

УДК: 519.248

АНАЛИЗ НАДЕЖНОСТИ ИЗДЕЛИЙ НА ОСНОВЕ ПРОВЕРКИ  
ГИПОТЕЗ О ВЕЛИЧИНЕ ПАРАМЕТРА ФОРМЫ  
РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕЙБУЛЛА

Я.С. Гродзенский<sup>@</sup>, к.т.н., доцент  
А.Н. Чесалин, к.т.н., доцент

Московский технологический университет (МИРЭА), Москва, 119454 Россия  
<sup>@</sup>Автор для переписки, e-mail: grodzensky44@mail.ru

Предлагается анализ надежности изделий в процессе эксплуатации путем проверки двух простых гипотез о величине параметра формы распределения Вейбулла с помощью оптимальных статистических последовательных критериев. Методом статистического моделирования сравнивается эффективность различных критериев.

**Ключевые слова:** надежность, распределение Вейбулла, последовательный критерий, параметр формы, статистическое моделирование.

RELIABILITY ANALYSIS OF PRODUCTS BASED ON HYPOTHESES  
TESTING ABOUT THE VALUE OF THE WEIBULL DISTRIBUTION  
SHAPE PARAMETER

Ya.S. Grodzenskiy<sup>@</sup>,  
A.N. Chesalin

Moscow Technological University (MIREA), Moscow, 119454 Russia  
<sup>@</sup>Corresponding author e-mail: grodzensky44@mail.ru

The analysis of the products reliability during the exploitation by testing two simple hypotheses about the value of the Weibull distribution shape parameter using the optimal sequential statistical criteria is proposed. The following sequential criteria are examined: the sequential probability ratio test (Wald criterion – SPRT), the optimal generalized sequential test (Aivazyan criterion), double sequential probability ratio test (Lorden criterion – 2-SPRT), the sequential test with parabolic boundaries (Grodzenskiy criterion). Mathematical formulas necessary for the application of these sequential criteria in practice are shown. The effectiveness of the criteria is compared by the method of the statistical modeling.

**Keywords:** reliability, Weibull distribution, sequential criterion, shape parameter, statistical modeling.

Введение

В 1939 г. шведский исследователь В. Вейбулл предложил функцию распределения, удобную для описания долговечности материалов [1]. При рассмотрении распределения моментов отказов в форме  $F(X) = 1 - \exp[-\varphi(X)]$  в работе [2] предложена двухпараметрическая функция распределения вероятностей:

$$F(t) = 1 - \exp\left[-\left(t/T\right)^s\right] \quad (1)$$

где  $T, s$  – параметры масштаба и формы.

Частными случаями этого распределения являются: экспоненциальное распределение при параметре формы  $s = 1$  и распределение Рэлея при  $s = 2$ .

Основной характеристикой надежности многих видов промышленной продукции (в частности, изделий радиоэлектроники) является функция интенсивности отказов, или условная плотность вероятности возникновения отказа объекта, определяемая при условии, что до рассматриваемого момента времени отказ не возник, по формуле:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{P(t)} = \frac{f(t)}{1 - F(t)} \quad (2)$$

где  $\lambda(t)$  – функция интенсивности отказов;

$f(t)$  – плотность распределения случайной величины  $t$ ;

$P(t)$  – функция надежности (вероятность безотказной работы в течение времени  $t$ ).

На рис. 1 представлен характерный вид функции интенсивности отказов от времени. Очевидно, что вейбулловское распределение достаточно универсально, чтобы описывать интенсивность отказов отдельно на любом из характерных периодов. В начальный период I («детские болезни») функция надежности изделия описывается законом Вейбулла с параметром  $s < 1$ , что соответствует падению интенсивности отказов. В период II (нормальная эксплуатация)  $s = 1$  получается экспоненциальное распределение, при котором интенсивность отказов постоянна. В период III (старения) функция надежности описывается законом Вейбулла ( $s > 1$ ), что соответствует возрастанию интенсивности отказов.

