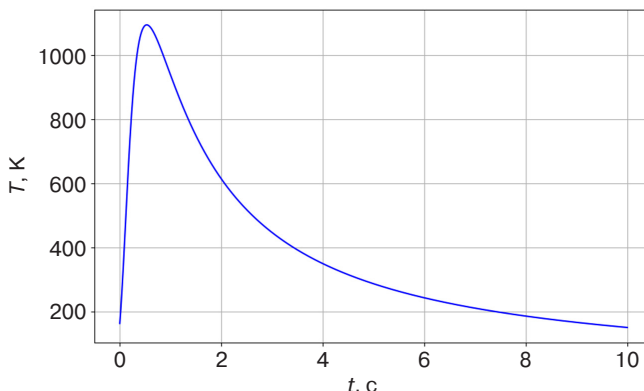


Рис. 2. Зависимость $T(t)$ при значениях параметров: $x = 0, y = 1, z = 1$ (в мм), $v = 5$ мм/с, $\alpha = 1$ мм²/с, $\rho = 1.0 \cdot 10^5$ мм³·К/с

РЕШЕНИЕ ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ И ПОЛНОЕ РЕШЕНИЕ

В силу линейности уравнения теплопроводности (3) его общее решение может быть записано в виде суммы некоторого частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного T_h :

$$T(t, x, y, z) = \bar{T}(t, x, y, z) + T_h(t, x, y, z), \quad (16)$$

где \bar{T} – уже найденное в предыдущем разделе частное решение (14), а отысканием подходящего T_h займемся в настоящем разделе. По существу, все сводится к реализации посредством T_h выбранного граничного условия (4). Подставляя в него представление (16), найдем после перегруппировки слагаемых

$$\left(\beta T_h + \frac{\partial T_h}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} = \beta (T_0 - \bar{T}) \Big|_{z=0}, \quad (17)$$

где справа стоит уже известная функция и было учтено, что в силу четности \bar{T} по z выполняется равенство:

$$\left. \frac{\partial T_h}{\partial z} \right|_{z=0} = 0.$$

Будем искать общее решение T_h методом разделения переменных:

$$T_h = \Theta(t)X(x)Y(y)Z(z). \quad (18)$$

Подставляя (18) в уравнение (3) при $p = 0$ и разделив его на T_h , получим уравнение теплопроводности в разделенном виде:

$$\frac{\Theta'}{\Theta} - \alpha \left(\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} \right) = 0, \quad (19)$$

где штрих обозначает дифференцирование по аргументу. Условие разделения переменных приобретает вид постоянства отдельных слагаемых в (19), так что это уравнение выражает соотношение между константами разделения

$$k_t - \alpha(-k_x^2 - k_y^2 + k_z^2) = 0, \quad (20)$$

которое мы будем понимать как выражение для волнового числа k_z :

$$k_z = \pm \sqrt{\frac{k_t}{\alpha} + k_x^2 + k_y^2}. \quad (21)$$

В (20):

$$k_t = \frac{\Theta'}{\Theta}, \quad \frac{X''}{X} = -k_x^2, \quad \frac{Y''}{Y} = k_y^2, \quad \frac{Z''}{Z} = k_z^2. \quad (22)$$

Общее решение T_h имеет вид следующего разложения (линейной комбинации различных решений с постоянными коэффициентами):

$$T_h = \sum_{k, \varepsilon} C_{k, \varepsilon} e^{k_t t + i(k_x x + k_y y) + \varepsilon \sqrt{k_t/\alpha + k_x^2 + k_y^2} z}, \quad (23)$$

где $k = \{k_x, k_y, k_z\}$, а параметр $\varepsilon = \pm 1$ различает корни для k_z в (21).