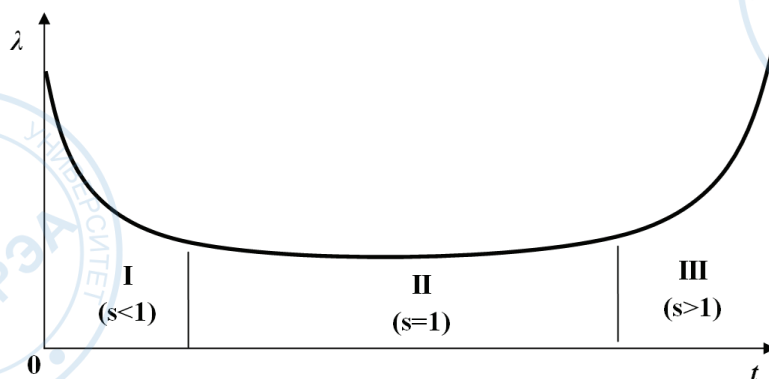


Рис. 1. Характерный вид функции интенсивности отказов от времени.

Это приводит к мысли о возможности связать значение параметра формы, оцененное по статистическим данным, с видом отказа: при  $s < 1$  отказ характеризует период приработки, при  $s = 1$  – нормальную эксплуатацию, а при  $s > 1$  – износ, – иными словами, проводить статистико-физический анализ надежности [3, 4].

Цель данной работы – показать возможность статистико-физического анализа на основе различения гипотез о параметре формы распределения Вейбулла.

Плотность распределения Вейбулла определяется формулой:

$$f_{s,T}(t) = \frac{s \cdot t^{s-1} \cdot e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^s}}{T^s} \quad (3)$$

Многие технические задачи (выборочный контроль качества, статистическое регулирование технологических процессов, обнаружение сигнала на фоне помехи, распознавание образов и др.) сводятся к решению математической проблемы о различении двух простых гипотез.

Американским статистиком А. Вальдом предложен последовательный критерий отношения вероятностей – правило различения двух простых гипотез и доказана его оптимальность в этом случае [5]. В работе [6] рассматривается задача применения критерия Вальда для проверки гипотез о параметре формы распределения Вейбулла. Однако критерий Вальда теряет свои оптимальные свойства в случае, когда фактическое значение контролируемого параметра находится в промежутке между заданными значениями, соответствующими проверяемым гипотезам. Устранению указанного недостатка, разработке оптимальных последовательных критериев на основе модификации процедуры Вальда посвящен ряд работ, в которых предложены оптимальный обобщенный последовательный критерий [7], двойной последовательный критерий отношения вероятностей [8], последовательный критерий с параболическими границами [9]. Сравнение эффективности указанных критериев при контроле качества продукции выполнено в [10].

В настоящей работе нами получены аналитические выражения для применения последовательных критериев, описанных в [7–9], для решения задачи о значении параметра формы распределения Вейбулла, и методом статистического моделирования исследована их эффективность<sup>1</sup>.

### Постановка задачи

Выдвигаются две гипотезы о величине параметра формы распределения Вейбулла  $H_0: f_{s_0}(t)$  и  $H_1: f_{s_1}(t)$ . При этом в качестве основной (нулевой) гипотезы будем принимать  $s_0 = 1$ , что соответствует экспоненциальному закону. Эффективность критериев рассчитывается, исходя из среднего количества наблюдений, необходимого для принятия решения.

Рассматриваемые критерии основаны на расчете логарифма отношения правдоподобия  $\ln(Z)$ :

$$\ln(Z) = \ln \left( \frac{f_{s_1}(t)}{f_{s_0}(t)} \right), \quad (4)$$

который определяется после каждого испытания:

$$\ln(Z) = \ln \left( \frac{s_1}{s_0} \right) - (s_1 - s_0) \cdot \ln \left( \frac{T}{t} \right) + \left( \frac{1}{T} \right)^{s_0} \cdot t^{s_0} - \left( \frac{1}{T} \right)^{s_1} \cdot t^{s_1}. \quad (5)$$

После проведения  $n$  испытаний получим:

$$\sum_{i=1}^n \ln(Z_i) = n \cdot \ln \left( \frac{s_1}{s_0} \right) - (s_1 - s_0) \cdot \ln \left( \frac{T^n}{\prod_{i=1}^n t_i} \right) + \left( \frac{1}{T} \right)^{s_0} \cdot \sum_{i=1}^n t_i^{s_0} - \left( \frac{1}{T} \right)^{s_1} \cdot \sum_{i=1}^n t_i^{s_1}. \quad (6)$$