Для отыскания коэффициентов Фурье $C_{k, \varepsilon}$ подставляем выражение (23) в граничное условие (17), в котором правую часть тоже преобразуем в интеграл Фурье. Все Фурье-преобразования заметно упростятся, если заметить, что в правой части (17) частное решение \bar{T} зависит в соответствии с (14) лишь от запаздывающей комбинации $\xi = x - vt$. Для того, чтобы такая же комбинация получилась и в левой части (17), необходимо и достаточно потребовать, чтобы $k_t = -ivk_x$; только в этом случае в показателе экспоненты слева сформируется нужная комбинация $ik_x(x - vt) = ik_x \xi$, относительно которой и будет вычисляться преобразование Фурье, приводящее к правильной зависимости в правой части. Найдем Фурье-образ правой части (17). Имеем цепочку равенств $\left(a + v/2\alpha, K = \sqrt{k_y^2 + k_\xi^2} \right)$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} d\xi dy \beta \left(T_0 - \frac{p}{4\pi\alpha} \cdot \frac{e^{-\left(\sqrt{\xi^2 + y^2} + \xi\right)v/2\alpha}}{\sqrt{\xi^2 + y^2}} \right) e^{-i(k_\xi \xi + k_y y)} \stackrel{\{\xi = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi\}}{=} \\ & = \beta T_0 \delta(k_\xi) \delta(k_y) - \frac{\beta p}{16\pi^3 \alpha} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \rho d\rho \cdot \frac{e^{-\rho(a + \rho \cos \varphi)}}{\rho} e^{-iK\rho \cos(\psi - \varphi)} = \\ & = \beta T_0 \delta(k_\xi) \delta(k_y) - \frac{\beta p}{16\pi^3 \alpha} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a(1 + \cos \varphi) + iK \cos(\psi - \varphi)} \equiv F(k_y, k_\xi). \end{aligned} \quad (24)$$

Интеграл в последнем выражении вычисляется с помощью аналитического продолжения вещественной формулы

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + b \cos \varphi + c \cos^2 \varphi} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}} \quad (25)$$

в комплексную область, что дает в нашем случае равенство:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a(1 + \cos \varphi) + iK \cos(\psi - \varphi)} = \frac{2\pi}{\sqrt{K^2 - 2iak_\xi}} \quad (26)$$

с выбором ветви корня, которая дает $\sqrt{K^2} = k_y$ при $k_\xi = 0$.

Окончательно для Фурье-образа правой части (17) получаем:

$$F(k_y, k_\xi) = \beta T_0 \delta(k_\xi) \delta(k_y) - \frac{\beta p}{8\pi^2 \alpha \sqrt{K^2 - 2iak_\xi}}, \quad (27)$$

где $K = \sqrt{k_y^2 + k_\xi^2}$, $a = v/2\alpha$. Подставляя теперь (23) и (28) в (17), находим коэффициенты Фурье для однородного решения:

$$C_k = \frac{F(k_y, k_\xi)}{\beta + \sqrt{K^2 - 2iak_\xi}}. \quad (28)$$

Однородное решение с правильными граничными условиями запишется в виде следующего интеграла (δ -функции в F явно проинтегрированы):

$$T_h(\xi, y, z) = T_0 - \frac{\beta p}{8\pi^2 \alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y dk_\xi \frac{e^{i(k_\xi \xi + k_y y) + \sqrt{K^2 - 2iak_\xi} z}}{\sqrt{K^2 - 2iak_\xi} (\beta + \sqrt{K^2 - 2iak_\xi})}. \quad (29)$$

Как показывает дальнейший анализ, формула (29) не допускает какого-то преобразования, позволяющего представить результат в аналитическом виде, частично или полностью свободном от квадратур. Поэтому все дальнейшие иллюстрации будут получены с помощью численного преобразования Фурье для конкретных значений параметров модели.

Прежде всего, запишем полное решение с правильными граничными условиями по формуле (16):

$$T(\xi, y, z) = T_0 - \frac{\beta p}{8\pi^2 \alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y dk_\xi \frac{e^{i(k_\xi \xi + k_y y) + \sqrt{K^2 - 2iak_\xi} z}}{\sqrt{K^2 - 2iak_\xi} (\beta + \sqrt{K^2 - 2iak_\xi})} + \frac{p}{4\pi \alpha} \frac{e^{-\left(\sqrt{\xi^2 + y^2 + z^2} + \xi\right)v/2\alpha}}{\sqrt{\xi^2 + y^2 + z^2}}, \quad (30)$$

где $\xi = x - vt$.