Принятие решения в критерии Вальда осуществляется следующим образом: если в результате  $n$ -го наблюдения оказалось, что:

$$\ln(A_0) \leq \sum_{i=1}^n \ln(Z_i) \leq \ln(A_1), \quad (7)$$

где  $A_0 = \frac{\beta}{1-\alpha}$ ,  $A_1 = \frac{1-\beta}{\alpha}$ ;  $\alpha$  и  $\beta$  – заданные вероятности ошибок первого и второго рода,

то проводится следующее  $(n+1)$  наблюдение;

<sup>1</sup>Для краткости критерии будем называть по имени авторов, впервые их описавших: критерий Вальда, Айвазяна, Лордена, Гродзенского.

если  $\sum_{i=1}^n \ln(Z_i) < \ln(A_0)$ , то принимается гипотеза  $H_0$ ,

если  $\sum_{i=1}^n \ln(Z_i) > \ln(A_1)$ , то принимается гипотеза  $H_1$ .

Принятие решения в критерии Айвазяна осуществляется следующим образом: если в результате  $n$ -го наблюдения оказалось, что:

$$-C_0 \left(1 - \frac{n}{D}\right) \leq \sum_{i=1}^n \ln(Z_i) \leq C_1 \left(1 - \frac{n}{D}\right), \quad (8)$$

где  $C_0$  и  $C_1$  – критические константы, определяемые заданными значениями ошибок первого и второго рода. (Точные, но весьма громоздкие формулы приводятся в работе [7], но можно воспользоваться приближенными соотношениями  $C_0 \approx 2 \ln\left(\frac{1}{\beta}\right)$ ,  $C_1 \approx 2 \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ ;

$$D = \frac{8 \ln\left(\frac{1}{\min(\alpha, \beta)}\right)}{\rho(H_0, H_1)}, \quad (9)$$

$$\rho(H_0, H_1) = \int_t \left[ f_{s_1}(t) - f_{s_0}(t) \right] \ln \left[ \frac{f_{s_1}(t)}{f_{s_0}(t)} \right] dt - \text{расстояние между гипотезами,}$$

$$\text{в данном случае: } \rho(H_0, H_1) = \left( \frac{s_0}{s_1} - \frac{s_1}{s_0} - 2 \right) \cdot \gamma + \Gamma\left(\frac{s_0}{s_1} + 1\right) + \Gamma\left(\frac{s_1}{s_0} + 1\right) - 2,$$

$\Gamma(*)$  – гамма-функция,  $\gamma$  – постоянная Эйлера ( $\gamma \approx 0.577$ )), то проводится следующее  $(n+1)$  наблюдение;

если  $\sum_{i=1}^n \ln(Z_i) < -C_0 \left(1 - \frac{n}{D}\right)$ , то принимается гипотеза  $H_0$ ,

если  $\sum_{i=1}^n \ln(Z_i) > C_1 \left(1 - \frac{n}{D}\right)$ , то принимается гипотеза  $H_1$ .

Значения величины  $\rho(H_0, H_1)$  при  $s_0 = 1$  приведены в табл. 1.

Таблица 1. Значения расстояния между гипотезами при  $s_0 = 1$

| $s_1$            | 0.5   | 0.7   | 0.9  | 1 | 1.1   | 1.3  | 1.5   | 2     | 3     |
|------------------|-------|-------|------|---|-------|------|-------|-------|-------|
| $\rho(H_0, H_1)$ | 1.175 | 0.249 | 0.02 | 0 | 0.017 | 0.13 | 0.328 | 1.175 | 5.663 |

Принятие решения в критерии Лордена осуществляется следующим образом: если в результате  $n$ -го наблюдения оказалось, что:

$$\sum_{i=1}^n \ln \left[ \frac{f_{s'_i}(t)}{f_{s_{0i}}(t)} \right] \leq \ln(A_1)$$

$$\sum_{i=1}^n \ln \left[ \frac{f_{s_{1i}}(t)}{f_{s'_i}(t)} \right] \geq \ln(A_0),$$

где параметр  $s'$  определяется из следующего выражения:  $I(H'; H_0) = I(H', H_1)$ ,

$I(H'; H_0)$  – среднее значение информации о различии между гипотезами  $H'$  и  $H_0$  относительно

$s'$ , определяемое по формуле:  $I(H'; H_0) = \int_t f_{s'}(t) \cdot \ln \left[ \frac{f_{s'}(t)}{f_{s_0}(t)} \right] dt$ ,

в данном случае:  $I(H'; H_0) = \ln\left(\frac{s'}{s_0}\right) + \left(\frac{s_0}{s'} - 1\right) \cdot \gamma + \Gamma\left(\frac{s_0}{s_1} + 1\right) - 1$ ,

то проводится следующее  $(n+1)$  наблюдение;

если  $\sum_{i=1}^n \ln \left[ \frac{f_{s'_i}(t)}{f_{s_{0i}}(t)} \right] > \ln(A_1)$ , то принимается гипотеза  $H_1$ ,

если  $\sum_{i=1}^n \ln \left[ \frac{f_{s_{1i}}(t)}{f_{s'_i}(t)} \right] < \ln(A_0)$ , то принимается гипотеза  $H_0$ .

Значения параметра  $s'$  при  $s_0 = 1$  приведены в табл. 2.

Принятие решения в критерии с параболическими границами осуществляется следующим образом: если в результате  $n$ -го наблюдения оказалось, что:

$$\ln(A_0) + n^2 \cdot b \leq \sum_{i=1}^n \ln(Z_i) \leq \ln(A_1) - n^2 \cdot c, \quad (10)$$

где  $b$  и  $c$  – поправочные коэффициенты, при которых фактические вероятности ошибок первого и второго рода будут равны заданным с заданной точностью и определяющиеся с помощью статистического моделирования,

то проводится следующее  $(n+1)$  наблюдение;

если  $\sum_{i=1}^n \ln(Z_i) < \ln(A_0) + n^2 \cdot b$  то принимается гипотеза  $H_0$ ,

если  $\sum_{i=1}^n \ln(Z_i) > \ln(A_1) - n^2 \cdot c$ , то принимается гипотеза  $H_1$ .

**Таблица 2.** Значения промежуточного параметра  $s'$  при  $s_0 = 1$

| $s_1$ | 0.5    | 0.7    | 0.9    | 1 | 1.1    | 1.3    | 1.5    | 2     | 3     |
|-------|--------|--------|--------|---|--------|--------|--------|-------|-------|
| $s'$  | 0.7379 | 0.8462 | 0.9491 | 1 | 1.0502 | 1.1475 | 1.2431 | 1.477 | 5.663 |

**Статистическое моделирование.** Метод статистического моделирования реализуется следующим образом: с помощью генератора случайных чисел моделируется последовательность случайных чисел, подчиняющихся распределению Вейбулла с заданным параметром масштаба  $T$  и параметром формы  $s = s_0$  (или  $s = s_1$ , или  $s = (s_0 + s_1)/2$ ), и моделируется процедура проверки до тех пор, пока не будет принята одна из гипотез. В случае фактического значения параметра  $s = (s_0 + s_1)/2$  количество необходимых наблюдений, как правило, максимально, вследствие этого данный случай важен для определения эффективности критерия.

Моделирование проводится заданное количество раз, после этого рассчитывается среднее количество необходимых наблюдений и по отношению количества случаев принятия ошибочного решения к общему количеству реализаций вычисляются фактические вероятности ошибок  $\alpha^*$  и  $\beta^*$ . Число реализаций моделирования должно быть достаточным, чтобы вероятность принятия гипотезы  $H_0$  и  $H_1$ , рассчитанная по результатам моделирования, отличалась от истинной не более, чем на величину  $\xi$  при доверительной вероятности  $\gamma$ . Иными словами, необходимо выполнение условия:  $P(|p - p^*| \leq \varepsilon) = \alpha$ , где  $p$  и  $p^*$  – истинная вероятность принятия одной из альтернативных гипотез и ее оценка. Приведенные ниже результаты получены при количестве реализаций  $10^5$ , что обеспечивает с вероятностью 0.99 отличие полученной оценки  $p^*$  от истинного значения  $p$  не более, чем на  $\varepsilon = 0.005$ . Определение величин фактических вероятностей ошибок позволяет оценить точность критерия и статистическим моделированием проводить уточнение критериев, полученных аналитически.