Примем для параметров модели следующие средние значения (в системе СИ):

$$T_0 = 300, a = 40, \frac{p}{4\pi \alpha} = 10^3, \beta = 2\pi \cdot 10^{-2}, v = 10^{-3}.$$

Далее замечаем, что, в формуле (30) параметр β (он имеет размерность волнового числа, т.е. обратной длины) можно рассматривать как малый. При этом решение будет заметно отличаться для области $k \rightarrow 0$, которая соответствует длинноволновым модам решения, описывающим удаленные от источника области среды. Таким образом, упрощенный вид формулы (30) получается пренебрежением β в знаменателе под интегралом – это соответствует сохранению членов первого порядка в разложении решения по параметру β (даже в этом случае интегралы не вычисляются аналитически). В итоге, переходя для удобства вычислений к вещественной форме преобразования Фурье, находим:

$$T(\xi, y, z) = 300 - 100 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y dk_\xi \frac{2e^{Q_+ z / \sqrt{2}}}{K^4 + 6400k_\xi^2} \times$$

$$\times \left(K^2 \cos(k_\xi \xi + k_y y - c \operatorname{sgn}(k_\xi) Q_- z) - 80k_\xi \sin(k_\xi \xi + k_y y - c \operatorname{sgn}(k_\xi) Q_- z) \right) + 10000 \frac{e^{-40(\sqrt{\xi^2 + y^2 + z^2} + \xi)}}{\sqrt{\xi^2 + y^2 + z^2}}, \quad (31)$$

где

$$Q_\pm = \sqrt{K^4 + 6400k_\xi^2} \pm K^2, \quad \xi = x - 10^{-3}t.$$

Перейдем к иллюстрациям зависимости (31). На рис. 3 и 4 представлены семейства одномерных графиков, полученных из полной зависимости (31). Семейство кривых на рис. 3 представляет эволюцию во времени температуры в точках среды, расположенных на разных глубинах в толще среды под началом системы координат. Графики показывают, что через некоторое время после прохождения импульса нагревания температура внутри среды довольно быстро достигает максимального значения, а затем она относительно медленно релаксирует к температуре окружающей среды. При этом по мере углубления в толщу среды тепловой импульс расплывается: он уменьшает свою амплитуду и увеличивает ширину, а время достижения максимума монотонно увеличивается. В целом такая картина соответствует всем физически разумным ожиданиям рассматриваемой модели.

На рис. 4 представлено пространственное распределение температуры в момент $t = 0$ в толще вещества под тепловой линией – прямолинейной траекторией пятна свечи – в зависимости от продольной координаты x при тех же глубинах z , что и на рис. 3. В рассматриваемый момент времени свеча проходит над точкой $x = 0$. При этом видно, что тепловой импульс (тем более выраженный, чем ближе рассматриваемая точка к поверхности) накопился на предыдущем участке $x < 0$ и далее будет перемещаться вправо в соответствии с зависимостями на рис. 3.

Полученное решение (16) может быть полезным при описании температурного поля на некотором удалении от области действия свечи, где конкретные детали нагрева (например, распределение температуры на первоначальном пятне напыления) не проявляются. В частности, из графиков на рис. 4 следует, что в окрестности действия свечи возникают значительные градиенты температур, которые будут вызывать заметные нестационарные температурные напряжения. Их релаксация в окрестности пройденных участков тепловой линии, так или иначе, будет влиять на качество покрытия, что, вероятно, поддается технологическому управлению с помощью специального тайминга напыления, согласованного с динамикой температурной волны в слое.

Поперечное к тепловой линии распределение температуры представлено семейством графиков на рис. 5. Оно имеет ожидаемый вид симметричных пиков, тем менее острых, чем глубже располагается точка наблюдения.