Моделирование проводилось при следующих исходных данных: при  $s_0 = 1$  и различных значениях параметра  $s_1 = \{0.5, 0.7, 0.9, 1.1, 1.3, 1.5, 2.0\}$ , характеризующего различные периоды эксплуатации, и величинах вероятностей ошибок первого и второго рода:  $\alpha = \beta = \{0.01, 0.1, 0.3\}$ . Результаты моделирования при заданных параметрах  $s_0 = 1$ ,  $T = 100$ ,  $\alpha = \beta = 0.1$  показаны в табл. 3.

Таблица 3. Результаты моделирования последовательных критериев при  $s_0 = 1$ ,  $T = 100$ ,  $\alpha = \beta = 0.1$

| Критерий     | Параметр $s_1$ | Средняя продолжительность испытаний, $t$ |                 |         |
|--------------|----------------|------------------------------------------|-----------------|---------|
|              |                | $s=s_0$                                  | $s=(s_1+s_0)/2$ | $s=s_1$ |
| Вальда       | 2              | 550                                      | 831             | 461     |
| Айвазяна     | 2              | 520                                      | 663             | 635     |
| Лордена      | 2              | 639                                      | 893             | 876     |
| Гродзенского | 2              | 437                                      | 571             | 608     |
| Вальда       | 1.5            | 1430                                     | 2071            | 1147    |
| Айвазяна     | 1.5            | 1443                                     | 2063            | 1794    |
| Лордена      | 1.5            | 1707                                     | 2424            | 2274    |
| Гродзенского | 1.5            | 1141                                     | 1582            | 1623    |
| Вальда       | 1.3            | 2946                                     | 4503            | 2486    |
| Айвазяна     | 1.3            | 3477                                     | 4734            | 4697    |
| Лордена      | 1.3            | 4104                                     | 5608            | 5799    |
| Гродзенского | 1.3            | 2677                                     | 3756            | 3657    |
| Вальда       | 1.1            | 22553                                    | 28459           | 19634   |
| Айвазяна     | 1.1            | 25714                                    | 35747           | 30888   |
| Лордена      | 1.1            | 31968                                    | 42171           | 45356   |
| Гродзенского | 1.1            | 20119                                    | 27714           | 23842   |
| Вальда       | 0.9            | 20558                                    | 29311           | 22015   |
| Айвазяна     | 0.9            | 23229                                    | 29681           | 29479   |
| Лордена      | 0.9            | 29392                                    | 38476           | 39207   |
| Гродзенского | 0.9            | 19120                                    | 25265           | 19325   |
| Вальда       | 0.7            | 2262                                     | 3326            | 2190    |
| Айвазяна     | 0.7            | 2350                                     | 3124            | 2851    |
| Лордена      | 0.7            | 3087                                     | 4016            | 4055    |
| Гродзенского | 0.7            | 1985                                     | 2365            | 2021    |
| Вальда       | 0.5            | 766                                      | 1162            | 833     |
| Айвазяна     | 0.5            | 703                                      | 855             | 848     |
| Лордена      | 0.5            | 1027                                     | 1291            | 1242    |
| Гродзенского | 0.5            | 652                                      | 748             | 689     |

Зависимость средней продолжительности испытаний при  $s_0 = 1$ ,  $T = 100$ ,  $\alpha = \beta = 0.1$  от значения  $s_1$  при использовании рассматриваемых критериев показана на рис. 2.

Из рис. 2 видно, что наиболее эффективным является критерий с параболическими границами (критерий Гродзенского). Это обусловлено тем, что критерий с параболическими границами получен уточнением критерия Вальда путем замены прямолинейных границ параболическими, подбираемыми методом статистического моделирования.