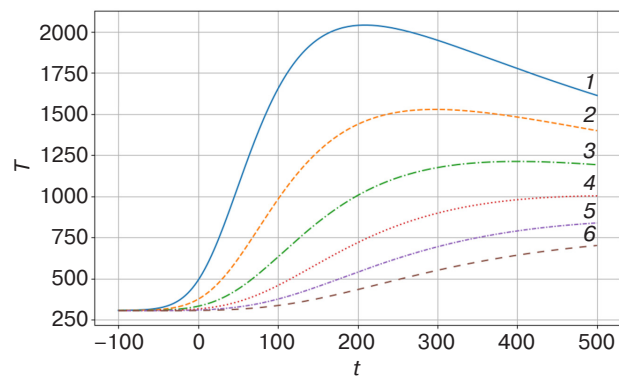


Рис. 3. Временная эволюция температуры в точках с координатами $x = y = 0$: (1) $z = -0.1$ мм, (2) $z = -0.2$ мм, (3) $z = -0.3$ мм, (4) $z = -0.4$ мм, (5) $z = -0.5$ мм, (6) $z = -0.6$ мм. Отрицательное время соответствует принятому асимптотическому начальному условию (5); в движущейся системе координат момент $t = 0$ условный

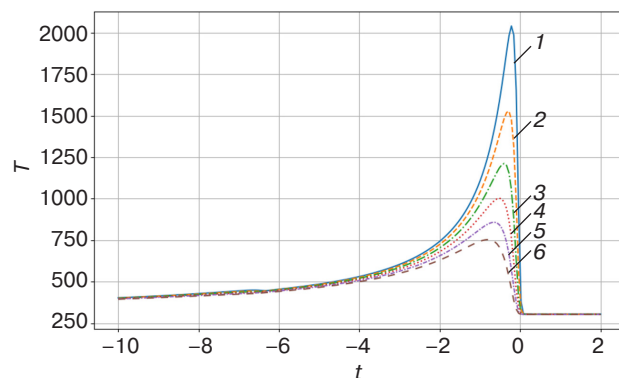


Рис. 4. Пространственный профиль температурной волны при $y = 0$, $t = 0$ в зависимости от координаты x на тех же глубинах в слое, что и на рис. 3: (1) $z = -0.1$ мм, (2) $z = -0.2$ мм, (3) $z = -0.3$ мм, (4) $z = -0.4$ мм, (5) $z = -0.5$ мм, (6) $z = -0.6$ мм

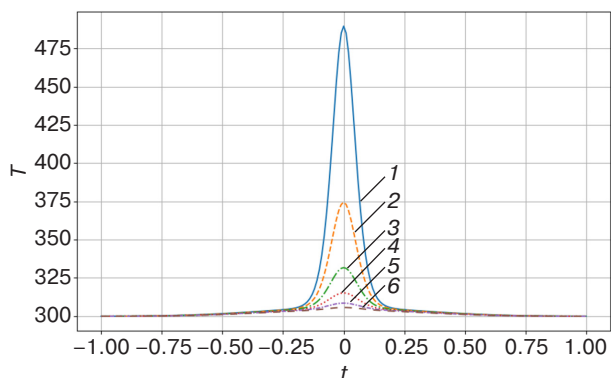


Рис. 5. Поперечный пространственный профиль температурной волны при $x = 0$, $t = 0$ в зависимости от координаты y на тех же глубинах в слое, что и на рис. 3: (1) $z = -0.1$ мм, (2) $z = -0.2$ мм, (3) $z = -0.3$ мм, (4) $z = -0.4$ мм, (5) $z = -0.5$ мм, (6) $z = -0.6$ мм

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена нестационарная задача теплопроводности, моделирующая технологию газотермического напыления тонкой полосы, образующей часть защитного покрытия. Получено точное аналитическое решение, описывающее температурное поле в материале подложки при движении плазменной свечи, создающей тепловую полосу.

В результате проведенных расчетов установлено, что:

- после прохождения импульса нагрева температура внутри среды быстро достигает максимального значения и затем медленно релаксирует к температуре окружающей среды;

- по мере углубления в материал тепловой импульс расплывается, уменьшая амплитуду и увеличивая ширину, а время достижения максимума температуры увеличивается;
- вблизи области действия источника тепла возникают значительные градиенты температур, которые могут приводить к нестационарным температурным напряжениям.

Эти факты вполне соответствуют общим закономерностям теплофизических процессов и в совокупности демонстрируют правильность выбранной физической модели и разумность сделанных приближений.

Выведена точная формула для температурного поля нестационарной тепловой полосы, позволяющая теоретически детально исследовать все существенные характеристики теплового импульса и использовать их для расчетов экспериментально и практически значимых параметров технологии напыления. Отметим, что экспериментальные возможности исследования характеристик теплового импульса в рассматриваемых условиях весьма ограничены и ресурсоемки.

Полученное решение может быть полезно для описания общего температурного поля на некотором удалении от области действия головки распылителя, где детали структуры тепловой полосы не проявляются. Результаты работы могут быть использованы для оптимизации технологических параметров напыления, таких как тайминг напыления, с целью управления качеством покрытия.

Вклад авторов

Все авторы в равной степени внесли свой вклад в исследовательскую работу.

Authors' contribution

All authors contributed equally to the research work.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

1. Davis J.R. *Handbook of Thermal Spray Technology*. ASM International; 2004. 338 p.
2. *Газотермическое напыление*; под общ. ред. Л.Х. Балдаева. М.: Маркет ДС; 2007. 344 с. [*Gazotermicheskoe napylenie (Gas Thermal Spraying)*. Baldaev L.H. (Ed.). Moscow: Market DS; 2007. 344 p. (in Russ.).]
3. Ghasempour-Mouziraji M., Lagarinhos J., Afonso D., de Sousa R.A. A review study on metal powder materials and processing parameters in Laser Metal Deposition. *Opt. Laser Technol.* 2024;170:110226. <https://doi.org/10.1016/j.optlastec.2023.110226>
4. Cheng J., Xing Y., Dong E., Zhao L., Liu H., Chang T., Chen M., Wang J., Lu J., Wan J. An Overview of Laser Metal Deposition for Cladding: Defect Formation Mechanisms, Defect Suppression Methods and Performance Improvements of Laser-Cladded Layers. *Materials*. 2022;15(16):5522. <https://doi.org/10.3390/ma15165522>
5. Chen H.F., Zhang C., Liu Y.C., Song P., Li W.-X., Yang G., Liu B. Recent progress in thermal/environmental barrier coatings and their corrosion resistance. *Rare Met.* 2020;39(5):498–512. <https://doi.org/10.1007/s12598-019-01307-1>
6. Hardwicke C.U., Lau Y.C. Advances in Thermal Spray Coatings for Gas Turbines and Energy Generation: A Review. *J. Therm. Spray Technol.* 2013;22(5):564–576. <https://doi.org/10.1007/s11666-013-9904-0>
7. Bernhard R., Neef P., Wiche H., Wesling V., Hoff C., Hermsdorf J., Kaielerle S. Laser Cladding – Additive Manufacturing. In: Cavaliere P. (Ed.) *Laser Cladding of Metals*. Springer, Cham; 2021. P. 1–8. https://doi.org/10.1007/978-3-030-53195-9_1
8. Lim W.Y.S., Cao J., Suwardi A., Meng T.L., Tan C.K.I., Liu H. Recent advances in laser-cladding of metal alloys for protective coating and additive manufacturing. *J. Adhes. Sci. Technol.* 2022;36(23–24):2482–2504. <https://doi.org/10.1080/01694243.2022.2085499>