Эффективность критериев относительно критерия Гродзенского (относительная эффективность), рассчитываемая как отношение среднего числа наблюдений при использовании рассматриваемого критерия и критерия с параболическими границами, при различных исход-

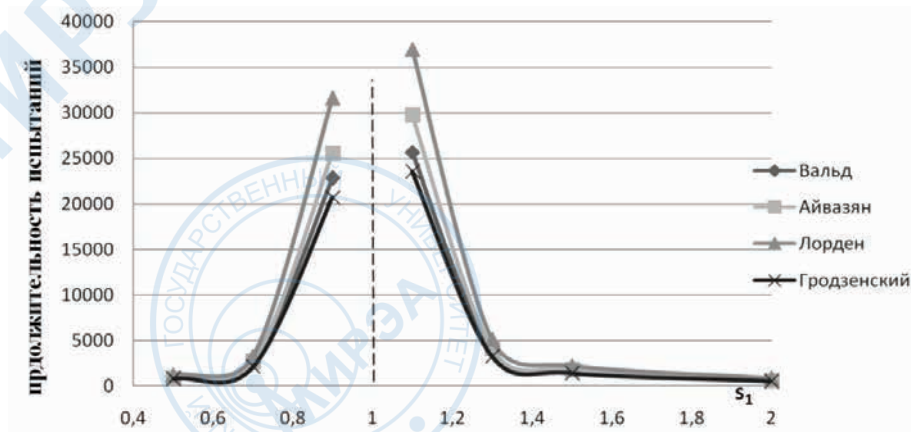


Рис. 2. Зависимость средней продолжительности испытаний при  $s_0 = 1$ ,  $T = 100$ ,  $\alpha = \beta = 0.1$  от значения  $s_1$  при различных критериях.