9. Журавский А.В. Математическое моделирование теплообмена при газофазном осаждении. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*. 2017;11(692):10–17. <https://doi.org/10.18698/0536-1044-2017-11-10-17> [Zhuravskiy A.V. Mathematical Modeling of Heat Transfer During Chemical Vapor Deposition. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Mashinostroenie = BMSTU Journal of Mechanical Engineering*. 2017;11(692):10–17 (in Russ.). <https://doi.org/10.18698/0536-1044-2017-11-10-17>]
10. Ravichandran K.S., An K., Dutton R.E., Semiatin S.L. Thermal conductivity of plasma-sprayed monolithic and multilayer coatings of alumina and yttria-stabilized zirconia. *J. Am. Ceram. Soc.* 2004;82(3):673–682. <https://doi.org/10.1111/j.1151-2916.1999.tb01816.x>
11. Ma K., Cheng Y., Jeyaprakash N., Zhou J., Wan Y., Yang W. Temperature gradient and solidification rate simulation model of the microstructure of laser-cladded 27SiMn. *Metals*. 2023;13(10):1682. <https://doi.org/10.3390/met13101682>
12. Moritz S., Schwanekamp T., Reuber M., Lentz J., Boes J., Weber S. Impact of *in situ* heat treatment effects during laser-based powder bed fusion of 1.3343 high-speed steel with preheating temperatures up to 700 °C. *Steel Research Int.* 2023;94(6):2200775. <https://doi.org/10.1002/srin.202200775>
13. Yamashita Y., Ilman K.A., Kunimine T., Sato Y. Temperature evaluation of cladding beads and the surrounding area during the laser metal deposition process. *J. Manuf. Mater. Process.* 2023;7(6):192. <https://doi.org/10.3390/jmmp7060192>
14. Chen C., Sun G., Ren B., Wang H., Zhang Y., Zhao X. A novel heterogeneous particle addition method based on laser cladding hybrid wire arc additive manufacturing: improvement performance of stainless steel components. *Virtual Phys. Prototyp.* 2024;19(1):e2397815 <https://doi.org/10.1080/17452759.2024.2397815>
15. Li C., Han X., Zhang D., Gao X., Jia T. Quantitative analysis and experimental study of the influence of process parameters on the evolution of laser cladding. *J. Adhes. Sci. Technol.* 2021;36(17):1894–1920. <https://doi.org/10.1080/01694243.2021.1991142>
16. Li C., Jia T., Han X., Jiang X. Study on parameter optimization of laser cladding Fe60 based on GA-BP neural network. *J. Adhes. Sci. Technol.* 2022;37(18):2556–2586. <https://doi.org/10.1080/01694243.2022.2159298>
17. Huang H., Wu M., Luo S., Chen Z. Optimization of process parameters in laser cladding multi channel forming using MVBm-NSGA-II method. *Mater. Manuf. Processes.* 2024;39(15):2226–2235. <https://doi.org/10.1080/10426914.2024.2395002>
18. Hu Z., Li C., Tian D., Li X., Wang J., Xu Z., Sun X. Numerical simulation analysis of temperature distribution of NbC-reinforced Ti-based composite coating by laser cladding. *Metals*. 2023;13(8):1348. <https://doi.org/10.3390/met13081348>
19. Deng C., Zhu Y., Chen W. Numerical Investigation of the Effects of Process Parameters on Temperature Distribution and Cladding-Layer Height in Laser Cladding. *Coatings*. 2024;14(8):1020. <https://doi.org/10.3390/coatings14081020>
20. Jiang Y., Cheng Y., Zhang X., Yang J., Yang X., Cheng Z. Simulation and experimental investigations on the effect of Marangoni convection on thermal field during laser cladding process. *Optik*. 2020;203:164044. <https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2019.164044>
21. Sun Z., Guo W., Li L. Numerical modelling of heat transfer, mass transport and microstructure formation in a high deposition rate laser directed energy deposition process. *Addit. Manuf.* 2020;33:101175. <https://doi.org/10.1016/j.addma.2020.101175>
22. Wang C., Zhou J., Zhang T., Meng X., Li P., Huang S. Numerical simulation and solidification characteristics for laser cladding of Inconel 718. *Opt. Laser Technol.* 2022;149:107843. <https://doi.org/10.1016/j.optlastec.2021.107843>
23. Chai Q., Zhang H., Fang C., Qiu X., Xing Y. Numerical and experimental investigation into temperature field and profile of Stellite6 formed by ultrasonic vibration-assisted laser cladding. *J. Manuf. Process.* 2023;85:80–89. <https://doi.org/10.1016/j.jmapro.2022.11.035>
24. de La Batut B., Fergani O., Brotan V., Bambach M., Mansouri M.E. Analytical and numerical temperature prediction in direct metal deposition of Ti6Al4V. *J. Manuf. Mater. Process.* 2017;1(1):3. <https://doi.org/10.3390/jmmp1010003>
25. Gao Y., Jiang S., Tong Y., Bai S., Lu P. Temperature field simulation and experimental confirmation of laser cladding high-entropy alloy coating on Cr12MoV. *Processes*. 2024;12(2):257. <https://doi.org/10.3390/pr12020257>

Об авторах

Соловьев Михаил Евгеньевич, д.ф.-м.н., профессор, кафедра информационных систем и технологий, Институт цифровых систем, ФГБОУ «Ярославский государственный технический университет» (150023, Россия, Ярославль, Московский пр-т, д. 88). E-mail: me_s@mail.ru. Scopus Author ID 57190224257, ResearcherID A-4328-2014, SPIN-код РИНЦ 7444-3564, <https://orcid.org/0000-0002-8840-248X>

Кокарев Сергей Сергеевич, к.ф.-м.н., директор регионального научно-образовательного центра «Логос» (150000, Россия, Ярославль, ул. Республиканская, д. 80). E-mail: logos-center@mail.ru. <https://orcid.org/0000-0001-6944-1400>

Балдаев Сергей Львович, к.т.н., заместитель генерального директора по технологиям, ООО «Технологические системы защитных покрытий» (108851, Россия, Москва, г. Щербинка, ул. Южная, д. 9А). E-mail: s.baldaev@tspc.ru. ResearcherID B-8056-2018, SPIN-код РИНЦ 6954-6407, <https://orcid.org/0000-0002-1917-7979>

Балдаев Лев Христофорович, д.т.н., генеральный директор ООО «Технологические системы защитных покрытий» (108851, Россия, Москва, г. Щербинка, ул. Южная, д. 9А). E-mail: l.baldaev@tspc.ru. SPIN-код РИНЦ 8991-5015, <https://orcid.org/0000-0002-9084-8771>

Мальшев Денис Владимирович, ассистент, кафедра информационных систем и технологий, Институт цифровых систем, ФГБОУ «Ярославский государственный технический университет» (150023, Россия, Ярославль, Московский пр-т, д. 88). E-mail: deniscs49@gmail.com. <https://orcid.org/0009-0009-9861-1531>

About the Authors

Mikhail E. Soloviev, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Department of Information Systems and Technologies, Institute of Digital Systems, Yaroslavl State Technical University (88, Moskovskii pr., Yaroslavl, 150023 Russia). E-mail: me_s@mail.ru. Scopus Author ID 57190224257, ResearcherID A-4328-2014, RSCI SPIN-code 7444-3564, <https://orcid.org/0000-0002-8840-248X>

Sergey S. Kokarev, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Director of the Regional Scientific and Educational Center "Logos" (80, Respublikanskaya ul., Yaroslavl, 150000 Russia). E-mail: logos-center@mail.ru. <https://orcid.org/0000-0001-6944-1400>

Sergey L. Baldaev, Cand. Sci. (Eng.), Deputy General Director, Technological Systems for Protective Coatings (9A, Yuzhnaya ul., Shcherbinka, Moscow, 108851 Russia). E-mail: s.baldaev@tspc.ru. ResearcherID B-8056-2018, RSCI SPIN-code 6954-6407, <https://orcid.org/0000-0002-1917-7979>

Lev Kh. Baldaev, Dr. Sci. (Eng.), General Director, Technological Systems for Protective Coatings (9A, Yuzhnaya ul., Shcherbinka, Moscow, 108851 Russia). E-mail: l.baldaev@tspc.ru. RSCI SPIN-code 8991-5015, <https://orcid.org/0000-0002-9084-8771>

Denis V. Malyshev, Assistant, Department of Information Systems and Technologies, Institute of Digital Systems, Yaroslavl State Technical University (88, Moskovskii pr., Yaroslavl, 150023 Russia). E-mail: deniscs49@gmail.com. <https://orcid.org/0009-0009-9861-1531>