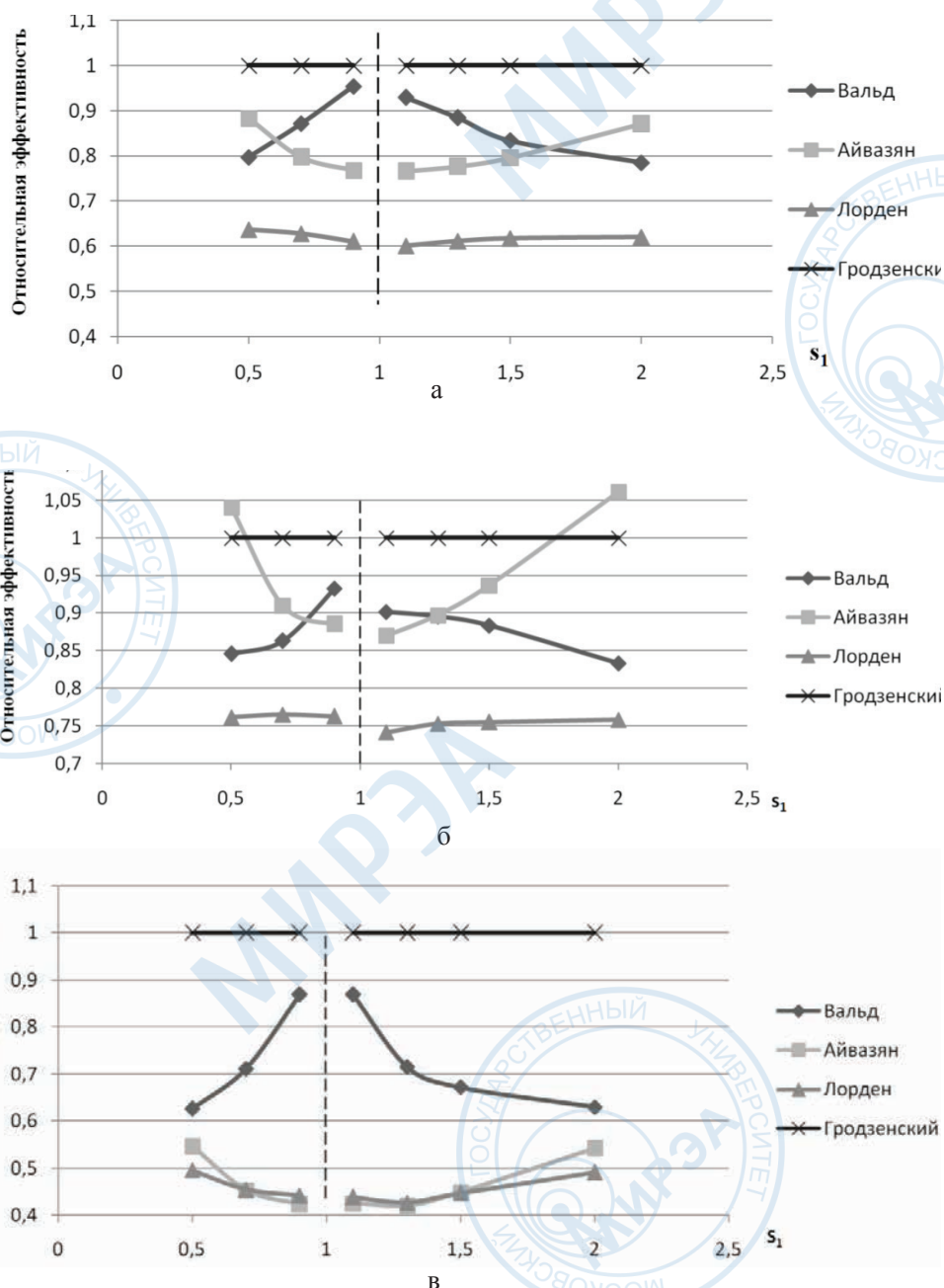


Рис. 3. Эффективность критериев относительно критерия Гродзенского (относительная эффективность): а) при  $\alpha = \beta = 0.1$ ; б) при  $\alpha = \beta = 0.01$ ; в) при  $\alpha = \beta = 0.3$ .

ных данных показана на рис. 3 (а, б, в), эффективность критерия с параболическими границами при этом принята за 1.

Проведенное исследование позволило сделать следующие выводы:

- наиболее эффективным, как правило, является критерий с параболическими границами, полученными с помощью математического моделирования таким образом, чтобы фактические вероятности ошибок первого и второго рода соответствовали заданным;
- критерий Вальда является эффективным при высоких заданных вероятностях ошибок первого и второго рода и при сближении контролируемых параметров  $s_0$  и  $s_1$ ;
- критерий Айвазяна, в свою очередь, является наиболее эффективным, когда фактическое значение проверяемого параметра принимает промежуточное значение, а также при малых величинах ошибок первого и второго рода;
- критерий Лордена наименее эффективен, причем в случае его использования фактические вероятности ошибок первого и второго рода минимальны, следовательно, эффективность данного критерия может быть значительно увеличена с помощью метода статистического моделирования сужением контрольных границ до соответствия фактических ошибок заданным.

Полученные результаты могут быть использованы при проведении статистико-физического анализа надежности изделий и в других прикладных задачах.

### Литература:

1. Weibull W. A statistical theory of the strength of materials // Ingeniers Vetenskaps Akademien Handl. 1939. № 51. P. 1–45.
2. Weibull W. A statistical distribution function of wide applicability // J. Appl. Mechanics. 1951. V. 18. P. 293–297.
3. Гродзенский С.Я. Статистико-физический метод исследования надежности электронных приборов по данным эксплуатации // Измерительная техника. 2003. № 6. С. 59–60.  
Grodzenskii S.Ya. A Statistical Physics Method of Electronic Device Reliability Testing from Working Data Pages // Measurement Techniques. 2003. V. 46. № 6. P. 616–618.
4. Гродзенский С.Я. Модели надежности на основе модифицированных распределений Вейбулла // Измерительная техника. 2013. № 7. С. 27–31.
5. Вальд А. Последовательный анализ. М.: Физматгиз, 1960. 325 с.
6. Chandramouli R., Vijaykrishnan N., Ranganathan N. SPRT for Weibull Distributed Integrated Circuit Failures // Proc. SPIE Symposium on Microelectronic Manufacturing Yield, Reliability, and Failure Analysis IV. California, USA, Sept. 1998. P. 147–158.
7. Айвазян С.А. Различение близких гипотез о виде плотности распределения в схеме обобщенного последовательного критерия // Теория вероятностей и ее применения. 1965. Т. 10. № 4. С. 713–726.
8. Lorden G. 2-SPRT's and the modified Kiefer-Weiss problem of minimizing an expected sample size // The Annals of Statistics. 1976. V. 4. № 2. P. 281–292.
9. Гродзенский С.Я. Рациональные планы испытаний промышленных изделий на надежность. М.: Знание, 1981. С. 3–57.
10. Chesalin A.N., Grodzensky S.Ya., Grodzensky Ya.S. Application of sequential criteria in quality control of highly reliable products // SOP Transaction on Statistics and Analysis. 2014. V. 1. № 2. P. 123–130.